Etude d'un problémes differentiel d'ordre frationnel dans un domaine plan non réglulier.

Tlili Mohammed Lakhdar

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
lakhdartlili39@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier problème differentielle d'ordre fracionnelle dans domaine plan non réguilér ,on démontrée l'existence et l'unictée de soulution d'un probléme ,enfin ,on recherche la soulition par la transformation de laplace

Key words: *le théorème de point fixe de Banach,.*

1. Introduction

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs. Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielle d'ordre fractionnaire partiell. ce travail, qui se compose de quatre chapitres,Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations qui seront utiles dans la suite de travail .Le deuxième chapitre sera consacré le transformation de laplace des derivees fractionaires,Dans le troisième chapitre on pose le probleme et etude l'existence et l'unicite ,le chapiter quatre est shuma numerique

2. rappel mathematique a la derivation d'ordre non entier

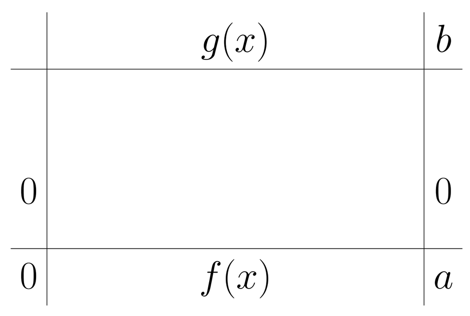
1. **Fonction spécifiques pour la dérivation fractionnaire**
   - La fonction Gamma :
   $$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$
   - La fonction Bêta :
   $$B(p,q)=\int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}dx \quad p>0, q>0$$
   - La fonction de Mittag-Leffler :
   $$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad (\alpha>0,\beta>0)$$
2. **Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville** :
   $$I_a^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \qquad h\in L^1[a,b] \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}_+$$
3. **Dérivées fractionnaires**
   - La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :
   $$\left({}_{RL}D_a^{\alpha}f\right)(x)=D^n I_a^{(n-\alpha)}f(x)$$
   - La dérivée fractionnaire de Caputo :
   $${}_cD_a^{\alpha}f(x)=I_a^{n-\alpha}D^n f(x) \qquad \text{et } n-1\leqslant\alpha<n \text{ et } f\in\mathcal{C}^n([a,b])$$
   - La dérivée de Grünwald-Letnikov :
   $${}_{GL}D_a^{(\alpha)}f(x)=\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{\alpha}{r}f(x-rh) \quad \text{, tq } 0<m<\alpha<m+1, (\alpha>0)$$

3. transformation de laplace des derivees fractionaires

1. **La transformée de Laplace de ladérivée fractionnaire de Riemann-Liouville**
   $$\mathcal{L}\left\{D^{\alpha}y(t)\right\}=s^{\alpha}Y(s)-\sum_{k=0}^{n-1}S^{n-k-1}D^{k-(n-\alpha)}y(0)$$
2. **La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo**
   $$\mathcal{L}\left\{{}_0^CD_t^pf(t);s\right\}=s^{-(n-p)}G(s)$$
   $$G(s)=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kf^{(n-k-1)}(0)$$
   $$\mathcal{L}\left\{{}_0^CD_t^pf(t);s\right\}=s^pF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}f^{(k)}(0). \qquad (n-1<p\leq n)$$
3. **La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov**
   considérons le cas $0\leq p<1$ et $a=0$ alors
   $${}_0D_t^pf(t)=\frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)}+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t(t-\tau)^{-p}f'(\tau)d\tau$$
   En utilisant la transformée de Laplace
   $$\mathcal{L}\left\{{}_0D_t^pf(t);s\right\}=\frac{f(0)}{s^{1-p}}+\frac{1}{s^{1-p}}(sF(s)-f(0))=s^pF(s)$$

4. position du probleme

La formulation du probléme est la suivant : Si $\Omega=]0,a[*]0,b[$



$$\begin{cases}\partial_x^{\alpha}U(x,y)+\partial_y^{\alpha}U(x,y)=0\\ D_x^{\alpha-2}U(x,0)=f(x)\\ D_x^{\alpha-1}U(x,b)=g(x)\end{cases}$$

pour résoudre la solution de le probléme on utilise la méthode de sépration de variable ce qui donne deux problémes linéaire suivant et le solution dans la forme $U(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\partial_x^{\alpha}U(x,y)+\partial_y^{\alpha}U(x,y)=0$$

$$D_x^{\alpha}(X(x)Y(y))+D_y^{\alpha}(X(x)Y(y))=0$$

$$Y(y)D_x^{\alpha}(X(x))+X(x)D_y^{\alpha}(X(x))=0$$

$$\frac{D_x^{\alpha}(X(x))}{X(x)}=-\frac{D_y^{\alpha}(Y(y))}{Y(y)}=\lambda \text{ tq } X(x)\neq 0, Y(y)\neq 0$$

alors divisez l'equation en deux partties

$$D_x^{\alpha}(X(x))=\lambda X(x)$$

on vérifie que tel que $x=a; x=0$

$$X(0)=0; X(a)=0$$

donc on obtien le probleme linéaire suivante

$$\begin{cases}D_x^{\alpha}(X(x))=\lambda X(x)\\ X(0)=0; X(a)=0\end{cases}$$

Méme étapes pou $Y(y)$ Alors :

$$\begin{cases}D_y^{\alpha}(Y(y))=-\lambda Y(y)\\ Y(b)=g(x); Y(0)=f(x) \text{ tq } 0<\alpha<2\end{cases}$$

5. etude de l'existence et unicite

Dans cette section on étudée l'existence et l'unicitée pour deux probleme linéaire $Y(y)$ et $X(x)$

Lemme

References