

N<sup>o</sup> d'ordre : /

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE KASDI MERBAH DE OUARGLA**

**Faculté des Sciences et technologie**

**et Sciences de la matière**

**DEPARTEMENT DE :**

**MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE**



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en mathématiques**

**Spécialité : Probabilité et Statistique**

**Par**

**Gasmi Zahia**

**THÈME**

**Prévision par méthodes de lissage exponentiel  
( Application sur la série Taux brut de naissance en Algérie 1967-2000)**

Soutenu publiquement le : 01 juillet 2019.

devant le jury composé de :

Mr	Karek.M	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Mr	Agoune.R	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mm	Khorsi.R	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

# Table des matières

---

## Dédicace

D'abord, je remercie mon **DIEU** qui ma donnée le courage et la force pour accomplir ce modeste travail.

Je présente mes dédicaces aux deux êtres les plus chers de ma vie mon "*père*" et "*ma mère*".

A mes frères et . A mes Sœurs .

A tout mes amies sans exception

A toutes ma famille

Je tien à dédicace aussi à toutes les enseignantes et enseignants et mes collègues de la Promotion et a tous qui ma connaissent.

---

## Remerciements

Je remercie **ALLAH** tout puissant de m'avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

Que Toutes les formes de Prière et de Salat soient adressées à notre Ame et Conscience Sidna Mohammed, notre lumière dans cette vie.

Je remercie Madame "*Khorsi.R*" pour l'honneur qu'elle a fait en acceptant d'être mon encadreur, pour l'intérêt scientifique qu'elle a porté à ce travail, pour ses précieux conseils tout le long de l'élaboration de ce travail.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à "*Mr.Karek .M*" et "*Mr.Agoun .R*" qui ont accepté de faire partie de mon jury de prendre de leur temps pour examiner mon travail .

Je remercie tous mes enseignantes et enseignants.

Et enfin à tous nos collègues de la promotion 2018/2019 et à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

---

**Notations et abriviations**

<b>LES</b>	lissage exponentiel simple
<b>LED</b>	lissage exponentiel double
<b>LHWNS</b>	lissage exponentiel de Holt-Winters non saisonnière
<b>LHWSA</b>	lissage exponentiel de Holt-Winters saisonnière additive
<b>LHWSM</b>	lissage exponentiel de Holt-Winters saisonnière multiplicative
<b>DS</b>	Differncy Stationnary
<b>TS</b>	Tend Stationnary
<b>BB</b>	Bruit blanc
<b>FAC</b>	Fonction d'autocorrélation
<b>FACP</b>	Fonction d'autocorrélation partielle
<b>MCO</b>	Méthode de moindre careés
<b>MA</b>	Moyenne mobile
<b>ME</b>	Mean Error
<b>MSE</b>	Mean Square Error
<b>MAE</b>	Mean Absolute Error
<b>RMSE</b>	Root Mean Square Error

# Liste des tableaux

1.1	Exemple sur des données trimestriel. . . . .	13
1.2	Exemple de l'estimation de la tendance. . . . .	14
1.3	Lissage par moyenne mobile . . . . .	15
3.1	Taux brut de naissance en Algérie ( depuis 1967 jusqu'à 2000). . .	30
3.2	Les valeurs de prévision par LED . . . . .	33
3.3	Les valeurs de prévision par LHWNS . . . . .	35
3.4	Comparaisons des performances prévisionnelles des deux méthodes en utilisant RMES . . . . .	36

# Table des figures

3.1	Graphique de l'évolution du taux brut de naissance en Algérie (1967-2000). . . . .	31
3.2	La validation de méthode LED. . . . .	32
3.3	La série originale ( $X$ ) et la série lissée ( $XLED$ ). . . . .	33
3.4	La validation de méthode LHWNS. . . . .	34
3.5	La série original ( $X$ ) et la série lissée ( $XHWNS$ ). . . . .	35

## Introduction

L'étude de l'évolution temporelle d'une ou plusieurs variables a, depuis longtemps, intéressé des spécialistes de domaines très variés. Les probabilistes ont construit une importante théorie mathématique, la théorie des processus stochastiques, qui permet d'analyser avec un très grand degré de finesse les propriétés d'un ensemble de variables aléatoires indicées par le temps. Les théoriciens de la statistique ont proposé diverses approches des problèmes d'estimation, de tests, de prévision. Des praticiens appartenant à des domaines très variés (physique, automatique, économie,...) ont développé des techniques adaptées à leurs problèmes spécifiques et ont ainsi créé une grande gamme d'outils d'analyse qui n'est pas toujours reliée très clairement à la littérature théorique.

L'étude descriptive de ces séries n'était pas suffisante pour prévoir leurs comportements futurs. Le besoin de prévision de ce type de séries a emmené les scientifiques à construire des modèles mathématiques aptes à répondre à ce besoin.

Ce mémoire est partagé en trois parties :

Dans le **premier chapitre**, nous présentons des généralités sur les séries chronologiques.

Le **deuxième chapitre** on présentera les différentes méthodes de lissage exponentiel à savoir le lissage exponentiel simple, le lissage exponentiel double, le lissage exponentiel généralisé et le lissage exponentiel de Holt-Winters.

Enfin, dans le **troisième chapitre** on présentera une application de ces méthodes sur des données réels qui représentent le taux brut de naissance en Algérie (1967-2000). Nous avons fait recours au logiciel Eviews.

# Chapitre 1

## Théorie des séries temporelles :

Une série chronologique est un ensemble de valeurs d'une variable indicée dans le temps. L'analyse des séries chronologiques permet d'étudier les situations passées et présentes et peut extrapoler l'évènement dans un futur relativement proche (la prévision). La prévision se fonde donc sur la connaissance du passé et du présent. Dans ce chapitre plusieurs concepts importants liés à l'analyse de séries chronologique seront abordés parmi ceux ci, on retrouve les notions d'autocorrélation, de stationnarité et de bruit blanc.

### 1.1 Analyse des séries temporelles : définition et objectifs

Les séries chronologiques, constituent une branche de l'économétrie dont l'objet est l'étude des variables au cours du temps. L'étude de telles séries de mesures s'est développée depuis quelques années. En conséquence, elles intéressent beaucoup de gens différents ; différents par la nature des phénomènes qu'ils étudient et par les buts qu'ils se fixent dans leur étude.

**Définition 1.1.1** *Une série temporelle (chronologique) est une réalisation d'un processus stochastique  $\{X_t, t \in I\}$  où  $I$  est un ensemble dénombrable et totalement ordonné. C'est une suite d'observations d'une grandeur  $X_t$  ou d'un vecteur effectuées au cours du temps.*

Nous allons considérer dans toute la suite que la période écoulée entre deux observations consécutives est la même, on parle donc de série annuelle, trimestrielle, mensuelle ou quotidienne.

## 1.2 Domaines d'application :

On trouve des exemples de séries chronologiques univariées dans de très nombreux domaines. La liste suivante n'est qu'un échantillon :

1) **Finance et économétrie** : évolution des indices boursiers, des prix, des données économiques des entreprises, des ventes et achats de biens, des productions agricoles ou industrielles.

2) **Assurance** : analyse des sinistres.

3) **Médecine/Biologie** : suivi des évolutions des pathologies, analyse d'électroencéphalogrammes et d'électrocardiogrammes.

4) **Sciences de la Terre et de l'Espace** : indices de marées, variations des phénomènes physiques (Météorologie), évolution des taches solaires, phénomènes d'avalanches.

5) **Traitement du signal** : signaux de communications, de radars, de sonars, analyse de la parole.

6) **Traitement des données** : mesures successives de position ou de direction d'un objet mobile (trajectographie).

7) **Métrologie** : variation de phase ou de fréquence des oscillateurs.

8) **Démographie** : évolution de la population.

## 1.3 Les composantes d'une série temporelle :

Les composantes d'une série temporelles sont :

1) **La tendance** ( $f_i, 1 \leq i \leq n$ ) : représente l'évolution à long terme de la grandeur étudiée, et traduit l'aspect général de la série. C'est une fonction monotone, souvent polynomiale. La tendance prend plusieurs forme :

**a-Tendance linéaire** :

$$T_t = a + bt.$$

**b-Tendance quadratique** :

$$T_t = a + bt + ct^2.$$

**c-** *Tendance polynomiale d'ordre  $q$*  :

$$T_t = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_qt^q.$$

**d-** *Tendance logistique* :

$$T_t = \frac{c}{1 + be^{-at}} \text{ ou } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

2) **Les variations saisonnières** ( $s_i, 1 \leq i \leq n$ ) : sont liées au rythme imposé par les saisons météorologiques (production agricole, consommation de gaz,...), ou encore par des activités économiques et sociales (fêtes, vacances, soldes, etc). Mathématiquement, ce sont des fonctions périodiques, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $p$ , appelé période, tel que

$$s_i = s_{i+p}$$

pour tout  $i \geq 1$ . Au premier abord, cette composante est entièrement déterminée par ses premières  $p$  valeurs  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_p$ .

3) **Cycles** ( $c_i, 1 \leq i \leq n$ ) : regroupent des variations à période moins précise autour de la tendance.

4) **Les fluctuations irrégulières/résidus/bruit** ( $e_i, 1 \leq i \leq n$ ) : sont des variations de faible intensité et de courte durée, et de nature aléatoire. En effet, elles ne sont pas clairement apercevables dans les graphiques, à cause de leur faible intensité par rapport aux autres composantes.

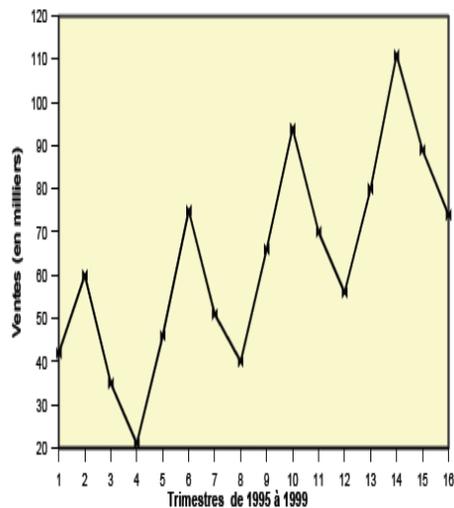
En résumé, nous considérerons une série chronologique comme issue de la composition de 3 composantes :

1. ( $f_i, 1 \leq i \leq n$ ) la tendance (intégrant éventuellement un cycle),
2. ( $s_i, 1 \leq i \leq n$ ) les coefficients saisonniers,
3. ( $e_i, 1 \leq i \leq n$ ) les fluctuations irrégulières (intégrant éventuellement des accidents).

La décomposition d'une série chronologique possédant un mouvement saisonnier peut s'effectuer selon trois types de modèles :

• **Modèle additif**

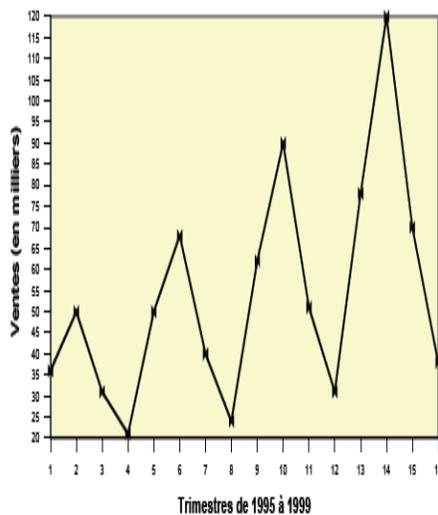
$$X_t = f_t + s_t + e_t \quad t = 1, \dots, T$$



-Modele additif.

• **Modèle multiplicatif**

$$X_t = f_t \cdot s_t \cdot e_t \quad t = 1, \dots, T$$



— Modele multiplicatif.

• **Modèle mixte**

$$X_t = f_t \cdot (1 + s_t) + e_t \quad t = 1, \dots, T$$

## 1.4 Opérateurs définis sur une série chronologique :

On donne dans cette partie les opérateurs de retard, de différence et  $\Delta_s$ .

### 1.4.1 Opérateur de retard :

**Définition 1.4.1** On appelle opérateur retard l'opérateur  $L$  qui à tout processus  $(X_t), t \in \mathbb{Z}$  associe le processus  $(Y_t), t \in \mathbb{Z}$  défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad Y_t = LX_t = X_{t-1}$$

**Remarque 1.4.1** L'opérateur  $L$  est linéaire et inversible. Son inverse  $L^{-1} = F$  est défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, FX_t = X_{t+1}$$

L'opérateur  $F$  est appelé opérateur avance.

**Propriété 1.4.1** Il est possible de composer les opérateurs :  $L^2 = L \circ L$ , et plus généralement

$$L^p = \underbrace{L \circ L \circ L \dots \circ L}_{p \text{ fois}}$$

où  $p \in \mathbb{N}$  avec la convention  $L^0 = I$ , On notera que  $L^p(X_t) = X_{t-p}$ .

**Propriété 1.4.2** Soit  $A$  le polynôme,  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_pz^p$ , On notera  $A(L)$  l'opérateur

$$A(L) = a_0I + a_1L + a_2L^2 + \dots + a_pL^p = \sum_{k=0}^p a_kL^k$$

**Lemme 1.4.1** Soit une série chronologique  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , L'opérateur retard possède les propriétés suivantes :

1.  $L^j X_t = X_{t-j}$ , en particulier  $L^0 X_t = X_t$ .
2. Si  $X_t = c \in \mathbb{R}$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , alors  $L^j X_t = L^j c = c$  pour tout  $c \in \mathbb{Z}$ .

3.  $L^j(L^k X_t) = L^{j+k} X_t = X_{t-j-k}$ .
4.  $(L^j + L^k)X_t = L^j X_t + L^k X_t = X_{t-j} + X_{t-k}$ .
5. Si  $|a| < 1$ , alors

$$(1 - aL)^{-1}X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j X_{t-j}.$$

### 1.4.2 Opérateur de différence d'ordre d :

**Définition 1.4.2** L'opérateur  $\Delta_1$  de différence d'ordre 1 est l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

**Définition 1.4.3** L'opérateur  $\Delta_d$  de différence d'ordre d comme l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta_d X_t = X_t - X_{t-d}$$

**Définition 1.4.4** L'opérateur de retard  $L$  est définie par

$$LX_t = X_{t-1} \quad \text{alors} \quad \Delta X_t = (1 - L)X_t$$

D'une façon générale :

$$\Delta^d(X_t) = \Delta(\Delta^{d-1} X_t) = (1 - L)^d(X_t - X_{t-1})$$

Ces opérateurs peuvent être utilisés afin de transformer un processus de moyenne non nulle en un processus de moyenne nulle. On peut aussi s'en servir pour enlever la composante saisonnière de la série.

### 1.4.3 L'opérateur $\Delta_s$

L'opérateur  $\Delta_s$  permet d'éliminer la saisonnalité est définie par

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$$

et on peut également l'appliquer plusieurs fois.

$$\Delta_s^2 X_t = \Delta_s(X_t - X_{t-s}).$$

Le nombre de fois où on applique est appelé ordre de désaisonnalisation.

## 1.5 Processus bruits blancs :

En désigne par bruit blanc noté  $BB \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  une suite des variables aléatoires de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et non autocorrélées ou :

Un processus  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc si

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0, \text{ pour tout } t \\ \text{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, \text{ pour tout } t \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0, \text{ pour tout } t \text{ et } h \neq 0 \end{cases}$$

On parle de bruit blanc gaussien lorsque  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  sont *i.i.d.*  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

## 1.6 Stationnarité :

Une propriété importante des séries chronologiques est la stationnarité. La stationnarité est une caractéristique d'une série chronologique qui implique que le comportement de la série ne dépend pas du temps. En particulier, on dit qu'une série  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est stable si elle ne comporte pas de tendance saisonnière, ni de tendance à la hausse ou à la baisse. Plus formellement, on distingue deux types de stationnarité, à savoir forte et faible.

**Définition 1.6.1** Une série  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dite *fortement stationnaire* (ou *stationnaire d'ordre 1*) si pour tout  $l \in \mathbb{Z}$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{L}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

La notion de stationnarité d'ordre 1 est généralement beaucoup trop forte pour les applications. Dans la pratique, il est habituellement suffisant de considérer des modèles faiblement stationnaires (ou stationnaire du second ordre).

**Définition 1.6.2** Une suite  $\{X_t : t \geq 0\}$  de variables aléatoires est dite *stationnaire du second ordre* si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $t$ ,  $E(X_t^2) < +\infty$ .
2. Pour tout  $t$ ,  $E(X_t) = \mu$  indépendante de  $t$ .
3. Pour tout  $t$  et pour tout  $h$ ,  $\gamma(h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h})$ , indépendante de  $t$ .

### 1.6.1 La série non stationnaire : processus TS et DS

On présente deux classes des processus non stationnaires les processus *TS* et *DS*.

#### a/ Processus TS :

Est un processus dont le moment d'ordre 1 dépend de temps.

Exemple :

Le processus *TS* (Trend Stationary) s'écrit :

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

ou  $\varepsilon_t$  représente l'erreur du modèle à la date  $t$ .

Il présente une non stationnarité de nature déterministe. Le processus *TS* est non stationnaire car  $E(y_t) = \alpha + \beta t$  dépend du temps  $t$ .

#### b/Processus DS :

Est un processus dont le moment d'ordre 2 dépend de temps.

Exemple :

Le processus *DS* (Differncy Stationnary ) avec dérive ( $\beta \neq 0$ ) s'exprime comme suit :

$$y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t.$$

Par récurrence, on obtient (dans le cas avec dérive) :

$$y_1 = y_0 + \beta + \varepsilon_1$$

$$y_2 = y_1 + \beta + \varepsilon_2$$

$$= y_0 + \beta + \varepsilon_1 + \beta + \varepsilon_2 =$$

$$= y_0 + 2\beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

.

.

.

$$y_t = y_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \text{ ou } \varepsilon_i \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

## 1.7 La fonction d'autocovariance et d'autocorrélation :

### 1.7.1 La fonction d'autocovariance :

La fonction d'autocovariance  $\gamma_X(h)_{h \in \mathbb{Z}}$  mesure la covarianance entre une variable et cette même variable à des dates différentes pour un délai  $h$  :

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \text{cov}(X_t, X_{t-h}) \\ &= E[(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))]\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= \text{var}(X_t) \\ &= E[(X_t - E(X_t))^2]\end{aligned}$$

Elle donne une information sur la variabilité de la série et sur les liaisons temporelles qui existent entre les diverses composantes de la série  $X_t$ .

La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire est une fonction :

a) **paire** :  $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h) \cdot \forall h$ .

b) **semi-définie positive** :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma_X(t_j - t_k) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a_j \in \mathbb{R}, \forall t_j \in \mathbb{Z}.$$

### 1.7.2 La fonction d'autocorrélation :

La fonction d'autocorrélation  $\rho_X(h)$  est une fonction qui mesure la corrélation de la série avec elle-même décalée de  $h$  périodes, elle est définie par :

$$\begin{aligned}\rho_X(h) &= \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)} \sqrt{\text{var}(X_{t-h})}} \\ &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.\end{aligned}$$

$\rho_X(\cdot)$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ , et  $\rho_X(0) = 1$ .

### 1.7.3 La fonction d'autocorrélation partielle :

Elle mesure la liaison linéaire entre  $X_t$ ,  $X_{t-h}$  en tenant compte les variables intermédiaires  $X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}$ .

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre  $h$ , noté  $\pi(h)$  est définie par

$$\pi(h) = \text{cov}(X_t, X_{t-h} / X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$$

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre  $h$  d'un processus stationnaire se calcule de la manière suivante :

$$\pi(h) = \frac{|R(h)^*|}{|R(h)|}$$

avec

$$R(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \cdot & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \cdot & \rho_{h-2} \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$R(h)^*$  est la matrice  $R(h)$  dans la quelle on a remplacé la colonne  $h$  par  $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_2 \end{pmatrix}$ ,

$$R(h)^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \cdot & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \cdot & \rho_{h-2} \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\pi(1) = \rho(1), \quad \pi(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}, \dots$$

## 1.8 Méthode de Bays-Ballot :

Cette méthode concerne les séries chronologiques suivantes un modèle additif et dont la tendance est linéaire, Elle consiste à estimer les paramètres de ce modèle pour effectuer des prévisions.

Nous considérons le modèle

$$\begin{aligned} X_t &= \beta_1 + \beta_2 t + S_t^1 \gamma_1 + S_t^2 \gamma_2 + S_t^3 \gamma_3 + \dots + S_t^m \gamma_m + \varepsilon_t \\ \mathbf{S}_t &= S_t^1 \gamma_1 + S_t^2 \gamma_2 + S_t^3 \gamma_3 + \dots + S_t^m \gamma_m \\ \mathbf{Z}_t &= \beta_1 + \beta_2 t \end{aligned}$$

En notant  $N$  le nombre d'années entières et  $m$  la périodicité, on pose :

$\bar{x}_n$  : moyenne des  $X_t$  relatives à l'année  $n$  .

$\bar{x}_j$  : moyenne des  $X_t$  relatives à trimestre  $j$  .

$\bar{x}$  : moyenne des  $X_t$  relatives à les observations  $X_t$ .

Le principe de la méthode de Bays-Ballot est de résoudre l'équation

$$\min_{\beta, \gamma} \sum_{t=1}^T \left[ X_t - \beta_1 + \beta_2 t - \sum_{j=1}^m S_t^j \gamma_j \right]^2,$$

sous contrainte  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_m = 0$ .

L'équation admet alors pour solution

$$\hat{\beta}_2 = \frac{12 \sum_{n=1}^N n \bar{x}_n - \frac{N(N+1)}{2} \bar{x}}{N(N^2 - 1)}$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{x} - \hat{\beta}_2 \frac{Nm + 1}{2}$$

$$\hat{\gamma}_j = \bar{x}_j - \bar{x} - \hat{\beta}_2 \left[ j - \frac{m+1}{2} \right].$$

donc

$$\hat{X}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t + \hat{S}_t^1 \gamma_1 + \hat{S}_t^2 \gamma_2 + \hat{S}_t^3 \gamma_3 + \dots + \hat{S}_t^m \gamma_m$$

pour effectuer la prévision à l'instant  $t = j + m(j - 1)$ , on remplace dans le méthode théorique les paramètres par leur estimation.

Année		$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$\bar{X}_k$	$k\bar{X}_k$
2015	1	25	14	09	22	17.5	17.5
2016	2	36	18	16	31	25.25	50.5
2017	3	42	16	07	32	24.25	72.5
	$\bar{X}_j$	34.33	16	10.66	28.33	40	140.75
	$\bar{\gamma}_j$	13.26	-5.91	-12.09	4.73		

TAB. 1.1 – Exemple sur des données trimestriel.

$N$  : le nombre des années 3.

$m$  : le nombre de mois (saison) 4.

D'après la méthode de Bys-Ballot :

$$\hat{\beta}_1 = 0.84$$

$$\hat{\beta}_2 = 16.82$$

$$\hat{X}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t + \hat{S}_t^1 \gamma_1 + \hat{S}_t^2 \gamma_2 + \hat{S}_t^3 \gamma_3 + \hat{S}_t^4 \gamma_4$$

$$\hat{X}_t = 16.82 + 0.84t + 13.26S_t^1 - 5.9S_t^2 - 12.09S_t^3 + 4.73S_t^4$$

donc

$$\hat{X}_t = 16.82 + 0.84(j + m(j - 1)) + 13.26S_t^1 - 5.9S_t^2 - 12.09S_t^3 + 4.73S_t^4$$

## 1.9 Estimation de la tendance linéaire par la méthode de moindre carrée :

Si le phénomène augmente ou diminue alors l'équation de la tendance est :

$$\hat{Z} = \hat{a} - \hat{b}x$$

La méthode de moindre carrée permet d'estimer  $\hat{a}, \hat{b}$  :

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i z_i - n \bar{x} \bar{z}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{z} - \hat{b} \bar{x}$$

t	z	$x_i z_i$	$x_i^2$
1	499.5	499.5	1
2	593.9	1187.8	4
3	659.4	1978.2	9
4	790.8	3163.2	16
5	895.8	4479	25
$\bar{x} = 3$	$\bar{z} = 687.88$	$\sum x_i z_i$	$\sum x_i^2 = 55$

TAB. 1.2 – Exemple de l'estimation de la tendance.

D'après la méthode M.C

$$\begin{aligned}
 n &= 5 \\
 \hat{b} &= \frac{11307.7 - 5(3 * 687.88)}{55 - 5 * 9} \\
 &= 98.95 \\
 \hat{a} &= 687.88 - 98.95 * 3 \\
 &= 391.03
 \end{aligned}$$

donc

$$\hat{Z} = 391.03 + 98.95t$$

pour  $x = 7$

$$\begin{aligned}\hat{Z} &= 391.09 + 998.95 * 7 \\ &= 1083.74\end{aligned}$$

## 1.10 Estimation de la tendance par lissage moyenne mobile :

la méthode moyenne mobile est un outil intéressant pour estimer la tendance.

1<sup>ère</sup> cas :  $k = 2p + 1$  "impair"

$$M_k(X_t) = \frac{1}{k}(X_{t-p} + \dots + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \dots + X_{t+p})$$

2<sup>ème</sup> cas :  $k = 2p$  "pair"

$$M_k(X_t) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}X_{t-p} + \dots + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \dots + \frac{1}{2}X_{t+p}\right)$$

Le principe de cette méthode est représentée dans le tableau suivant :

t	y	m.m d'ordre 3	m.m d'ordre 4
1	$y_1$		
2	$y_2$	$z_2 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$	
3	$y_3$	$z_3 = \frac{y_2+y_3+y_4}{3}$	$z_3 = \frac{\frac{1}{2}y_1+y_2+y_3+y_4+\frac{1}{2}y_5}{3}$
4	$y_4$	$z_4 = \frac{y_3+y_4+y_5}{3}$	$z_4 = \frac{\frac{1}{2}y_2+y_3+y_4+y_5+\frac{1}{2}y_6}{3}$
5	$y_5$	$z_5 = \frac{y_4+y_5+y_6}{3}$	
6	$y_6$		

TAB. 1.3 – Lissage par moyenne mobile

# Chapitre 2

## Les méthodes de lissage exponentiel :

Plusieurs méthodes de prévision existent, elles peuvent être regroupées en deux grandes classes :

Méthodes extrapolatives :

(courbes de croissance, lissage exponentiel, lissage par les moyennes mobiles, modélisation ARMA...) : Ces méthodes utilisent le passé de la variable elle-même. Seul le passé de la variable est utilisé en vue de la prévoir sans apport d'information extérieure.

Méthodes explicatives :

(régression linéaire, systèmes d'équations simultanées...) : Celles ci utilisent les valeurs passées et présentes d'une ou de plusieurs variables pour prévoir  $y$ . L'ensemble d'information utilisé comporte des facteurs extérieurs qui peuvent influencer le futur de  $y$  en plus du passé de la variable  $y$  elle-même.

### 2.1 Principe des méthodes de lissage exponentiel :

Les méthodes de lissage exponentiel sont des méthodes de prévision à court terme. Ce sont des méthodes d'extrapolation qui donnent un poids prépondérant aux valeurs récentes : les coefficients de pondération décroissent exponentiellement en remontant dans le temps.

La méthode de lissage exponentiel simple a été introduite par Brown en 1962. Elle a ensuite été généralisée par Holt et Winters.

Chacune des méthodes dépend d'un ou plusieurs paramètres (paramètres de lissage) compris entre 0 et 1. Le poids de chacune des valeurs passées se calcule à partir de ces paramètres.

Ces méthodes sont largement diffusées et utilisées. Leur succès est dû à la fois à leur simplicité et à la qualité des prévisions obtenues.

## 2.2 Le lissage exponentiel simple :

Le lissage exponentiel simple (LES) s'applique à des séries chronologiques sans saisonnalité et à tendance localement constante.

On dispose de  $N$  observations  $X_1, \dots, X_N$ . On souhaite prévoir à la date  $T = 1, \dots, N$  la valeur à un horizon 1, ou à un horizon quelconque  $h$ .

La prévision  $\hat{X}_T(h)$  fournie par la méthode de lissage exponentiel simple, avec la constante de lissage  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$  est

$$\Rightarrow \hat{X}_T = (1 - \beta) \sum_{i=0}^{T-1} \beta^i X_{T-i}$$

On donne un poids d'autant moins important que les observations sont loins (dans le passé), avec une décroissance exponentielle :

- proche de 1 : prise en compte de tout le passé
- proche de 0 : prise en compte d'avantage des valeurs récentes (plus sensible aux fluctuations)

Si  $\beta$  ne dépend pas de  $h$ ,  $\hat{X}_T(h)$  ne dépend pas de  $h$ , dont  $\hat{X}_T(h) = \hat{X}_T$ . Cette valeur  $\hat{X}_T$  est la prévision faite en  $T$  de la valeur en  $T + 1$ . Nous appellerons cette série  $\hat{X}_T$  (série lissée à la date  $t$ ) ou  $F_{T+1}$  (valeur prédite pour la date  $(T + 1)$ ).

Pour certains logiciels permettant de faire du lissage exponentiel, la constante de lissage n'est pas  $\beta$  mais  $\alpha = (1 - \beta)$ .

### 2.2.1 Formules de mise à jour (ordre 1) :

**Proposition 2.2.1** *Méthode adaptative de mise à jour (ordre 1)*

$$\begin{aligned} \hat{X}_T &= \hat{X}_{T-1} + (1 - \beta)(X_T - \hat{X}_{T-1}) \quad (1) \\ &= (1 - \beta)X_T + \beta\hat{X}_{T-1} = \alpha X_T + (1 - \alpha)\hat{X}_{T-1} \end{aligned}$$

Cette relation s'écrit également

$$F_{T+1} = \alpha X_T + (1 - \alpha)F_T$$

**Proposition 2.2.2** *une prévision  $\hat{X}_T(h)$  sous la forme de la constante qui s'ajuste le mieux au sens des moindres carrés pondérés au voisinage de  $T$ , c'est-à-dire la solution du problème de minimisation*

$$\min_c \left\{ \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - c)^2 \right\} \quad (2)$$

admet pour solution

$$\hat{c} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^T} \sum_{j=0}^{T-1} c X_{T-j} \quad (3)$$

et pour  $T$  assez grand :

$$\hat{X}_T = \hat{c}$$

- Ce sont ces formules qui sont utilisées pour pratiquer le lissage exponentiel simple sur une chronique. La seconde est peut-être la plus pratiquée.

### 2.2.2 Choix de la constante de lissage :

Au delà des méthodes qualitative de rigidité ou de souplesse du modèle aux fluctuations conjoncturelles, il est possible d'utiliser des méthodes de type minimisation de la somme des carrés des erreurs de prévision :

$$\hat{\beta} = \arg \min \left\{ \sum_{t=1}^T \left[ X_{T-1} - (1 - \beta) \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j X_{t-j} \right]^2 \right\}$$

#### Choix de la valeur initiale :

On peut choisir pour valeur initiale :

- La moyenne de la série chronologique.
- La première observation de la série chronologique

### 2.2.3 Résumé des erreurs de prévision :

on a

$$\begin{aligned}\hat{X}_T &= \alpha X_T + (1 - \alpha)\hat{X}_{T-1} \\ &= \hat{X}_{T-1} + \alpha(X_T - \hat{X}_{T-1}) \\ &= \hat{X}_{T-1} + \alpha e_T\end{aligned}$$

où

$$e_T = X_T - \hat{X}_{T-1}$$

$e_T$  est l'erreur de prévision.

- Mean Error (ou Erreur Moyenne) :

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{t=T-n+1}^{t=T} e_t$$

si méthode adaptée  $ME \approx 0$

- Mean Square Error (ou Erreur Quadratique Moyenne) :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=T-n+1}^{t=T} (e_t)^2$$

- Mean Absolute Error (ou Erreur Absolue Moyenne) :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=T-n+1}^{t=T} |e_t|$$

-Root Mean Square Error :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=T-n+1}^{t=T} (e_t)^2}$$

### 2.2.4 Choix de la meilleur méthode de prévision :

La méthode retenu comme meilleur est celle qui donné le plus petite valeur de ces paramètres .

#### Remarque 2.2.1

**Lien entre robustesse de la prévision et choix de  $\beta$  :**

Il n'existe pas de relation a priori entre l'erreur de prévision et le paramètre  $\beta$  toujours ( $\beta = (1 - \alpha)$ )

**A retenir**

La formule itérative pour construire la série lissée de  $X_t$  pour  $t = 1, \dots, N$  est la suivante

$$F_0 = X_1 \text{ ou } [X_1 + \dots + X_P]/P$$

(valeur initiale, ou le moyenne des p premier valeurs).

$$F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_t \text{ pour } 0 \preceq t \preceq N$$

$$F_t = F_{N+1} \text{ pour } t \succeq N + 1$$

Ce choix peut relever de considérations empiriques : des fortes pondérations pour les valeurs récentes ( $\alpha$  élevé) donne de meilleures prévisions à court terme qu'à long terme. Toutefois, une des méthodes les plus utilisée est la minisation des moindres carrés des erreurs (prévision/réalisation) à un horizon  $h = 1$ .

L'intervalle de confiance de la prévision est alors de la forme

$$\hat{X}_T(h) \pm 1.96 \sigma_X C_h \quad \text{alors } C_h^2 = 1 + \frac{1 - \beta}{(1 - \beta)^3} [(1 + 4\beta + 5\beta^2) + 2h(1 - \beta)(1 + 3\beta) + 2h^2(1 - \beta)^2]$$

**2.3 Lissage exponentiel double :**

Le lissage exponentiel simple est adapté à des séries pouvant être ajustée par une constante au voisinage de  $T$ . Le principe de lissage exponentiel double permet de faire un ajustement par une droite, à savoir approcher  $\hat{X}_t$  par  $Y_t$  où

$$Y_t = A + (t - T)B$$

La prévision à horizon  $h$  s'écrit

$$F_{T+h} = \hat{X}_T(h) = \hat{A}(T) + h\hat{B}(T)$$

De même que pour (2) le programme d'optimisation pour estimer  $A$  et  $B$  s'écrit

$$\min_{A,B} \left\{ \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - [A + (T-j)B])^2 \right\} \quad (4)$$

La solution de (4) le programme est donnée par

$$\hat{A}(T) = 2S_1(T) - S_2(T) \quad \text{et} \quad \hat{B}(T) = \frac{1-\beta}{\beta} [S_1(T) - S_2(T)]$$

en posant

$$S_1(t) = (1-\beta) \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k X_{t-k} = (1-\beta)X_t + \beta S_1(t-1) \quad (\text{série lissée})$$

$$\begin{aligned} S_2(T) &= (1-\beta) \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k S_1(t-k) = (1-\beta)S_1(t) + \beta S_2(t-1) \\ &= (1-\beta)^2 \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{i=0}^{t-k-1} \beta^{i+k} X_{t-(k+i)} \quad (\text{série lissée 2 fois}) \end{aligned}$$

### 2.3.1 Formules de mise à jour :

Pour obtenir la formule de mise à jour (à l'ordre 1) permettant de passer de  $T$  à  $T+1$ ,

on peut utiliser le résultat suivant

Si à la date  $T$ ,

$$F_{T+1} = \hat{X}_T(1) = \hat{A}(T) + \hat{B}(T)$$

alors, en  $T+1$

$$\begin{cases} \hat{A}(T+1) = (1+\beta^2) [X_{T+1} - \hat{X}_T(1)] + \hat{A}(T) + \hat{B}(T) \\ \hat{B}(T+1) = \hat{B}(T) + (1+\beta^2) [X_{T+1} - \hat{X}_T(1)] \end{cases} \quad (5)$$

Dans le cas d'une prévision parfaite,  $X_{T+1} = \hat{X}_T(1)$ , on aurait

$$\hat{A}(T+1) = \hat{A}(T) + \hat{B}(T)$$

et

$$\hat{B}(T+1) = \hat{B}(T)$$

Dans ce cas, les droites de prévision en  $T$  et en  $T+1$  sont les mêmes, et la pente, en particulier, est inchangée ( $\hat{B}(T+1) = \hat{B}(T)$ ).

L'intervalle de confiance de la prévision est alors de la forme

$$\hat{X}_T(h) \pm 1.96\sigma_x \sqrt{\frac{2\beta}{2\beta-1}}$$

Le lissage exponentiel double est très proche du lissage exponentiel simple, sauf que l'on fait un ajustement au voisinage de  $T$  non plus par une constante, mais par une droite.

En fait, la série (correspondant à un indice) est une série "croissante" : l'ajustement par lissage exponentiel simple sous-estimerait les valeurs réalisées. Le programme de minimisation s'écrit ici

$$\min_{A,B} \left\{ \sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j (Y_{t-j} - [A_T + B_T(T-j)])^2 \right\}$$

La prévision à horizon  $h$  est alors  $\hat{y}_T(h) = A_T + B_T h$ . Trois formulations sont possibles pour écrire la série lissée

**1/- Formulation classique** - Les coefficients  $A_j$  et  $B_j$  sont donnés par :

$$A_j = 2\hat{y}_j^1 - \hat{y}_j^2$$

$$B_j = \frac{\alpha}{1-\alpha} [\hat{y}_j^1 - \hat{y}_j^2]$$

où les  $\hat{y}_j^1$  et  $\hat{y}_j^2$  sont obtenus récursivement par deux lissages consécutifs

$$\begin{cases} \hat{y}_j^1 = \alpha y_j + (1-\alpha)\hat{y}_{j-1}^1 : \text{lissage exponentiel simple de } y_j \\ \hat{y}_j^2 = \alpha \hat{y}_j^1 + (1-\alpha)\hat{y}_{j-1}^2 : \text{lissage exponentiel simple de } \hat{y}_j^1 \end{cases}$$

**2/- Formules de lissage direct** - l'erreur de lissage  $e_j$  est donnée par  $e_j = y_j - \hat{y}_j = y_j - [A_{j-1} + B_{j-1}]$  et donc

$$\begin{cases} A_j = A_{j-1} + B_{j-1} + [1 - (1-\alpha)^2] e_j \\ B_j = B_{j-1} + \alpha^2 e_j \end{cases}$$

ce qui donne une relation permettant d'obtenir récursivement les  $A_j$  et les  $B_j$

**3/- Formules de mise à jour** - cette expression est en fait la même que la précédente, sauf que l'on remplace l'erreur de prévision par la dernière observation  $y_j$

$$\begin{cases} A_j = \lambda y_j + (1 - \lambda) [A_{j-1} + B_{j-1}] \\ B_j = \mu [A_j - A_{j-1}] + (1 - \mu) B_{j-1} \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lambda = 1 - (1 - \alpha)^2 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \quad (6)$$

### Remarque 2.3.1

$A_j$  et  $B_j$  sont utilisés pour calculer  $\hat{y}_j$ , prévision à horizon 1 faite à la date  $j$  soit  $F_{j+1}$ .

Encore une fois, l'initialisation de l'algorithme est important. Une méthode possible est de considérer comme valeur initiale pour  $A_1$  la première valeur  $y_1$ . La pente  $B_1$  peut alors être choisie comme la pente moyenne entre la date 1 et une date  $t_0$  telle que  $B_1 = [y_{t_0} - y_1] / t_0$ .

### A retenir

La formule itérative pour construire la série lissée  $X_t$  de pour  $t = 1, \dots, N$  est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0^1 = X_1 \text{ ou } [X_1 + \dots + X_P] / P \\ S_0^2 = 0 \\ S_{t+1}^1 = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_t^1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq N \\ S_{t+1}^2 = \alpha S_t^1 + (1 - \alpha) S_t^2 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq N \\ A_{t+1} = 2S_{t+1}^1 - S_{t+1}^2 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq N \\ B_{t+1} = \alpha [S_{t+1}^1 - S_{t+1}^2] / (1 - \alpha) \\ F_{t+1} = A_{t+1} + B_{t+1} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq N \\ F_t = A_{N+1} + (t - N - 1) B_{N+1} \quad \text{pour } t \geq N + 1 \end{array} \right.$$

## 2.4 Lissage exponentiel multiple, ou généralisé :

Cette généralisation a été proposée par Brown en 1962, permettant d'ajuster au voisinage de  $T$  une fonction plus complexe qu'une fonction affine. La résolution de ce problème repose sur la notion de vecteurs de fonctions à matrice de transition fixe.

Le vecteur  $f(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]'$ , où  $t \in \mathbb{Z}$  est dit matrice de transition fixe s'il existe une matrice  $A$  régulière telle que

$$f(t) = Af(t - 1) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

La méthode du lissage exponentiel généralisé consiste à ajuster au voisinage de  $T$  de la série  $X_t$  une fonction  $\Phi(t - T)$  de la forme

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \quad \text{où} \quad f(\cdot) \quad \text{est à matrice de transition fixe}$$

Cette classe de fonction  $\Phi(\cdot)$  comprend la plupart des fonctions usuelles.

### la plupart des fonctions usuelles :

**(1) Les fonctions constantes** -  $\Phi(t) = c$ , obtenues avec  $f(t) = 1$  et  $A = 1$ . Dans ce cas, on retrouve le principe de lissage exponentiel simple.

**(2) Les fonctions linéaires**  $\Phi(t) = \alpha + \beta t$  obtenues avec  $f(t) = [1; t]'$  de matrice de transition

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{puisque} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t-1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on retrouve le principe de lissage exponentiel double.

**(3) Les fonctions polynômiales de degré  $p$**  - Cette famille est obtenue en prenant comme base une base de  $\mathbb{R}_P(X)$  (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ ).

En particulier, on peut choisir la base

$$\mathfrak{B}_p = \left\{ P_k(t) = \frac{1}{k!} t(t-1)\dots(t-k+1), k = 1, \dots, p+1 \right\}$$

obtenue à l'aide du triangle de Pascal, et définie par récurrence par

$$P_k(t) = P_{k-1}(t-1) + P_k(t-1) \quad \text{pour } k > 1$$

Le vecteur  $f(t) = [P_1(t), \dots, P_{p+1}(t)]$  est alors de matrice de transition (fixe)

$$A = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

(4) **Les fonctions sinusoïdales** - Les fonctions  $\Phi(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$  sont obtenues en prenant  $f(t) = [\sin \omega t; \cos \omega t]'$  et dans ce cas

$$A = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

(5) **Les fonctions exponentielles** - Les fonctions  $\Phi(t) = \alpha \exp(\beta t)$  sont obtenues en prenant  $f(t) = \exp(\beta t)$  et dans ce cas  $A = \exp(\alpha)$ .

Cette méthode de lissage se met en place de la façon suivante.

De la même façon que (4), le programme d'optimisation s'écrit

$$\min_a \left\{ \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{t-j} - f'(-j)a)^2 \right\} \quad (7)$$

où la notation  $f'$  désigne la transposée de  $f$ . Posons

$$x = \begin{bmatrix} X_T \\ \vdots \\ X_1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1(0) & f_n(0) \\ \vdots & \vdots \\ f_1(-T+1) & f_n(-T+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(0) \\ \vdots \\ f'(-T+1) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\Omega = \text{diag}(1, 1/\beta, \dots, 1/\beta^{T-1})$$

Le programme(7) correspond à la regression (linéaire) de  $x$  sur les colonnes de  $F$ , associée à la matrice de covariance  $\Omega$ . On en déduit que la solution à (7) est unique, et est donnée par

$$\hat{a}(T) = (F'\Omega^{-1}F)^{-1}F'\Omega_y = [M(T)]^{-1}Z(T)$$

où

$$M(T) = F'\Omega^{-1}F = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j f(-j)f'(-j) \quad \text{et} \quad Z(T) = F'\Omega_y = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (-j)X_{T-j}$$

La matrice  $M(T)$  converge vers une matrice finie  $M$  quand  $T \rightarrow +\infty$  : on peut estimer  $\hat{a}(T)$  en utilisant cette matrice limite,

$$\hat{a}(T) = M^{-1}Z(T) \quad \text{Avec} \quad M(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j f(-j)f'(-j)$$

Et la prévision à horizon  $h$  faite à la date  $T$  est

$$\hat{X}_T(h) = f'(h)\hat{a}(T)$$

### Méthode adaptative de mise à jour (ordre 1) :

Pour cela, notons que

$$Z(T+1) = X_{T+1}f(0) + \beta A^{-1}Z(T)$$

et on peut alors écrire

$$\hat{a}(T+1) = X_{T+1}M^{-1}f(0) + \beta M^{-1}A^{-1}M\hat{a}(T)$$

que l'on peut encore noter

$$\hat{a}(T+1) = \lambda X_{T+1} + \mu \hat{a}(T) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \lambda = M^{-1}f(0) \\ \mu = \beta M^{-1}A^{-1}M \end{cases}$$

où les matrices  $\lambda$  et  $\mu$  sont indépendantes de  $T$ . Cette relation peut se mettre sous la forme suivante, proche de (1)

$$\hat{a}(T+1) = A'\hat{a}(T) + \lambda [X_{T+1} - \hat{X}_T(1)]$$

## 2.5 Les méthodes de Holt-Winters :

### 2.5.1 Méthode non saisonnière ( Le lissage exponentiel de Holt ) :

Cette méthode est une généralisation de la méthode de lissage exponentiel mais avec un point de vue différent de celui introduit dans le lissage exponentiel généralisé. De la même façon que pour le lissage exponentiel double, l'ajustement se fait de façon linéaire au voisinage de  $T$ , la nuance se faisant au niveau de formules de mise à jour, différentes de (5) :

on remplace  $\hat{X}_{T-1}(1)$  par  $\hat{B}(T-1) + \hat{A}(T+1)$  et dans la deuxième, on utilise l'expression :

$$X_T - \hat{X}_{T-1}(1) = \frac{\hat{A}(T) - \hat{B}(T-1) - \hat{A}(T+1)}{1 - \beta^2}$$

déduite de la première égalité. On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}(T+1) = (1 - \lambda)X_{T+1} + \lambda [\hat{A}(T) + \hat{B}(T)] \quad \text{où } 0 < \lambda < 1 \\ \hat{B}(T+1) = (1 - \mu) [\hat{A}(T+1) - \hat{A}(T)] + \mu \hat{B}(T) \quad \text{où } 0 < \mu < 1 \end{array} \right. \quad (8)$$

La première relation est une moyenne pondérée de deux informations sur  $A(T)$ , correspondant au niveau de la série à la date  $T$  : l'observation  $X_{T+1}$  et la prévision faite en  $T$

$(\hat{A}(T) + \hat{B}(T))$  : La seconde relation s'interprète comme une moyenne pondérée de deux informations sur  $B(T)$ , correspondant à la pente de la série à la date  $T$  : la différence entre les niveaux estimés en  $T$  et  $T+1$  ; et la pente estimée en  $T$ .

Toutefois, ces deux relations ne peuvent être utilisées qu'après initialisation, que l'on fera généralement de la façon suivante :

$$\hat{A}(2) = X_2 \quad \text{et} \quad \hat{B}(2) = X_2 - X_1.$$

La prévision à horizon  $h$  faite à la date  $T$  est donnée par

$$\hat{X}_T(h) = \hat{A}(T) + h\hat{B}(T)$$

Cette méthode peut être vue comme une généralisation du lissage exponentiel double, qui ne faisait intervenir qu'un coefficient,  $\beta$  (ou  $\alpha$ ). Cette dernière méthode correspond au cas particulier

$$\lambda = \beta^2 \quad \text{et} \quad \mu = 1 - \frac{(1 - \beta)^2}{1 - \beta^2} = \frac{2\beta}{1 + \beta}$$

### 2.5.2 Méthode saisonnière ( Le lissage exponentiel de Winters ) :

Le lissage de Winters concerne les séries chronologiques saisonnières. On commence par choisir le modèle de composition, car :

- Il y a une méthode de lissage pour les chroniques avec saisonnalité additive ;

- Et une autre méthode de lissage pour les chroniques à saisonnalité multiplicative.

On note :

$s$  = période de la composante saisonnière

$m_k$  = moyenne de l'année

$n$  = nombre d'années complètes

- On suppose que la série a été observée sur un nombre  $n$  d'années complètes, c'est-à-dire que le nombre total d'observations utilisées pour le  $n \times p$  lissage est égal à  $p$ , puisque la période de la saisonnalité est égale à  $p$ .

#### a/ La méthode saisonnière additive :

On suppose ici que la série  $(X_t)$  peut être approchée au voisinage de  $T$  par la série

$$Y_t = A + (t - T)B + S_t$$

où  $S_t$  est un facteur saisonnier. Les formules de mise à jour s'écrivent de la façon suivante, où  $s$  est le facteur de saisonnalisation (ou le nombre de saisons :  $s = 4$  pour des données trimestrielles ou  $s = 12$  pour des données mensuelles)

$$\hat{A}(T + 1) = (1 - \lambda) [X_{T+1} - S_{T+1-s}] + \lambda [\hat{A}(T) + \hat{B}(T)] \quad \text{où } 0 < \lambda < 1 \text{ (lissage de la moyenne)}$$

(Niveau)

$$\hat{B}(T + 1) = (1 - \mu) [\hat{A}(T + 1) - \hat{A}(T)] + \mu \hat{B}(T) \quad \text{où } 0 < \mu < 1 \text{ (lissage de la tendance)}$$

(pente)

$$\hat{S}_{T+1} = (1 - v) \left[ X_{T+1} - \hat{A}(T+1) \right] + v S_{T+1-s} \quad \text{où } 0 < v < 1 \quad (\text{lissage de la saisonnalité})$$

(Saisonnalité)

et la prévision à horizon  $h$  telle que  $(1 \leq h \leq s)$  s'écrit

$$\hat{X}_T(h) = \hat{A}(T) + h\hat{B}(T) + \hat{S}_{T+1-s}$$

La encore, le problème d'initialisation va se poser, et on peut prendre

$$\hat{A}(s) = M_s(X_1, \dots, X_s) \quad \text{où } M_s \quad \text{est une moyenne pondérée}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}(s+1) &= M_s(X_2, \dots, X_{s+1}) \\ \hat{B}(s+1) &= \hat{A}(s+1) - \hat{A}(s) \\ \hat{S}_i &= X_i - \hat{A}(i) \end{aligned}$$

### b/ La méthode saisonnière multiplicatif :

Les formules de mise à jour sont alors pour trois paramètres :  $0 < \lambda$  ,  $\mu$  ,  $v < 1$  à calibrer

$$\hat{A}(T+1) = (1 - \lambda) \left[ \frac{X_{T+1}}{\hat{S}_{T+1-s}} \right] + \lambda \left[ \hat{A}(T) + \hat{B}(T) \right] \quad \text{où } 0 < \lambda < 1 \quad (\text{lissage de la moyenne})$$

(Niveau)

$$\hat{B}(T+1) = (1 - \mu) \left[ \hat{A}(T+1) - \hat{A}(T) \right] + \mu \hat{B}(T) \quad \text{où } 0 < \mu < 1 \quad (\text{lissage de la tendance})$$

(pente)

$$\hat{S}_{T+1} = (1 - v) \left[ \frac{X_{T+1}}{\hat{A}(T+1)} \right] + v \hat{S}_{T+1-s} \quad \text{où } 0 < v < 1 \quad (\text{lissage de la saisonnalité})$$

(Saisonnalité)

et la prévision à horizon  $h$  telle que  $(1 \leq h \leq s)$  s'écrit

$$\hat{X}_T(h) = \left[ \hat{A}(T) + h\hat{B}(T) \right] \hat{S}_{T+1-s}$$

# Chapitre 3

## Application des méthodes de Lissage exponentiel :

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les méthodes de lissage exponentiel pour faire de la prévision. Mais avant de commencer il faut décider quel est le lissage que nous allons appliquer ( simple, double .....). Pour cela il faut analyser la série pour distinguer sa nature.

Pour appliquer notre méthode de prévision, nous utilisons le logiciel Eviews

Les données considérées représentent l'évolution du taux brut de naissance (unité : mille pour cent ) en Algérie entre l'année 1967 et l'année 2000.

Nous avons saisi des données annuelles, comme indiqué dans le tableau ci-dessous .

Mais avant tout, nous commençons par l'analyse exploratoire (plot) de la série chronique .

Année	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
valeur	50.12	47.70	49.81	50.16	48.44	47.73	47.62	46.50	46.05	45.44	45.02
Année	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
valeur	46.36	42.80	42.70	41.04	40.60	40.40	40.18	39.50	34.73	34.60	33.91
Année	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
valeur	30.00	30.94	30.14	30.41	28.22	28.24	25.33	22.91	22.51	20.58	19.82
Année	2000	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
valeur	19.36	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

TAB. 3.1 – Taux brut de naissance en Algérie ( depuis 1967 jusqu'à 2000).

la source : [www.ONS.com](http://www.ONS.com)

### 3.1 Identification de la série :

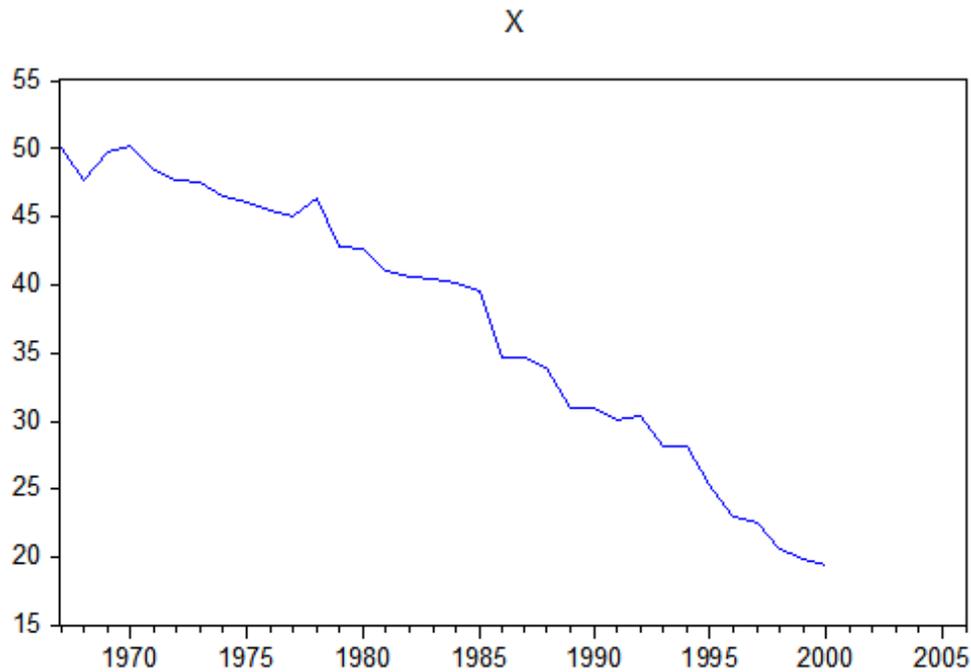


FIG. 3.1 – Graphique de l'évolution du taux brut de naissance en Algérie (1967-2000).

Le graphique montre clairement d'une part l'absence de saisonnalité, d'autre part, que la série évolue de manière décroissante dans le temps. Ce qui nous conduit à conclure que notre série est tendancielle et non saisonnière. ou *TS* (Trend Stationary)

En résumé :

Nous appliquons les méthode de lissage exponentiel double (LED) et de Holt-Winters non saisonnière (LHWNS).

## 3.2 Application de la méthode de lissage exponentiel double :

Date: 06/27/19	Time: 16:28
Sample: 1967	2000
Included observations: 34	
Method: Double Exponential	
Original Series: X	
Forecast Series: XLED	
<hr/>	
Parameters: Alpha	0.2720
Sum of Squared Residuals	56.64992
Root Mean Squared Error	1.290804
<hr/>	
End of Period Levels:	Mean 18.86240
	Trend -1.248655
<hr/>	

FIG. 3.2 – La validation de méthode LED.

Le paramètre de LED est  $\alpha = 0.272$   
Prévision de la variable taux brut de naissance à un horizon de 6 années :

Année	valeur x prévue
2001	17.61
2002	16.36
2003	15.11
2004	13.86
2005	12.61
2006	11.37

TAB. 3.2 – Les valeurs de prévision par LED

La représentation graphique de la série et le lissage exponentiel double et la prévision à l'horizon de 6 années est donnée sur la figure ci-dessous :

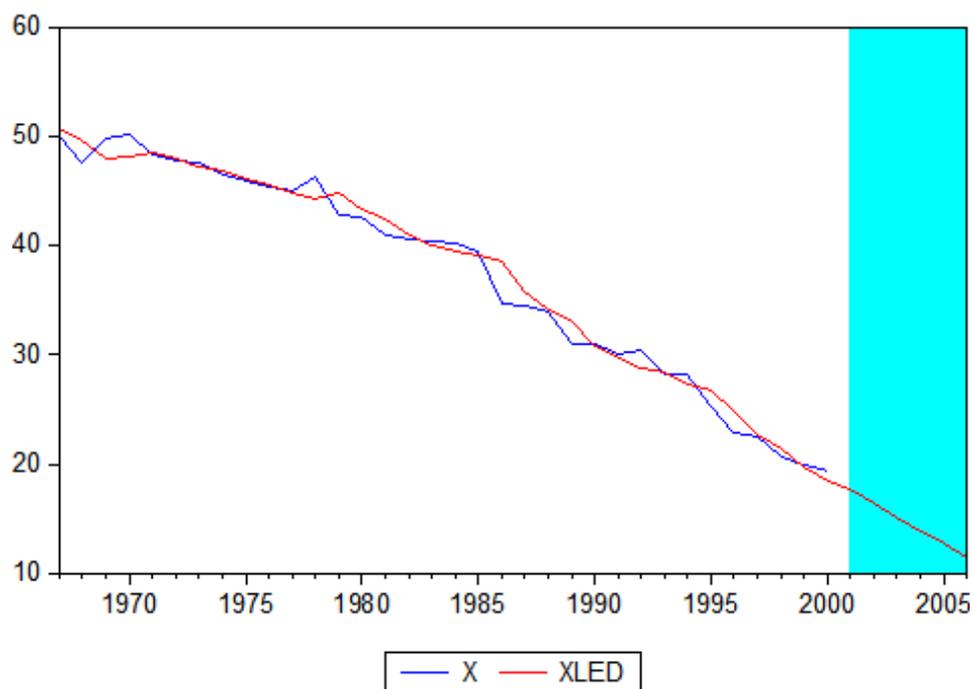


FIG. 3.3 – La série originale (X) et la série lissée (XLED).

### 3.3 Application de la méthode de lissage exponentiel de Holt-Winters non saisonnière :

Date:	06/27/19	Time:	16:33
Sample:	1967	2000	
Included observations:	34		
Method:	Holt-Winters No Seasonal		
Original Series:	X		
Forecast Series:	XLHWNS		
<hr/>			
Parameters:	Alpha		0.4500
	Beta		0.1800
Sum of Squared Residuals			55.71038
Root Mean Squared Error			1.280055
<hr/>			
End of Period Levels:	Mean		18.82109
	Trend		-1.265117
<hr/>			

FIG. 3.4 – La validation de méthode LHWNS.

Les deux paramètres de LHWNS sont  $\alpha = 0.45$  et  $\beta = 0.18$   
Prévision de la variable taux brut de naissance à un horizon de 6 années :

Année	valeur x prévue
2001	17.55
2002	16.29
2003	15.02
2004	13.76
2005	12.49
2006	11.23

TAB. 3.3 – Les valeurs de prévision par LHWNS

La représentation graphique de la série et le lissage exponentiel de Holt-Winters non saisonnière et la prévision a l'horizon de 6 années est donnée sur la figure ci-dessous :

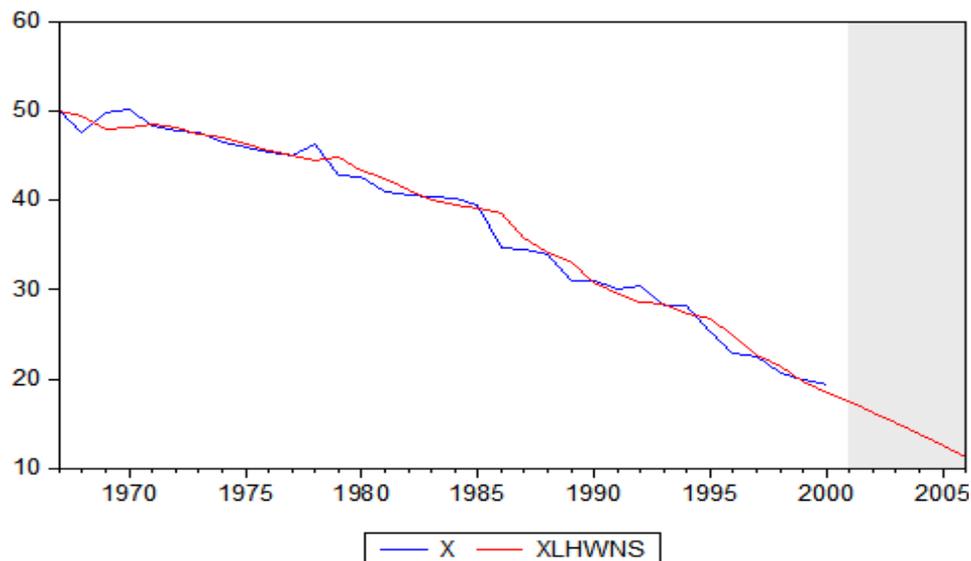


FIG. 3.5 – La série original (X) et la série lissée (XHWNS).

### 3.4 Comparaisons des performances prévisionnelles des deux méthodes :

Comparaisons des performances prévisionnelles des deux méthodes en utilisant le critère de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Squared Error)

---

	LED	LHWNS
Root Mean Squared Error(MSE)	1.290804	1.280055

TAB. 3.4 – Comparaisons des performances prévisionnelles des deux méthodes en utilisant RMES

La valeur du RMSE pour la méthode du LHWNS est la plus petite  
D'où on peut conclure donc que la méthode de LHWNS est la meilleur.

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté les méthodes de lissage exponentiel pour la prévision à savoir LES, LED, LHWNS et LHWS.

Nous avons appliqué ces méthodes pour des données réelles qui représentent le taux brut de naissance en Algérie (1967-2000). Pour cela nous avons fait recours au logiciel Eviews.

L'analyse de la série a montré qu'elle est de nature tendancielle et non saisonnière, ceci nous a permis d'appliquer les méthodes LED et LHWNS (les seules méthodes adaptées à nos données).

Nous avons calculé la prévision à l'horizon  $h=6$ .

Enfin, nous avons comparé les résultats de prévision obtenu à l'aide du critère RMSE et nous avons conclu que les résultats obtenu à partir de la méthode LHWNS sont meilleurs.

# Bibliographie

- [1] Agnés. Lagnoux. Séries Chronologiques. Université de Toulous le Mipail.
- [2] Agung, I.G.N (2009). Time Series Data Analysis Using Eviews, John Wiley & Sons. Singapore.
- [3] Asteriou, D. et HallS.G. (2006). Applied Econometrics A Modern Approach Using Eviews and Microfit. Palgrave Macmillan, New York.
- [4] Arthur Gharpentier.(15 mai 2012 ). Méthodes de Prévission Séries Temporelles. UQAM. ACT6420.Hiver.2011.
- [5] ARTHUR C, cours de series temporelles theorie et Applications. université Paris DAUPHINE.
- [6] CATHRINE PARDOUX & BERNARD GOLDFARB.(janvier 2013). Prévission à court terme :méthodes de lissage exponentiel. Université de Paris-Douphien.
- [7] David Makowski. (Novembre 2014). Introduction de séries chronologiques et à la prévission. Agro Paris Thec.
- [8] Doz, M. (2005). Séries temporelles linéaires ,Deuxième année. Ecole Nationale de la statistiques et de l'Administration Economique.
- [9] Ecole des Mines de Nancy. Modélisation et Prévission. cours SG042.
- [10] Jaiw, C. (2015). Séries chronologiques saisonnières et prévission.
- [11] Guy.MELARD. (1990). Méthodes de Prévission I (Stat-D-205). Université Libre de Bruxelles.
- [12] MICHEL TERRAZA. (1981). Prévission à court terme des séries temporelles économiques. Journal de la société.Staistique de Paris.
- [13] M.C.Viano.(2004).Cours de séries Temporelles. Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [14] MECHRI Khadidja. (2016). Application de la Méthodologie Box-Jenkins sur la série du nombre des séances d'hémodialyse. Université Kasdi Merbah Ouar-gla.
- [15] Merouani, L. (2016). Demonsionnement de la NAFTAL SPA. Mémoire de Master, université M'hamed Bougara Boumerdse.

- 
- [16] Pr.Lotfi.Bouzaïane et Pr.Rim.Mouelli.(2008). Université Virtuelle de Tunis.  
[17] Walter Enders, « Applied econometric time series », Wiley series, 1995.

### Résumé

Cette étude consiste à la prévision de taux brut de naissance en Algérie (1967-2000).

Dans cette étude, nous avons utilisé les méthodes de lissage exponentiel: lissage exponentiel simple, lissage exponentiel double et lissage exponentiel de Holt-Winters. Pour atteindre notre objectif

.Pour ce faire, on a utilisé le logiciel Eviews

.Mots clés: série chronologique, prévision, lissage exponentiel

### Abstract

Our objective is to study forecasting for the crude rate of births in Algeria (1967-2000).

In the study we used the method of exponential smoothness: exponential smoothness simple, exponential smoothness multiplex and exponential smoothness of Holt-Winters. To reach our objective we use the software Eviews

.Keywords: time series, forecasting, the exponential smoothing

### الملخص

الهدف من هذه الدراسة هو حساب التنبؤ للمعدل الخام للولادات في الجزائر ((1967-2000 .

و للوصول لهدفنا استعملنا طرق التلميس الأسي: التلميس الأسي البسيط و التلميس الأسي المضاعف و التلميس الأسي ل Holt-Winters و ذلك عبر برنامج إفيوز (Eviews).

الكلمات المفتاحية: سلسلة زمنية، تنبؤ، التلميس الأسي .