Etude générale d'un équation elliptique

Nom et Pénom
Chourab Naima* Karek.M (encadreur)
Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
Naimachourab95@gmail.com

Résumé

Le travail principal de ce mémoire c'est l'étude théorique de certains problèmes linéaires, donc nous utilisons les résultats principaux en analyse fonctionnelle. Dans ce travail, nous avons également essayé de donner une idée générale sur l'existence et de l'unicité de La solution faible des problèmes elliptiques de type de Dirichlet et de Neumann par la méthode de la formulation variationnelle .

1. Préliminaires

Définition 1.1 *Soit X un espace vectoriel réel, une norme sur X est une application : $x \mapsto \|x\|$ de X dans $\mathbb{R}^+$, telle que :*

(N1) $\|x\| = 0$, $x = 0$:
(N2) $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$ $\forall x \in X, \forall\lambda \in R$:
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,$\forall x, y \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2 *Soit X un espace vectoriel réel, un espace normé est un couple $(X, \|.\|)$, o $\|.\|$ est une norme sur X.*

1.1 Espaces de Banache ses propriétés

Définition 1.3 *Un espaces $(X, \|.\|)$ est de Banach si et seulement si est complet pour la distance associe $\|.\|$*

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.4 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).On dit que E est muni d'un produit scalaire s'il existe une application*

$$h : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(u, v) \longmapsto h(u, v) = \langle u, v\rangle$$

vrifiant les propriétés suivantes.
Pour tous u, v et $w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$*(Hermitienne).*
2. $\langle \alpha u+\beta w, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle+\beta\langle w, v\rangle$;$\langle u, \alpha v+\beta w\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle+ \overline{\beta}\langle u, w\rangle$ *(Sesquilinéaire).*
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$ *et* $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ *(définie positive).*

Un espace muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Définition 1.5 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associe.*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{K} = \mathbb{C}$), H est dit espace de Hilbert réel (resp. complexe).

1.3 Théorie des distributions

Dans ce qui suit,Ω dsignera un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière Γ est régulière. Rappelons maintenant deux notions importantes pour la suite.

Définition 1.6 *Support*
Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$. On appelle support de f lensemble

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Le support de f est alors le plus petit ferm de $\mathbb{R}^n$ a lextérieure de quel la fonction f est nul.

Définition 1.7 *(Espace des fonctions test)*
Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ on appeelle espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n | f \in \mathcal{C}_c^\infty\}.$$

1.4 Espace de Sobolev

Définition 1.8 ***Les epaces** L^p*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq P < \infty$, on dfinit $L^P(\Omega)$ un espace de Lebesgue par :

$$L^P(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ , f est mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$$

pour $p = \mathbb{R}$ et $0 < P < \infty$ on dfinit $\|f\|_p$ par :

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

Si $P = \infty$, nous avons :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ , f est mesurable,il existe une constante c telle que } \|f(x)\| \leq c \text{ p,p sur } \Omega \}$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{c, \|f(x)\| \leq c\}$$

2. Thorème de Lax-Milgram

Théorème 2.1 *Soit V un espace de Hilbert et soit l et a des formes linaire et bilinaire continues sur V et $V \times V$ respectivement ($l \in V'$). Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel :*
trouver une fonction $u \in V$ telle que :

$$a(u, w) = l(w) \qquad \forall w \in V \tag{2.1}$$

Une forme linaire l sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\|.\|_V$, est dite continue s'il existe une constante C telle que :

$$l(w) \leq C\|w\|_V \qquad \forall w \in V \tag{2.2}$$

Définition 2.2 *Une forme bilinaire a est dite symtrique si :*

$$a(u, w) = a(w, u) \qquad \forall u, w \in V$$

Définition 2.3 *Une forme bilinaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que :*

$$|a(u, w)| \leq C\|u\|_V\|w\|_V \qquad \forall u, w \in V \tag{2.3}$$

Définition 2.4 *Une forme bilinaire est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α telle que :*

$$a(w, w) \geq \alpha\|w\|_V^2 \qquad \forall w \in V \tag{2.4}$$

3. Ètude l'équation des ondes

4. Le premier problme

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ born de $\partial\Omega$ lipschitzienne $f \in L^2(\Omega)$,$g \in L^2(\partial\Omega)$ on considrer le problme suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ dans\ \Omega \\ u = g \ sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Le choix de la rgularit la donne g soulev une difficult .En effet ,rappelons que l'application de trace γ_0 n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, nous allons faire l'hypothse suivante sur g
$g \in L^2(\partial\Omega)$ on ce qui est quivalente il existe $G \in H^1(\Omega)$ tq

$\gamma_0(G) = g$
la fonction G s'appelle un relvement de la fonction g et de plus $\|G\|_{H_1(\Omega)}$ permet de mesurer g.

$$\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|G\|_{H_1(\Omega)}.$$

supposons que la solution $u \in H^2(\Omega)$.
on pose $u = \tilde{u} + G$ alors le problme (4.1) devient

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} = f + \Delta G \ \ dans\ \Omega \\ \tilde{u} = 0 \ sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1 Formulation variationnelle

En multipliant l'quation de problme (4.2) par une fonction test v

$$-\Delta\tilde{u}v = fv + \Delta Gv$$

par intgration sur Ω on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta\tilde{u}v\ d\Omega = \int_\Omega fv\ d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv\ d\Omega$$

En utilisant la formule de Green on obtient :

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}\nabla v\ d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}.v\ d\Omega = \int_\Omega fv\ d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv\ d\Omega$$

on choisit $v = 0$ sur $\partial\Omega$ implique que :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}.v\ d\Omega = 0 \Rightarrow v \in H_0^1(\Omega).$$

Devient :

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v\ d\Omega = \int_\Omega fv\ d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv\ d\Omega\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Nous trouvons qu'il vaut mieux choisir $V = H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v\ d\Omega$$
$$L(v) = \int_\Omega fv\ d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv\ d\Omega\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donc on trouve le problme variationnelle suivante :

$$\begin{cases} Trouver\ \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)\ tq : \\ \int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v\ d\Omega = \int_\Omega fv\ d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv\ d\Omega\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Références

[1] ***B.Said-Houari** et **N. Tatar**, "Etude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un probleme hyperbolique", 2003. Memoire de magister en mathmatiques, Universit de Annaba.*
[2] ***Andr Fortin** et **Andr Garon**, "Les lments finis de la thorie la pratique", 1997-2011*
[3] ***G. Allaire**,"Analyse numrique et optimisation"*