UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : Mohammed lakhdar tlili

ETUDE LE PROBLéME DIFFERNTIEL D'ORDRE FRACTIONNAIRE DANS UN DOMAINE PLAN NON RéGUILIER secteur plan et application

Soutenu publiquement le : 26/06/2019

Devant le jury composé de :

Dr. ASILA Mustafa	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Dr. GUERFI Amara	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur
Dr. SAID Mohamed Saïd	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Rapporteur

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie mon Dieu pour la santé, l'intelligence et le courage qu'Il m'accordé tout au long de ma cursus, en particulier durant la période de réalisation de ce projet.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de mémoire SAID Mohamed Saïd, professeur à l'université Kasdi Merbah de Ouargla, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université Kasdi Merbah de Ouargla, pour tous leurs efforts durant ces années.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès et m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Enfin, je remercie mes amis(es) qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Á tous ceux-ci, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **ii**

Introduction **1**

1 Rappel mathematique et introduction à la derivation d'ordre non entier **3**

1.1 Notations et Définition 3

1.2 Fonction spécifiques pour la dérivation fractionnaire 4

1.2.1 La fonction Gamma 4

1.2.2 La fonction Béta 6

1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler 6

1.3 L'intégrale fractionnaire sur interval [a,b] 7

1.3.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 7

1.4 La Dérivée fractionnaire 9

1.4.1 Dérivées fractionnaire au sens de Riemman-Liouville 9

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens caputo 10

1.5 Théoreme du point fixe 11

2 La transformée de Laplace des Dérivées fractionnaires et applications **13**

2.1 Transformation de laplace des dériveés fractionnaires 13

2.2 La transformation laplace des dérivées fractionnaires de Riemann- Liouville 15

2.3 La transformation laplace des dérivées fractionnaires de Caputo 16

2.4 La transformée de Laplace de la dérivée de Grunwald-Letnikov : 17

2.5 Transfére de fonction Mittag-Leffler avec deux coffiticient 18

2.6 Les dérivés de la fonction Mittag-Leffler 20

2.7 Quelques applications sur la résolution des équations différentielles fractionnaires 20

3 Position du problème et étude de l'existence et l'unicite 24

3.1 Position du problème 24

3.2 Résultats d'existences 27

3.2.1 Cas $0 < \alpha < 1$ 27

3.2.2 Cas $1 < \alpha \leq 2$ 35

4 Application et schema numerique de resolution 39

4.1 Une approximation de $D_x^\alpha X \quad D_y^\alpha Y$: 42

4.1.1 Cas $0 < \alpha \leq 1$: 42

4.1.2 Cas $1 < \alpha \leq 2$: 46

Conclusion 51

Bibliographie 52

Introduction

La dérivation et intégration d'ordre non entier, le calcul fractionnaire qui est un vieux concept datant de l'époque de Cauchy. c'est une généralisation de la notion de dérivée d'ordre entier α d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x à des valeurs non entiéres de α. Si α est négatif, il s'agit d'une intégration non entiére et si α est positif, on parle d'une dérivation non entiére.

L'idée pour la généralisation de la dérivée vers un ordre arbitraire est découverte dans le courier échangé entre L'Hospital et Leibnitz. Le 30 septembre 1695. L'hopital récrit à Leibniz afin de l'interroger au sujet d'une notation particuliére qu'il avait employée dans ses publications pour la niéme-dérivée d'une fonction $f(x)$. L'hopital pose alors la question à Leibniz, sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre $\frac{1}{2}$?. Depuis cet échange de courrier, d'autres chercheurs de renommée se sont penchés sur ce sujet comme Leibnitz et L'Hospital(1965), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), et le Ross (1975).

Plusieurs activités scientifiques comme l'organisation colloques internationaux, la parution de plusieurs ouvrages et d'une revue "Journal of fractional calculs" entièrement consacrée au sujet, témoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour d'équations différentielles d'ordre fractionnaire dans domain plan non régulier et donné la solution approché.

Ce mémoire se décompose de quatre chapitres suivante :

Le **premier chapitre** de ce mémoire est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : fonctions spéciales (la fonction Gamma et la fonction Bêta) et quelques notions et définition de la dérivé fractionnaire

Le **Deuxième chapitre** est consacré aux définitions des transformations de Laplace des dérivées fractionnaire qu' on aura besoin dans la suite du travaile .nous rapplons les transformations de Laplace (Riemann-Liouville,Caputo,Grunwald-Letnikov) et quelques applications sur la résolution des équations différentielles fractionnaires.

Le **Troisième chapitre** est consacré à l'existance et l'unicité des solutins pour probléme de type Cauchy pour probléme differntielle d'ordre fractionnaire sur intervalle fini ouvert Ω de l'axe réel dans l'espace des fonctions continues .Nous utiliserons le théoreme du point fixe pour montrer l'existence et l'unicité.

Le **quatriéme chapitre** on cherche la solution exact du problème différentielle d'ordre fractionnaire.

Chapitre 1

Rappel mathematique et introduction à la derivation d'ordre non entier

1.1 Notations et Définition

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 1.1.2 *Soient E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que*

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k \|x - y\|_E \quad , \text{ pour tout } x, y \in E \ .$$

Définition 1.1.3 *Soient (K, d) un espace métrique et F un evn. On dit qu'une partie $A \subset C(K, F)$ est équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in A$,*

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon \ , \text{ pour tout } x, y \in K \text{ tq } d(x, y) < \alpha(\varepsilon) \ .$$

Définition 1.1.4 *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit* ***point fixe*** *de T si $Tx = x$.*

Définition 1.1.5 *Soit E, F, deux espaces de Banach et $A : E \to F$ une fonction*
$-A$ est dit compact si l'image $f(E)$ est relativemant compact dans F,
$-A$ est dit completement continu s'il est continu et l'image de tout borném de E est relativement compact dans F.

1.2 Fonction spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 La fonction Gamma

En mathématique, la fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.2.1 *La fonction Gamma (Γ) d'euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbf{c}$, on définit la fonction Gamma par la formule suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t)\, dt \tag{1.1}$$

Propriété 1.2.1 [12] [11]

1. $\Gamma(n+1) = n!$
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

3. $\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \times .... \times z\Gamma(z)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$

Démostration 1 . 1. On a par définition :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\, dt$$

On va appliqur une integration par partie (n) fois :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n! \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, dt \\ &= n! \left[-\exp(-t) \mid_0^{+\infty}\right] \\ &= n!\end{aligned}$$

2. Et on a :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z \exp(-t)\, dt$$

Appliquons aussi une intégration par partie :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} z t^{z-1} \exp(-t)\, dt - t^z \exp(-t) \mid_0^{+\infty} \\ &= z \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t)\, dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

3. D'aprés , on a :

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\,\Gamma(z+(n-1))$$

c-à-d

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+(n-2))$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \times .... \times z\Gamma(z)$$

1.2.2 La fonction Béta

Définition 1.2.2 *La fonction $B(p,q)$ est la fonction Bêta (ou intégrale eulerienne de première espèce), définie par :*

$$B(p;q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx \quad p > 0,\ q > 0. \tag{1.2}$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulerienne de première et seconde espèce :

$$B(p;q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};\ \mathrm{Re}(p) > 0,\ \mathrm{Re}(q) > 0 \tag{1.3}$$

1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z, joue un rôle joue très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie ducalcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal [2] et

elle est définie par le développement en série suivant [4] [5] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.4}$$

Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, on montre que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z) \tag{1.5}$$

1.3 L'intégrale fractionnaire sur interval [a,b]

1.3.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *Soit $f \in L^1(]a,b[)$ L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(Re(\ \alpha) > 0)$ notée $I_\alpha^\alpha f$ est définie par :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \quad x > Re(\ \alpha) \tag{1.6}$$

$\Gamma(\alpha)$ *est la fonction de gamma*

Théorème 1.3.1 [9] [13] *Soit $f \in L^1(]a,b[)$ et $Re(\ \alpha) > 0$. Alors, $(I_a^\alpha f)(x)$ existe pour tout $x \in]a,b[$, et on a*

$$I_a^\alpha f \in L^1(]a,b[)$$

Démostration 2 Soit $f \in L^1(]a,b[)$ et $Re(\alpha) > 0$, $b > x > a$

$$\begin{aligned}
|(I_a^\alpha f)(x)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x \left|(x-\tau)^{\alpha-1}\right| |f(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x |(x-\tau)|^{\alpha-1} |f(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{x\in]a,b[} \left|(x-\tau)^{\alpha-1}\right| \int_\alpha^x |f(\tau)|\, d\tau \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Car, $f \in L^1(]a,b[)$; donc, $I_a^\alpha f$ existe. et $I_a^\alpha f \in L^1(]a,b[)$

Théorème 1.3.2 [12] *Pour $f \in C[a,b]$,l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t)\right) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) \quad pour\ Re(\alpha) > 0,\ Re(\beta) > 0. \tag{1.7}$$

Et satisfaite presque par tout sur [a,b] pour tout $f \in L^p(]a,b[)$

Démostration 3 Soient $f \in L^p(]a,b[)$, et $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$. On a par définition

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \left(I_a^\beta f\right)(\tau)\, dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-\lambda)^{\beta-1} f(\tau)\, d\lambda dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\tau \int_\tau^\tau (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\lambda)^{\beta-1} dx f(\tau)\, d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-\lambda)^{\alpha+\beta-1} f(\lambda)\, d\lambda \\
&= \left(I_a^{\alpha+\beta} f\right)(t)
\end{aligned}$$

Propriété 1.3.1 *1-$I_\alpha^0 h(t) = h(t)$*

2-l'opérateur intégral I_0^α est linéaire.

Exemple 1.3.1 *Soit* $f(t) = (t-a)^m$

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^m ds$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ *on obtient*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (1-x)^{\alpha-1} x^m dx \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1) \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+m+1)} \\ I_a^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{m+\alpha} \end{aligned}$$

1.4 La Dérivée fractionnaire

1.4.1 Dérivées fractionnaire au sens de Riemman-Liouville

Définition 1.4.1 *soit* $\alpha \geq 0$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* n *un entier positif telle que* $n-1 \leq \alpha < n$, f *est une fonction localement integrable définie sur* $[a, x]$, *la dérivée d'ordre* α *de* f *est définie par la formule suivante :*

$$({}_{RL}D_a^\alpha f)(x) = D^n I_a^{(n-\alpha)} f(x) \tag{1.8}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

En particulier,

si $\alpha = 0$ *alors :*

$$\left({}_{RL}D_a^0 f\right)(x) = I_a^0 f(x) = f(x)$$

si $\alpha = n,\ n \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x) $$

si de plus $0 \leq \alpha < 1$, *alors* $n = 1$ *d'ou*

$$ ({}_{RL}D_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau \tag{1.10} $$

Si f *est de classe* $\mathbf{C}^k$ *alors en faisant des intégrations par parties et des diérentiations répétées on obtient :*

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^j(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1} f^k(\tau)\, d\tau \tag{1.11} $$

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens caputo

Définition 1.4.2 *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$ *avec* $(Re(\ \alpha) > 0)$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*tel que :* $n-1 \leq \alpha < n$ *et* $f \in C^n([a,b])$ *alors la dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de Caputo de la fonction* f *est définie par :*

$$ \begin{aligned} {}_{C}D_a^{\alpha} f(x) &= I_a^{(n-\alpha)} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{1.12} $$

Proposition 1.4.1 (Le Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville et Dérivées caputo) *Soit* $a > 0$ *avec* $n-1 < a < n, (n \in N^*)$, *supposons que* f *est une fonction telle que* ${}_{C}D_a^{\alpha}$ $f(t)$ *et* ${}_{RL}D_a^{\alpha} f(t)$ *existent alors*

$$ D_a^{\alpha} f(x) = {}_{RL}\ D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \tag{1.13} $$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$

$$D_a^\alpha f(x) =_{RL} D_a^\alpha f(x) \tag{1.14}$$

1.5 Théoreme du point fixe

Théorème 1.5.1 (Banach) *Soient X un espace de Banach, et $A : X \to X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique. i.e $\exists! u \in X$ tel que $Au = u$.*[6]

Théorème 1.5.2 (Schauder) *Soit (E, d) un espace metrique complet,soit X une partie convexe et fermé de E,et soit $A : X \to X$ une application telle que l'ensemble $\{Ax : x \in X\}$ est relativement compacte dans E. Alors Apossède au moins un point fixe.*[14]

Théorème 1.5.3 (Schaefer) [7] *Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Au = u \ , \ \textit{pour un certain } \lambda \in]0, 1[\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.5.4 (Ascoli-Arzelà) [7] *Soit A un sous ensemble de $C(J, E)$, A est relativement compacte dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérfiées :*

i) L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que

$$\|f(x)\| \leq K \quad \text{pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A$$

ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compacte.

Chapitre 2

La transformée de Laplace des Dérivées fractionnaires et applications

2.1 Transformation de laplace des dériveés fractionnaires

En rapellant quelque vérites de transformation laplace .[12, *page* 103 − 107]

La fonction $F(s)$ de variable composé s définie par :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt \tag{2.1}$$

On apple laplace la fonction $f(t)$,qui s'appalle quelle est la revenducation on originalle , pour trouver l'intégration (2.1) ,la fonction $f(t)$ il faut étre en systéme d'expence α , c'est a dire il ya deux membre fixe et positive M et T ou :

$$\exp(-\alpha t) |f(t)| \leq M, t > T$$

en autre expression la fonction $f(t)$ il ne faut pas dévelopé plus qui une fonction expenciele précisé ou : $t \to \infty$

nous allons les transformations Laplace en grond lettre, et ou original en meni lettre

La fonction d'origine $f(t)$ peut réquiperer de transformation Laplace $F(s)$ en aidont la transformation Laplace inverse

$$f(t) = L^{-1}\{F(s), t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st) F(s)\, ds, \;\; c = \mathrm{Re}(s) > c_0 \tag{2.2}$$

Où c_0 se trouve en milieu de nuveau droit convergence absolue de la conplimentaire Laplece (2.1)

Evaluation directe de la conversion inverce Laplace

En chengemont la forme (2.2) est en géneral complexe, mais il peut donner des informations importantes de comportement enonyme d'origine $f(t)$ qui nous cherche

La transformée de Laplace la convolution de deux fonction est le produit de leurs transformées de Laplace. Alors si $F(s)$ et $G(s)$ sont les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement alors

$$f(t) * g(t) = F(s)G(s)$$

alors

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{2.3}$$

Autre spécialité est utile, ce que la fonction $f(t)$

$$L\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \tag{2.4}$$

qui peut obtenu à trover la définition (2.1) en integrale par parti avec l'estimation que l'entegration résultat sont existe

2.2 La transformation laplace des dérivées fractionnaires de Riemann- Liouville

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $p > 0$ de Riemann-Liouville définie par :

$$ {}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\, d\tau = t^{p-1} * f(t) \tag{2.5} $$

la transformation Laplace de la fonction t^{p-1} est :

$$ G(s) = L\left\{t^{p-1}; s\right\} = \Gamma(p)\, s^{-p} \tag{2.6} $$

En utilisant la forme de la transformation laplace de convolution (2.3) on obtenu la transformation de l'intégration fonctionnaire de Riemann- Liouville :

$$ L\left\{{}_0D_t^{-p} f(t); s\right\} = s^{-p} F(s) \tag{2.7} $$

l'estimation de la transformation laplace de dérive fractionnaire de Riemann- Liouville :

$$ {}_0D_t^{p} f(t) = g^{(n)}(t), \tag{2.8} $$

$$ g(t) = {}_0\, D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\, d\tau, \tag{2.9} $$

$$ (n-1 \leq p \leq n), $$

En utilisant la forme pour la transformation laplace (2.4) :

$$ L\left\{{}_0D_t^{-p} f(t); s\right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \tag{2.10} $$

La transformation laplace de la fonction $g(t)$ définie par :

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s) \tag{2.11}$$

en utilisant la définition de Riemann- Liouville de dérivée fractionnaire :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0D_t^{(p-k-1)} f(t) \tag{2.12}$$

en ajoute (2.11),(2.12),(2.10), on obtenu la forme final de la transformation de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville d'ordre $p > 0$:

$$L\left\{{}_0D_t^p f(t); s\right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t)\right]_{t=0} \tag{2.13}$$

$$(n-1 \leq p < n)$$

2.3 La transformation laplace des dérivées fractionnaires de Caputo

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo définie sous la forme :

$${}_0^CD_t^p f(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} g(t), \qquad g(t) = f^n(t) \tag{2.14}$$

$$(n-1 < p \leq n). \tag{2.15}$$

En utilisant la formule (2.7) de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville , on aura :

$$L\left\{{}_0^CD_t^p f(t); s\right\} = s^{-(n-p)} G(s) \tag{2.16}$$

ou, grace à (2.4)

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \tag{2.17}$$

En entrent (2.17),(2.16) nous sommes venir à la forme de la transformation laplace pour la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$L\left\{{}_0^C D_t^p f(t); s\right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0) \tag{2.18}$$

$$(n-1 < p \leq n). \tag{2.19}$$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction $f(t)$ et ses dérivées en la borne inférieure $t = 0$, pour laquelle une certaine interprétation physique existe (par exemple, $f(0)$ est la position initial, $f^{'}(0)$ est la vitesse initial. $f^{''}(0)$ est l'accélération initiale), on peut espérer qu'il pourait etre utile pour la résolution des problémes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leurs formes traditionnelles.

2.4 La transformée de Laplace de la dérivée de Grunwald-Letnikov :

Premierement, on consédire la forme (le cas) $0 \leq p < 1$ où la dérive fractionnaire de Grunwald-Letnikov de la limite $a = 0$ de la fonction $\mathbf{f}(t)$,qui préces où $t = 0$, peut ecrire sous la forme :

$${}_0D_t^p f(t) = \frac{f(0)\, t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f^{'}(\tau)\, d\tau \tag{2.20}$$

En utilisant la transformation laplace de la fonction de force (2.6) , la forme de convolution de laplace (2.3) et (2.4),nous obtenons :

$$L\left\{{}_0D_t^p f(t)\,;s\right\} = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}}\left(s^p F(s) - f(0)\right) = s^p F(s)\,. \tag{2.21}$$

$\mathbf{F}(s)$	$\mathbf{f}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s), t\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(at)$
$\frac{1}{s^\alpha-a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha+a)}$	$1-E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-a}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(\exp(at)-\exp(bt))$

Tablaeu de transformation de laplace des dérivées fractionnaire

2.5 Transfére de fonction Mittag-Leffler avec deux coffiticient

Apartir de la relation (1.5), la fonction Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ est la generalité de la fonction exponociale $\exp(z)$ c-à-d la fonction exponociale est une cas exponociale de la fonction Mittag-Leffler.[12, *page* $20-22$]

On va donner une ideé de la méthode de la fonction Mittag-Leffler on utilisé la mesure entre la fonction et la fonction $\exp(z)$, pour obtenir la transformation de laplace de la fonction $t^k\exp(at)$ en nouvelle méthode (par traditionnelle).

On montre que :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t)\exp(\pm zt)\,dt = \frac{1}{1\mp z};\ |z|<1 \tag{2.22}$$

C'est vrai, en utilisant les séries de $\exp(z)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \exp(-t)\exp(zt)\,dt &= \frac{1}{1-z}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\pm z)^k}{k!}\int_0^{+\infty}\exp(-t)\,t^k dt\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(\pm z)^k = \frac{1}{1\mp z}\end{aligned}$$

on derive les deux cotté de la comparé (2.22) avec z. la résulte est :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t)\,t^k\exp(\pm zt)\,dt = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}},\quad |z|<1 \tag{2.23}$$

Aprés des transfaires clairer, on obtenu la fonction : $t^k\exp(Iat)$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-pt)\,t^k\exp(\pm at)\,dt = \frac{k!}{(p-a)^{k+1}},\ (\mathrm{Re}(p)>|a|).$$

On va consédérer maintenent la fonction Mittag-Leffler (1.4), le chongement (1.4) en integrale suivant, nous donné

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t)\,t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha)\,dt = \frac{1}{1-z}\ ,\ (|z|<1). \tag{2.24}$$

Apartir de (2.24) on obtenu deux trensformation de laplace de la fonction $t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm zt^\alpha)$, $\left(E^{(k)}_{\alpha,\beta}(y)\equiv\frac{d^k}{dy^k}E_{\alpha,\beta}(y)\right)$:

$$\int_0^{+\infty} \exp(-pt)\,t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\,dt = \frac{k!p^{\alpha-\beta}}{(p^\alpha\mp a)^{k+1}},\ \left(\mathrm{Re}(p)>|a|^{1/\alpha}\right). \tag{2.25}$$

Le cas spécial de (2.25) pour $\alpha = \beta = 1/2$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-pt)\, t^{\frac{k-1}{2}} E^{(k)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(\pm a\sqrt{t}\right) dt = \frac{k!}{\left(\sqrt{p} \mp a\right)^{k+1}}, \ \left(\mathrm{Re}\,(p) > a^2\right)$$

est utile pour faire les fonction demi-différential en (2.24)

2.6 Les dérivés de la fonction Mittag-Leffler

On dérive la méthode de fraction de ${}_0D_t^{\gamma}$, on obtenu :

$${}_0D_t^{\gamma}\left(t^{\alpha k+\beta-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right) = t^{\alpha k+\beta-\gamma-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta-\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right). \tag{2.26}$$

la cas spécial de la relation (2.26) pour : $k = 0, \lambda = 1$:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}\left(t^{\alpha}\right)\right) = t^{\beta-m-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta-m}\left(t^{\alpha}\right), \ (m = 1, 2, ...). \tag{2.27}$$

la formule (2.27) a quelques résultats . On prend $\alpha = m/n$, où m, n nombres naturels, on obtinu

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{m/n,\beta}\left(t^{m/n}\right)\right) = t^{\beta-1} E_{m/n,\beta}\left(t^{m/n}\right) + t^{\beta-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{-\frac{m}{n}k}}{\Gamma\left(\beta - \frac{m}{n}k\right)},$$

2.7 Quelques applications sur la résolution des équations différentielles fractionnaires

Exemple 2.7.1 *Soit l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^{RL}_{0}D_t^{\frac{2}{3}} y(t) = a y(t) \tag{2.28}$$

où a est une constante réelle.

On a : $0 < \alpha = \frac{2}{3} \leq 1$, *nous pouvons utiliser donc la formule* (2.13). *En prenant la transformée de laplace des deux membres de cette équation, on obtient :*

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^{RL}D_t^{\frac{2}{3}}y\left(t\right)\right\} = a\mathcal{L}\left\{y\left(t\right)\right\}$$

ce qui nous donne :

$$s^{\frac{2}{3}}Y\left(s\right) - {}_0^{RL}D_t^{-\left(1-\frac{2}{3}\right)}y\left(0\right) = aY\left(s\right) \tag{2.29}$$

La constante ${}_0^{RL}D_t^{-\left(1-\frac{2}{3}\right)}y\left(0\right) = {}_0^{RL}D_t^{-\left(\frac{1}{3}\right)}y\left(0\right)$ *est la valeur de* ${}_0^{RL}D_t^{-\left(\frac{1}{3}\right)}y\left(t\right)$ *en* $t = 0$, *Si nous supposons que cette valeur existe, et nous l'appelons* C_1 *; alors l'équation* (2.29) *devient :*

$$s^{\frac{2}{3}}Y(s) - C_1 = aY(s)\ .$$

En résolvant cette équation, on arrive à :

$$Y(s) = \frac{C_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

Finalement, grâce au Tableau, on trouve l'inverse de la transformée de Laplace de $Y(s)$*,puis on conclut que :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = C_1 t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}\left(at^{\frac{2}{3}}\right).$$

on peut se demander si l'existence de C_1 *est supposer.*

Nous montrerons que c'est le cas

Encore, une autre fois nous utilisons la transformée de Laplace on trouve :

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^{RL}D_t^{-\frac{1}{3}}y\left(t\right)\right\} = s^{-\frac{1}{3}}Y\left(s\right).$$

Comme

$$Y(s) = \frac{C_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

alors

$$\mathcal{L}\left\{{}_{0}^{RL}D_{t}^{-\frac{1}{3}}y\left(t\right)\right\}=s^{-\frac{1}{3}}\frac{C_{1}}{s^{\frac{2}{3}}-a}$$

par conséquent

$${}_{0}^{RL}D_{t}^{-\frac{1}{3}}y\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_{1}s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}}-a}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_{1}s^{\frac{2}{3}-1}}{s^{\frac{2}{3}}-a}\right\}=C_{1}E_{\frac{2}{3},1}\left(at^{\frac{2}{3}}\right).$$

en $t=0$, on obtient

$${}_{0}^{RL}D_{t}^{-\frac{1}{3}}y\left(0\right)=C_{1}E_{\frac{2}{3},1}\left(0\right)=C_{1}$$

Exemple 2.7.2 *Considérons comme deuxième exemple l'équation suivante :*

$${}_{0}^{RL}D_{t}^{\frac{4}{3}}y\left(t\right)=0.$$

Maintenant, on a : $1<\alpha=\frac{4}{3}\leq 2$, nous pouvons donc utiliser la formule (2.6). En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de cette équation, on trouve :

$$\mathcal{L}\left\{{}_{0}^{RL}D_{t}^{\frac{4}{3}}y\left(t\right)\right\}=0$$

ce qui nous donne :

$$s^{\frac{4}{3}}Y\left(s\right)-s\ {}_{0}^{RL}D_{t}^{-\left(2-\frac{4}{3}\right)}y\left(0\right)-{}_{0}^{RL}\ D_{t}^{-\left(1-\frac{4}{3}\right)}y\left(0\right)=0$$

nous supposerons que les constantes ${}_{0}^{RL}D_{t}^{-\left(2-\frac{4}{3}\right)}y\left(0\right)$ et ${}_{0}^{RL}D_{t}^{-\left(1-\frac{4}{3}\right)}y\left(0\right)$ existent et appelées C_1 et C_2 respectivement, alors devient

$$s^{\frac{4}{3}}Y(s)-C_{1}s-C_{2}=0.$$

En résolvant par rapport à $Y(s)$, nous obtenons :

$$Y(s) = \frac{C_1 s}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{C_2}{s^{\frac{4}{3}}} = 0$$

nous utilisons encore une fois le $(Tableau)$, on trouve la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$ et nous concluons que :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}\left\{\frac{C_1 s}{s^{\frac{4}{3}}}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{C_2}{s^{\frac{4}{3}}}\right\} \\ &= \frac{C_1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} t^{-\frac{2}{3}} + \frac{C_2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} t^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Position du problème et étude de l'existence et l'unicite

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème pour équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right)\right),\text{pour tout } t\in J_{1}=\left]0,a\right[,\ t\in J_{2}=\left]0,b\right[,\ 0<\alpha<2 \tag{3.1}$$

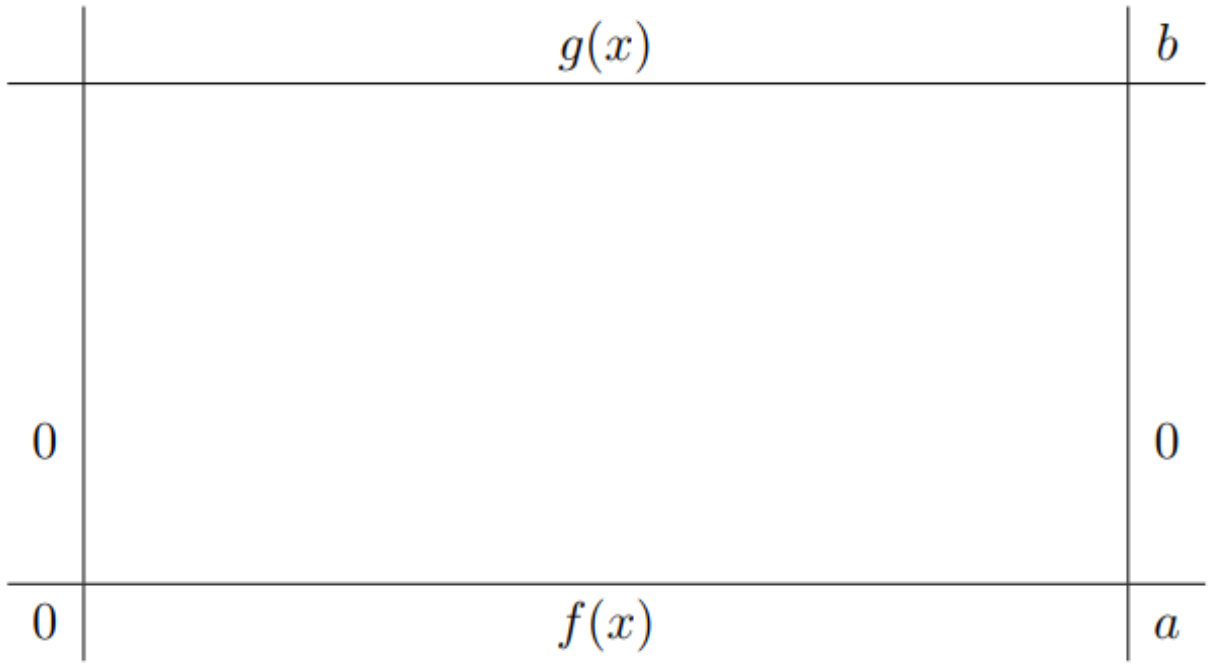
$$y\left(0\right)=y_{0},\ y\left(T\right)=y_{T},\ T=a\ \ \text{ou}T=\ b \tag{3.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire du type Caputo, $f:[0,T]\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, est $T=a$ ou $T=b$, est une fonction continue. Des résultats d'existence et d'unicité sont obtenues pour ce problème moyennant le théorème de point fixe .voir [8] [10]

3.1 Position du problème

La formulation du problème est la suivant :

Si $\Omega=\left]0,a\right[\times\left]0,b\right[$ et $0<a<b$



$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha U(x,y) + \partial_y^\alpha U(x,y) = 0, \qquad 0 < \alpha \leq 2 \\ D_x^{\alpha-2} U(x,0) = f(x), \qquad \Omega =]0,a[\times]0,b[\\ D_x^{\alpha-1} U(x,b) = g(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

pour résoudre la solution de le probléme (3.3) on utilisela methode de sépration de variable ce qui donne deux probléme lineaire suivant et $U(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\partial_x^\alpha U(x,y) + \partial_y^\alpha U(x,y) = 0$$

$$D_x^\alpha (X(x)\,Y(y)) + D_y^\alpha (X(x)\,Y(y)) = 0$$

$$Y(y)\,D_x^\alpha (X(x)) + X(x)\,D_y^\alpha (Y(y)) = 0$$

$$\frac{D_x^\alpha (X(x))}{X(x)} = -\frac{D_y^\alpha (Y(y))}{Y(y)} = \lambda \ tq \ X(x) \neq 0, Y(y) \neq 0$$

alors divisez l'equation en deux partties

$$D_x^{\alpha}\left(X\left(x\right)\right)=\lambda X\left(x\right) \tag{3.4}$$

on vérifie que tel que, Si : $x=a$, $x=0$

$$X(0)=0,\ X(a)=0 \tag{3.5}$$

donc on obtien le problème linéaire suivante

de mème étapes pour $Y(y)$ on aura :

$$D_y^{\alpha}\left(Y\left(y\right)\right)=-\lambda Y\left(y\right),Y\left(y\right)\neq 0 \tag{3.6}$$

$$Y(b)=\mu_1,Y(a)=\mu_2 \tag{3.7}$$

on remplace que $X(x)=v(t)$ on a :

$$D_t^{\alpha}\left(v\left(t\right)\right)=\lambda v\left(t\right),\ 0\leq t\leq a,\ v\left(t\right)\neq 0 \tag{3.8}$$

$$v(0)=0,v(a)=0 \tag{3.9}$$

on remplace que $Y(y)=w(t)$ on a :

$$D_t^{\alpha}\left(w\left(t\right)\right)=-\lambda w\left(t\right),\ 0\leq t\leq b,\ w\left(t\right)\neq 0 \tag{3.10}$$

$$w(0)=\mu_1,w(b)=\mu_2 \tag{3.11}$$

3.2 Résultats d'existences

3.2.1 Cas $0 < \alpha < 1$

Dans cette section, on donne les conditions de l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) − (3.2) dans l'espace $C\gamma\,[0,T]$ $tq\ T = a\ ,T =\ b$ définie pour $0 < \alpha < 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}\,(0 \leq \gamma \leq \alpha)$ par

$$C_\gamma = \left\{ f\,(t) : t^\gamma f\,(t) \in C\,[0,T]\,, \|f\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma f\,(t)\|_C \right\} \tag{3.12}$$

$$C_\gamma^\alpha = \{ f\,(t) \in C\,[0,T] : D_{0+}^\alpha f \in C_\gamma\,[0,T] \} \tag{3.13}$$

on démarée par l'equation (3.8) on etude l'existence et l'uncité de le probleme linéaire differntielle d'ordre fractionnaire dans domaine plan $J_1 =]0,a[$ et consentre de [8] et Notre approche est basée sur la réduction du problème considéré en une équation intégrale de Volterra

$$v\,(t) = v_0 + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\,(s; v\,(s))\, ds, 0 < t < a \tag{3.14}$$

Lemme 3.2.1 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}\,(0 < \alpha < 1)$ *;et soit* $f_{1-\alpha}\,(t) = \left(I_{0+}^{1-\alpha} f\right)(t)$. *Si* $f(t) \in C_\gamma\,[0,T]$ *et* $f_{1-\alpha}\,(t) \in C_\gamma^1\,[0,T]$, *alors*

$$\left(I^\alpha D^\alpha f\right)(i) = f\,(t) - \frac{f_{1-\alpha}\,(0)}{\Gamma\,(\alpha)} t^{\alpha-1},\ t \in [0,T] \tag{3.15}$$

Lemme 3.2.2 *Si* $\lambda \in \mathbb{R}\,(0 < \lambda < 1)$, *alors l'opérateur d'intégration* I_{0+}^α *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est borné dans* $C_\gamma\,[0,T]$

$$\|I^\alpha g\|_{C_\gamma} \leq T^\alpha \frac{\Gamma\,(1-\gamma)}{\Gamma\,(1+\alpha-\gamma)} \|g\|_{C_\gamma} \tag{3.16}$$

Tout d'abord, nous établissons une équivalence entre le problème (3.1) − (3.2) et l'équation intégrale (3.12) dans l'espace $C[0,T]$ des fonctions continues.

Lemme 3.2.3 [10] *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}\,(0 < \alpha < 1)$ *et soit* $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Une fonction* v *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \tag{3.17}$$

si et seulement si v *est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire*

$$^{c}D^{\alpha} v(t) = h(t), \;\; t \in [0, T] \tag{3.18}$$

$$v(0) = v_0 \tag{3.19}$$

On applique le lemme 3.2.3 pour l'équation (3.8) et (3.9) donc :

Preuve. Soit v la solution de l'équation intégrale (3.14). On commence par la vérification de la condition initiale, on a d'après (3.14)

$$|v(t) - v_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda v(s)\, ds \right|$$

alors

$$\begin{aligned} |v(t) - v_0| &\leq \frac{\lambda \|v\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds \\ &\leq \frac{\lambda \|v\|_\infty}{\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha} \end{aligned}$$

On prend la limite quand $t \to 0$, et on obtient

$$v(t) = v_0$$

$$v(t) = 0$$

Donc (3.14) vérifie la condition initiale . Il reste a montrer qu'elle vérifie l'équation

On a,

$$\begin{aligned} v(t) - v_0 &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds \\ &= \lambda I^{\alpha} h(t) \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur Da aux deux membres de l'égalité,

on aura

$$D^{\alpha}(v(s) - v_0)(t) = \lambda v(t)$$

de plus, on a

$$D^{\alpha}(v(s) - v_0)(t) = \lambda {}^{c}D^{\alpha} v(t)$$

par suite

$${}^{c}D^{\alpha} v(t) = \lambda v(t), \ t \in]0, a[$$

Inversement on a

$${}^{c}D^{\alpha} v(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}[v(s) - v_0](t)$$

Comme $v(t)$ est continue, il s'ensuit que ${}^{c}D^{\alpha}v$ est continu, et par suite $I^{1-\alpha}[v(s) - v_0]$ est continu. En appliquant l'opérateur I^{α} aux deux membres de l'égalité précédente, on aurra

$$I^{\alpha c} D^{\alpha} v(t) = v(t) - v_0 - \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{1-\alpha}[v(s) - v_0](t)$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left| I^{1-\alpha}[v(s) - v_0](t) \right| &\leq \frac{\sup\limits_{t \in [0,a]} |v(t) - v_0|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, ds \\ &= \frac{\|v(t) - v_0\|_{\infty}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{t\to 0}\left|I^{1-\alpha}\left[v\left(s\right)-v_0\right]\left(t\right)\right|=0$$

par conséquent

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}v\left(t\right)=v\left(t\right)-v_0$$

On a $v\in C\left(]0,a[\,,\mathbb{R}\right)$ et par conséquent $I^{\alpha}h$ est continu.

Appliquons I^{α} aux deux membres de (3.18)

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}v\left(t\right)=\lambda I^{\alpha}v\left(t\right)$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned} v\left(t\right)&=v_0+\lambda I^{\alpha}v\left(t\right),v_0=0\\ &=\frac{\lambda}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}v\left(s\right)ds,\ 0<t<a \end{aligned}$$

c'est à dire $v(t)\in C\left(]0,a[\right)$ est la solution de l'équation intégrale (3.14). ■

Maintenant, on va établir l'existence et l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy (3.1) − (3.2) dans l'espace $C_{\gamma}\left[0,a\right]$ sous les hypothèses du lemme(3.10) et une condition de Lipschitz. Pour cela on a besoin du résultat auxilliaire suivant :

Lemme 3.2.4 *Soit* $J_1=]0,a[\,,\ 0<c<a,\ g\in C[0,c]$ *et* $g\in C[c,a]$ *alors* $g\in C[0,a]$*et*

$$\left\|g\right\|_{C[0,a]}\leq\sup\left[\left\|g\right\|_{C[0,c]},\left\|g\right\|_{C[c,a]}\right] \tag{3.20}$$

Théorème 3.2.1 *Soit* $0<\alpha<1$, *et* $0\leq\gamma\leq\alpha$. *Soit* G *un ouvert de* $\mathbb{R}$,*et soit* $f:(0,T]\times G\to\mathbb{R}$, *une fonction telle que, pour chaque* $v\in G$, $f[t,v]\in C_{\gamma}[0,T]$ *et vérifie la condition de lipschitz suivante (H1) Il existe une constante* $A>0$ *telle que :*

$$\left|f\left(t,v\right)-f\left(t,\overline{v}\right)\right|\leq A\left|v-\overline{v}\right|,\ \textit{pour tout}\ t\in[0,T];\textit{et tout}\ v;\overline{v}\in G.$$

Alors il existe une solution unique $v(t)$ pour le problème de Cauchy (3.1) − (3.2) dans l'espace $C_\gamma[0,T]$.

Preuve. *On commence par montrer l'existence d'une solution unique $v(t) \in C[0,t_1]$. D'après le lemme 2.3, il suffit de montrer que l'équation intégrale de Volterra (3.14) possède une solution unique $v(t) \in C[0,t_1]$. On montre le résultat en premier temps sur une partie de l'intervalle $]0,T[$ l'équation intégrale (3.17) a un sens sur chaque intervalle $[0,t_1] \subset [0,a]$. Choisissons t_1 tel que l'inégalité,*

$$A\frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.21}$$

soit vérifiée, ensuite on montre l'existence d'une solution unique $v(t) \in C[0,t_1]$ pour l'équation intégrale de Volterra (3.14) sur $[0,t_1]$. Pour cela on utilise le théorème du point fixe de Banach pour l'éspace $C[0,a]$ qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par

$$d(v_1,v_2) = \|v_1 - v_2\|_{C[0,t_1]} = \sup_{t\in[0,t_1]} |v_1(t) - v_2(t)|$$

On réecrit l'équation intégrale (3.17) sous la forme suivante :

$$v(t) = (Tv)(t)$$

Où

$$(Tv)(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds \tag{3.22}$$

Pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

1. *Si $v(t) \in C[0,t_1]$ alors $(Tv)(t) \in C[0,t_1]$*

2. *Pour chaque $v_1, v_2 \in C[0,t_1]$*

$$\|Tv_1 - Tv_2\|_{C[0,t_1]} \le k\,\|v_1 - v_2\|_{C[0,t_1]}, \text{ avec } (0 < k < 1) \tag{3.23}$$

Comme $f[t,v] \in C[0;t_1]$, *et tenant compte du lemme 2.2, on a*

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s,v(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right\|_{C[0,t_1]} \leq \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \|f(s,v(s))\|_{C[0,t_1]}$$

alors $(Tv)(t) \in C[0,t_1]$ *: Montrons maintenant* (3.23).

En vertu de (3.12), *du lemme 2.2, et en utilisant la condition de Lipschitz ,*

On obtient

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|_{C[0,t_1]} &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (f(s,v_1(s)) - f(s,v_2(s)))(t-s)^{\alpha-1} ds \right\|_{C[0,t_1]} \\ &\leq \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(s,v_1(s)) - f(s,v_2(s))\|_{C[0,t_1]} \\ &\leq \frac{At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|v_1 - v_2\|_{C[0,t_1]} \end{aligned}$$

à l'aide du (3.21), *on obtient* (3.23), *avec* $k = \frac{At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$,*et alors par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique* $v^*(t) \in C[0,t_1]$ *de l'équation intégrale* (3.12) *sur* $[0,t_1]$. *Par le théorème de Banach, la solution* $v^*(t)$ *est une limite de la suite convergente* $(T^n v_0)(t)$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n v_0^* - v^*\|_{C[0,t_1]} = 0 \tag{3.24}$$

On prend

$$v_0^* = v_0$$

Tenant compte de l'équation intégrale (3.17), *la suite* $T^n v_0(t)$ *est définie par la formule de récurrence*

$$(T^n v_0)(t) = v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, T^{n-1} v_0^*(s)\right)(t-s)^{\alpha-1} ds, \ n = 1,2,...$$

Si on note, $v_n(t) = (T^n v_0)(t)$*, alors la relation précédente prend la forme suivante :*

$$v_n(t) = v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, v_{n-1}(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds, (n \in \mathbb{N})$$

et (3.24) *devient*

$$\lim_{n \to +\infty} \|v_n - v\|_{C[0,t_1]} = 0$$

Après, on considère l'intervalle $[t_1; t_2]$*, où* $t_2 = t_1 + h_1$ *et* $h_1 > 0$*, avec* $t_2 < T$ *:*

Réecrivons l'équation intégrale (3.17) *sous la forme*

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s, v(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds + v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} f(s, v(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds$$

puisque la fonction $v(s)$ *est définie uniquement sur* $[0, t_1]$*,*

nous obtenons

$$v(t) = v_{01} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s, v(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds$$

$$v_{01} = v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} f(s, v(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds$$

Par une technique similaire pour avoir l'existence et l'unicité de la solution sur $[0, t_1]$*; on peut déduire qu'il existe une solution unique* $v_1^*(t) \in C[t_1, t_2]$*de l'équation intégrale* (3.17)*sur l'intervalle*$[t_1, t_2]$ *:On prend l'intervalle suivant* $[t_2, t_3]$*; où* $t_3 = t_2 + h_2$*et* $h_2 > 0$*, sont tel que* $t_3 < T$ *: En répétant ceprocessus, on trouve qu'il existe une solution unique* $v(t)$ *de l'équation* (3.17)*, telle que*

$$v(t) = v_l^*(t)$$

et

$$v_l^*(t) \in C[t_{l-1}, t_l], \quad (l = 1, ..., L)$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_L = T$*. Par le lemme 2.4, il s'ensuit qu'il existe une solution unique* $v(t) \in C[0, T]$*sur l'intervalle [0 ;a] tout entier. Par conséquent, il existe une solution*

unique $v(t) = v^*(t) \in C[0,T]$ *de l'équation intégrale de Volterra* (3.17) *et alors du problème de Cauchy* (3.1) $-$ (3.2). *Pour completer la démonstration, il reste à montrer que cette solution* $v(t) \in C[0,T]$,*appartienne à l'espace* $C_\gamma^\alpha[0,T]$. *Par la définition , il faut montrer que* ${}^cD^\alpha v(t) \in C_\gamma[0,T]$. *D'après ce qui précède* $v(t) \in C[0,T]$ *est une limite de la suite* $v_n(t) = (T^n v_0^*)(t) \in C[0,T]$.

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\|_{C[0,t_1]} = 0 \tag{3.25}$$

En utilisant ensuite (3.1) *et la condition de Lipschitz, on a*

$$\begin{aligned}
\|{}^cD^\alpha v_n -^c D^\alpha v\|_{C[0,t_1]} &\leq \|f(t, v_n(t)) - f(t, v(t))\|_{C_\gamma[0,T]} \\
&\leq \lambda \|v_n - v\|_{C_\gamma[0,T]} \\
&\leq \lambda T^\gamma \|v_n - v\|_{C[0,T]} \\
&\leq A \|v_n - v\|_{C[0,T]}
\end{aligned}$$

de plus (3.25) *permet d'obtenir*

$$\lim_{n\to+\infty} \|{}^cD^\alpha v_n -^c D^\alpha v\|_{C[0,t_1]} = 0$$

alors ${}^cD^\alpha v(t) \in C_\gamma[0,T]$, *et donc,* $v \in C_\gamma^\alpha[0,T]$. *Ce qui achève la démonstration.*
on le même etaps pour le demonstration de l'équation (3.10) $-$ (3.11) *et la solution donne par sous la forme suivant :*

$$w(t) = -\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)\, ds, \;\; 0 < t < b$$

■

3.2.2 Cas $1 < \alpha \leq 2$

Dans cette section on est concerné par l'éxistence des solutions du problème (3.10) − (3.11) et (3.8) − (3.9) .On commence par donner la définition d'une solution du problème (3.10) − (3.11).

Dans ce chapitre on présente quelques résultats d'existence et d'unicité [1] [3] et le principe dans [8]

Définition 3.2.1 *Une fonction $w \in C(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.10) − (3.11) si w satisfait (3.10) − (3.11)*

Soit $w \in C[0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$ {}^{c}D^{\alpha} w(t) = h(t), \ t \in J, \ 1 < \alpha \leq 2 \tag{3.26} $$

Pour l'existence de la solution, on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.2.5 *Une fonction w est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$ w(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s) h(s) ds + w_0 + \frac{(w_T - w_0)}{T} t \tag{3.27} $$

si et seulement si w est une solution de (3.10) − (3.11), (3.9) − (3.8) où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie par

$$ G(t,s) = \begin{array}{c} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, \ 0 \leq s \leq t \leq T \\ -\frac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, \ 0 \leq t \leq s \leq T \end{array} \tag{3.28} $$

Remarque 3.2.1 *la fonction $t \in J \to \int_0^b |G(t,s)| ds$ est continue sur J, et est donc bornée. Soit*

$$ \widehat{G} = \sup \left\{ \int_0^b |G(t,s)| ds, \ t \in J \right\} $$

Preuve. *Supposons que w satisfait (3.10) − (3.11),alors nous donne*

$$w(t) = c_0 + c_1 t - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)\, ds$$

pour la condition de l'équation (3.11)

$$w(0) = c_0 = \mu_1$$

et

$$w(b) = \mu_1 + c_1 b - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} w(s)\, ds$$

donc

$$c_1 = \frac{\lambda}{b\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} w(s)\, ds + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{b}$$

c'est à dire

$$w(t) = \mu_1 + t\left(\frac{\lambda}{b\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} w(s)\, ds + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{b}\right) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)\, ds$$

par suite, on trouve l'équation (3.27). Inversement, si w satisfait l'équation (3.27), alors l'équation (3.26) − (3.10) est vérifiée. ■

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder.

Théorème 3.2.2 *Supposons que*

(H_1) *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*

(H_2) *Ils existent une fonction $\rho \in C(J, \mathbb{R}_+)$, et $\psi \in [0,\infty) \to [0,\infty)$ continues et non décroissantes. Telles que*

$$|f(t,u)| \leq \rho(t)\, \psi(|u|), \text{ pour } t \in J \text{ et tout } u \in \mathbb{R}.$$

(H_3) *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\frac{M}{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\rho^*\psi\left(M\right)\widehat{G} + |w_0| + |w_T - w_0|} \geq 1 \tag{3.29}$$

où $\rho^* = \sup \rho\left(s\right),\ \ s \in J$

Preuve. *Soit* $C = \{w \in C(J_2, \mathbb{R}), \|w\|_\infty \leq M\}$. *Où* M *est la constante donnée par* (H_3). *Il est clair que le sous-ensemble* C *est fermé et convexe. Nous allons montrer que* F *satisfait les conditions du théorème de point fixe de Schauder.*

Etape 1. F *est continu.*

Soit w_n *une suite telle que* $w_n \to w$ *dans* $C(J, \mathbb{R})$. *Alors, pour chaque* $t \in J$.

$$|F(w_n)(t) - F(w)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^T |G\left(t,s\right)| \left|f(s, w_n) - f(s, w(s))\right| ds$$

Puisque f *est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que.*

$$\|F(w_n) - F(w)\|_\infty \to 0 \quad quand \quad n \to 0$$

Etape 2. F *transforme* C *en un ensemble borné de* $C(J, \mathbb{R})$.

Soit $w \in C$, *alors pour chaque* $t \in J$, (H_2) *implique*

$$\begin{aligned}(Fw)(t) &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^b |G\left(t,s\right)| f(s, w(s)) ds \\ &\leq \frac{|\lambda|}{\Gamma\left(\alpha\right)} \rho\left(t\right) \psi\left(|w\left(t\right)|\right) \int_0^b |G\left(t,s\right)| ds\end{aligned}$$

donc,

$$\|Fw\|_\infty \leq \rho^*\psi\left(M\right)\widehat{G} = L$$

Etape 3. F *transforme* C *en un ensemble équicontinue de* $C(J, \mathbb{R})$.

Soit $w \in C, t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2,$ *alors*

$$\begin{aligned}|F(w)(t_2) - F(w)(t_1)| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b |G(t_2, s)| f(s, w(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b |G(t_1, s)| f(s, w(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \, |f(s, w(s))| \, ds\end{aligned}$$

quand $t_1 \to t_2$ *: Le membre à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par le théorème d'Ascoli-Arzélà,* $N(C)$ *est relativement compact pour tout borné de* F*. Alors* N *est complètement continu.*

Etape 4. $F(C) \subset C$

Soit $w \in C$*. On va montrer que* $Fw \in C$*. Pour chaque* $t \in J$*, on a*

$$\begin{aligned}|(Fw)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b |G(t, s)| f(s, w(s)) ds \\ &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \rho^* \psi(\|w\|_\infty) \widehat{G}\end{aligned}$$

alors

$$\|Fw\|_\infty \leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \rho^* \psi(M) \widehat{G}$$

par (3.29) *on a*

$$\|Fw\|_\infty \leq M \ .$$

Par suite, on déduit que F *admet au moins un point fixe qui est une solution du problème linéaire* (3.10) − (3.11)*,*

On meme etaps pour l'équation (3.8) − (3.9) ■

Chapitre 4

Application et schema numerique de resolution

Le probléme (3.3) suivant :

$$\begin{cases} \partial_x^\alpha U(x,y) + \partial_y^\alpha U(x,y) = 0, \qquad 0 < \alpha \leq 2 \\ D_x^{\alpha-2} U(x,0) = f(x), \qquad \Omega =]0,a[\times]0,b[\\ D_x^{\alpha-1} U(x,b) = g(x) \end{cases}$$

pour résouder (3.3) on utilise le transformation de laplace pour rapport á x de probleme (3.3).

si on utilise la methode de sépration de variable on cherche un solution de (3.3) sous la forme $U(x,y) = X(x)\,Y(y)$

on remplace dans $\partial_x^\alpha U(x,y) + \partial_y^\alpha U(x,y) = 0$, on résoudre deux probléme (3.4) $-$ (3.5) et (3.6) $-$ (3.7) on remplace pour le probléme suivante :

puor $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}\left(w\left(t\right)\right) = -\lambda w\left(t\right),\ 0 < t < b,\ w\left(t\right) \neq 0 \\ w(0) = \mu_1 \\ w(b) = \mu_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

et :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}\left(v\left(t\right)\right) = \lambda v\left(t\right),\ 0 < t < a,\ v\left(t\right) \neq 0 \\ v(0) = c_1 \\ v(a) = c_2 \end{cases} \tag{4.2}$$

$\omega_1, \omega_2, c_{1,} c_2$ donnée.

pour $1 < \alpha < 2$:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}\left(w\left(t\right)\right) = -\lambda w\left(t\right),\ 0 < t < b,\ w\left(t\right) \neq 0 \\ D_t^{\alpha-1}\left(w\left(0\right)\right) = \delta_1 \\ D_t^{\alpha-2}\left(w\left(b\right)\right) = \delta_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

$\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2$ donnée.

d'aprés transformation de Rimmen-Liouville (2.13) de le probléme (4.1) et (4.2) pour $0 < \alpha \leq 1$ donc :

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^{RL}D_t^{\alpha} v\left(t\right); s\right\} = \mathcal{L}\left\{\lambda v\left(t\right)\right\}$$

$$s^{\alpha} V\left(s\right) - \sum_{k=0}^{0} s^k \left[{}_0D_t^{\alpha-k-1} v\left(t\right)\right]_{t=0} = \lambda V\left(s\right), \qquad \mathcal{L}\left\{v\left(t\right); s\right\} = V\left(s\right)$$

$$s^{\alpha} V\left(s\right) -_0 D_t^{\alpha-1} v\left(0\right) = \lambda V\left(s\right), \qquad {}_0D_t^{\alpha-1} v\left(0\right) = \acute{C}$$

$$\left(s^{\alpha} - \lambda\right) V\left(s\right) = \acute{C}$$

$$V\left(s\right) = \frac{\acute{C}}{\left(s^{\alpha} - \lambda\right)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{V\left(s\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\acute{C}}{\left(s^{\alpha} - \lambda\right)}\right\}$$

$$v\left(t\right) = \acute{C} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda t^{\alpha}\right) \tag{4.4}$$

c'ést la même étaps pour (4.1) alors :

$$w\left(t\right)=\acute{C}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right) \tag{4.5}$$

d'aprés transformation de Rimmen-Liouville (2.13) de le probléme (4.3)

pour $1<\alpha<2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}_{0}^{RL}D_{t}^{\alpha}v\left(t\right);s\right\} &= \mathcal{L}\left\{\lambda v\left(t\right)\right\} \\
s^{\alpha}V\left(s\right)-\sum_{k=0}^{1}s^{k}\left[{}_{0}D_{t}^{\alpha-k-1}v\left(t\right)\right]_{t=0} &= \lambda V\left(s\right), \qquad \mathcal{L}\left\{v\left(t\right);s\right\}=V\left(s\right) \\
s^{\alpha}V\left(s\right)-\left[{}_{0}D_{t}^{\alpha-1}v\left(0\right)+s{}_{0}D_{t}^{\alpha-2}v\left(0\right)\right] &= \lambda V\left(s\right) \\
\left(s^{\alpha}-\lambda\right)V\left(s\right) &= \mu_{1}+s\tilde{C}, \qquad {}_{0}D_{t}^{\alpha-2}v\left(0\right)=\tilde{C},\mu_{1}={}_{0}D_{t}^{\alpha-1}v\left(0\right) \\
V\left(s\right) &= \frac{\mu_{1}}{\left(s^{\alpha}-\lambda\right)}+\frac{s\tilde{C}}{\left(s^{\alpha}-\lambda\right)} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{V\left(s\right)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_{1}}{\left(s^{\alpha}-\lambda\right)}\right\}+\tilde{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^{\alpha}-\lambda\right)}\right\}
\end{aligned}$$

$$v\left(t\right)=\mu_{1}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda t^{\alpha}\right)+\tilde{C}t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda t^{\alpha}\right) \tag{4.6}$$

c'ést la même étaps pour(4.3) .

$$w\left(t\right)=\delta_{1}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)+\tilde{C}t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda t^{\alpha}\right) \tag{4.7}$$

on remplace $X(x)=v(t)$ $Y\left(y\right)=w\left(t\right)$.

d'aprés (4.5) $-$ (4.4) et on obtenue que :

$$X\left(x\right)=\acute{C}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right)$$

et

$$Y\left(y\right)=\acute{C}y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda y^{\alpha}\right)$$

donc la solution exacte de le probléme (3.3) pour $0 < \alpha < 1$:

$$U(x,y) = \left[\acute{C}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha})\right]\left[\acute{C}y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda y^{\alpha})\right]$$

d'aprés (4.6) $-$ (4.7) et on obtenue que :

$$X(x) = \mu_1 x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) + \tilde{C}x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda x^{\alpha})$$

et

$$Y(y) = \delta_1 y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda y^{\alpha}) + \tilde{C}y^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda y^{\alpha})$$

donc la solution exacte de le probléme (3.3) pour $1 < \alpha < 2$:

$$U(x,y) = \left[\mu_1 x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) + \tilde{C}x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda x^{\alpha})\right]\left[\delta_1 y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda y^{\alpha}) + \tilde{C}y^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda y^{\alpha})\right]$$

4.1 Une approximation de $D_x^{\alpha}X \quad D_y^{\alpha}Y$:

4.1.1 Cas $0 < \alpha \leq 1$:

On subdivise l'intervale $]0,a[$ sous la forme :

$x_0 = 0$ et $x_n = a$

On a : $h = x_{i+1} - x_i \quad i = 0,1,2,...,n-1, \ \ (h$ constante$)$:

l'approximation de $D_x^{\alpha}X(x_i)$ que l'on note $D_x^{\alpha}X(x_i) = D_x^{\alpha}X_i$ le probleme :

$$D_x^{\alpha}X(x_i) - \lambda X(x_i) = 0 \tag{4.8}$$

S'écrit sous forme approximation :

$$D_x^{\alpha}X_i \approx \frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{i} g_k X_{i-k} \tag{4.9}$$

l'équation (4.8) s'écrit :

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{i} g_k X_{i-k} - D_x^{\alpha} X_i \approx 0 \tag{4.10}$$

On a $g_0 = 1, g_1 = -\alpha, g_2 = \alpha(\alpha-1), g_3 = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times 2!,$

$g_4 = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\times 3!$ en general :

$$g_{k+1=-}g_k(\alpha-k)\times k!, \quad k\in\mathbb{N} \tag{4.11}$$

On prend par example $\alpha = \frac{1}{2}$ car $0 < \alpha \leq 1$,et $h = \frac{1}{4}$,

On prend aussi par example $\lambda = 3$

le probleme (4.8) s'écrit :

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{i} g_k X_{i-k}\right) - \lambda X_i \approx 0 \tag{4.12}$$

devient (4.8) on a : $X_0 = X(0) = c_1$

$\mathbf{i = 1}$ le probleme (4.8) devient :

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{1} g_k X_{1-k}\right) - \lambda X_1 \approx 0$$
$$\frac{1}{h^{\alpha}}(g_0 X_1 + g_1 X_0) - \lambda X_1 \approx 0$$
$$\frac{1}{h^{\alpha}}(X_1 + c_1 g_1) - \lambda X_1 \approx 0$$

$$X_1\left(\frac{1}{h^{\alpha}} - \lambda\right) \approx -\frac{c_1 g_1}{h^{\alpha}} \tag{4.13}$$

$\mathbf{i = 2}$ le probleme (4.8) devient :

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{2} g_k X_{2-k}\right) - \lambda X_2 \approx 0$$
$$\frac{1}{h^{\alpha}}(g_0 X_2 + g_1 X_1 + g_2 X_0) - \lambda X_2 \approx 0$$
$$\frac{1}{h^{\alpha}}(g_0 X_2 + g_1 X_1 + g_2 c_1) - \lambda X_2 \approx 0$$

$$\frac{g_1}{h^\alpha}X_1 + X_2\left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right) \approx -\frac{c_1 g_2}{h^\alpha} \tag{4.14}$$

i = 3 le probleme (4.8) devient :

$$\frac{1}{h^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{3} g_k X_{3-k}\right) - \lambda X_3 \approx 0$$
$$\frac{1}{h^\alpha}\left(g_0X_3 + g_1X_2 + g_2X_1 + g_3X_0\right) - \lambda X_3 \approx 0$$
$$\frac{1}{h^\alpha}\left(g_0X_3 + g_1X_2 + g_2X_1 + g_3c_1\right) - \lambda X_3 \approx 0$$

$$\frac{g_2}{h^\alpha}X_1 + \frac{g_1}{h^\alpha}X_2 + X_3\left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right) \approx -\frac{c_1 g_3}{h^\alpha} \tag{4.15}$$

d' aprés les équations (4.13) − (4.14) − (4.15) − on obtenue le matrice dans la forme $AX = B$ est définie :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right) & 0 & 0 \\ \frac{g_1}{h^\alpha} & \left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right) & 0 \\ \frac{g_2}{h^\alpha} & \frac{g_1}{h^\alpha} & \left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_1 g_1}{h^\alpha} \\ -\frac{c_1 g_2}{h^\alpha} \\ -\frac{c_1 g_3}{h^\alpha} \end{bmatrix}$$

c'ést la solution qui on cherche pour que :$\alpha = \frac{1}{2}$,et $h = \frac{1}{4}$, . $\lambda = 3$ c_1 =donc :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La solution donne par : $X = A^{-1}B$, on calcule A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La solution est la suivante

$$X = (X_1, X_2, X_3)^t \approx (-4, 2, -6)^t \tag{4.16}$$

c'ést la même chose que pour (4.1) alors :

On subdivise l'intervale $]0, b[$ sous la forme :

On prend $h = 0.25$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ car $0 < \alpha \leq 1$.

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{i} g_k Y_{i-k}\right) + \lambda Y_i \approx 0 \tag{4.17}$$

devient (4.1) on a : $\quad Y_0 = Y(0) = b$

$\mathbf{i = 1}$ le probleme (4.1) devient :

$$Y_1\left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) \approx -\frac{\omega_1 g_1}{h^{\alpha}} \tag{4.18}$$

$\mathbf{i = 2}$ le probleme (4.1) devient :

$$\frac{g_1}{h^{\alpha}} Y_1 + Y_2\left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) \approx -\frac{\omega_1 g_2}{h^{\alpha}} \tag{4.19}$$

$\mathbf{i = 3}$ le probleme (4.1) devient :

$$\frac{g_2}{h^{\alpha}} Y_1 + \frac{g_1}{h^{\alpha}} Y_2 + Y_3\left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) \approx -\frac{\omega_1 g_3}{h^{\alpha}} \tag{4.20}$$

d' aprés les équations (4.18) $-$ (4.19) $-$ (4.20) $-$ on obtenue le matrice dans la forme $DX = E$ est définie :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) & 0 & 0 \\ \frac{g_1}{h^{\alpha}} & \left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) & 0 \\ \frac{g_2}{h^{\alpha}} & \frac{g_1}{h^{\alpha}} & \left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\frac{\omega_1 g_1}{h^{\alpha}} \\ -\frac{\omega_1 g_2}{h^{\alpha}} \\ -\frac{\omega_1 g_3}{h^{\alpha}} \end{bmatrix}$$

c'ést la solution qui on cherche pour que :$\alpha = \frac{1}{2}$,et $h = \frac{1}{4}, \omega_1 = 6$. $\lambda = 3$ donc :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

on calcule D^{-1}

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{7}{250} & \frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

La solution est la suivante

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^t \approx (1.2, 0.84, 0.48)^t \tag{4.21}$$

La soulution générale pour $0 < \alpha \leq 1$ où cela la soulution dans la forme suivante :

$$U(x_i, y_i) = X(x_i)\, Y(y_i) \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} U_1 \approx -4.8 \\ U_2 \approx 1.68 \\ U_3 \approx -2.88 \end{cases}$$

4.1.2 Cas $1 < \alpha \leq 2$:

on appel le probléme suivant :

$$\begin{cases} D_y^{\alpha}(Y(t)) = -\lambda Y(y), \ 0 < y < b, \ Y(y) \neq 0 \\ D_y^{\alpha-1}(Y(0)) = \delta_1 \\ D_y^{\alpha-2}(Y(b)) = \delta_2 \end{cases} \tag{4.23}$$

et

$$\begin{cases} D_x^{\alpha}(X(x)) = \lambda X(x), \ 0 < x < a, \ X(x) \neq 0 \\ D_x^{\alpha-1}(X(0)) = \mu_1 \\ D_x^{\alpha-2}(X(a)) = \mu_2 \end{cases} \tag{4.24}$$

On commencer le problème (4.23),s'écrit sous forme approximation :

$$D_y^{\alpha} Y_i \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{i} g_k Y_{i-k} \tag{4.25}$$

$$D_y^{\alpha-1} Y_i \approx \frac{1}{h^{\alpha-1}} \sum_{k=0}^{i} g_k Y_{i-k}$$

d'aprés (4.23)

$$\begin{aligned} D_y^{\alpha-1}\left(Y\left(0\right)\right) &= \delta_1 \\ \frac{1}{h^{\alpha-1}} g_0 Y\left(0\right) &\approx \delta_1 \\ Y\left(0\right) &\approx h^{\alpha-1}\delta_1 \\ D_y^{\alpha-2}\left(Y\left(b\right)\right) &= \delta_2 \\ \frac{1}{h^{\alpha-2}}\left(\sum_{k=0}^{4} g_k Y_{4-k}\right) &\approx \delta_2 \\ \frac{1}{h^{\alpha-2}}\left(g_4 Y_0 + g_3 Y_1 + g_2 Y_2 + g_1 Y_3 + g_0 Y_4\right) &\approx \delta_2 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{i} g_k Y_{i-k}\right) + \lambda Y_i = 0 \tag{4.27}$$

$\mathbf{i = 1}$ le probleme (4.27) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^{\alpha}}\left(Y_1 + g_1 h^{\alpha-1}\delta_1\right) + \lambda Y_1 &\approx 0 \\ \left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) Y_1 &\approx -\frac{g_1 \delta_1}{h} \end{aligned} \tag{4.28}$$

$\mathbf{i = 2}$ le probleme (4.27) devient :

$$\frac{g_1}{h^{\alpha}} Y_1 + Y_2\left(\frac{1}{h^{\alpha}} + \lambda\right) \approx -\frac{g_2 \delta_1}{h} \tag{4.29}$$

$\mathbf{i} = \mathbf{3}$ le probleme (4.27) devient :

$$\frac{g_2}{h^\alpha}Y_1 + \frac{g_1}{h^\alpha}Y_2 + Y_3\left(\frac{1}{h^\alpha} + \lambda\right) \approx -\frac{g_3\delta_1}{h} \tag{4.30}$$

d' aprés les équations (4.28) (4.29) − (4.30) on obtenue le matrice dans la forme $FY = G$ est définie :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^\alpha} + \lambda\right) & 0 & 0 \\ \frac{g_1}{h^\alpha} & \left(\frac{1}{h^\alpha} + \lambda\right) & 0 \\ \frac{g_2}{h^\alpha} & \frac{g_1}{h^\alpha} & \left(\frac{1}{h^\alpha} + \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\frac{g_1\delta_1}{h} \\ -\frac{g_2\delta_1}{h} \\ -\frac{g_3\delta_1}{h} \end{bmatrix}$$

On prend $h = 0.25$ et $\alpha = \frac{3}{2}$ car $1 < \alpha \leq 2$.et $\delta_1 = 11, \lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -12 & 11 & 0 \\ 6 & -12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 66 \\ -33 \\ 33 \end{bmatrix}$$

On calcule F^{-1} :

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ \frac{12}{121} & \frac{1}{11} & 0 \\ \frac{78}{1331} & \frac{12}{121} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

La solution est la suivante :

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^t = (6, 3.54, 10.14)^t$$

c'ést la même chose que pour (4.24) ,s'écrit sous forme approximation :

$$D_x^\alpha X_i \approx \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i} g_k X_{i-k}$$

$$D_x^{\alpha-1} X_i \approx \frac{1}{h^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{i} g_k X_{i-k}$$

d'aprés (4.23)

$$
\begin{aligned}
D_x^{\alpha-1}\left(X\left(0\right)\right) &= \mu_1 \\
\frac{1}{h^{\alpha-1}} g_0 X\left(0\right) &\approx \mu_1 \\
X\left(0\right) &\approx h^{\alpha-1}\delta\mu_1 \\
D_x^{\alpha-2}\left(X\left(b\right)\right) &\approx \mu_2 \\
\frac{1}{h^{\alpha-2}}\left(\sum_{k=0}^{4} g_k X_{4-k}\right) &\approx \mu_2 \\
\frac{1}{h^{\alpha-2}}\left(g_4X_0 + g_3X_1 + g_2X_2 + g_1X_3 + g_0X_4\right) &\approx \mu_2
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

le matrice donne dans la forme $HY = I$, dans même étaps est définie :

$$
\begin{bmatrix}
\left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right) & 0 & 0 \\
\frac{g_1}{h^\alpha} & \left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right) & 0 \\
\frac{g_2}{h^\alpha} & \frac{g_1}{h^\alpha} & \left(\frac{1}{h^\alpha} - \lambda\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -\frac{\mu_1 g_1}{h} \\ -\frac{\mu_1 g_2}{h} \\ -\frac{\mu_1 g_3}{h} \end{bmatrix}
$$

On prend $h = 0.25$ et $\alpha = \frac{3}{2}$ car $1 < \alpha \leq 2$.et $\mu_1 = 9, \lambda = 3$:

$$
\begin{bmatrix}
5 & 0 & 0 \\
-12 & 5 & 0 \\
6 & -12 & 5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}
\approx
\begin{bmatrix} 54 \\ -27 \\ 27 \end{bmatrix}
$$

On calcule H^{-1}

$$
H^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
\frac{12}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\
\frac{114}{125} & \frac{12}{25} & \frac{1}{5}
\end{bmatrix}
$$

La solution est la suivante :

$$
X = \left(X_1, X_2, X_3\right)^t \approx \left(10.8, 20.52, 41.68\right)^t
$$

La soulution générale pour $1 < \alpha \leq 2$, et d'aprés (4.22) alors :

$$\begin{cases} U_1 \approx 64.8 \\ U_2 \approx 72.64 \\ U_3 \approx 422.63 \end{cases}$$

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude d'existence et d'unicité de solution du problème et donne la solution par utlisation de la transformation de laplace de dérivée fractionnel de le probléme différentielle d'ordre fractionnel,pose dans un domaine plan non réguile.

dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé quelques outils de base utiles pour notre travail et présenté des dérivées et intégrales fractionnaires (les fonctions Gamma, Béta, Mettag-Leffler,...) et (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo).et nous avons présenté transformation de laplace de dérivée fractionnel,Dans le troisième chapitre on présente résultats d'existences et d'unicité de solutions du problème différentielle d'ordre fractionnaire.Pour le quatrième chapitre on cherche la solution exact du problème différentielle d'ordre fractionnaire .

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, M. Benchohra, J.Nieto et A.Ouhab, Fractional Differantial Equations and Inclusions , Springer 2010.

[2] R.P. Agarwal. A propos d'une note de M. Pierre Humbert, C. R. Académie des sciences , 236,2031-2032(1953).

[3] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[4] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 2. McGraw-Hill, New York (1955).

[5] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 3. McGraw-Hill, New York (1955).

[6] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] H.Hadjar Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires ,Mémoire de Master, Tlemcen, 2014-2015.

[9] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applicationsof fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[10] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, Theory of fractional differential inequalities and applications, Commun. Appl. Anal. (2007) (in press).

[11] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscolasticity ,University of Bologna,Italy,2010.

[12] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[13] Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[14] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications,Fixed Point Theorems SpringVerlag, New York, 1986.

الملخص

المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة تقريبات عددية للحل لهذه المعادلات و ذلك باستخدام بعض الطرق أو الخوارزميات المعروفة و الكثيرة الاستعمال, حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى كابيتو

الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية , المشتقات الكسرية , كابيتو

Résumé

Les équations différentielles d'ordre fractionnaires sont une généralisation des équations différentielles classiques. Dans cette note, nous avons étudié l'approximation numérique de la solution à ces équations en utilisant certaines méthodes ou algorithmes connus et largement utilisés, où les dérivés fractionnaires ont été utilisés dans le sens de Caputo

Mots clés

Équations différentielles , dérivés fractionnaires, Caputo

Abdtract

Fractiona differential equations are a generalization of conventional differential equations. In this note, we studied the numerical approximation of the solution to these equations using certain known and widely used methods or algorithms, where fractional derivatives were used in the direction of Caputo

Keywords

Differential equations, fractional derivatives, Caputo