Applications des espaces de Sobolev avec poids au problème de Stokes

Goui Maissoune(Encadreur : K.Kaliche)

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
gouimaissoune22@gmail.com

Résumé

Dans ce travail, on s'interesse à l'étude du problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$. Les espaces de Sobolev avec poids sont employés comme un cadre fonctionnel pour décrire le comportement des fonctions à l'infini. Des résultats concernant les opérateurs gradient et divergence seront présentés.

1. Introduction

Le problème principal dans l'étude de l'équation de Stokes posé dans domaine non borné est de determiner un cadre fonctionnel qui propose un large éventail des comportements à l'infini. Les espaces de Sobolev avec poids se présentent comme un outil largement efficace, qui ont un comportement à l'infini bien caractérisé. Les propriétés de certains opérateurs dans ce cadre fonctionnel sera présenté.

2. Cadre fonctionnelle :L'espace de Sobolev à poids

2.1 Définition

soient $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^3$ et $p \in]1, +\infty[$. On définit l'espace

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3) = \{u \in D'(\mathbb{R}^3), \forall\lambda \in \mathbb{N}^n \quad 0 \leqslant | \lambda | \leqslant m, \rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^3)\};$$

avec $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$ la fonction poids de base et $|x| = (x1 + x2 + x3)^{1/2}$ la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^3$
cet espace est muni la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right)^{1/p}.$$

On définit aussi la semi-norme :

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\rho^{\alpha}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right)^{1/p}$$

Cette définition est utilisé dans le cas où $n/p + \alpha \notin \{1, ..., m\}$. Dans le cas contraire c-à-d quand $n/p + \alpha \in \{1, ..., m\}$ du poids logaritmique.

2.2 propriétés fondamentales

1) Les injection continues suivantes :

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3) \subset W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^3) \quad \text{ssi} \quad m > 0, n/p + \alpha \neq 1 \quad \text{ou} \quad m \leq 0, n/\acute{q} - \alpha \neq 0, \quad (2.1)$$

2) **Théorème** (Inégalité de poincaré)
soient $m \geqslant 1$ un entier et α un réel quelconque . Alors, il existe une constante $C = C(m, n, p, \alpha) > 0$, telle que

$$\forall u \in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3), \|u\|_{W_\alpha^{m,p}/\mathcal{P}_{j'}} \leq C|u|_{W_\alpha^{m,p}}$$

où $j = \min(j, m-1)$. En particulier, la semi-norme $|.|_{W_\alpha^{m,p}}$ définit une norme équivalente à la norme de l'espace quotient $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^3)/P_j$.

3) **Equation de poisson dans** $\mathbb{R}^3$

1)**Théorème**
soient $p \in]1, +\infty[$ les opérateurs de laplace suivants sont des isomorphismes :
si m et l entiers naturels

$$\Delta : W_{-l}^{1,p}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}^\Delta_{[l+1-n/p]} \to W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \quad \text{si} \quad l > 0 \quad \text{et} \quad n/p \notin \{1, ..., l\},$$
$$\Delta : W_m^{1+m,p}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \to W_m^{-1+m,p}(\mathbb{R}^3)\perp\mathcal{P}_{[1-n/q]} \quad \text{si} \quad n/q \neq 1 \quad \text{ou} \quad m = 0.$$

si m et l deux entiers strictement positive

$$\Delta : W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}^\Delta_{[l+1-n/p]} \to W_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^3) \quad \text{si} \quad n/p \notin \{1, ..., l-m\},$$
$$\Delta : W_{m+1}^{m+1,p}(\mathbb{R}^3) \to W_{l+m}^{m-1,p}(\mathbb{R}^3)\perp\mathcal{P}^\Delta_{[l+1-n/q]} \quad \text{si} \quad n/q \notin \{1, ..., l+1\}.$$

2)**Théorème**
soit $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Il existe une unique fonction $u \in W_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}_{[1-n/q]}$ telle que,

$$-\Delta u = f$$

De plus, $\mathcal{D}^2 u$ appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ et il existe $C > 0$, dépendant seulement de n telle que,

$$\|u\|_{W_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}^r_{[1-n/q]}} + \|\mathcal{D}^2 u\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)}$$

3. les opérateurs gradient et divergence

1) **Lemme**
soit $l > 0$ un entier et p satisfaisant pour tout distribution g telle que ∇g appartient à $W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$, il existe une constante K telle que $g + K \in L^p_{-l}(\mathbb{R}^3)$ De plus K est unique dés que $n/p < l$.

2) **proposition**
soient $l \in \mathbb{N}$ et $p \in]1, \infty[$ les opérateurs suivants sont des isomorphisme : a)

$$div : W_{-l}^{-1,q}(\mathbb{R}^3)/V_{-l}^{1,q} \to W_{-l}^{0,q}(\mathbb{R}^3) \quad \text{si} \quad n/q \notin \{1, ..., l\},$$
$$div : W_l^{1,q}(\mathbb{R}^3)/V_l^{0,q} \to W_l^{0,q}(\mathbb{R}^3) \quad \text{si} \quad n/q > l,$$
$$div : W_l^{1,q}(\mathbb{R}^3)/V_l^{1,q} \to W_l^{0,q}(\mathbb{R}^3) \quad \text{si} \quad n/q \notin \{1, ..., l\} \quad \text{et} \quad n/p < 1.$$

b) Le gradient est un isomorphisme de $W_{\alpha-m}^{1-m}(\mathbb{R}^3)$ sur $V_m^{m-\alpha}(\mathbb{R}^3)$.
avec

$$V_\alpha^{m,p} = \left\{ u \in W_\alpha^{m-p}(\mathbb{R}^3), div\ u = 0 \right\}.$$

c) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

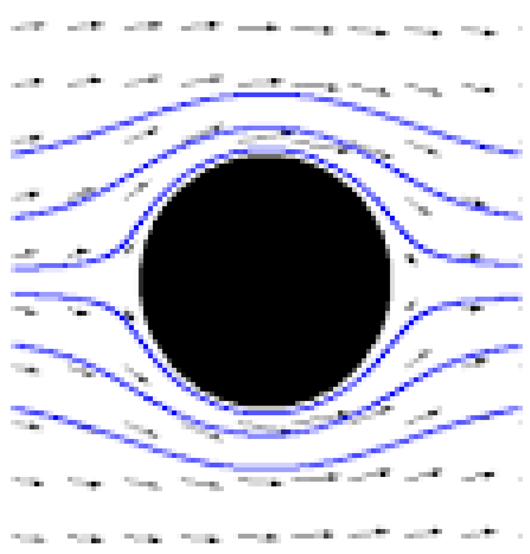
$$\inf_{q \in W_{\alpha-m}^{1-m}(\mathbb{R}^3)} \sup_{v \in W_{\alpha-m}^{m}(\mathbb{R}^3)} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} q\ div\ v\ dx}{\|q\|_{W_{\alpha-m}^{1-m}(\mathbb{R}^3)}\|v\|_{W_{\alpha-m}^{1-m}(\mathbb{R}^3)}} \geqslant \beta.$$

4. Le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$

On considère le problème Stockes qui décrit l'écoulement d'un fluide incompressible en régeime permanent :

$$(P) = \begin{cases} -\Delta u + \nabla\pi = f & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \\ div\ u = g & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

- u : Le champ des vitesses du fluide.
- π : Le champ de pression.
- f : Une force massique s'exercant dans le fluide.
- g : fonction donnée.



4.1 Existence et unicité pour le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$

On notera (T) l'opérateur correspondant :

$$T : (u, \pi) \longrightarrow (-\Delta u + \nabla\tau, div\ u)$$

et

$$S_k = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}^\Delta_{k-1}; div\ \lambda = 0, -\Delta\lambda + \nabla\mu = 0 \right\}.$$

1) **Théorème**
Soit (f, g) appartenant à $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$, satisfaisant la condition de compatibilité :

$$\forall\lambda \in P_{[1-n/p]}, < f, \lambda >_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} = 0$$

alors le problème (P) associé possède une solution unique $(u, \pi) \in (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)/P_{[1-n/p]}) \times L^p(\mathbb{R}^3)$. De plus, on a l'estimation :

$$\inf_{\lambda \in p_{[1-n/p]}} \|u + \lambda\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^p} \leq C(\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p})$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de p et n. Ce qui est équivalent à dire que l'opérateur de Stokes,

$$T : (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)/S_{[1-n/p]} \to (W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3 \times L^p(\mathbb{R}^3)/S_{[1-n/p]} \perp S_{[1-n/p]}$$

est un isomorphisme.

Références

[1] J. Giroier. Etude de quelques problème aux limites exterieurs et résolution par équations intégrales. PhD thesis, Université paris VI, 1987.

[2] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids-Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace. Rend. del Sem. Mat. Delaa Univ. di Prdova, XLVI :227-272, 1971.

[3] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroier. Weighled Sobolev spaces for the Laplace equation in $\mathbb{R}^3$. J. Math. Pures et Appliquées 20 :579-606, 1994.