UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : GOUI Maissoune

Thème

Applications des espaces de Sobolev avec poids au problème de Stokes

Soutenu publiquement le : 03/ 07/ 2019

Devant le jury composé de :

MAFLAH Mabrouk	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
MZABIA Med Elhadi	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
KALICHE Keltoum	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire

à mon père et à ma mère

A mes soeurs (Anfal, Khadidja, Intisar, Abrar, Fatima)

et mes frèes(Ahmade, Dia, Bara).

A mon fiancé(Azzedine).

A ma tante(Sakina), son mari et ses enfants.

A ma grand-mère, mon grand-père, mes oncles et mes tantes.

A mon oncle(Bouhania).

A mes amies(Nour El houda, Bouchra, Ibtissam, Masouda, Amale, Saliha, Hani, Djouhaina, Kawtar, Aabir, Mounira, Yosra, Asma).

Remerciement

En premier lieu, je tient à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail.

Je tiens tout à remercier mon encadreur Mademoiselle. Kaliche. Keltoum pour sa gentiellesse, son aide, ses conseils et sa disponibilité dans ce travail.

Je remercie également „Maflah Mabrouk„et „Mzabia Med Elhadi„pour avoir participé a mon jury de soutenance.

Un grandmarci a tous les membres des Departement de Mathematiques.

Enfin, je tiens à remercier tous mes proches pour leur soutien de tous les instants.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La modélisation des écoulements des fluides a connu au dix-neuvième siècle une avancée considérable. Les équations dérivées par L.M.H. Navier et C.G. Stokes, qui portent aujourd'hui leurs noms, en sont la trace la plus marquante. Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude du problème de Stokes qui est un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes. Ce problème modélise des écoulements stationnaires lents de fluides visqueux dans $\mathbb{R}^3$. Ce problème s'écrit dans sa forme la plus simple :

$$(\boldsymbol{P}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \\ \boldsymbol{div\ u} = \boldsymbol{g} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{f}$ une force massique s'exerçant dans le fluide, . Le problème consiste à trouver le champ de vitesses $\boldsymbol{u}$, la pression $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{\nu}$ une constante strictement positive.

Ce problème est complètement étudié dans les espaces de Sobolev classiques lorsque le domaine est borné (Voir [5]). Lorsque le domaine est non borné, il est nécessaire de décrire le comportement à l'infini des solutions. Pour cela, nous utilisons des espaces à poids. Le rôle de ces poids est de contrôler le comportement à l'infini des fonctions considérées. De nombreux auteurs ont traité le problème de Stokes dans des domaines non bornés et ont introduit divers cadres fonctionnels. On cite par exemple les références [9] et [7].

L'objectif de ce travail est de résoudre le problème $(\boldsymbol{P})$ dans tout l'espace $\mathbb{R}^3$ en utilisant les espaces de Sobolev avec poids comme cadre fonctionnel et de présenter quelques résultats concernant les opérateurs de gradient et divergence. Ce mémoire se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre de ce mémoire est dévoué aux notations, définitions et propriétés fondamentale des espaces de Sobolev avec poids. La plupart de ces propriétés sont connus dans la littérature, elles seront énoncées sans démonstration.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons certains résultats concernant les opérateurs gradient et divergence qui seront utilisés dans le chapitre suivant.

Dans le dernier chapitre, nous étudions le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$ où on va donner des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème.

CHAPITRE 1

CADRE FONCTIONNEL :L'ESPACE DE SOBOLEV À POIDS

1.1 L'espace de Sobolev à poids

1.1.1 Notations générales

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et $D'(\Omega)$ son dual.
A tout réel $p \in]1, +\infty[$, on note par q le conjugué de p défini par la relation suivante :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On rappelle que $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables telles que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty$$

qui, muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^p \, dx)^{1/p},$$

est un espace de Banach dont le dual est $L^q(\Omega)$.

Pour tout entier naturel m, désignera l'espace de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall \lambda \in \mathbb{N}^3, |\lambda| \leqslant m, \partial^\lambda v \in L^p(\Omega)\}.$$

Tout ses espaces seront munis de leurs normes naturelles.

On note $\mathcal{P}_l$ (resp.$\mathcal{P}_l^\Delta$) l'espace des polynôme (resp. polynôme harmoniques) sur Ω de degré inférieur ou égal à l. On convient que $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l^\Delta = \{0\}$ si $l < 0.$

D'autre part, pour tout sous-espace fermé Y d'un espace de Banach X, on note X/Y l'espace quotion de X par Y et le polaire de Y dans le dual X' de X :

$$X' \perp Y = \{f \in X', \forall v \in y, \langle f, v\rangle = 0\},$$

Nous définissons la fonction poids de base

$$\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$$

avec $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^3$.

1.1.2 Définition de l'espace à poids

Définition 1.1.1 *soient $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^3$ et $p \in]1, +\infty[$. On définit l'espace de Sobolev à poids*

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3) = \{u \in D'(\mathbb{R}^3), \forall \lambda \in \mathbb{N}^n \quad 0 \leqslant \mid \lambda \mid \leqslant m, \rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^3)\};$$

cet espace est muni la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\lambda|\leq m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right)^{1/p}.$$

On définit aussi la semi-norme :

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\rho^{\alpha}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right)^{1/p}.$$

Cette définition a été introduit par Hanouzet dans [8] et elle est utilisé dans le cas où

$$n/p + \alpha \notin \{1, ..., m\}.$$

Dans le cas contraire c-à-d quand $n/p + \alpha \in \{1, ..., m\}$ on ajoute des poids logaritmique. Donc, la définition précédente sera modefié comme suit :

Définition 1.1.2 *Pour tout nombres entiers non négatif n et m, et pour tout $p < 1$, α et β nombres réels, on pose*

$$K = K(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} -1 \text{ si } \dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}, \\ \\ m - \dfrac{n}{p} - \alpha \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Etant donné un entier $m \geqslant 0$ et réels α, β et $p \geqslant 1$ on pose : et l'espace :

$$W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega) = \Big\{u \in D'(\Omega);\ \ \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, \quad 0 \leqslant |\lambda| \leqslant k, \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{\beta-1}D^\lambda u \in L^p(\Omega);$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n;\ \ k+1 \leqslant |\lambda| \leqslant m, \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{\beta}D^\lambda u \in L^p(\Omega)\Big\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\frac{\rho^{\alpha-m+|\lambda|}}{\lg \rho}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \sum_{|\lambda|=m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right)^{1/p}.$$

1.2 Propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)$

On rappelle ici quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)$. Pour la démonstration de ces propriétés voir Amrauche [1] et Hanouzet [8].

1. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)$.

2. Le dual de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)$ noté $W_{-\alpha}^{-m,q}(\mathbb{R}^3)$ est un espace de distribution.

3. Si $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}$, nous avons les inclusions suivantes :
$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow ... \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\mathbb{R}^3). \tag{1.1}$$
avec injections continues.

4. L'opérateur de dérivtion :
$$\mathcal{D}^\lambda : W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow W_\alpha^{m-|\lambda|}(\mathbb{R}^3)$$
$$u \longmapsto \mathcal{D}^\lambda u$$
est linéaire et continue pour $\lambda \in \mathbb{N}^3$.

5. Pour $\lambda \in \mathbb{N}^3$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, alors l'application définie par
$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow W_{\alpha-\gamma}^{m,p}(\mathbb{R}^3)$$
$$u \longmapsto \rho^\gamma u$$
est un isomrphisme pour tout $m \in \mathbb{N}$.

6. L'espace $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)$ contient les polynômes de degré inférieur ou égale à q avec
$$q = [m - \alpha - n/p] \, .$$
Où $[x]$ est la partie entière de x.

1.2.1 Inégalité de Hardy

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement important dans les espaces á poids, notamment pour étendre des inégalités de type Poincaré ou Poincaré-Wirtinger ou encore de Deny-Lions á des domaines non bornés.

Lemme 1.2.1 *(Amrouche voir[1]) Soit β et p deux nombres reél avec $\beta \neq -1$ et $p \in]1, \infty[$ et soit f une fonction mesurable définie sur $[0, \infty[$ de sorte que :*

$$\int_0^{\infty} |f(r)|^p r^{\beta+p} dr < +\infty.$$

Soit

$$|F(r)| = \begin{cases} -\displaystyle\int_r^{\infty} f(t)\ dt \text{ si } \beta > -1, \\ \displaystyle\int_0^{r} f(t)\ dt \text{ si } \beta < -1. \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^{\infty} |F(r)|^p r^{\beta}\ dr \ \leqslant \left(\frac{p}{\beta+1}\right)^p \int_0^{\infty} |f(r)|^p r^{\beta+p}\ dr.$$

On peut trouver une démonstration plus simple, utilisant une intégration par parties dans la définition de $F(r)$ et l'inégalité de Holder, (voir [1],[3] ou [11]).

Une conséquence importante de ce Lemme le Corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2 *(voir Giroire [11]) Soit $\Omega = \mathbb{R}^3_+$ ou $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$, où ω est un domaine borné nou vide et lipschitzien*

On suppose que

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}.$$

Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall u \in \mathring{W}_{\alpha}^{m,p}(\Omega), \|u\|_{\mathring{W}_{\alpha}^{m,p}(\Omega)} \leqslant C_1 |u|_{m,\alpha,\Omega},$$

où

$$|u|_{m,\alpha,\Omega} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x\rangle^{\alpha} \mathcal{D}^{\lambda} u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1\backslash p}.$$

1.2.2 L'espace de Trace

Afin de définir les traces de fonctions de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^3_+)$, pour tout $\sigma\ \in]0,1[$, on introduit l'espace :

$$W_0^{\sigma,p} = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3); w^{-\sigma}u \in L^p(\mathbb{R}^3) \text{ et}$$
$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dx\ dy < \infty\},$$

Où $w = \varrho$ si $n/p \neq \sigma$ et $w = \varrho(lg\ \varrho)^{1/p}$ si $n/p = 0$. C'est un espace réflexif de Banach doté de sa norme naturelle :

$$\|u\|_{W_0^{\sigma,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\left\| \frac{u}{w^{\sigma}} \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dx\ dy \right),$$

De même, pour tout nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons l'espace :

$$W_{\alpha}^{\sigma,p} = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3); w^{\alpha-\sigma}u \in L^p(\mathbb{R}^3)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|\varrho^{\alpha}(x)u(x)-\varrho^{\alpha}(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dx\ dy < \infty,$$

Où $w = \varrho$ si $n/p \neq \sigma$ et $w = \varrho(lg\ \varrho)^{1/\sigma+p}$ si $n/p+\alpha = \sigma$. Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, nous fixons

$$W_{\alpha}^{s,p}(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3); 0 \leqslant |\lambda| \leqslant k, \varrho^{\alpha-s+|\lambda|}(lg\ \varrho)^{-1}\partial^{\lambda}u \in L^p(\mathbb{R}^3);$$

$$k+1 \leqslant |\lambda| \leqslant [s]-1, \varrho^{\alpha-s+|\lambda|}\partial^{\lambda}u \in L^p(\mathbb{R}^3); |\lambda| = [s], \partial^{\lambda}u \in W_{\alpha}^{\sigma\sigma,p}(\mathbb{R}^3)\},$$

Où $k = s - n/p + \alpha$ si $n/p+\alpha \in \{\sigma, ..., \sigma+[s]\}$, avec $\sigma = s-[s]$ et $k = -1$ autrement, c'est un espace réflexif de Banah équipé de la norme :

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{s,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{0\leqslant|\lambda|\leqslant k} \|\varrho^{\alpha-s+|\lambda|}(lg\ \varrho)^{-1}\partial^{\lambda}u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \sum_{k+1\leqslant|\lambda|\leqslant[s]-1} \|\varrho^{\alpha-s+|\lambda|}\partial^{\lambda}u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right)^{1/p}$$
$$+ \sum_{|\lambda|=[s]} \|\partial^{\lambda}u\|_{W_{\alpha}^{\sigma+p}(\mathbb{R}^3)}.$$

1.2.3 Théorème de Trace

Théorème 1.2.3 *(Hanouzet [8]) Il existe une application linéaire continue* $\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_{m-1})$ *de* $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ *dans*
$\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-1/p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n - 1)$ *avec les propriétés suivantes.*

1. *pour* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$,

$$\gamma u = (u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial y}(x', 0), ..., \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x', 0))$$

2. *est une application surjective.*

3. $\gamma^{-1}(0) = \mathring{W}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$.

1.3 Equation de poisson dans $\mathbb{R}^3$

Les résultats suivants sont fondamentaux dans l'étude de la régularité et du comportement à l'infini pour résoudre le problème des Stokes. Les preuves de ces résultats se trouvent dans (Amrauche [8]).

Théorème 1.3.1 *Soient* m*,* l *des entiers naturels et* $p \in]1, +\infty[$*. Les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :*

$$\Delta : W^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \to W^{-1,p}_{-l}(\mathbb{R}^3) \quad si \quad l > 0 \quad et \quad n/p \notin \{1, ..., l\}, \tag{1.2}$$

$$\Delta : W^{1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \to W^{-1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^3) \perp \mathcal{P}_{[1-n/q]} \quad si \quad n/q \neq 1 \quad ou \quad m = 0. \tag{1.3}$$

Théorème 1.3.2 *Soient* m *et* l *deux entiers strictement positive. Les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :*

$$\Delta : W^{1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \to W^{-1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^3) \quad si \quad n/p \notin \{1, ..., l-m\}, \tag{1.4}$$

$$\Delta : W^{m+1,p}_{m+1}(\mathbb{R}^3) \to W^{m-1,p}_{l+m}(\mathbb{R}^3) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/q]} \quad si \quad n/q \notin \{1, ..., l+1\}. \tag{1.5}$$

Ces deux théorème permettent d'obtenir d'autres isomorphismes par dualité. Par exemple, si $n/p \notin \{1, ..., l\}$ l'adjoint Δ^* de l'isomorphisme :

$$\Delta : W_l^{1,p}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}^*_{[l+1-n/p]} \longrightarrow W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^3), \tag{1.6}$$

est un isomorphisme de $W_l^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ dans $W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]}$.

CHAPITRE 2

QUELQUES PROPRIÉTÉES DES OPÉRATEURS GRADIENT ET DIVERGENCE

Cette section décrit certaines propriétés des opérateurs gradient et divergence dans les espaces de Sobolev avec poids.

2.1 Notations

Nous donnons brièvement les notions générales des opérateurs gradient, divergence et rotation.

La gradient

Le champ vectoriel $\vec{u}$ s'exprime par un opérateur normmé gradient que l'on note :

$$\vec{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La divergence

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{u}$ est un scalaire défini par :

$$div(\vec{u}) = \nabla.\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Le rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{u}$ est un vecteur défini par :

$$\vec{rot}\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

On définit le polynôme

$$\mathcal{G}_l = \{\nabla q, q \in \mathcal{P}^{\Delta}_{l+1}\} \text{ et } \mathcal{G}_0 = \mathbb{R}^3.$$

On définit à cet effet les espaces

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), div\ u = 0\},$$

et

$$V^{m,p}_{\alpha} = \{u \in W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^3); div\ u = 0\}.$$

2.2 Résultats préliminaires

On cite les résultats suivantes :

Lemme 2.2.1 *(Amrouche [1]) soit $l > 0$ un entier et p satisfaisant pour tout distribution g telle que ∇g appartient à $W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$, il existe une constante k telle que $g + k \in W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ De plus k est unique dés que $n/p < l$.*

Preuve. Considérons une telle distribution g, alors $\Delta g = div\ (\nabla g)$ est élément de $W_{-l}^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$.
Dans le premier cas supposons $l > 1$:
En raison de $(1, 5)$, il ya une distribution u dans $W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ telle que,

$$\Delta u = \Delta g. \tag{2.1}$$

Cependant, g n'étant pas nécéssairement tempérée, on ne peut pas conclure que la différence $u - g$ est un polynôme harmonique. Alors que (2.1) implique que $(\nabla u - \nabla g)$ est harmonique tempérée, puisqu'élément de $W_{-l}^{-1,p}$.
Par conséquent, il existe un polynôme $\lambda \in \mathcal{P}_{[l-1-n/p]}^{\Delta}$ tel que,

$$\nabla g = \nabla u + \lambda.$$

à supposer que le polynôme λ Soit le gradient d'un polynôme $\mu \in \mathcal{P}_{[l-n/p]}$ et donc à $W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$.
La fonction $v \in W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$, $v = u + \mu$ et vérifie $\nabla g = \nabla v$, ce qui montre que g et v différent d'une constante.
Dans le deuxiémme cas supposons $l = 1$:
La démonstration est identique à l'exception de la premiére étape. En effet, on dispose pour résoudre (2.1) de l'isomorphisme :

$$\Delta : W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \to W_{-1}^{-2,p}(\mathbb{R}^3)\perp\mathcal{P}_{[1-n/q]}.$$

Lorsque $q < n$, on peut applique à la lettre le raisonnement précédent; Alors que, si $q \geq n$ on doit s'assurer que

$$\langle \Delta g, l \rangle_{W_{-1}^{-2,p} \times W_{1}^{2,q}} = 0.$$

Donc, il suffit de vérifier que pour tout $\varphi \in W_1^{2,q}(\mathbb{R}^3)$, on a l'égalité :

$$-\langle \Delta q, \varphi \rangle_{W_{-1}^{-2,p} \times W_1^{2,q}} = \langle \nabla q, \nabla \varphi \rangle_{W_{-1}^{-1,p} \times W_1^{1,q}}.$$

C'est évidemment le cas si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, et par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \subset W_1^{2,q}(\mathbb{R}^3)$ la relation a lieu si $\varphi \in W_1^{2,q}(\mathbb{R}^3)$. ■

le résultat suivant concerne l'opérateur divergence :

Proposition 2.2.1 *(De Rham [5]) Soient $l \in \mathbb{N}$ et $p \in]1, \infty[$. Les opérateurs suivants sont des isomorphisme :*

$$div : W_{-l}^{1,q}(\mathbb{R}^3)/V_{-l}^{1,q} \longrightarrow W_{-l}^{0,q}(\mathbb{R}^3) \text{ si } n/q \notin \{1, ..., l\}, \tag{2.2}$$

$$div : W_{l}^{1,q}(\mathbb{R}^3)/V_{l}^{1,q} \longrightarrow W_{l}^{0,q}(\mathbb{R}^3) \text{ si } n/p > l, \tag{2.3}$$

$$div : W_{l}^{1,q}(\mathbb{R}^3)/V_{l}^{1,q} \longrightarrow W_{l}^{0,q}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{R} \text{ si } n/q \notin \{1, ..., l\} \text{ et } n/p < l. \tag{2.4}$$

Preuve. Comme ces opérateurs sont clairement injectifs et continus, donc il reste juste à prouver qu'ils sont aussi surjectifs.

Dans les deux premiers cas, on construit des inverses explicites de ces opérateurs en posant $(div)^{-1} = \nabla(\Delta^{-1})$. En plus, appliquons (1.3), (1.4) ou (1.5) avec $m = 1$, on obtient alors les isomorphismes :

$$\Delta : W_{-l}^{2,p}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}_{[2+l-n/q]} \rightarrow W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^3) \quad \text{si} \quad n/q \notin \{1, ..., l\},$$

$$\Delta : W_{l}^{2,q}(\mathbb{R}^3) \rightarrow W_{l}^{0,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathcal{P}_{[l-n/p]}^{\Delta} \quad \text{si} \quad n/p \notin \{1, ..., l\},$$

Desquels on déduit respectivement (2.2) et (2.3).

D'autre part, pour montrer la surjectivité de (2.4), la construction précédente ne fonctionne plus en raison des conditions d'orthogonalité qui apparaissent pour définir l'inverse de Laplacien. Donc, nous allons démontrer le résultat sur l'opérateur de gradient correspondant que nous pouvons facilement voir comme étant injectif et continu. Pour prouver sa surjectivité, nous observons d'abord que toute distribution de f de $W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp V_l^{1,q}$ est orthogonale aux fonctions de $\mathcal{V}$ et satisfait donc l'hypothèse du théorème de Rham, il existe donc une distribution g telle que $\nabla g = f$. Il suffit donc d'appliquer le lemme $2.2.1$ à g pour conclure. ■

Corollaire 2.2.2 *(voir Bab [2] et Bre [4]) Pour tout entier naturel et $p \in]1, \infty[$, il existe une constante C strictement positive telle que :*

$$\inf_{\substack{\psi \in W_l^{0,p} \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in W_{-l}^{1,q} \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\ div\ \varphi(x)\ dx}{\|\psi\|_{W_l^{0,p}} \|\varphi\|_{W_{-l}^{1,q}}} \geq C \text{ si } n/q \notin \{1, ..., l\}, \tag{2.5}$$

$$\inf_{\substack{\psi \in W_l^{0,p} \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in W_{-l}^{1,q} \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\ div\ \varphi(x)\ dx}{\|\psi\|_{W_{-l}^{0,p}} \|\varphi\|_{W_l^{1,q}}} \geq C \text{ si } n/p > l, \tag{2.6}$$

$$\inf_{\substack{\psi \in W_{-l}^{0,p}/\mathbb{R} \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in W_l^{1,q} \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\ div\ \varphi(x)\ dx}{\|\psi\|_{W_l^{0,p}/\mathbb{R}} \|\varphi\|_{W_{-l}^{1,q}}} \geq C \text{ si } n/q \notin \{1, ..., l\} \text{ et } n/p < l. \tag{2.7}$$

Preuve. C'est un résultat direct de la proposition (2.2) et du résultats suivant du à ˝Babuzka et Brezzi˵. Soient X, M deux espaces de Banach réflexifs, a une forme bilinéaire sur $X \times M$, et les opérateurs linéaires $A : X \to M'$ et $A^* : M \to X'$ définis pour tout $(v, \omega) \in X \times M$ par

$$a(v, \omega) = \langle A\ v, \omega \rangle_{M' \times M} = \langle v, A^* \omega \rangle_{X \times X'}.$$

On pose $N = KerA$. Les trois affirmations sont équivalentes :

1. A est un isomorphisme de X/N dans M'.
2. A^* est un isomorphisme de M dans $X' \perp N$.
3. Il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\inf_{\substack{\omega \in M \\ \omega \neq 0}} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{a(v, \omega)}{\|v\|_X \|\omega\|_M} \geqslant C.$$

On se limite d'établir (2.5), un raisonnement similaire valable pour (2.6) et (2.7).
En effet, on pose

$$X = W_{-l}^{1,q}(\mathbb{R}^3),$$

$$M = W_l^{0,p}(\mathbb{R}^3),$$

$$a(v, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} v\ div\ \omega\ dx.$$

On obtient, si $n/q \notin \{1, ..., l\}$ l'équivalence de la propriété (2.2) avec la condition (2.5). ■

Proposition 2.2.2 *(Girault [10]) Soit l un entier naturel non nul. Si $n/q \in \{1, ..., l\}$, alors $\mathcal{V}$ est dense dans $V_l^{1,p}$.*

Preuve. Il suffit de montrer que chaque forme linéaire continue sur $V_l^{1,p}$ qui s'annule sur $\mathcal{V}(\mathbb{R}^3)$ est indentiquement nulle. Considérons donc $T \in (V_l^{1,p})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{V}, \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Puisque $V_l^{1,p}$ est un sous-espace fermé de $W_l^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, la théorème de ˝Hahn-Banach˵indique que nous pouvons prolonger T en une distribution $\tilde{T}$ qui appartient à $W_{-l}^{0,q}(\mathbb{R}^3)$. Selon la théorème deRham, il existe une distribution b telle que $\tilde{T} = \nabla f$. De plus, b vérifie les hypothèses du Lemme $(2.2.1)$; Alors, il existe un constante K telle que $f + K$ appartient à $W_{-l}^{0,q}(\mathbb{R}^3)$. Donc, pour toute fonction $\mathcal{X}$ de $V_l^{1,q}$,

$$\begin{aligned} \langle T, \mathcal{X} \rangle &= \langle \tilde{T}, \mathcal{X} \rangle \\ &= \langle \nabla f, \mathcal{X} \rangle_{W_{-l}^{-1,q} \times W_l^{1,p}} \\ &= \langle f + K, div\mathcal{X} \rangle_{W_{-l}^{0,q} \times W_l^{0,p}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

qui prouve que T est nul. ∎

Lemme 2.2.3 *(Girault [10]) Soit m et l appartient à Z et soit f une fonction harmonique dans W_{m-l}^m. Alors f appartient à $\mathcal{P}_{l-2}^{\Delta}$. En particulier, $f = 0$ quand $l < 2$.*

Propriété de l'opérateur rotationnel on a les résultats suivantes :

Lemme 2.2.4 *(Bab [2] et Bre [4]) Soit m et l appartient à Z et que v soit un élément de W satisfaisant :*

$$div\ v = 0 \text{ et } rot\ v = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

Alors chaque composante de v appartient à $\mathcal{P}_{l-2}^{\Delta}$. En particulier, $v = 0$ quand $l < 2$. Maintenant, nous introduisons trois espaces fréquemment liés à la condition de ˝Babuska Brezzi˵"$\inf - \sup$"

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}^3) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3; div\ \varphi = 0\}, \tag{2.8}$$

$$V_l^m(\mathbb{R}^3) = \{v \in W_l^m(\mathbb{R}^3)^3; div\ v = 0\}, \tag{2.9}$$

et l'espace polaire de $V_l^m(\mathbb{R}^3)$:

$$[V_l^m(\mathbb{R}^3)]^0 = \{f \in W_l^m(\mathbb{R}^3)^3; \langle f, v \rangle = 0 \forall v \in V_l^m(\mathbb{R}^3)\}. \tag{2.10}$$

Lemme 2.2.5 *(Girault [10]) Soit $l \geq 1$ un entier. Soit v un vecteur polynômial donné dans $\mathcal{P}_{l-1}^3$ tel que $div\ v = 0$ et u soient un polynôme de $\mathcal{P}_{l-1}$. Il existe alors un vecteur polynômial w unique dans $\mathcal{P}_l^3/\mathcal{G}_l$ tel que*

$$rot\ w = v \text{ et } div\ w = u$$

L'application $(v, u) \mapsto w$ est linéaire.

Preuve. On pose $s = (s_1, s_2, s_3)$ et $f = (f_1, f_2, f_3)$. On note ∂_i la dérivée partielle ∂/∂_{x_i} et γ_i denote la primitive qui s'annule lorsque $x_i = 0$ $(i.e.\gamma_i(x_i^{\alpha_i}, x_j^{\alpha_j}, x_k^{\alpha_k}) = \dfrac{1}{\alpha_i + 1} x_i^{\alpha_i+1} x_j^{\alpha_j} x_k^{\alpha_k})$. L'espace polynomial γ_i est bien défini. Pour commencer, nous construisons un vecteur polynomial w dans $\mathcal{P}_l^3$ qui satisfait la premiére condition du Lemme, i.e. tel que nous avons $\partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 = v_1$, $\partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 = v_2$ et $\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 = v_3$. Prenons $w_3 = 0$. Pour satisfaire les deux premières équations, nous choisissons $w_2 = -\gamma_3 v_1$ et $w_1 = \gamma_3 f_2$, qui sont deux polynômes de $\mathcal{P}_l$. Puisque, $\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3 = 0$, il est facile de vérifier que la troisième équation est nécessairement satisfaite.

La deuxième condition découle facilement de la propriété 2. En effet, $div\ w - u$ appartient à $\mathcal{P}_{l-1}$ et selon 2, il existe p dans $\mathcal{P}_{l+1}$ tel que $\Delta p = div\ w - u$. Alors $w - \nabla p$ satisfait les deux condition de lemme.

D'aprés l'unicité, si le polynôme de w de $\mathcal{P}_l^3$ satisfait

$$rot\ w = 0 \text{ et } div\ w = 0$$

donc, $w = \nabla p$ pour certains p dans $\mathcal{P}_{l+1}$ et $\Delta p = 0$. D'où, w appartient à $\mathcal{G}_l$. La linéairité de l'application $(v, u) \mapsto w$ provient de cette unicité. ■

CHAPITRE 3

LE PROBLÈME DE STOKES DANS $\mathbb{R}^3$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution du problème de Stokes qui décrit l'écoulement stationnaire lent de fluide visqueux dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\boldsymbol{P}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \\ \boldsymbol{div}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Avec est $\boldsymbol{u}$ le champ des vitesses du fluide, $\boldsymbol{p}$ le champ de pression, $\boldsymbol{f}$ une force massique s'exercant dans le fluide, $\boldsymbol{g}$ fonction donnée, et $\boldsymbol{\nu}$ une constante strictement positive.
Dans tout la suite, on notera $(\boldsymbol{T})$ l'opérateur correspondant :

$$\boldsymbol{T} : (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \to (-\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{div}\ \boldsymbol{u})$$

On introduit pour tout entier $\boldsymbol{l}$ l'espace défini par Girault [8]

$$\boldsymbol{S}_l = \{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{P}_l^3 \times \mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}; \boldsymbol{div}\ \boldsymbol{\lambda} = 0 \text{ et } -\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mu} = 0\},$$

et

$$\boldsymbol{S}_0 = \mathbb{R}^3 \times \{0\}.$$

3.1 Existence et Unicité

Pour démontrer l'existence et unicité de la résolution du problème de Stokes dans un domaine illimité, nous utilisons le Théorème et les Lemme suivantes :

Lemme 3.1.1 *(Girault [10]) Pour tous les entiers $l \geqslant 0$, nous avons*

$$\mathcal{P}_l = div((\mathcal{P}_{l+1})^3).$$

Preuve. Le cas où $l = 0$ est facile. Pour $l \geq 1$. Soit p dans $\mathcal{P}_l^{\Delta}$. Appliquant deux fois le Lemme $2.2.5$, il existe d'abord μ dans $\mathcal{P}_l^3$ tel que $rot\ \mu = \nabla p$ et $div\ \mu = 0$. Et ensuite, il existe q dans $\mathcal{P}_{l+1}^3$ tel que $rot\ q = \mu$ et $div\ q = p$. Ainsi,

$$\Delta q = -rot\ rot\ q + \nabla div\ q = 0.$$

■

Lemme 3.1.2 *(Girault [10])*

1. *Pour tous les entiers $l \geqslant 0$, nous avons*

$$G_l \times \{0\} \subset S_l$$

2. *Pour tous les entiers $l \geq 0$, chaque p de $(\mathcal{P}_l^{\Delta})^3$ a la décomposition (non unique) :*

$$p = \nabla\ q + w$$

Où q appartient à $\mathcal{P}_{l+1}$, w appartient à $\mathcal{P}_l^3$ et le couple $(w, -\nu\nabla\ q)$ appartient à S_l. Inversement, lorsque p balaye $(\mathcal{P}_l^{\Delta})^3$ ses paires associées $(w, -\nu\nabla\ q)$ balayer S_l.

3. *Pour tous les entiers $l \geqslant 0$, pour chaque μ dans $\mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}$, il existe λ dans $\mathcal{P}_l^3$ tel que le couple (λ, μ) appartient à S_l.*

4. *Pour tous les entiers m dans $\mathbb{Z}$ et $l \geq 1$, la paire (u, p) dans $V_{m-l}^{m+2}(\mathbb{R}^3) \times W_{m-l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)$ est une solution de*

$$-\nu\ \Delta u + \nabla p = 0, div\ u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \tag{3.1}$$

Si et seulement si le couple (u, p) appartient à S_l. Ainsi, S_l est le espace nul de l'opérateur de Stokes en $W_{m-l}^{m+2}(\mathbb{R}^3)^3 \times W_{m-l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)$.

Preuve. La premiére propriété est triviale.

Quand $l = 0$, puisque toute constante c est le gradient d'un polynôme de degré un, la seconde propriété est facilement avec $w = 0$. Quand $l \geq 1$, on résout

$$\Delta q = div\ p$$

avec q dans $\mathcal{P}_{l+1}$ et on pose

$$w = p - \nabla\ q$$

On vérifie facilement que $(w, -\nu\Delta\ q)$ appartient à S_l.

La décomposition n'est évidemment pas unique, car si $p = 0$, on peut toujours écrire

$$p = \nabla\ q - \nabla\ q$$

pour tout q dans $\mathcal{P}_{l+1}^{\Delta}$. Inversement, prenons n'importe quel (w, u) dans S_l et résolevons

$$-\nu\Delta\ q = \mu$$

avec q dans $\mathcal{P}_{l+1}$. Alors $w + \nabla\ q$ appartient facilement à $(\mathcal{P}_l^{\Delta})^3$.

La troisième propriété découle facilement du Lemme $3.1.2$ et de la décomposition ci-dessus. En effet, si μ appartient à $\mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}$, alors il existe p dans $(\mathcal{P}_l^{\Delta})^3$ tel que

$$\mu = -\nu div\ p$$

Donc, la propriété 2 implique qu'il existe q dans $\mathcal{P}_l + 1$ et w dans $\mathcal{P}_l^3$ tel que

$$p = \nabla\ q + w$$

et le couple $(w, -\nu\Delta\ q = \mu)$ appartient à S_l.

Pour la quatrième propriété, si (u, p) est une solution de (3.1) dans $V_{m-l}^{m+2}(\mathbb{R}^3) \times W_{m-l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)$ alors $\Delta\ p = 0$ et par conséquence, p appartient à $\mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}$ qui implique que le couple (u, p) appartient à S_l. L'inverse est évident. ■

Théorème 3.1.3 *(Giroier [11]) Pour tout m dans $\mathbb{Z}$ et tout l dans $\mathbb{N}$ avec $l \geq 1$, l'opérateur de Laplace Δ est un isomorphisme de $W_{m+l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)$ sur le sous-espace de $W_{m+l}^{m-1}(\mathbb{R}^3)$ orthogonal à $\mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}$*

Dans la suite, nous traiterons fréquemment de la fonction harmonique. En particulier, nous utiliserons souvent les propriétés suivantes :

1. Les seules distributions tempérées qui sont harmoniques dans $\mathbb{R}^3$ sont les polynômes.
2. pour tous les entiers $n \geq 2$, $\mathcal{P}_{n-2} = \Delta \mathcal{P}_n$.

La preuve de ces deux proprièteé peut être trouvée dans [8].

Théorème 3.1.4 *(Girault [10]) Soit m appartient à Z et $l \geq 1$ appartient à $\mathbb{N}$. L'opérateur de Stokes*

$$\begin{aligned} T: \quad (W^{m+2}_{m+l}(\mathbb{R}^3))^3 \times W^{m+1}_{m+l}(\mathbb{R}^3) &\rightarrow [(W^{m}_{m+l}(\mathbb{R}^3))^3 \times W^{m+1}_{m+l}(\mathbb{R}^3)] \perp S_{l-2} \\ (u, p) &\rightarrow (-\nu\Delta u + \nabla p, -div\ u) \end{aligned}$$

est une isomorphisme. En particulier, lorsque $l = 1$, le problème de Stokes non homogène a une solution unique sans aucune contrainte d'orthogonalité sur les données.

Preuve. Supposons que le problème de Stokes non homogène

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \mathbb{R}^3; \ -div\ u = g \text{ dans } \mathbb{R}^3 \tag{3.2}$$

a une solution u dans $(W^{m+2}_{m+l}(\mathbb{R}^3))^3$ et p dans $W^{m+1}_{m+l}(\mathbb{R}^3)$. Prenons, la divergence des deux côtés de la première équation en (3.2) :

$$\Delta p = div\ f + \nu div\ \Delta u = div\ f - \nu\Delta g. \tag{3.3}$$

Alors, selon le théorème $3.1.3$, $div\ f - \nu\Delta g$ doit être orthogonal à $\mathcal{P}^{\Delta}_{l-1}$. D'autre part,

$$-\nu\Delta u = f - \nabla p$$

il en résulte encore du théorème $3.1.3$ que $f - \nabla p$ doit être orthogonal à $(\mathcal{P}^{\Delta}_{l-2})^3$. Lorsque $l = 1$, ces deux orthogonalités sont satisfaits sans aucune condition sur f et g. Ceci est cohérent avec l'énoncé de théorème car dans ce cas, $S_{l-2} = \{(0, 0)\}$. Considérons le cas dans lequel $l \geq 2$, on applique la propriété 2 du Lemme $3.1.2$, chaque z dans $(\mathcal{P}^{\Delta}_{l-2})^3$ est de la forme

$$z = \nabla q + \omega,$$

avec q dans $\mathcal{P}_{l-1}$, ω dans $\mathcal{P}_{l-2}^3$ et $div\ \omega = 0$. Par conséquent, cette dernière relation implique que

$$0 = \langle f - \nabla p, z\rangle = \langle f, \omega\rangle - \langle div\ f, q\rangle + \langle \Delta p, q\rangle + \langle p, div\ \omega\rangle.$$

Avec (3.3), cela donne

$$\langle f, \omega\rangle + \langle g, -\nu\Delta q\rangle = 0.$$

Mais il découle du Lemme $3.1.2$ que la paire $(\omega, -\nu\Delta q)$ balaie S_{l-2}. Donc (f, g) doit être orthogonal à S_{l-2}. Notez que cela implique automatiquement que $div\ f - \nu\Delta g$ doit être orthogonal à $\mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}$. Pour p appartient à $\mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}$,

$$\langle div\ f - \nu\Delta g, p\rangle = -\langle f, \nabla p\rangle - \langle \nu g, \Delta p\rangle = -\langle f, \nabla p\rangle,$$

et selon la propriété 1 du Lemme $3.1.2$, le couple $(\nabla p, 0)$ appartient à S_{l-2}.
Inversement, Soit $(f, g) \in [W_{m+l}^{m}(\mathbb{R}^3)^3 \times W_{m+l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)] \perp S_{l-2}$. Alors, l'argument juste au dessus montre que $div\ f - \nu\Delta g$ est orthogonal à $\mathcal{P}_{l-1}^{\Delta}$. Par conséquence, le théorème $3.1.3$ implique donc qu'il existe un unique p dans $W_{m+l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)$ tel que 3 soit vrai :

$$\Delta p = div\ f - \nu\Delta g$$

et

$$\|p\|_{W_{m+l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1\|div\ f - \nu\Delta g\|_{W_{m+l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2(\|f\|_{W_{m+l}^{m}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W_{m+l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)}).$$

De même façon, nous déduisons comme ci-dessus que $f - \nabla p$ est orthogonal à $(\mathcal{P}_{l-2}^{\Delta})^3$. Par conséquence, une autre application du théorème $3.1.3$ montre qu'il existe un unique u dans $W_{m+l}^{m+2}(\mathbb{R}^3)^3$ tel que

$$-\nu\Delta u = f - \nabla p$$

et

$$\|u\|_{W_{m+l}^{m+2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\|f - \nabla p\|_{W_{m+l}^{m}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_4(\|f\|_{W_{m+l}^{m}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W_{m+l}^{m+1}(\mathbb{R}^3)}).$$

Il reste à prouver la deuxième équation en (3.2). Il découle de la première équation en (3.2) et (3.3) que

$$\Delta(div\ u + g) = 0.$$

Au vu du Lemme $2.2.3$, cela implique que $-div\ u = g$. ■

Théorème 3.1.5 *(Girault [10]) Soit m appartient à $\mathbb{Z}$ et l appartient à $\mathbb{N}$. L'opérateur de Stokes T est un isomorphisme de $[W^{m+2}_{m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times W^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)]/S_l$ sur $W^{m}_{m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times W^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)$.*

Preuve. La preuve procède par un argument de dualité. Pour f en $W^{m}_{m-l}(\mathbb{R}^3)$ et g dans $W^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)$, le problème (3.2) de Stokes non homogène est équivalent au problème variationnel faible :

Trouver un couple (u, p) dans $[W^{m+2}_{m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times W^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)]/S_k$ tel que

$$\forall (v, q) \in W^{-m}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)^3 \times W^{-m+1}_{+m-l}(\mathbb{R}^3), \tag{3.4}$$

$$\langle u, -\nu\Delta v + \nabla q\rangle - \langle p, divv\rangle = \langle f, v\rangle + \langle g, q\rangle$$

En effet, si (u, p) est une solution de (3.2) dans les espaces ci-dessus, alors par un argument de densité simple, nous obtenons

$$\forall (v, q) \in W^{-m}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)^3, \langle u, -\nu\Delta v\rangle - \langle p, div\ v\rangle = \langle f, v\rangle,$$

$$\forall q \in W^{-m+1}_{-m+l}(\mathbb{R}^3), \langle u, \nabla q\rangle = \langle g, q\rangle.$$

Ainsi, en ajoutant ces deux équations et en observant que chaque couple (λ, μ) dans S_l satisfait

$$\forall (v, q) \in W^{-m}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)^3 \times W^{-m-1}_{+m-l}(\mathbb{R}^3), \langle \lambda, -\nu\Delta v + \nabla q\rangle - \langle \mu, div\ v\rangle = 0,$$

Nous trouvons (3.4).

Inversement, si (u, p) est une solution de (3.4), alors en prenant d'abord $v = 0$ et ensuite $q = 0$, on obtient d'une part

$$-div\ u = g,$$

et d'autre part

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f.$$

Maintenant, on résout le problème (3.4). Nous appliquons le théorème $3.1.4$ avec $-m-2$ au lieu de m, $l+2$ au lieu de l et nous notons T^{-1} l'isomorphisme inverse de T. Ainsi, T^{-1} transforme $[W^{-m-2}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)^3 \times W^{-m-1}_{+m-l}(\mathbb{R}^3)] \perp S_l$ sur $W^{-m}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)^3 \times W^{-m-1}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi le problème (3.4) a une formulation équivalente :

Trouver une paire $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ dans $[\boldsymbol{W}^{m+2}_{m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times \boldsymbol{W}^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)]/\boldsymbol{S}_l$ telle que

$$\forall(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\zeta}) \in [\boldsymbol{W}^{-m-2}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)^3 \times \boldsymbol{W}^{-m-1}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)]\perp \boldsymbol{S}_l, \langle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\zeta})\rangle = \langle(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}),\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\zeta})\rangle. \tag{3.5}$$

Ce problème est un cas particulier du problème abstrait

Pour $\boldsymbol{l}$ donné dans $\boldsymbol{H}$, trouver $\boldsymbol{x}$ dans $\boldsymbol{X}$ tel que

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}', \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\rangle, \tag{3.6}$$

Où $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{H}$ sont deux espaces de Hilbert avec des espaces duals respectifs $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{H}'$, et $\boldsymbol{h}$ est un isomorphisme de $\boldsymbol{X}'$ sur $\boldsymbol{H}'$. La correspondance est la suivante :

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{W}^{m+2}_{m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times \boldsymbol{W}^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)]/\boldsymbol{S}_l,$$

$$\boldsymbol{X}' = [\boldsymbol{W}^{-m}_{-m+l}(\mathbb{R}^3)^3 \times \boldsymbol{W}^{-m+1}_{+m-l}(\mathbb{R}^3)]\perp \boldsymbol{S}_l,$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}^{m}_{m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times \boldsymbol{W}^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3),$$

$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{W}^{-m}_{-m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times \boldsymbol{W}^{-m-1}_{-m+l}(\mathbb{R}^3),$$

et $\boldsymbol{h}$ est $\boldsymbol{T}^{-1}$. Maintenant, pour $\boldsymbol{l}$ fixé dans $\boldsymbol{H}$, l'application

$$\boldsymbol{y} \mapsto \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\rangle \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}'$$

appartient à $(\boldsymbol{X}') = \boldsymbol{X}$; par conséquent, il définit un élément unique $\boldsymbol{x}$ dans $\boldsymbol{X}$ tel que

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}', \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\rangle,$$

et

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}} \leq \|\boldsymbol{l}\|_{\boldsymbol{H}} \|\boldsymbol{h}\|_{\boldsymbol{L}(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{H}')}.$$

Par conséquent, ce $\boldsymbol{x}$ est la solution unique du problème (3.6).

En appliquant ce résultat au problème (3.5), nous trouvons qu'il a une solution unique $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ dans $[\boldsymbol{W}^{m+2}_{m-l}(\mathbb{R}^3)^3 \times \boldsymbol{W}^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)]$ et

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\in \boldsymbol{S}_l}(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}\|_{\boldsymbol{W}^{m+2}_{m-l}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\mu}\|_{\boldsymbol{W}^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)}) \leq \|\boldsymbol{T}^{-1}\|(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}^{m}_{m+l}(\mathbb{R}^3)}\|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{W}^{m+1}_{m-l}(\mathbb{R}^3)})$$

Cela prouve le théorème. ■

CONCLUTION

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence et l'unicité du problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant les espaces de Sobolev avec poids. Ces espaces sont considérés comme un cadre fonctionnel adéquat pour la résolution des équations aux dérivées partielles dans domaine non borné. Ils permettent de récupérer la plupart des propriétés fonctionnelle du espaces de Sobolev classique, notamment l'inégalité de Poincaré, théorème de trace et les inclusions compactes qui sont perdus lorsque le domaine est non borné. En perspective, on propose d'approcher la solution du problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode des éléments finis inversés qui est une méthode d'approximation numérique sans troncature utilisé pour résoudre des problèmes elliptiques en domaines non bornés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroier. Weighled Sobolev spaces for the Laplace equation in $\mathbb{R}^3$. J. Math. Pures et Appliquées 20 :579-606, 1994.

[2] I. Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. Nunaer Math., 20 : 179-192, 1973.

[3] T. Z. Boulmezaoud. ON the Laplace operator and on the vector potential problems inthe half-space : an approach using Weighted spaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 26(8) : 633-669, 2003.

[4] F Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle points problems arising from Lagrange multipliers R0.A.I.R.O. , Ana. Num., R2 : 129-151, 1974.

[5] L. Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. Rend. Sem. Mat. Padova, 31 : 308-340, 1961.

[6] De Rham. Variétés differentiables. Hermann, 1960.

[7] R. Farwig, C.G.Simader, H. Sohr. An L^q-theory for weak solutions of the Stokes system in exterior domains. Math. Meth. in applied sciònces, 16 : 707-723, 1993.

[8] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids-Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace. Rend. del Sem. Mat. Delaa Univ. di Prdova, XLVI :227-272, 1971.

[9] G.P. Galdi, C.G. Simader. Existence uniqueness and L^q-estimates for the Stokes problem in exterior domain. Arch. Rat. Mech. Anal. 112 : 291-318, 1990.

[10] V. Girault. The gradient,curl and Stokes operators in Weighted Sobolev spaces of $\mathbb{R}^3$. J. Fac. Sci Univ. Tokyo, 39 :279-307, 1992.

[11] J. Giroier. Etude de quelques problème aux limites exterieurs et résolution par équations intégrales. PhD thesis, Université paris VI, 1987.

Abstract

In this work, we are interested in the study of the Stokes problem in R^3. weighted Sobolev spaces are used as a functional framework to describe the behavior of functions at infinity. Some results concerning the gradient and the divergence operators will be presented.

ملخص

في هذا العمل نهتم بدراسة مشكل ستوكس في الفراغ R^3 . أين يتم إستخدام فضاءات سوبوليف مع الأوزان كإطار وظيفي لوصف سلوك الدوال في اللانهاية كما سيتم عرض بعض النتائج المتعلقة بمؤثر التدرج و التباعد.

Résumé

Dans ce travail, on s'interesse à l'étude du problème de Stockes dans R^3. Les espaces de Sobolev avec poids sont employés comme un cadre fonctionnel pour décrire le comportement des fonctions à l'infini. Des résultats concernant les opérateurs gradient et divergence seront présentés.