رقم الترتيب:..........
رقم التسلسل:..........

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

من إعداد الطالبة : مغاوري أميمة

الموضوع

تقنيات بناء مصفوفات العمليات الكسرية لكثيرات حدود جاكوبي و تطبيقاتها

تناقش يوم ../2019/06 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
عباسي حسين	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا
بن الشيخ عبد الكريم	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

شكر وعرفان

قال الله تعالى" أذكروني أذكركم واشكروا لي و لا تكفرون"

سورة البقرة- الآية 152-

بادئ ذي بدء الحمد لله نحمدك اللهم ونشكرك أنت أهل الحمد و مستحقه

لا إله غيرك،

أنت سيد كل نعمة،

وميسر كل همة فلك الحمد كما ينبغي لجلال وجهك وعظيم سلطانك.

وقال الرسول الكريم عليه أفضل صلوات الله وسلامه

" من لم يشكر الناس لم يشكر الله"

وامتثالا لهذا الحديث النبوي الشريف،

أتقدم باسمي عبارات الشكر والتقدير والامتنان إلى الأستاذ المشرف

" بن الشيخ عبد الكريم "

الذي رافقني طيلة فترة إنجاز هذا العمل بتوجيهاته ونصائحه القيمة جزاه الله خيرا.

دون أن يفوتني تقديم جزيل الشكر إلى السيد رئيس قسم الرياضيات

"مفلاح مبروك"

كما أتقدم بأسمى عبارات التقدير والاحترام للأساتذة أعضاء لجنة المناقشة لمساهمتهم في تصفح هذا العمل من أجل إثرائه.

شكر خاص أوجهه لكل أساتذة قسم الرياضيات

الذين سهروا وتفانوا في صقل مهاراتنا وقدراتنا

منذ التحاقنا بالجامعة .

إهداء

الحمد لله الذي وفقنا لهذا وما كنا لنصل إليه لولا فضل الله علينا أما بعد:

فانـــــــــــــي اهدي هذا العمل المتواضع:

- ✓ الى التي أخرجتني الى النور، وملئت حياتي حبا وحنانا، الى التي حملتني وهنا على وهن، وفصالي في عامين، الى التي أفاضت علي من فضلها و كرمها، و غمرتني بودها الصـــــــادق......
- ✓ الى والدي حفظهما الله – وأطال في عمرهما –
- ✓ الى أخوي إدريس و زياد وأختي هناء شاكرة ومقدرة لهم تشجيعهم ومساندتهم.
- ✓ الى كل أفراد عائلتي، و أسرتي صغيرا و كبيرا، كل واحد باسمه.
- ✓ الى من عمل معي بكد بغية إتمام هذا العمل
- ✓ الى كل من (أسماء، نبيلة، أمال، ن ....) وجميع صديقاتي ممن لم يتذكرهن القلم و لم ينساهن القلب دون استثنـــــــــــــــاء.

الى أساتذتي الكرام،

و كل رفقاء الدراسة واخص بالذكر طلبة السنة الثانية

مـــاستر نمذجة و تحليل عددي ، الى كل طلبة الرياضيات.

مغـــــاوري أمـــــيمة

دليل الترميزات

الرمز	مدلوله
$\Gamma(n)$	الدالة غاما
$B(m,n)$	الدالة بيتا
J^v	مؤثر التكامل الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة v
D^v	مؤثر التكامل الكسري لكابوتو من الرتبة $v>0$
$P_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(z)$	كثير حدود جاكوبي
$w^{(\alpha,\beta)}(z)$	دالة الوزن
δ_{nm}	دلتا كرونكر
$L^2_{w^{\alpha,\beta}}[0,1]$	فضاء هيلبارتي
$(u,v)_{w_L^{(\alpha,\beta)}}$	جداء سلمي
$\lVert u\rVert_{w_L^{(\alpha,\beta)}}$	نظيم
$\text{Span}\left\{p_{L,0}^{(\alpha,\beta)}(x), p_{L,1}^{(\alpha,\beta)}(x), \ldots, p_{L,m}^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}$	فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق
c_j	عوامل كثيرات حدود جاكوبي
$\Phi(x)$	شعاع كثيرات حدود جاكوبي
$I^{(v)}$	مصفوفة العمليات الكسري للتكامل
D^v	مصفوفة العمليات الكسري للإشتقاق
$\lceil v\rceil$	أقل عدد صحيح أكبر من أو يساوي v

الفهـــــــــــــرس

مقدمة

حساب التفاضل و التكامل الكسري هو أحد مجالات التحليل الرياضياتي حيث تم استخدامهما لنمذجة عدة عمليات فيزيائية و هندسية . وقد لوحظ في الآونة الأخيرة أن العلماء حولوا إهتمامهم بشكل كبير إلى المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية ، بحيث أنها تطبق في وصف العديد من الظواهر في العالم الحقيقي و قد وجدوا أنها المقاربة الأفضل من أجل شرح الظواهر الطبيعية المعقدة و كما أنها طبقت في الهندسة، الفيزياء والكيمياء الحيوية و غيرها... [?, ?].
و نظرا لصعوبة إيجاد الحلول التحليلية للعديد من المسائل إلا تحت شروط معينة لجأ العلماء إلى تطوير طرق جديدة من أجل الحصول على الحل العددي و الذي يتقارب إلى الحل الصريح . والنتائج التحليلية لوجود و وحدانية الحل قد تمت دراستها سابقا .
و من جهة أخرى لاقت كثيرات الحدود المتعامدة إهتماما خاصا في معالجة مسائل مختلفة حيث قدمت طرق عددية لحل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية بإستخدام كثيرات الحدود كونها بسيطة من ناحية التركيب و التحليل حيث ان الميزة الأكبر لهذه المقاربة هي أنه عند إستعمال هذه الطريقة نحصل على جملة معادلات جبرية تقودنا بكل بساطة إلى الحل العددي و قد إخترنا لبحثنا هذا كثيرات حدود جاكوبي المعدلة [?, ?, ?, ?, ?, ?] .
كما يجدر بنا أيضا ذكر أننا إعتمدنا على تقنيات بناء مصفوفات العمليات للتكامل و التفاضل لأسس كثيرات حدود جاكوبي المعدلة من أجل إزالة التعقيدات في المسائل المطروحة .
الهدف من هذه المذكرة، هو توسيع التطبيق بكثيرات حدود جاكوبي المعدلة من أجل الحصول على خوارزمية مقربة لحل FDEs[1] الخطية و غير الخطية و من اجل الوصول إلى هدفنا نجعل المسألة المطروحة متجانسة لنتحصل على معادلة تفاضلية ذات شروط اولية معدومة بعد تغيير المتغير .
فبعد قيامنا بدراسة و تحليل المقالة الرئيسية لمذكرتنا [?] قمنا بتقديم تقنيات بناء مصفوفات العمليات الكسرية لكثيرات حدود جاكوبي و تطبيقاتها .
كتبت هذه المذكرة باللغة العربية ببرنامج *LATEX* و تتألف من مقدمة عامة و ثلاث فصول و قائمة مراجع رتبت حسب الإستعمال و فيما يلي تفاصيل ما تشتمل عليه الفصول الثلاث :
في الفصل الأول و هو فصل تمهيدي و الذي سميناه دراسة مرجعية و مفاهيم أولية مقسم إلى ثلاث , تعرضنا في القسم الأول إلى تعاريف دوال خاصة بالحساب الكسري [?, ?, ?]و قدمنا بعض التعاريف الأكثر إنتشارا للتفاضل و التكامل الكسري و بعض خواصهما [?, ?, ?, ?, ?, ?]و من ثم عرفنا في القسم الثاني كثيرات حدود جاكوبي على المجال $[-1, 1]$ و عرضنا بعض خصائصها و بعدها عرفنا كثيرات حدود جاكوبي المعدلة على $[0, L]$ و التي نتحصل عليها بتغيير متغير بسيط و عرفنا ايضا بتقريب التابع وفق أساس كثيرات حدود جاكوبي و برهنا عليه في دراسة التقارب [?, ?, ?, ?, ?, ?] إلى أن إنتقلنا في القسم الثالث إلى التعريف بالمعادلات التفاضلية العادية و ذات الرتب الكسرية [?, ?, ?] . و الفصل الثاني و الذي هو بعنوان تقنيات بناء المصفوفات العمليات الكسرية لجاكوبي تطرقنا فيه بكل إختصار إلى مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل بمفهوم ريمان ليوفيل و مصفوفة العمليات الكسرية للتفاضل بمفهوم كابوتو [?, ?, ?, ?] وإنتقلنا في الفصل الثالث و الأخير إلى توضيح كيفية تطبيق مصفوفات العمليات الكسرية من اجل الحل العددي لمعادلات تفاضلية كسرية خطية و غير الخطية و للتحقق من فاعلية هذه المصفوفات نقدم مجموعة من الأمثلة العددية تؤكد الأداء الجيد للطريقة المعروضة [?, ?, ?, ?] .

[1] المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية

الفصل الأول

دراسة مرجعية و مفاهيم أساسية

قائمة المحتويـــــــات

1.1 لمحة في الحساب الكسري

الحساب الكسري عملية رياضيتة ظهرت في سنة 1695 على يد العالم" لايبينز" ثم تطور حتى العصر الحديث ,وبعد الثورة التكنولوجية وجدت طريقها للاستخدام في مختلف الميادين العلمية وخاصة الهندسة والفيزياء والميكانيك و غيرها حيث سنتطرق الى تعريف الدوال الخاصة والاشتقاق ذي الرتب الكسرية والتكامل ذي الرتب الكسرية .

1.1.1 توابع خاصة

في هذا الجزء نعرف التابع غاما و التابع بيتا حيث أن هذين التابعين يلعبان دورا جد هام في الحساب الكسري.

1.1.1.1 التابع غاما:

تعريف 1 [?, ?]
واحد من التوابع الأساسية للحساب الكسري و يسمى التابع غاما لأولر يعطى بدلالة التكامل بالشكل التالي :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} \exp^{-x} dx \qquad x \in \mathbb{R}.$$

و من هذه المعادلة يمكن استنباط الخواص المميزة لهذا التابع :

1- خاصية التتابع :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad \forall n \neq 0$$

3- خاصية التسلسل : اذا كان n عددا صحيحا موجبا فان :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

2- خاصية التكرار :

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n)$$

-4

$$\Gamma(1-n)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$$

-5

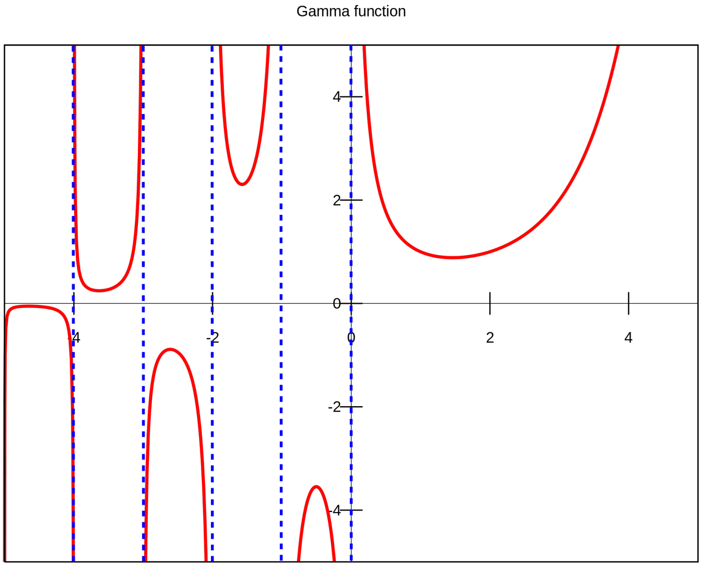
$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2^{(1-n)}(n-1)!\sqrt{\pi})}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

ملاحظة 1 * $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

* $\Gamma(1) = 1$

فمثلا لايجاد $\Gamma(2)$

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{2-1}\exp^{-x}dx\\ &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M x\exp^{-x}dx\\ &= \lim_{M\to\infty}[-x\exp^{-x}-\exp^{-x}]_0^M\\ &= \lim_{M\to\infty}(\frac{-M}{\exp^M}-\frac{1}{\exp^M}+0+\exp^0)=1\end{aligned}$$



شكل 1.1: منحنى بياني للتابع غاما

2.1.1.1 التابع بيتا:

تعريف 2 [?, ?]
تم التعرف على التابع بيتا بواسطة العالم أولر (*Leonhard Euler*) سنة ١٧٧١ و تم تعريفه كما يلي :

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad ,n>0, \quad m>0$$

فمثلا لايجاد B(2,3)

$$\begin{aligned}B(2,3)&=\int_0^1 x(1-x)^2dx\\&=\int_0^1 x(1-2x+x^2)dx\\&=\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

من خواص التابع بيتا أنه متناظر بحيث :

$$B(m,n)=B(n,m)$$

3.1.1.1 علاقة التابع غاما بالتابع بيتا :[?]

من أجل $m,n>0$ تعطى العلاقة بين غاما و بيتا كما يلي :

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

فمثلا لايجاد B(2,3)

$$B(2,3)=\frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)}=\frac{1!.2!}{4!}=\frac{1}{12}$$

2.1.1 التكامل ذي الرتب الكسرية بمفهوم ريمان ليوفيل

تعريف 3 [?, ?, ?]
تكامل الدالة f من رتبة كسرية v بمفهوم *Riemman liouvile* يرمز له بـ J^v و يعطى بالعبارة التالية:

$$J^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt, \quad v>0, \quad x>0 \tag{1.1}$$

إذا كان $= n, \in \mathbb{N}$ فإن العبارة تصبح

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt\,,\ x>0.$$

خواص 1 [?, ?]
من أجل $v=0$ لدينا

$$J^0 f(x) = f(x).$$

و من خصائصه :

$$J^v x^\beta = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+v)} x^{\beta+v}$$
$$J^\beta J^v f(x) = J^{\beta+v} f(x) = J^v J^\beta f(x)$$

و كما يختص أيضا بأنه مؤثر خطي يعطى يالعبارة التالية :[?, ?]

$$J^v(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda J^v f(x) + \mu J^v g(x)$$

بحيث λ ; و μ ثوابت .

3.1.1 الاشتقاق ذي الرتب الكسرية بمفهوم كابوتو

تعريف 4 [?, ?]
المشتق الكسري ذو الرتبة $v > 0$ للدلة f بمفهوم كابوتو معرف بـ :

$$D^v f(x) = J^{m-v} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-v)} \int_0^x (x-t)^{m-v-1} \frac{d^m}{dt^m} f(t) dt \tag{2.1}$$

من أجل

- $m - 1 < v \leq m$
- $m \in \mathbb{N}$
- $x > 0$

وحيث أن D^m هو مؤثر الإشتقاق العادي من الدرجة m

ولدينا من أجل مشتق كابوتو :[?]

$$D^v x^\beta = \begin{cases} 0, & \text{for } \beta < v \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-v)} x^{\beta-v}, & \text{for } \beta \geq v \end{cases} \tag{3.1}$$

ومن خصائصه أنه تطبيق خطي يحقق العلاقة التالية:[?]

$$D^v(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^v f(x) + \mu D^v g(x) \tag{4.1}$$

حيث أن λ ; و μ ثوابت .

توطئة 1 [?]
إذا كانت $m \in \mathbb{N}, m - 1 < v \leq m$ فإن :

.1

$$D^v J^v f(x) = f(x)$$

.2

$$J^v D^v f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}\left(0^+\right) \frac{x^i}{i!}, \quad x > 0 \tag{5.1}$$

2.1 خصائص كثيرات حدود جاكوبي

1.2.1 تعاريف كثيرات حدود جاكوبي

كثيرات حدود جاكوبي تعود تسميتها إلى العالم الألماني كارل غوستاف جاكوب جاكوبي [1]

تعريف 5 [?, ?, ?]
من أبرز كثيرات الحدود المتعامدة التي حظيت بإهتمام العلماء , كثيرات حدود جاكوبي JPs[2] التي تعرف على المجال $[-1,1]$ ومرفقة بتابع الوزن : $w^{(\alpha,\beta)}(z)=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$ و تعطى من خلال العلاقة التراجعية التالية :

$$P_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(z)=A(\alpha,\beta,i)P_{i}^{(\alpha,\beta)}(z)+zB(\alpha,\beta,i)P_{i}^{(\alpha,\beta)}(z)-D(\alpha,\beta,i)P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(z) \quad (6.1)$$

حيث $i=0,1,\dots$ و صيغة كل من $A(\alpha,\beta,i),B(\alpha,\beta,i),D(\alpha,\beta,i)$ هي :

$$\begin{aligned}
A(\alpha,\beta,i)&=\frac{(2i+\alpha+\beta+1)\left(\alpha^{2}-\beta^{2}\right)}{2(i+1)(i+\alpha+\beta+1)(2i+\alpha+\beta)}\\
B(\alpha,\beta,i)&=\frac{(2i+\alpha+\beta+2)(2i+\alpha+\beta+1)}{2(i+1)(i+\alpha+\beta+1)}\\
D(\alpha,\beta,i)&=\frac{(i+\alpha)(i+\beta)(2i+\alpha+\beta+2)}{(i+1)(i+\alpha+\beta+1)(2i+\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

مع : $P_{0}^{(\alpha,\beta)}(t)=1$ و $P_{1}^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{\alpha+\beta+2}{2}t+\frac{\alpha-\beta}{2}$
كما أن كثيرات حدود جاكوبي JPs تمتع بالخواص التالية :[?]

1. متعامدة على المجال $[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $w^{(\alpha,\beta)}(z)=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$ أي JPs تحقق العلاقة التالية :

$$\int_{-1}^{1}p_{n}^{(\alpha,\beta)}(t)p_{m}^{(\alpha,\beta)}(t)w^{(\alpha,\beta)}(t)dt=\gamma_{n}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}$$

حيث :

$$\gamma_{n}^{\alpha,\beta}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

و δ_{nm} هو دلتا كرونكر .

[1] كارل غوستاف جاكوب جاكوبي هو عالم رياضيات ألماني ولد في 10 ديسمبر 1804 بپوتسدام مملكة بروسيا.كان له أخ وحيد تربى عند عمه بعد وفاة والده . اشتغل استاذا بجامعة هومبولت في برلين و جامعة كونيغسبرغ . ومن اعماله التي إشتهر بها : دوال جاكوبي الإهليليجية متطابقة جاكوبي و مؤثرات جاكوبي وغيرها من الأعمال التي اثرت مجال الرياضيات . توفي في 18 فيفري 1851 عن عمر يناهز 46 سنة بعد إصابته بمرض الجدري و دفن في برلين.
[2] كثيرات حدود جاكوبي

2. يمكن إعطاء JPs إعتمادا على المشتق وفق العلاقة التالية :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2^n n!} D^n[(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}], \quad x \in [-1,1]$$

3. يمكننا التعبير عن JPs كذلك بالشكل :

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{(i-k)}\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)(i-k)!k!} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k$$

1.1.2.1. كثيرات حدود جاكوبي المعدلة على المجال $[0, L]$:

عن طريق تبديل المتغير التالي :

$$t = \frac{2x}{L} - 1, \quad x \in [0, L]$$

يتم الحصول على كثيرات حدود جاكوبي المعدلة على المجال $[0, L]$.

تعريف 6 [?]
كثيرات حدود جاكوبي المعدلة على $[0, L]$ تصاغ من خلال العبارة التراجعية التالية :

$$P_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = A(\alpha,\beta,i)P_i^{(\alpha,\beta)}(x) + (\frac{2x}{L}-1)B(\alpha,\beta,i)P_i^{(\alpha,\beta)}(x) - D(\alpha,\beta,i)P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{7.1}$$

حيث :

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1, P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\alpha+\beta+2}{2}(\frac{2x}{L}-1) + \frac{\alpha-\beta}{2}$$

و بذلك يصبح شرط التعامد على المجال $[0, L]$ بالنسبة لتابع الوزن المعدل

$$w_L^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha x^\beta \tag{8.1}$$

كالتالي :

$$\int_0^L P_{L,n}^{(\alpha,\beta)}(x)P_{L,m}^{(\alpha,\beta)}(x)w_L^{(\alpha,\beta)}(x)dx = h_k\delta_{nm} \tag{9.1}$$

حيث :

$$h_k = \frac{L^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)k!\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}$$

وسلسلة القوى لكثيرات حدود جاكوبي المعدلة تأخذ الصيغة الموالية :

(10.1)

$$P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\frac{\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)(i-k)!k!L^k}x^k \quad ,i=0,1,...$$

خواص 2

على المجال $[0,L]$ كثيرات حدود جاكوبي المعدلة تحقق :

1. $P_{L,n}^{(\alpha,\beta)}(0)=(-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)n!}$
2. $P_{L,n}^{(\alpha,\beta)}(L)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}$
3. $\frac{d^i}{dx^i}P_{L,n}^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+i+1)}{L^i\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}P_{L,n-i}^{(\alpha+i,\beta+i)}(x)$

توطئة 2

لتكن $P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x)$ كثيرات حدود جاكوبي المعدلة , إذن

$$D^vP_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x)=0 \quad i=0,1,2,\ldots,\lceil v\rceil-1, \quad v>0$$

البرهان 1

بتعويض المعادلتين (??) و (??) في المعادلة (??) نتحصل على المطلوب .

2.2.1 تقريب تابع وفق أساس كثيرات حدود جاكوبي

ليكن الفضاء الهلبرتي $L^2_{w^{(\alpha,\beta)}}[0,L]$ المزود بالجداء السلمي و النظيم المواليين :

$$(u,v)_{w_L^{(\alpha,\beta)}} = \int_0^L u(x)v(x)w_L^{(\alpha,\beta)}(x)dx, \quad \|u\|_{w_L^{(\alpha,\beta)}} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{w_L^{(\alpha,\beta)}}$$

ليكن : $P_{L,m}^{(\alpha,\beta)} = \text{Span}\left\{p_{L,0}^{(\alpha,\beta)}(x), p_{L,1}^{(\alpha,\beta)}(x), \ldots, p_{L,m}^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}$ و $f \in L^2_{w^{\alpha,\beta}}[0,L]$ بما أن : $P_{L,m}^{(\alpha,\beta}$(فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق , فإنه يوجد f_m أحسن تقريب للدالة f ويكون وحيدا :

$$\forall u \in P_{L,m}^{(\alpha,\beta)}, \exists! f_m \in P_{L,m}^{(\alpha,\beta)} \, \|f - f_m\|_{w_L^{(\alpha,\beta)}} \leq \|f - u\|_{w_L^{(\alpha,\beta)}}$$

(أنظر[?, ?, ?]). و بما أن $f_m \in P_{L,m}^{(\alpha,\beta)}$ فإن :

$$\begin{aligned} f(x) \simeq f_m(x) &= \sum_{j=0}^{m} c_j p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &= C^T \Phi(x) \end{aligned} \tag{11.1}$$

حيث :

$$\begin{aligned} C^T &= [c_0, c_1, \ldots, c_m] \\ \Phi(x)^T &= \left[p_{L,0}^{(\alpha,\beta)}(x), p_{L,1}^{(\alpha,\beta)}(x), \ldots, p_{L,m}^{(\alpha,\beta)}(x)\right] \end{aligned} \tag{12.1}$$

المعاملات c_j تحسب من خلال العلاقة :

$$c_j = \frac{1}{h_j} \int_0^L w_L^{(\alpha,\beta)}(x)u(x)p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x)dx \quad j = 0, 1, \ldots m \tag{13.1}$$

3.2.1 دراسة التقارب

توطئة 3 [?, ?, ?]
لتكن الدالة $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ من $C^{(m+1)}[0, L]$ و ليكن f_m أحسن تقريب من $P_{L,m}^{(\alpha,\beta)}$.
إذن :

$$\|f - f_m\|_{w_L^{(\alpha,\beta)}} \leq \frac{M}{(m+1)!}\sqrt{\frac{L^{3+2m+\alpha+\beta}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(3+2m+\beta)}{\Gamma(4+2m+\alpha+\beta)}} \qquad (14.1)$$

حيث : $M = \max_{x\in[0,L]}\left|f^{(m+1)}(x)\right|$

البرهان 2 [?]
بإعتبار أن : $y_1(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + f^m(0)\frac{x^m}{m!}$ هو نشر الدالة f عند الصفر بإستعمال نشر تايلور حيث أن الحد الأعلى للخطأ يعطى كالتالي :

$$|f(x) - y_1(x)| \leq \frac{Mx^{m+1}}{(m+1)!}, \quad \forall x \in [0, L]$$

حيث : $M = \max_{x\in[0,L]}\left|f^{(m+1)}(x)\right|$
بما أن f_m هي أحسن تقريب للدالة f من $P_{L,m}^{(\alpha,\beta)}$, و $y_{1,f_m\in P_{L,m}^{(\alpha,\beta)}}$ لدينا :

$$\begin{aligned}
\|f - f_m\|^2_{w_L^{(\alpha,\beta)}} \leq \|f - y_1\|^2_{w_L^{(\alpha,\beta)}} &= \int_0^L \left(f(x) - y_1(x)\right)^2 w_L^{(\alpha,\beta)}(x)dx \\
&\leq \int_0^L \left(\frac{Mx^{m+1}}{(m+1)!}\right)^2 w_L^{(\alpha,\beta)}(x)dx \\
&\leq \left(\frac{M}{(m+1)!}\right)^2 \int_0^L x^{2m+2+\beta}(L-x)^\alpha dx \\
&= \left(\frac{M}{(m+1)!}\right)^2 \frac{L^{3+2m+\alpha+\beta}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(3+2m+\beta)}{\Gamma(4+2m+\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

و بالتربيع نصل إلى المطلوب .

3.1 نظرة في المعادلات التفاضلية من رتب كسرية

المعادلة التفاضلية في علم الرياضيات هي معادلة تتضمن دالة مجهولة و مشتقاتها و سنعرف في هذا الجزء المعادلات التفاضلية العادية ومن ثم ننتقل لذوات الرتب الكسرية .

1.3.1 المعادلات التفاضلية العادية [?, ?]

المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة بين المتغير التابع و المتغير المستقل تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات, كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية حيث ان المعادلات التفاضلية الخطية هي المعادلة الخطية في المتغير التابع و مشتقاته جميعا.
وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين :

1. إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.
2. إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الأولى. وتكون غير خطية فيما عدا ذلك.

كل معادلة تفاضلية خطية هي من الدرجة الأولى، بينما ليست كل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى هي خطية، لأن الدرجة تحدد حسب أس التفاضل الأعلى، ومن الممكن أن تكون التفاضلات الأقل مرفوعة لأسس غير الواحد دون أن يؤثر ذلك على الدرجة، وهذا يخل بشرط المعادلة الخطية. و الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي [?] :

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x) \qquad (15.1)$$

حيث أن المتغير y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد و لاتوجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها. والمعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطية او غير خطية و كذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$

2.3.1 المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية

المعادلات التفاضليةالكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية ذات رتب صحيحة و هي أيضا تنقسم إلى خطية و غير خطية نعرفهما بشكل عام في المثالين التاليين.

مثال 1 [?]
لتكن المعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الكسرية المعرفة بالشكل التالي :

$$D^{v}u(x)+\sum_{i=1}^{k}e_{i}D^{v_{i}}u(x)+u(x)=g(x) \tag{16.1}$$

ذات الشروط الأولية :

$$u^{(i)}(0)=d_{i},\quad i=0,1,\ldots,n-1 \tag{17.1}$$

حيث e_i هي معاملات حقيقية ثابتة من أجل $i=0,1,\ldots,k$ و $n<v\leq n+1$,
$v_k<v_{k-1}<\cdots<v_1<v$ و حيث D^v ترمز إلى مشتق كابوتو الكسري ذي الرتبة v .

مثال 2 [?]
لتكن المعادلة التفاضلية الكسرية غير الخطية التالية :

$$D^{v}u(x)=F\left(x,u(x),D^{\beta_{1}}u(x),\ldots,D^{\beta_{k}}u(x)\right) \tag{18.1}$$

ذات الشروط الأولية :

$$u^{(i)}(0)=d_{i}\quad i=0,1,\ldots,n-1$$

حيث $n-1<v\leq n,$ $0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k<v$ و D^v ترمز إلى مشتق كابوتو الكسري ذي الرتبة v .

الفصل الثاني

تقنيات بناء مصفوفات العمليات الكسرية لجاكوبي

قائمة المحتويـــــــات

في هذه الفصل ، نقوم بالتعريف بمصفوفات العمليات الكسرية وفق أساس كثيرات حدود جاكوبي المعدلة على $[0, L]$

1.2 مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل

الهدف الرئيسي من هذا الجزء هو تعميم مصفوفة العمليات للتكامل لكثيرات حدود جاكوبي المعدلة من أجل الحساب الكسري .

تعريف 7 [?]
ليكن $v \geq 0$, نعرف مصفوفة العمليات للتكامل الكسري من أجل الشعاع $\Phi(x)$ ب $I^{(v)}$, حيث :

$$J^v \Phi(x) \simeq I^{(v)} \Phi(x) \tag{1.2}$$

نظرية 1 [?]
لتكن $I^{(v)}$ مصفوفة العمليات الكسرية لتكامل ريمان ليوفيل من الدرجة v و من الصنف $m \times m$, إذن يمكننا الحصول على عناصر هذه المصفوفة بالشكل التالي

$$\left\{ I_{ij}^{(v)} \right\}_{i,j=0}^{m-1} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} p_k^{(i)} p_l^{(j)} \frac{\Gamma(k+1) B(k+l+v+\beta+1, \alpha+1)}{\Gamma(k+v+1) h_k}$$

البرهان 3 يمكن أن نعبر على كثيرات حدود جاكوبي المعدلة بالعبارة التالية :[?, ?, ?]

$$P_{i,L}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{k=0}^{i} P_k^{(i)} x^k \tag{2.2}$$

بإدخال التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل على العبارة (??) نجد :

و بإستعمال خصائصه نجد :

$$\begin{aligned} J^v P_{i,L}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \sum_{k=0}^{i} P_k^{(i)} J^v x^k \\ &= \sum_{k=0}^{i} P_k^{(i)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+v)} x^{k+v} \end{aligned} \tag{3.2}$$

ومن جهة أخرى لدينا :[?]

$$x^{k+v} = \sum_{k=0}^{j} c_k P_{j,L}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{4.2}$$

بتعويض المعاملات c_k المعرفة بالعلاقة (??) و تعويض دالة الوزن بعبارتها (??) في المعادلة (??) مع أخذ $u(x) = x^{k+v}$ نجد [?, ?]

$$\frac{1}{h_k}\int_0^L x^{k+v} P_{j,L}^{(\alpha,\beta)}(x) w_L^{(\alpha,\beta)}(x)dx = \frac{1}{h_k}\sum_{l=0}^{j} p_l^{(j)} B(k+v+l+\beta+1, \alpha+1) \quad (5.2)$$

بتعويض المعادلة (??) في (??) نصل إلى المطلوب .

2.2 مصفوفة العمليات الكسرية للتفاضل

في هذا الجزء نعرف مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري لكثيرات حدود جاكوبي المعدلة

نظرية 2 [?]
ليكن $\Phi(x)$ شعاع كثيرات حدود جاكوبي المعدلة المعرفة في المعادلة (??) . و ليكن أيضا $v > 0$. إذن :

$$D^v\Phi(x) \simeq \mathbf{D}^{(v)}\Phi(x) \quad (6.2)$$

حيث أن D^v من الصنف $(m+1)\times(m+1)$ هي مصفوفة العمليات للاشتقاق الكسري من الدرجة v بمفهوم كابوتو و تعرف كما يلي :

$$D^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_v(\lceil v\rceil,0) & \Delta_v(\lceil v\rceil,1) & \Delta_v(\lceil v\rceil,2) & \dots & \Delta_v(\lceil v\rceil,m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_v(i,0) & \Delta_v(i,1) & \Delta_v(i,2) & \dots & \Delta_v(i,m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_v(m,0) & \Delta_v(m,1) & \Delta_v(m,2) & \dots & \Delta_v(m,m) \end{bmatrix}$$

حيث :

$$\Delta_v(i,j) = \sum_{k=\lceil v\rceil}^{i} \delta_{ijk}$$

و التابع δ_{ijk} يعطى بالعبارة التالية :

$$\delta_{ijk} = \frac{(-1)^{i-k}L^{\alpha+\beta-v+1}\Gamma(j+\beta+1)\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{h_j\Gamma(j+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)\Gamma(k-v+1)(i-k)!}\times$$
$$\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^{j-1}\Gamma(j+l+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(l+k+\beta-v+1)}{\Gamma(l+\beta+1)\Gamma(l+k+\alpha+\beta-v+2)(j-l)!l!} \tag{7.2}$$

نلاحظ أن الصفوف الأولى $\lceil v \rceil$ للمصوفة D^v كلها أصفار .

البرهان 4 [?]
الشكل التحليلي لكثيرات حدود جاكوبي المعدلة $P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x)$ من الدرجة i معطى في العبارة (??). بتعويض المعادلتين (??) و (??) في المعادلة (??) لدينا

$$D^v P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^{i-k}\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+1)(i-k)!k!L^k}D^v x^k \tag{8.2}$$
$$= \sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^{i-k}\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)(i-k)!\Gamma(k-v+1)L^k}x^{k-v} \tag{9.2}$$

حيث $i=\lceil v \rceil, [v]+1,\ldots$ نقرب x^{k-v} ب $N+1$ عبارة من سلسلة كثيرات حدود جاكوبي المعدلة نجد

$$x^{k-v} \simeq \sum_{j=0}^{N} b_{kj}P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{10.2}$$

حيث b_{kj} معطى في العبارة (??) مع أخذ $u(x)=x^{k-v}$ و منه نحصل على

$$b_{kj} = \sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^{j-l}\Gamma(j+l+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(l+k+\beta-v+1)}{\Gamma(l+\beta+1)(j-l)!I\Gamma(l+k+\alpha+\beta-v+2)}\times$$
$$\frac{L^{\alpha+\beta+k-v+1}\Gamma(j+\beta+1)}{h_j\Gamma(j+\alpha+\beta+1)} \tag{11.2}$$

بتعويض المعادلتين (??) , (??) نجد

$$D^v P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{j=0}^{N}\Delta_v(i,j)P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad i=\lceil v \rceil, \lceil v \rceil+1,\ldots,N \tag{12.2}$$

حيث $\Delta_v(i,j)$ معطى في العبارة (??)
و منه نعيد كتابة المعادلة (??) بالشكل الشعاعي بالعبارة التالية

$$D^v P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) \simeq [\Delta_v(i,0), \Delta_v(i,1), \Delta_v(i,2), \dots, \Delta_v(i,N)]\, \phi(x), \qquad (13.2)$$
$$i = \lceil v \rceil, \lceil v \rceil + 1, \dots, N$$

و وفقا للتوطئة ?? يمكننا كتابته بالشكل

$$D^v P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) \simeq [0,0,0,\dots,0]\phi(x), \quad i = 0, 1, \dots, \lceil v \rceil - 1 \qquad (14.2)$$

و بتركيب (??) و (??) نحصل على النتيجة المرجوة.

الفصل الثالث

تطبيقات مصفوفات العمليات الكسرية

قائمة المحتويـــــــات

في هذا الفصل ,نطبق طريقتنا من أجل إظهار فاعلية مصفوفات العمليات الكسرية للتكامل والتفاضل فنقوم بتطبيقها لإيجاد حلول عددية لمعادلات تفاضلية متعددة الدرجات ذات رتب كسرية

1.3 حل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية خطية

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية التالية :

$$D^v u(x) + \sum_{i=1}^{k} e_i D^{v_i} u(x) + u(x) = g(x) \tag{1.3}$$

ذات الشروط الأولية :

$$u^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2.3}$$

حيث e_i هي معاملات حقيقية ثابتة من أجل $i = 0, 1, \ldots, k$ و $n < v \leq n+1$,
$v_k < v_{k-1} < \cdots < v_1 < v$ و حيث D^v ترمز إلى مشتق كابوتو الكسري ذي الرتبة v .
لحل المعادلة (??) علينا أولا إجراء تغييرات عليها من أجل تحويلها إلى معادلة ذات شروط إبتدائية منعدمة . ولهذا نعرف الدالة التالية :

$$z(x) = u(x) - \hat{u}(x) \tag{3.3}$$

حيث $\hat{u}(x)$ هي دالة معروفة و تحقق الشروط الأولية (??) وقد تم الحصول عليها بإستعمال كثير حدود تايلور (إذن $\hat{u}^{(i)}(0) = d_i$ من أجل $i = 0, 1, \ldots, n-1$) و $z(x)$ هي الدالة الجديدة غير المعروفة .
يمكننا أن نلاحظ بكل سهولة أن $z^{(i)}(0) = 0$ من أجل $i = 0, 1, \ldots, n-1$
إذن بتعويض المعادلة (??) في المعادلتين (??) و (??) , و منه نتحصل على المعادلة التفاضلية الكسرية المعدلة بالشكل التالي :

$$D^v z(x) + \sum_{i=1}^{k} \hat{e}_i D^{v_i} z(x) + z(x) + \hat{u}(x) = \hat{g}(x) \tag{4.3}$$

$$z^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{5.3}$$

لتكن $s(x) = \hat{g}(x) - \hat{u}(x)$ يمكننا إعادة كتابة المعادلة (??) بالشكل التالي :

$$D^v z(x) + \sum_{i=1}^{k} \hat{e}_i D^{v_i} z(x) + z(x) = s(x) \tag{6.3}$$

لحل المعادلة (??) نقرب $D^v z(x)$ و $s(x)$ بإستعمال المعادلة (??)وفق اساس كثيرات حدود جاكوبي المعدلة كما يلي :

$$D^v z(x) \simeq \sum_{i=0}^{m} c_i p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = C^T \Phi(x) \tag{7.3}$$

$$s(x) \simeq \sum_{i=0}^{m} s_i p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = S^T \Phi(x) \tag{8.3}$$

بحيث هو $S^T = [s_0, \ldots, s_m]$ شعاع معروف أما الشعاع $C^T = [c_0, \ldots, c_m]$ فهو شعاع غير معروف . و لدينا من المعادلة (??) و الشروط الأولية (??) :

$$z(x) = J^v D^v z(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z^{(i)}(0)}{i!} x^i = J^v D^v z(x) \tag{9.3}$$

بتطبيق المعادلات (??),(??) و (??) نتحصل على :

$$z(x) = J^v D^v z(x) \simeq C^T J^v \Phi(x) \simeq C^T I^{(v)} \Phi(x) \tag{10.3}$$

و بواسطة المعادلات (??) و (??) نجد :

$$D^{v_i} z(x) \simeq C^T I^{(v-v_i)} \Phi(x), \quad i = 0, 1, \ldots, k \tag{11.3}$$

بتعويض المعادلات (??) , (??) , (??) و (??) في المعادلة (??) يمكننا كتابة دالة الخطأ $R_m(x)$ بالشكل التالي :

$$R_m(x) = \left(C^T + \sum_{i=1}^{k} \hat{e}_i C^T I^{(v-v_i)} + C^T I^{(v)} - S^T \right) \Phi(x)$$

و بتطبيق طريقة التجميع نتحصل على جملة معادلات جبرية خطية عددها $(m+1)$. و الشعاع C يمكننا إيجاده عن طريق حل جملة المعادلات المتحصل عليها .
إذن لدينا من المعادلة (??) :

$$z(x) = C^T I^{(v)} \Phi(x)$$

ويمكننا الحصول على الحل التقريبي $u(x)$ من المعادلة (??) بالشكل التالي :

$$u(x) = \hat{u}(x) + C^T I^{(v)} \Phi(x)$$

2.3 حل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية غير خطية

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية غير الخطية التالية :

$$D^v u(x) = F\left(x, u(x), D^{\beta_1}u(x), \ldots, D^{\beta_k}u(x)\right) \quad (12.3)$$

ذات الشروط الأولية :

$$u^{(i)}(0) = d_i \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

حيث $n-1 < v \leq n,$ $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k < v$ و D^v ترمز إلى مشتق كابيتو الكسري ذي الرتبة v . و كما تجدر الإشارة ان التطبيق F يمكن أن يكون عموما تطبيق غير خطي .
من أجل إيجاد الحل العددي للمعادلة (??) نجعلها متجانسة عن طريق إستعمال الطريقة المطروحة في الجزء السابق وكذلك بإستخدام المعادلة (??) كالأتي :

$$D^v z(x) = \hat{F}\left(x, z(x) + \hat{u}(x), D^{\beta_1}z(x), \ldots, D^{\beta_k}z(x)\right) \quad (13.3)$$
$$z^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

من أجل إستعمال كثيرات حدود جاكوبي المعدلة علينا أولا تقريب الدوال $z(x)$, $D^v z(x)$ و $D^{\beta_j} z(x)$ حيث $(j = 1, \ldots, k)$ بواسطة المعادلات (??) , (??) و (??) بالترتيب , و بتعويض هذه المعادلات في المعادلة (??) يمكننا كتابة دالة الخطأ بالشكل التالي :

$$R(x) = -C^T\Phi(x) + \hat{F}\left(x, C^T I^{(v)}\Phi(x) + \hat{u}(x), C^T I^{(v-\beta_1)}\Phi(x), \ldots, C^T I^{(v-\beta_k)}\Phi(x)\right) \quad (14.3)$$

من أجل إيجاد قيم الشعاع C نقوم بتجميع المعادلة (??) في عدة عقد عددها $(m+1)$ و منه لدينا :

$$z(x) = C^T I^{(v)}\Phi(x), \quad u(x) = \hat{u}(x) + C^T I^{(v)}\Phi(x)$$

3.3 تطبيقات عددية

في هذا القسم, يتم تقديم أمثلة توضيحية لمقارنة الحل العددي لمعادلات تفاضلية ذات رتب كسرية الذي تم الحصول عليه بإستخدام طريقتنا مع الحل التحليلي, من أجل توضيح كفاءة و بساطة هذه الطريقة .

مثال 3 نعتبر المعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية في حالة معادلة *Bagley- Torvik* غير المتجانسة [?, ?, ?]

$$D^2u(x) + D^{\frac{3}{2}}u(x) + u(x) = g(x) \tag{15.3}$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad x \in [0,1]$$

حيث $g(x) = 1 + x$ و الحل الصريح لهذه المعادلة هو : $u(x) = 1 + x$
نعتبر

$$u(x) = z(x) + 1 + x \tag{16.3}$$

و منه المعادلة (??) تحول إلى

$$D^2z(x) + D^{\frac{3}{2}}z(x) + z(x) = 0. \quad z(0) = z'(0) = 0 \tag{17.3}$$

إذن نقرب الدالة غير المعروفة $D^2z(x)$ بالشكل التالي :

$$D^2z(x) = C^T\Phi(x)$$

و بواسطة المعادلات (??) و (??) نتحصل على المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} D^{\frac{3}{2}}z(x) &= C^T I^{\left(\frac{1}{2}\right)}\Phi(x) \\ z(x) &= C^T I^{(2)}\Phi(x) \end{aligned} \tag{18.3}$$

بإستعمال المعادلات السابقة , نعيد صياغة المعادلة (??) بالشكل الأتي :

$$C^T\left[I + I^{\left(\frac{1}{2}\right)} + I^{(2)}\right]\Phi(x) = 0$$

نستعمل الطريقة المطروحة بأخذ $m = 2$, حل جملة المعادلات السابقة هو $C^T = 0$ حيث بإستعمال المعادلات (??) و (??) نصل إلى المطلوب .

مثال 4 نعتبر معادلة *Bagley- Torvik* غير الخطية و متعددة العقد الحدودية التالية :[?, ?, ?]

$$D^2u(x)+D^{\frac{3}{2}}u(x)+u(x)=g(x) \qquad (19.3)$$
$$u(0)=0, \quad u(1)=1, \quad x\in[0,1]$$

حيث $g(x)=x^2+2+4\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ و الحل الدقيق هو $u(x)=x^2$
علينا أولا تحويل المعادلة (??) إلى

$$D^2z(x)+D^{\frac{3}{2}}z(x)+z(x)=\hat{g}(x) \qquad (20.3)$$
$$z(0)=0, \quad z(1)=0, \quad x\in[0,1]$$

حيث $z(x)=u(x)-x$ و $\hat{g}(x)=x^2-x+2+4\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ و نقرب الحل بالشكل التالي :

$$z(x)=C^TI^{(1)}\Phi(x) \qquad D^1z(x)=C^T\Phi(x),$$
$$D^{\frac{3}{2}}z(x)=C^T\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\Phi(x) \qquad D^2z(x)=C^T\mathbf{D}^{(1)}\Phi(x),$$
$$\hat{g}(x)=G^T\Phi(x)$$

حيث $\mathbf{D}^{(1)}$ و $\mathbf{D}^{(\frac{1}{2})}$ هما مصفوفتا العمليات للإشتقاق بمفهوم كابوتو . و دالة الخطأ للمعادلة (??) تكتب بالشكل :

$$R(x)=\left[C^T\mathbf{D}^{(1)}+C^T\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}\right)}+C^TI^{(1)}-G^T\right]\Phi(x)$$

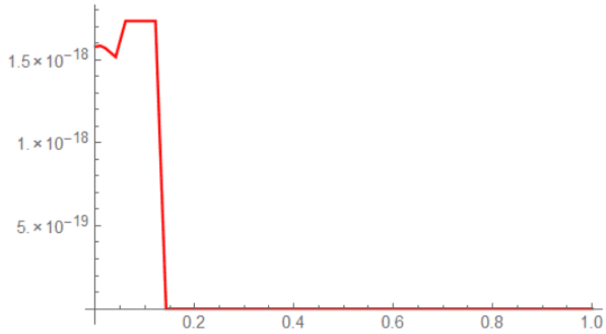
و بإستعمال خاصية التجميع مع تطبيق الشروط

$$z(1)=C^TI^{(1)}\Phi(1)=0$$

نحصل على حل جملة المعادلات الجبرية . و الحل من أجل $m=4$ هو

$$C^T=\left[0,1,-1.16209\times10^{-17},1.59492\times10^{-18},5.48351\times10^{-18}\right]$$

إذن $z(x)=C^TI^{(1)}\Phi(x)$ و بإستعمال تعريف $z(x)$ نجد $u(x)=z(x)+x$
في الشكل ?? , الخطأ المطلق بأخذ $m=4$ يظهر لنا أن الخطأ المطلق الأكبر للطريقة المطروحة من مضاعفات 10^{-18} ويظهر لنا أيضا أن الخطا المطلق للطريقة في [?] من مضاعفات 10^{-14} مما يظهر دقة و فاعلية الطريقة المطروحة .



شكل 1.3: الخطأ المطلق من أجل $m = 4$ للمثال ??

مثال 5 نعتبر المعادلة الخطية من رتبة كسرية و ذات الشروط الأولية :[?, ?, ?]

$$D^v u(x) + u(x) = 0, \quad 0 < v < 2, \quad I = (0,1)$$
$$u(0) = 1, u'(0) = 0$$

الحل المبدئي الثاني هو من أجل $v > 0$ فقط. الحل الحقيقي يعطى بالشكل [?]

$$u(x) = E_{v,1}\left(-x^v\right)$$

حيث

$$E_{\delta,\epsilon}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{\Gamma(\delta r + \epsilon)}$$

هو دالة *Mittag-Leffler* المعممة.

نجعل المعادلة الرئيسية متجانسة كالتالي

$$D^v z(x) + z(x) + 1 = 0, \quad 0 < v < 2, \quad I = (0,1)$$
$$z(0) = 0, z'(0) = 0$$

و نقرب الحل بالشكل التالي

(1)

من أجل ν<1 :

$$D^1 z(x) = C^T \Phi(x), \quad z(x) = C^T I^{(1)} \Phi(x)$$
$$D^v z(x) = C^T I^{(1-v)} \Phi(x), \quad 1 = G^T \Phi(x)$$

(2)

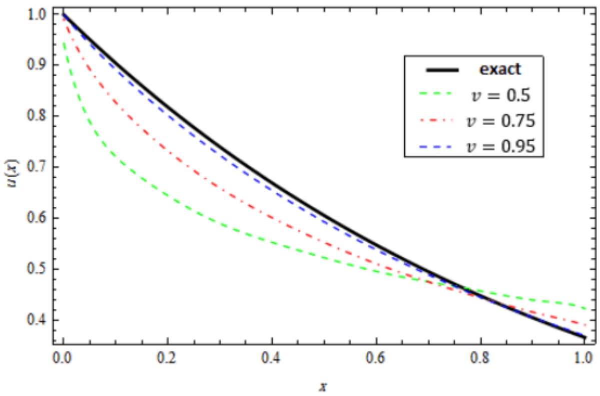
من أجل $\nu>1$:

$$D^2 z(x) = C^T \Phi(x), \quad z(x) = C^T I^{(2)} \Phi(x)$$
$$D^v z(x) = C^T I^{(2-v)} \Phi(x), \quad 1 = G^T \Phi(x)$$

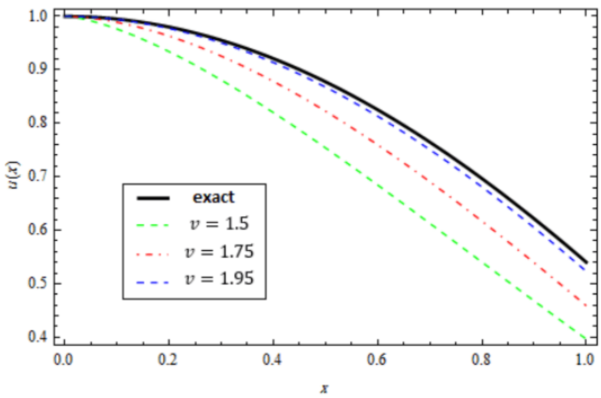
يظهر الخطأ المطلق ل$v = 0.85$ و $m = 2\ 5\ 89$ في الجدول **??**.
من الجدول **??** , يمكن ملاحظة أنه يمكن تحقيق تقريب جيد باستخدام حدود قليلة من كثيرات حدود جاكوبي المعدلة.
أيضا ، الشكل **??** يعرض نتائج عددية ل $u(x)$ مع أخذ $m = 9$ و $v = 0.5, 0.75, 0.95, 1$ حيث أنه من أجل $v = 1$ الحل الدقيق هو$u(x) = e^{-x}$. ويمكن أن نلاحظ من الشكل **??** أن الحلول التقريبية للقيم المختلفة ل v تقترب بشكل موحد من $u(x) = e^{-x}$ بزيادة v.
يوضح الشكل **??** النتائج العددية ل$u(x)$ ل $m = 9$ $v = 1.5, 1.75, 1.95, 2$, و من أجل $v = 2$, الحل الدقيق هو $u(x) = cos(x)$.
من الشكل **??** ، نرى أنه عندما تقترب قيم v من 2 , تتقارب الحلول التقريبية من $u(x) = cos(x)$.
الخطأ المطلق للقيم المختلفة ل v و $m = 9$ يظهر في الجدول **??**.
من الجدول **??**, نرى أنه عندما تقترب v من الأعداد صحيحة القيم $(v = 1, 2)$ يتم تقليل الخطأ , وهو أمر متوقع.
من أجل المقارنة ، نعرض الخطأ المطلق الأقصى ل [**?**] في الجدول **??**.

جدول 1.3: الخطأ المطلق لقيم مختلفة ل m من أجل $v = 0.85$ للمثال **??**

x=0.9	x=0.7	x=0.5	x=0.3	x=0.1	m
3.5×10^{-3}	7.7×10^{-3}	3.0×10^{-3}	7.8×10^{-3}	3.0×10^{-3}	2
6.1×10^{-4}	5.3×10^{-4}	4.8×10^{-4}	3.1×10^{-4}	7.8×10^{-4}	5
4.5×10^{-5}	1.3×10^{-4}	8.9×10^{-5}	1.0×10^{-6}	3.6×10^{-4}	8
8.5×10^{-5}	1.2×10^{-5}	8.2×10^{-5}	1.2×10^{-4}	2.2×10^{-4}	9



شكل 2.3: المقارنة بين $u(x)$ وu_m من أجل $m = 9$ و $v = 0.5, 0.75, 0.95, 1$ للمثال ??



شكل 3.3: المقارنة بين $u(x)$ وu_m من أجل $m = 9$ و $v = 1.5, 1.75, 1.95, 2$ للمثال ??

جدول 2.3: الخطأ المطلق من أجل قيم مختلفة ل v من أجل $m = 9$ للمثال ??

x=0.9	x=0.7	x=0.5	x=0.3	x=0.1	v
1.1×10^{-3}	2.6×10^{-4}	1.0×10^{-3}	1.8×10^{-3}	2.8×10^{-3}	0.2
3.6×10^{-3}	3.8×10^{-3}	4.7×10^{-3}	8.6×10^{-3}	3.8×10^{-2}	0.4
5.2×10^{-4}	1.0×10^{-4}	4.9×10^{-4}	7.8×10^{-4}	1.3×10^{-3}	0.6
1.4×10^{-4}	2.0×10^{-5}	1.3×10^{-4}	2.0×10^{-4}	3.6×10^{-4}	0.8
2.8×10^{-13}	7.9×10^{-14}	2.2×10^{-13}	9.8×10^{-14}	2.7×10^{-13}	1
2.4×10^{-5}	1.4×10^{-6}	2.4×10^{-5}	3.4×10^{-5}	6.6×10^{-5}	1.2
1.9×10^{-5}	1.8×10^{-6}	1.8×10^{-5}	2.5×10^{-5}	4.7×10^{-5}	1.4
2.6×10^{-6}	4.0×10^{-7}	2.4×10^{-6}	3.4×10^{-6}	5.9×10^{-6}	1.8
3.9×10^{-13}	1.2×10^{-13}	3.2×10^{-13}	1.3×10^{-13}	4.0×10^{-13}	2

جدول 3.3: الخطأ المطلق الأكبر من أجل $m = 10$ و قيم مختلفة ل v مع $\alpha = \beta = 0$ [?] للمثال ??

1	0.8	0.6	0.4	0.2	ν
10^{-14}	0.0018	0.0100	0.0363	0.1684	*Error*
2	1.8	1.6	1.4	1.2	ν
1.9×10^{14}	7.3×10^{-5}	3.8×10^{-4}	0.0014	0.0046	*Error*

مثال 6 لتكن المعادلة غير الخطية التالية من رتبة كسرية و ذات الشروط الأولية :[?, ?, ?]

$$D^3u(x) + D^{\frac{5}{2}}u(x) + u^2(x) = x^4$$
$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = 2$$

الحل الحقيقي لهذه المعادلة هو $u(x) = x^2$. و منه المعادلة الرئيسية تحول إلى

$$D^3z(x) + D^{\frac{5}{2}}z(x) + z^2(x) + 2x^2z(x) = 0$$
$$z(0) = z'(0) = z''^{(0)} = 0$$

حيث أن $z(x) = u(x) - x^2$. بتطبيق الطريقة بالشكل $z(x) = C^TI^{(3)}\Phi(x)$ من أجل $m = 4$
نحصل على المعاملات المجهولة $C^T = 0$
و منه نجد الحل الحقيقي للمعادلة هو $u(x) = z(x) + x^2 = x^2$

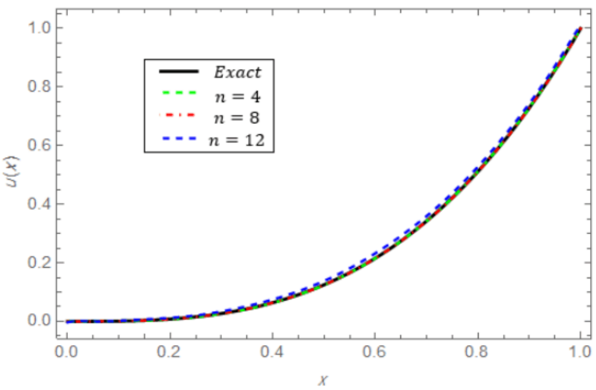
مثال 7 لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية التالية متعددة الترتيب و ذات الشروط الأولية :[?, ?]

$$D^\zeta u(x) + D^\eta u(x) \cdot D^\theta u(x) + u^2(x) = f(x)$$
$$f(x) = x^6 + \frac{6x^{3-\zeta}}{\Gamma(4-\zeta)} + \frac{36x^{6-\eta-\theta}}{\Gamma(4-\eta)\Gamma(4-\theta)}$$
$$u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$$
$$\zeta \in (2,3), \quad \eta \in (1,2), \quad \theta \in (0,1)$$

الحل الحقيقي للمعادلة هو $u(x) = x^3$ نقوم بتطبيق الطريقة المطروحة كالأتي

$$D^\zeta z(x) = C^T\Phi(x), z(x) = C^TI^{(\zeta)}\Phi(x)$$
$$D^v z(x) = C^TI^{(\zeta-v)}\Phi(x), f(x) = G^T\Phi(x)$$

يبين الشكل ?? النتائج التحليلية والعددية ل $m = 4, 8, 12$ و$\zeta = 2.5, \eta = 105, \theta = 0.9$
أيضا ، الخطأ المطلق لقيم مختلفة ل ζ, η, θ من أجل $m = 5, 6$ مبينة في الجدولين ?? و ??، على التوالي.
من الجدولين ?? و ?? ، نرى أن طريقتنا تعطي نتائج دقيقة باستخدام كثيرات حدود جاكوبي ذات درجة منخفضة .
قارنا طريقتنا مع نتائج الطريقة المطروحة في [?] و أقصى خطأ مطلق من [?] لقيم مختلفة ل ζ, η, θ من أجل $m = 24$ و $\alpha = \beta = 1.5$ معروضة في الجدول ??.
من المقارنة بين نتائج طريقتنا و الطريقة المطروحة في [?] ، يمكن القول أن طريقتنا تعطي حلول مقبولة مع درجة منخفضة من m والتي تظهر أن هذه الطريقة الحسابية مفيدة لحل المعادلات التفاضلية الكسرية .



شكل 4.3: المقارنة بين $u(x)$ وu_m من أجل $m = 4, 8, 12$ و $\zeta = 2.5, \eta = 1.5, \theta = 0.9$ للمثال ??

جدول 4.3: الخطأ المطلق لقيم مختلفة ل ζ, η, θ و $\alpha = \beta = 0$ من أجل $m = 5$ للمثال ??

x=0.9	x=0.7	x=0.5	x=0.3	x=0.1	ζ, η, θ
1.7×10^{-4}	1.1×10^{-4}	6.2×10^{-5}	5.3×10^{-5}	6.9×10^{-6}	0.9 ,1.5 ,2.5
1.4×10^{-4}	9.9×10^{-5}	5.7×10^{-5}	5.1×10^{-5}	6.2×10^{-6}	0.75 ,1.75 ,2.75
4.3×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.3×10^{-5}	3.1×10^{-6}	1.5×10^{-6}	0.99 ,1.99 ,2.99

جدول 5.3: الخطأ المطلق بالقيم $\zeta = 2.000001, \eta = 1.000001, \theta = 0.000001$ و $\alpha = \beta = 0$ من أجل $m = 6$ للمثال ??

0.9	0.7	0.5	0.3	0.1	x
2.1×10^{-10}	1.9×10^{-10}	1.5×10^{-10}	7.3×10^{-11}	5.0×10^{-11}	*Error*

جدول 6.3: الخطأ المطلق الأكبر لقيم مختلفة ل ζ, η, θ مع $m = 24$ و $\alpha = \beta = 1.5$ للطريقة المطروحة في [?] للمثال ??

Error	θ	η	ζ
6.29×10^{-12}	0.000001	1.000001	2.000001
3.15×10^{-5}	0.9	1.5	2.5
1.06×10^{-4}	0.75	1.75	2.75
1.95×10^{-5}	0.99	1.99	2.99

مثال 8 لتكن المعادلة غير الخطية ذات الشروط الأولية التالية : [?, ?]

$$D^v u(x) = g(x) - [u(x)]^{3/2}$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad 0 < v < 2$$

حيث

$$g(x) = \frac{40320}{\Gamma(9-v)} x^{8-v} - 3\frac{\Gamma(5+v/2)}{\Gamma(5-v/2)} x^{4-v/2} + \frac{9}{4}\Gamma(1+v) + \left(\frac{3}{2}x^{v/2} - x^4\right)^3$$

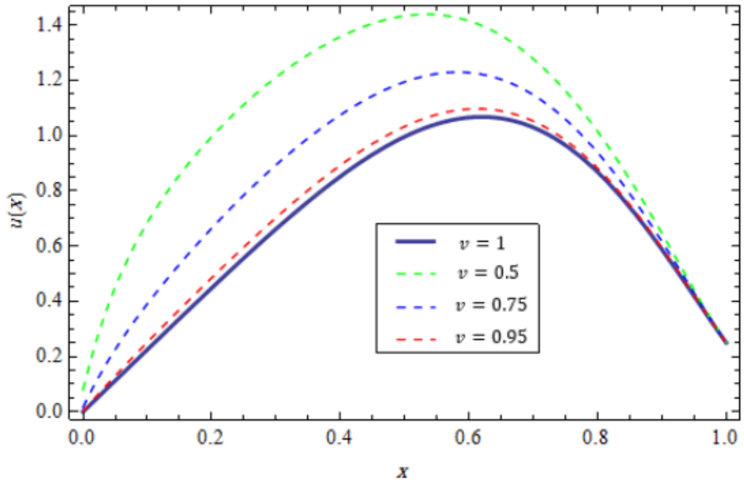
كالسابق الشرط الأولي الثاني هو من أجل $v > 1$ فقط . الحل الحقيقي لهذه المعادلة يعطى بالشكل التالي

$$u(x) = x^8 - 3x^{4+v/2} + \frac{9}{4}x^v$$

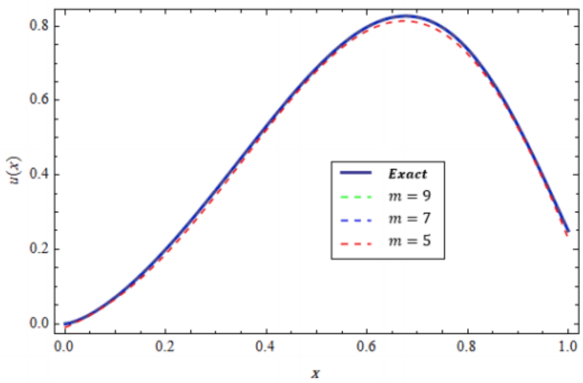
بإستخدام التقنية الموضحة يمكننا كتابة دالة الخطأ بالشكل

$$R(x) = C^T\Phi(x) + \left[C^T I^{(v)}\Phi(x)\right]^{\frac{3}{2}} - G^T\Phi(x)$$

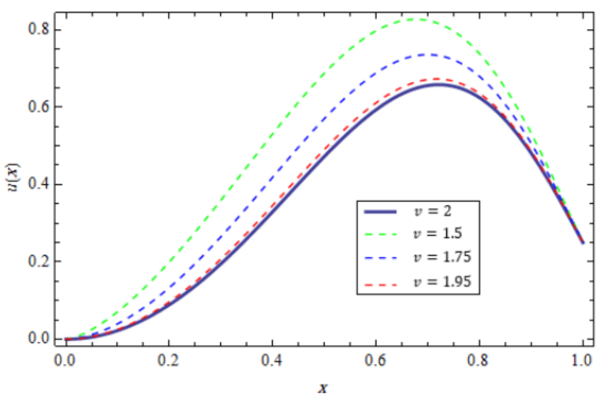
بحيث $D^v u(x) = C^T\Phi(x)$ و $g(x) = G^T\Phi(x)$ ويبين الشكل ?? النتائج التحليلية و العددية ل $m = 9$ و$v = 0.5, 0.75, 0.95, 1.$
علاوة على ذلك ، يتم رسم النتائج العددية ل $v = 1.5$ و$m = 5, 7, 9$ في الشكل ??.
الشكل ?? يوضح النتائج التحليلية والعددية ل$m = 9$ و $v = 1.5\ 1.75\ 1.952$.
يوضح الشكلان ?? و ?? أنه عندما تقتصر v على 1 و 2 فإن الحلول التقريبية $u_m(x)$ تقترب بشكل موحد من الحل الدقيق $u(x)$.
يوضح الجدول ?? أيضا الخطأ المطلق لقيم مختلفة ل v و $m = 9$
الخطأ المطلق للطريقة المطروحة في [?] من أجل قيم مختلفة ل v و $m = 10$ موضحة في الجدول ?? .



شكل 5.3: المقارنة بين $u(x)$ وu_m من أجل $m = 9$ و $v = 0.5, 0.75, 0.95, 1$ للمثال ??



شكل 6.3: المقارنة بين $u(x)$ وu_m من أجل $m = 5, 7, 9$ و $v = 1.5$ للمثال ??



شكل 7.3: المقارنة بين $u(x)$ وu_m من أجل $m = 9$ و $v = 1.5, 1.75, 1.95, 2$ للمثال ??

جدول 7.3: الخطأ المطلق لقيم مختلفة ل v من أجل $m = 9$ للمثال ??

x=0.9	x=0.7	x=0.5	x=0.3	x=0.1	ν
1.6×10^{-3}	4.5×10^{-4}	8.6×10^{-4}	5.4×10^{-3}	2.7×10^{-2}	0.2
4.0×10^{-3}	2.6×10^{-3}	4.0×10^{-3}	1.6×10^{-2}	5.7×10^{-2}	0.4
3.2×10^{-3}	2.9×10^{-3}	4.5×10^{-3}	1.3×10^{-2}	2.3×10^{-2}	0.6
1.3×10^{-3}	1.4×10^{-3}	2.0×10^{-3}	4.2×10^{-3}	4.3×10^{-3}	0.8
8.5×10^{-4}	1.3×10^{-3}	1.5×10^{-3}	1.4×10^{-3}	1.5×10^{-3}	1.2
6.0×10^{-4}	8.1×10^{-4}	8.3×10^{-4}	6.2×10^{-4}	4.3×10^{-4}	1.4
1.5×10^{-4}	2.0×10^{-4}	2.0×10^{-4}	9.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}	1.6
2.2×10^{-5}	1.1×10^{-5}	1.4×10^{-7}	1.7×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.8

جدول 8.3: الخطأ المطلق لقيم مختلفة ل v من أجل $m = 10$ للمثال ??

x=0.9	x=0.7	x=0.5	x=0.3	x=0.1	ν
1.7×10^{-0}	5.3×10^{-1}	3.6×10^{-2}	2.3×10^{-1}	2.2×10^{-1}	0.2
3.0×10^{-1}	1.2×10^{-1}	2.4×10^{-2}	6.0×10^{-2}	6.3×10^{-2}	0.4
3.7×10^{-2}	2.1×10^{-2}	9.6×10^{-3}	1.3×10^{-2}	1.5×10^{-2}	0.6
2.1×10^{-3}	2.5×10^{-3}	2.3×10^{-3}	2.1×10^{-3}	2.9×10^{-3}	0.8
1.6×10^{-2}	2.9×10^{-3}	2.8×10^{-2}	1.6×10^{-3}	1.9×10^{-3}	1.2
3.3×10^{-2}	4.9×10^{-3}	7.6×10^{-3}	1.6×10^{-3}	2.0×10^{-4}	1.4
1.3×10^{-2}	2.3×10^{-3}	1.7×10^{-3}	7.3×10^{-4}	6.3×10^{-5}	1.6
2.8×10^{-3}	5.9×10^{-4}	2.6×10^{-4}	2.0×10^{-4}	3.8×10^{-5}	1.8

مثال 9 نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية التالية مع المعاملات المتغيرة [?, ?]

$$aD^2u(x) + b(x)Du(x) + c(x)D^{\alpha_2}u(x) + e(x)D^{\alpha_1}u(x) + k(x)u(x) = f(x)$$

حيث $0 \leq t \leq 1, 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ و

$$f(x) = -a - b(x)x - \frac{c(x)}{\Gamma(3-\alpha_2)}x^{2-\alpha_2} - \frac{e(x)}{\Gamma(3-\alpha_1)}x^{2-\alpha_1} + k(x)\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

تخضع للشروط الأولية التالية $u(0) = 2, u'(0) = 0$

الحل الدقيق لهذه المعادلة هو $u(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$

المعادلة المتجانسة هي

$$aD^2z(x)+b(x)Dz(x)+c(x)D^{\alpha_2}z(x)+e(x)D^{\alpha_1}z(x)+k(x)z(x)+2k(x)=f(x)$$
$$z(0)=z'(0)=0$$

حيث ان $z(x)=u(x)-2$.

تم حل المعادلة من أجل $a=0.1, b(x)=x, c(x)=x+1, e(x)=x^2, k(x)=(x+1)^2$
$\alpha_1=0.781, \alpha_2=0.891$

الجدول ?? يظهر لنا الخطأ المطلق لقيم مختلفة ل x من أجل $m=8$.

و قمنا بتطبيق طريقتنا أيضا عندما يكون $a=5, b(x)=\sqrt{x}, c(x)=x^2-x, e(x)=3x$
$k(x)=x^3-x, \alpha_1=\frac{\sqrt{7}}{70}, \alpha_2=\frac{\sqrt{13}}{13}$ و الأخطاء المطلقة موضحة في الجدول ?? .

الخطأ المطلق الأقصى للطريقة الموضحة في [?] هو من مضاعفات 10^{-2} .

الجدولين ?? و ?? يبرهنان أن طريقتنا توفر نتائج أفضل من الطريقة المطروحة في [?].

جدول 9.3: الخطأ المطلق من اجل $\alpha_1=0.781, \alpha_2=0.891$ مع $m=8$ للمثال ??

0.9	0.7	0.5	0.3	0.1	x
8.2×10^{-6}	7.0×10^{-6}	2.5×10^{-5}	3.3×10^{-5}	2.3×10^{-5}	*Error*

جدول 10.3: الخطأ المطلق من أجل $\alpha_1=\frac{\sqrt{7}}{70}, \alpha_2=\frac{\sqrt{13}}{13}$ مع $m=8$ للمثال ??

0.9	0.7	0.5	0.3	0.1	x
2.1×10^{-5}	1.6×10^{-5}	1.1×10^{-5}	5.9×10^{-6}	1.1×10^{-6}	*Error*

مثال 10 نعتبر المعادلة التفاضلية غير الخطية التالية : [?, ?]

$$aD^{\alpha}u(x) + bD^{\alpha_2}u(x) + cD^{\alpha_1}u(x) + e(u(x))^3 = f(x)$$

حيث $0 \leq t \leq 1, 2 < \alpha \leq 3, 0 < \alpha_1 \leq 1, 1 < \alpha_2 \leq 2$ و

$$f(x) = \frac{2a}{\Gamma(4-\alpha)}x^{3-\alpha} + \frac{2b}{\Gamma(4-\alpha_2)}x^{3-\alpha_2} + \frac{2c}{\Gamma(4-\alpha_1)}x^{3-\alpha_1} + e\left(\frac{x^3}{3}\right)^3$$

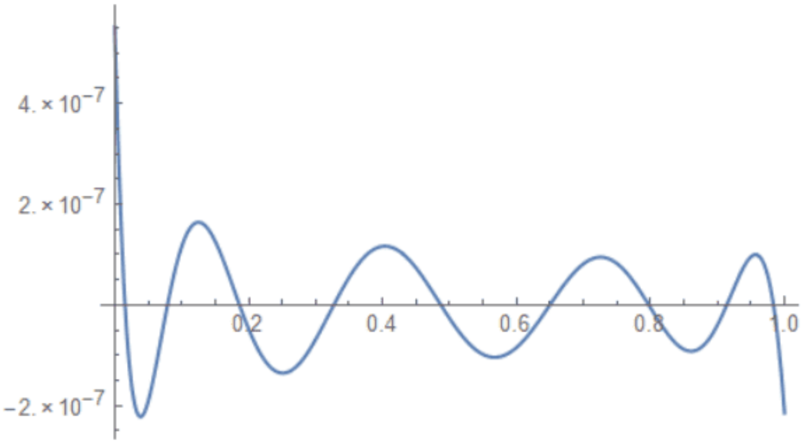
تخضع للشروط الاولية التالية

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$$

الحل الدقيق لهذه المعادلة هو $u(x) = \frac{x^3}{3}$
في هذا المثال وضعنا $\alpha_1 = 0.75, \alpha_2 = 1.25, a = b = c = e = 1$ و قمنا بتطبيق طريقتنا .
الحلول العددية من أجل $m = 4, 8, 10$ تظهر في الجدول ??
ال خطأ المطلق في [?] هو من مضاعفات 10^{-3} أما بطريقتنا فتحصلنا علنتائج من مضاعفات 10^{-5} من أجل $m = 4$
الشكل ?? يظهر أن تقريب الحل من أجل $m = 10$ يتقارب عموما إلى الحل الدقيق.

جدول 11.3: الخطأ المطلق من أجل $m = 4, 8, 10$ للمثال ??

m=10	m=8	m=4	x
5.5×10^{-7}	1.2×10^{-6}	1.7×10^{-5}	0
1.2×10^{-7}	2.4×10^{-7}	2.4×10^{-6}	0.1
4.8×10^{-8}	3.6×10^{-7}	1.6×10^{-5}	0.2
6.8×10^{-8}	5.2×10^{-8}	2.4×10^{-5}	0.3
1.2×10^{-7}	2.9×10^{-7}	2.8×10^{-5}	0.4
2.7×10^{-8}	5.1×10^{-8}	3.0×10^{-5}	0.5
8.4×10^{-8}	2.9×10^{-7}	3.0×10^{-5}	0.6
8.2×10^{-8}	4.6×10^{-9}	3.0×10^{-5}	0.7
5.7×10^{-9}	2.5×10^{-7}	3.1×10^{-5}	0.8
3.9×10^{-8}	2.1×10^{-7}	3.7×10^{-5}	0.9
2.1×10^{-7}	6.2×10^{-7}	4.9×10^{-5}	1



شكل 8.3: الخطأ من أجل $m = 10$ للمثال **??**

خاتمة

قدمنا في هذه المذكرة طريقة بسيطة حققنا فيها أداءً ودقة أفضل من الطرق الأخرى الموجودة . لهذا السبب تم استخدام مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل و التفاضل لكثيرات حدود جاكوبي المعدلة لإعداد تقنية جديدة لحل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية حلا عدديا.

من أجل الحصول على هذا ، قمنا بجعل المشكلة متجانسة عن طريق تغيير المتغير.

المزايا الرئيسية للطريقة المطورة هي أنه تم تحقيق حلول عالية الدقة من قبل عدد قليل من كثيرات حدود جاكوبي المعدلة.

النتائج العددية ايجابية مقارنة مع الحلول التحليلية. بمقارنة طريقتنا مع طرق أخرى موجودة أظهرت أنها تعطي نفس الحلول أو أفضل . أيضًا , يظهر المثال ?? أنه يمكن تعميم هذه الطريقة إلى المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية متعددة العقد.

يقول عماد الدين الأصفهاني : " إني رأيت أنه ما كتب أحدهم في يومه كتابا إلا قال في غده، لو غير هذا لكان أحسن ولوزيد ذاك لكان يستحسن، ولو قدم هذا لكان أفضل، ولوترك ذاك لكان أجمل، وهذا من أعظم العبر وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر "

و لهذا لا ندعي أننا أوفينا البحث حقه كاملا إلا أننا اجتهدنا قدر الإمكان فيما يسمح به الوقت لإنجاز هذه المذكرة.

في الأخير نرجوا أننا وفقنا في تلخيص أهم المفاهيم المتعلقة بهذا البحث المتواضع ، بحيث يمكن الإستفادة منه ، ولكون هذا العمل إنجازا بشريا فإنه لا يخلو من النقائص ، فلله الكمال و التمام .

المراجع العلمية

[1] K. S. Miller and B. Ross An Introduction to the Fractional Calculus and Differential equations, Jhon Wiley, New York, 1993.

[2] F. Ge, C. Kou, Asymptotic stability of solutions of nonlinear fractional differential equations of order $1 < \alpha < 2$, Journal of Shanghai Normal University,Vol.44,No.3,2015.

[3] M. Behroozifar and F. Ahmadpour Comparative study on solving fractional differential equatios via shifted Jacobi collocation method Bull .Iranian .Math .Soc.Vol .43.(2017),.No..2,.pp..535.–560

[4] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Pressé Inc.

[5] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy,Special Functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press, 1999.

[6] Shantanu Das ,Functional Fractional Calculus,Doi 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[7] I. Podlubny, Fractional Differential Equations,Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[8] B. N. Sadovskii ,On a fixed point principle. Funct. Anal. Appl. 1 1967 .

[9] I. Podlubny,Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.

[10] A. A. Kilbas, Hari. M. Srivastava, and Juan J. Trujillo,Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elesevier Science B. V. Amsterdam, 2006

[11] Borhanifar, A. and Khadijeh Sadri. “A new operational approach for numerical solution of generalized functional integro-differential equations.” J. Computational Applied Mathematics 279 (2015): 80-96.

[12] Sadri Khatouni, Khadijeh. (2016). A generalized operational method for solving integro–partial differential equations based on Jacobi polynomials. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 45. 311-335.

[13] Sadri, Khadijeh, Abbas Amini, and Chun Cheng. ”A new numerical method for delay and advanced integro-differential equations.” Numerical Algorithms 77.2 (2018): 381-412.

[14] Sadria, K., and Z. Ayatib. ”Jacobi Operational Matrix Approach for Solving Systems of Linear and Nonlinear Integro–Differential Equations.”

[15] Borhanifar, Abdollah, and Khadijeh Sadri. ”Shifted Jacobi Collocation Method Based on Operational Matrix for Solving the Systems of Fredholm and Volterra Integral Equations.” Mathematical and Computational Applications 20.2 (2015): 76-93.

[16] Pierre Grisvard , calcul Differential of Equations Differential ,office des publications universitaires,2 eme Edition ,Alger ,1980.

[17] Ross,Introduction of Ordinary Differential Equations, 1989.

[18] Lions, Jacques Louis. Optimal control of systems governed by partial differential equations (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften). Vol. 170. Berlin: Springer, .1971

[19] DOHA, E. H., BHRAWY, A. H., et EZZ-ELDIEN, S. S. A new Jacobi operational matrix: an application for solving fractional differential

equations. Applied Mathematical Modelling, 2012, vol. 36, no 10, p. 4931-4943.

[20] A. El-Mesiry, A. El-Sayed and H. El-Saka, Numerical methods for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations, Appl. Math. Comput. 160 (2005), no. 3, 683– 699.

[21] Q.M. Mdallal, M.I. Syam and M.N. Anwar, A collocation-shooting method for solving fractional boundary value problems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 15 (2010), no. 12, 3814–3822.

[22] A. Saadatmandi and M. Dehghan, A new operational matrix for solving fractional order differential equations, Comput. Math. Appl. 59 (2010), no. 3, 1326–1336.

الملخص:

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم تقنية بناء مصفوفات العمليات الكسرية للتكامل و التفاضل لأساس كثيرات حدود جاكوبي المعدلة التي تظهر في الطرق العددية من أجل ايجاد الحل التقريبي لبعض المعادلات التفاضلية من رتب كسرية عن طريق التقريب بكثيرات حدود جاكوبي حيث أن هذه المصفوفات أدت إلى تحويل تلك المعادلات التفاضلية الى جملة معادلات جبرية خطية و غير خطية سهلة الحل والبرمجة

Absract :

The main objective of this work is to present the technique of building operational matrixes for fractional integrations and derivatives for shifted jacobi polynomials operator , wich appears in numerical methods in order to find the approximative solution of some fractional deffirential equations we approximate by jacobi polynomials whereas this matrixs changed that FDEs to a system of linear and nonlinear algebric equations that are easy to solve and program .

Résumé :

L'objectif principal de ce travail est de présenterla technique de construire des matrices d'opérations fractionnaires pour l'intégration et la différenciation pour l'opérateur des polynômes de jacobi , qui apparaissent dans les méthodes numériques pour trouver la solution approximative de quelques équations déffirentielle fractionelle dont nous rapprochons par les polynomes de jacobi alors que ces matrices l'a changé à un système d'équation algebric linéaire et non linéaire qui sont faciles de résoudre et de programmer.