RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER
EN
MATHÉMATIQUES

OPTION
ANALYSE FONCTIONNELLE

INTITULÉ

Théorème de Poincaré-Bendixson et applications

PAR
Ahmed Bakria

Devant le jury:

Mr. Abdallh Bensayeh	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Mr. Mohamed Tayeb Benmoussa	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Mohamed El Amine Bahayou	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

Soutenu publiquement le : 24 – 10 – 2019

Dédicace

Je dédie ce travail :
à mes parents
- à mes frères : KHALED, SOUFIAN, MOHAMED ELAMIN
à mes sœurs et à toute la famille
- à mes chers amis : DERRADJI, SAIF, ABBAS, HAMID, NAAIMI, HOSSIN, SLIMAN, MOULOD, AISSA.
- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.
- Et à tous mes professeurs.

Ahmed Bakria.

Remerciements

Premièrement nous remercions Dieu, notre créateur. Nous remercions particulièrement notre encadreur :**Mr. Mohamed El Amine Bahayou** pour son aide précieuse, sa patience et ses encouragements. Nous voulons également remercier : **Mr. Abdallah Bensayeh** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire. Nos remerciements vont également à : **Mr. Mohamed Tayeb Benmoussa** honoré de leur présence dans ce jury.

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère, mon frère et mes sœurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants de l'université KASDI Merbah - Ouargla .
Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donné.

Merci à tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail .

Introduction

Le théorème de Poincaré-Bendixson permet une description complète du comportement asymptotique d'une grande classe de flots sur le plan. Le théorème indique que si une solution maximale reste bornée, alors soit elle converge, soit son comportement asymptotique est celui d'une fonction périodique.

Ce Théorème est remarquable en ce qu'il ne suppose aucune information détaillée sur le champ de vecteurs, mais uniquement l'unicité des solutions, les propriétés des ensembles limites et certaines propriétés de la géométrie de l'espace de phase sous-jacent. Nous commençons par définir le cadre et donner quelques définitions préliminaires.

Le Théorème de Poincaré-Bendixson qui nous intéresse, s'énonce comme suit :

Théorème 1. *Un ensemble ω-limite non vide compact d'un système dynamique de classe C^1, du plan, qui ne contient pas de point d'équilibre est une orbite périodique.*

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre de généralités, sur la notion d'action de groupes, systèmes dynamiques et notions liées aux champs de vecteurs.

2. Deuxième chapitre, consacré au théorème de Poincaré-Bendixson.

3. Une annexe qui regroupe une brève historique du théorème.

Nous terminons par une petite bibliographie de la littérature qui traite ce théorème plus en détail.

Contents

1 Notions de base **3**

1.1 Sous-variétés 3

1.2 Variétés 5

1.3 Équations différentielles autonomes 7

1.4 Théorème de la boule chevelue 9

1.5 Théorème du point fixe de Brouwer 10

2 Théorème de Poincaré-Bendixson **13**

2.1 Ensembles ω-limite 13

2.2 Section de Poincaré 17

2.3 Exemples d'applications du Théorème de Poincaré-Bendixson 24

2.3.1 Équation de Liénard et de Van der Pol 26

2.3.2 Ensembles limites qui ne sont pas des orbites périodiques. . . 30

3 Annexe **35**

3.0.1 Henri Poincaré 35

3.0.2 Ivar Otto Bendixson (1861-1935) 35

CHAPITRE

1 Notions de base

1.1 Sous-variétés

La géométrie différentielle a pour objet l'étude locale et globale d'objets géométriques appelés variétés différentielles et leurs transformations. Ces objets interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques, allant des systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles, géométrie algébrique ou arithmétique et probabilités.

Avant de définir la notion de variété différentielle, nous allons définir et étudier les sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^n$ qui en sont un exemple remarquable, généralisation naturelle des courbes et des surfaces "régulières". Au voisinage de chacun de ses points, une sous-variété "ressemble" à un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si l'on décide que deux objets se "ressemblent" lorsqu'ils sont difféomorphes- au moins localement.

L'une des principales difficultés de la géométrie différentielle est la diversité des points de vue possibles, qui correspondent aux différentes manières dont elles interviennent naturellement. Il est indispensable de savoir passer d'un point de vue à un autre.

Dans ce chapitre, on supposera tous les difféomorphismes sont de classe C^∞.

Définition 1.1. *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une* sous-variété *si en chaque point x_0 de M il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme local φ tel que l'on ait*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

L'entier p est appelé dimension de M en x_0.

Remarque.

(A) *Le difféomorphisme φ s'appelle une* carte locale *de M en x_0.*

On va voir que p est bien défini et ne dépend pas du choix de φ.

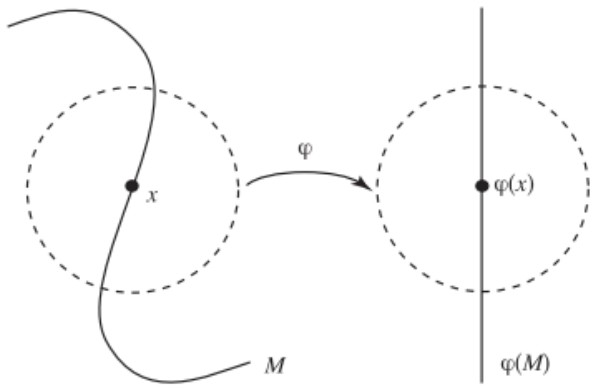

Figure 1.1: Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan

(B) *Être une sous-variété est une propriété "locale", ce qui signifie qu'elle se vérifie en se restreignant au voisinage de chaque point.*

L'unicité de la dimension en x et son indépendance de x pour une variété connexe résultent de la proposition suivante :

Proposition 1. *La dimension en un point x d'une variété est définie de manière unique, et notée $\dim_x M$. Si la variété M est connexe, cette dimension ne dépend pas du point choisi.*

Proof. En effet, si on avait deux difféomorphismes φ_1, φ_2 tels que

$$\varphi_1(U \cap M) = \varphi_1(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \text{ et } \varphi_2(U \cap M) = \varphi_2(U) \cap (\mathbb{R}^q \times \{0\}),$$

alors $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ serait un difféomorphisme local défini sur un voisinage de 0 envoyant $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^q \times \{0\}$. On en déduit que $D_0\psi$ envoie $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^q \times \{0\}$. Or $D_0\psi$ est une application linéaire bijective donc $p = q$.

Maintenant si $\varphi : U \longrightarrow V$ est une carte en x, et y est un point de U, φ donne par translation une carte en y : le difféomorphismeψ donné par $\psi(z) = \varphi(z)?\varphi(y)$ est une carte en y
On en déduit que $\dim_x M = \dim_y M$ et donc $D_p = \{x \in M,\ \dim_x M = p\}$ est un ouvert. Son complémentaire est réunion d'ouverts $M \setminus D_p = \bigcup_{j \neq p} D_j$, il est donc ouvert, ce qui entraine que D_p est à la fois ouvert et fermé. Comme D_p est non vide et M connexe, alors $M = D_p$. □

Utiliser la définition ci-dessus pour démontrer qu'un ensemble est une sous-variété est parfois peu commode. Il vaut mieux connaitre le plus grand nombre de définitions équivalentes pour utiliser chaque fois celle qui est la mieux adaptée. En voici quelques unes.

Proposition 2. *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Alors M est une sous-variété si et seulement si pour chaque point x_0 de M, il existe un voisinage W de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que l'une de ces propriétés soit vérifiée :*

Graphe *Il existe un changement linéaire de coordonnées, $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, et une application C^∞, $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que*

$$W \cap M = W \cap A\left(\{(z, f(z)) | z \in \mathbb{R}^p\}\right)$$

Équation *Il existe une application C^∞, $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $D_{x_0}F$ soit surjective, et*

$$W \cap M = F^{-1}(0).$$

Nappe paramétrée *Il existe $j : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$, C^∞ et définie sur un voisinage U de 0, telle que $j(0) = x_0$, et $D_0 dj$ est injective et j est un homéomorphisme sur son image.*

$$j : U \longrightarrow M \cap W$$

Pour $p = 0$, une variété est simplement un ensemble de points isolés.
Pour $p = 1$, on retrouve la notion de courbe plane régulière injective et propre du plan ($n = 2$) ou de l'espace ($n = 3$).
Pour $p = n$, une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. ***Attention :*** *Si $j : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application dont la différentielle est injective, il n'en résulte pas que $j(U)$ soit une sous-variété. Une telle application j s'appelle une* ***immersion****.*

Par abus de langage, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que tout point a un voisinage qui soit image d'une application de différentielle injective est appelé ***sous-variété immergée****. Mais ce n'est pas une sous-variété. En particulier, si j n'est pas injective, $j(u_0) = j(u_1) = x_0$, on peut avoir la situation suivante ($p = 1, n = 2$)*

On voit alors que $M = j(U)$ n'est pas une sous-variété, car une carte enverrait les deux vecteurs tangents à chaque branche de la courbe (qui sont linéairement indépendants) sur des vecteurs de $\mathbb{R}$, donc liés. Un autre cas, plus subtil se présente si j n'est pas bicontinue, comme sur le dessin suivant

1.2 Variétés

Définition 1.2. *Soit M un espace métrisable, réunion dénombrable de compacts.*

En général, les conditions topologiques imposées à une variété sont plutôt la paracompacité, c'est à dire que l'on demande que M soit séparée (deux points ont des

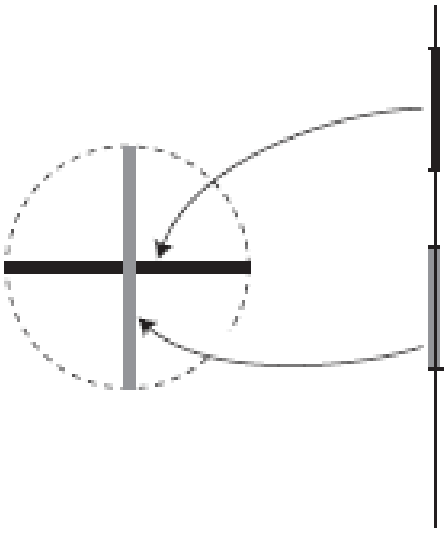

Figure 1.2: Image d'une immersion qui n'est pas une sous-variété

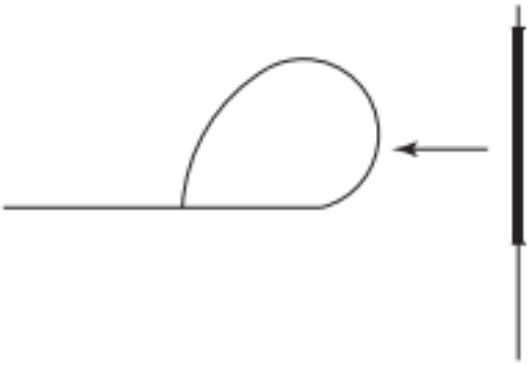

Figure 1.3: Image d'une immersion injective qui n'est pas une sous-variété

voisinages disjoints) et tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini. Mais comme l'existence de cartes locales entraine que M sera automatiquement localement compact, localement connexe et localement métrisable, cela entraine que M est métrisable (c'est une Théorème de Smirnov). On préfère donc le déclarer d'emblée. On suppose souvent aussi que M est réunion dénombrable de compacts, mais c'est automatiquement le cas pour chaque composante connexe d'un espace métrisable localement compact.

On appelle structure de variété C^k sur M, la donnée d'une famille $(U_j, \varphi_j)_{j\in I}$, telle que :

(A) Les U_j sont des ouverts qui forment un recouvrement de M.

(B) Les $\varphi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des homéomorphismes sur l'ouvert $\varphi_j(U_j)$ tels que

$$\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_k \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_k \cap U_j)$$

soit une application de classe C^k.

On appelle (U_j, φ_j) cartes définissant la variété. Il est clair que si (U, φ) est telle que pour tout j, on ait $\varphi \circ \varphi_j^1 : \varphi(U \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U \cap U_j)$ soit une application de classe C^k, alors on peut ajouter (U, φ) à l'ensemble des cartes de M.
En prenant tous les (U, φ) ayant cette propriété, on obtient un atlas maximal *de M.*

Lorsque $k = 0$, on appelle M une variété topologique.
Bien entendu une même variété topologique peut avoir différentes structures de variété $C^k (k \geq 1)$, cependant la vraie question est de savoir si celle-si sont isomorphes.

On appelle n la dimension de M en $x \in U_j$ et on la note $\dim_x(M)$. Clairement n ne dépend pas du choix de la carte contenant x, car il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ pour $m \neq n$. Ce fait est non trivial et s'appelle le théorème de l'invariance du domaine. *Il devient par contre trivial (comme dans le cas des sous-variétés) lorsqu'on suppose $k \geq 1$. Enfin, notons qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ est une variété. En effet, à une carte (U, φ) de la sous-variété on peut associer $(U \cap M, \varphi_{U\cap M})$ qui est une carte de la variété M.*

1.3 Équations différentielles autonomes

Dans ce section, on s'intéresse aux propriétés qualitatives des équations différentielles autonomes c'est-à-dire du type

$$X' = F(X) \tag{S}$$

où F est une fonction Lipschitzienne (ou au moins localement lipschitzienne) sur un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Rappelons que considérer ce type d'équations différentielles n'est pas vraiment restrictif dans la mesure où tout système différentiel non autonome d'ordre n peut être vu comme un système différentiel autonome d'ordre $n+1$.

Rappelons également que le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème de Cauchy associé à S admet toujours une unique solution maximale.
Dans la suite on supposera toujours que F est de classe C^1.

Champs de vecteurs

L'étude des équations différentielles autonomes est étroitement liée à celle des champs de vecteurs que nous définissons maintenant.

Définition 1.3. *On appelle champ de vecteurs sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ toute fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}^n$.*

On dit que le champ de vecteurs est complet si toutes les solutions maximales du système (S) associé sont globales (c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}$ entier).

Remarque. *Dans le cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre n du type*

$$x^{(n)} = f(x, x', ..., x^{(n-1)}),$$

on dira que le champ de vecteurs associé est $(x', x'', ..., f(x, x', ..., x^{(n-1)}))$.

Remarquons que dans le cas d'une équation différentielle autonome, l'ensemble des solutions est invariant par translation temporelle, c'est-à-dire que ϕ est la solution maximale de (S) définie sur I et telle que $\phi(t_0) = x_0$ si et seulement si la fonctionψ définie sur $I - t_0$ par

$$\psi(t) = \phi(t + t_0) \tag{1.1}$$

est la solution maximale de (S) telle que $\psi(0) = x_0$.
C'est une conséquence immédiate de la propriété d'unicité des solutions donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.
De ce fait, on se limitera dans ce qui suit à l'étude du problème de Cauchy en $t_0 = 0$.
Cela motive la définition suivante de flot d'un champ de vecteurs

Définition 1.4. *Si F est un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on appelle flot associé à F l'application ϕ qui à tout $x \in \Omega$ associe la solution maximale ϕ_x de S telle que $\phi_x(0) = x$.*
Suivant que l'on s'intéresse à la solution issue de x ou à sa dépendance par rapport à x à l'instant t, on utilisera les notations $\phi_t(x) = \phi(t, x) = \phi_x(t)$.

Définition 1.5. *Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{\phi(t), t \in I\}$ où ϕ est une solution maximale de S définie sur I sont appelées courbes intégrales du champ de vecteurs F.*

Remarque. *Deux courbes intégrales passant par le même point coïncident.*
En effet, elles correspondent à deux solutions maximales ϕ et ψ de S définies sur des intervalles ouverts I et J et telles qu'il existe $t_0 \in I$ et $t_1 \in J$ vérifiant $\psi(t_1) = \phi(t_0)$.
En conséquence, si l'on note $T = t_1 - t_0$, on constate que la fonction $\theta : t \mapsto \psi(t+T)$ vérifie S et $\theta(t_0) = \psi(t_1) = \phi(t_0)$.
Donc $\theta = \phi$ sur $I \setminus (J - T)$. Comme ϕ est maximale, on doit de plus avoir $J - T \subset I$. En échangeant les rôles de ϕ et de ψ,on démontre l'inclusion réciproque.
On peut donc conclure que $I = J - T$ et $(0 + T) = \phi$ sur I: Cette remarque permet de donner la définition suivante :

Définition 1.6. *Pour $x_0 \in \omega$, la courbe intégrale passant par x_0 est appelée orbite de x_0 pour le champ de vecteurs F (ou courbe intégrale issue de x_0).*
La remarque ci-dessus montre que deux orbites ayant un point commun coïncident. Par ailleurs, le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour tout point x_0 de Ω, il existe une orbite de F passant par x_0.
En conséquence l'ensemble des orbites correspondant à un champ de vecteurs donné constitue une partition de l'ouvert où est défini notre champ de vecteurs F : Cette partition est appelée portrait de phase.

Lorsque l'on ne sait pas résoudre explicitement l'équation différentielle considérée, il est souvent quand même possible d'obtenir des informations très précises sur les orbites (et donc sur les solutions).
Dans la définition ci-dessous, nous décrivons quatre types d'orbites particulières que l'on rencontre fréquemment.

Proposition 3. *Soit F un champ de vecteurs sur Ω. Le point x_0 de Ω est critique si et seulement si $F(x_0) = 0$.*

Proof. Le sens direct est trivial, et la réciproque résulte de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. □

1.4 Théorème de la boule chevelue

Représentations intuitives du théorème

Intuitivement, on peut se représenter une sphère recouverte de cheveux souples et pas frisés, chaque point de la sphère étant la racine d'un cheveu. On considère la projection du cheveu sur le plan tangent à la sphère au point où le cheveu pousse : l'ensemble de ces projections donne une bonne idée d'un champ de vecteurs tangents sur la sphère. On cherche alors à coiffer ces cheveux en les aplatissant sur la surface de la boule, et en évitant les discontinuités : on ne fait pas de raie, on ne permet pas à des cheveux de changer brutalement de direction les uns par rapport

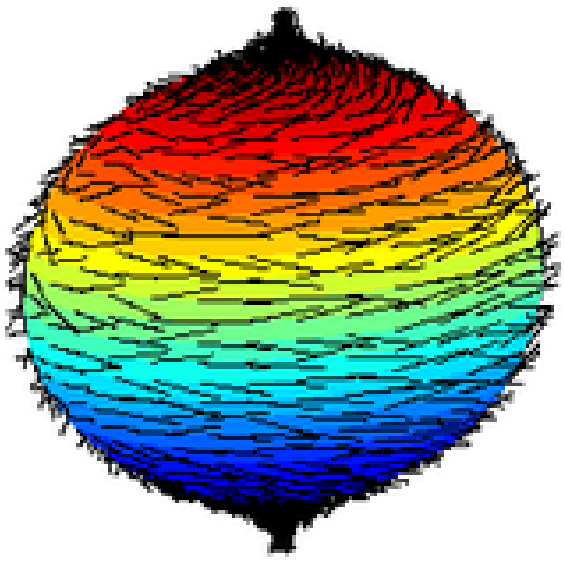

Figure 1.4:

aux autres. Le théorème dit qu'il est impossible d'arriver à ce résultat. Quoi qu'on fasse, on va causer la formation d'au moins un épi.

Théorème 2 (Théorème de la boule chevelue)**.** *Sur une sphère réelle S^n dont la dimension n est paire, tout champ de vecteurs continu X s'annule en un point au moins : il existe v (dépendant de X) tel que $X(v) = 0$.*

En dimension impaire $n = 2m + 1$, il existe des champs de vecteurs continus et mieux encore, analytiques, qui ne s'annulent en aucun point : pour tout vecteur $v = (s_0, t_0, ..., s_m, t_m)$ de $\mathbb{R}^{2(m+1)}$, le vecteur $X(v) = (-t_0, s_0, ... - t_m, s_m)$ est orthogonal à v, donc si v est unitaire, $X(v)$ est tangent en v à la sphère, ce qui définit bien un champ de vecteurs X sur S^{2m+1}, continu et jamais nul.

1.5 Théorème du point fixe de Brouwer

Introduction

L'énoncé du théorème du point fixe de Brouwer est merveilleusement simple : Toute application continue f d'une boule fermée B de $\mathbb{R}^n$ en elle même possède au moins un point fixe. En d'autres termes, si $f : B \longrightarrow B$ est continue, alors il existe au moins un $x \in B$ tel que $x = f(x)$.

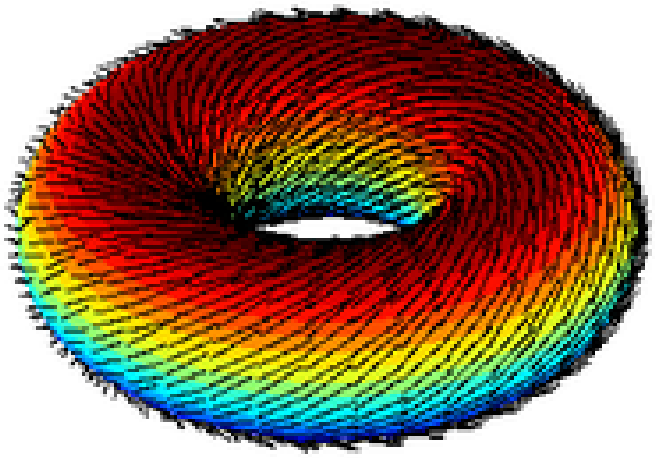

Figure 1.5:

On peut remplacer la boule fermée B par un ensemble homéomorphe à B, par exemple un pavé fermé P, un simplexe S ou un compact convexe C, mais le théorème est faux si l'on remplace B par $\mathbb{R}^n$, (prendre pour f une translation) ou par un anneau fermé de $\mathbb{R}^2$ (prendre pour f une rotation).

L'intérêt de ce résultat est multiple. Situé au carrefour de plusieurs disciplines importantes des mathématiques, il peut se démontrer par des techniques de topologie algébrique, d'analyse de topologie différentielle, de combinatoire, de géométrie algébrique et même d'algèbre. Il possède de nombreuses formulations équivalentes, qui ne se ressemblent guère. Ses applications sont aussi nombreuses que variées, allant de la topologie algébrique (démonstration des théorèmes de non-rétraction, de Jordan, de l'invariance du domaine, à la biologie mathématique, en passant par la géométrie des corps convexes, les équations différentielles, la théorie de la commande, la théorie des jeux, la programmation non linéaire, la théorie de la décision, la combinatoire et l'économie.

CHAPITRE

2

Théorème de Poincaré-Bendixson

Pour la plupart des systèmes dynamiques, il est impossible d'intégrer explicitement les équations. Le mieux que l'on puisse espérer est de décrire le comportement à long terme ($t \longrightarrow +\infty$) des solutions. Le théorème de Poincaré-Bendixson décrit les comportements asymptotiques des systèmes autonomes dans le plan et montre que ceux-ci sont particulièrement simples: essentiellement, les trajectoires tendent vers un équilibre ou un cycle limite.
En particulier, de tels systèmes ne sont jamais chaotiques, dans le sens précis qui sera donné à ce terme dans la suite du Chapitre .

2.1 Ensembles ω-limite

Soit

$$\dot{x} = F(x),\ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

(F de classe $C^r,\ r \geq 1$) un système dynamique. On notera ϕ_t le flot correspondant, i.e. $\phi_t(x)$ est l'unique solution maximale du système 2.1 passant par x en $t = 0$.

Définition 2.1. *$q \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point ω-limite de $p \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une suite (t_n) qui tend vers $+\infty$ telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_{t_n}(p) = q.$$

Notation $\omega(p)$ = ensemble des points ω-limite de p.

Remarques.

1. *Si p_1, p_2 appartiennent à la même trajectoire, alors $\omega(p_1) = \omega(p_2)$. On notera $\omega(\gamma)$ l'ensemble des points ω-limite d'une trajectoire γ.*

2. *Pour $n \geq 3$, la structure de l'ensemble ω-limite peut être extrêmement riche et compliquée, par exemple on peut obtenir des ensembles fractales, (ensembles de dimension fractionnaire).*

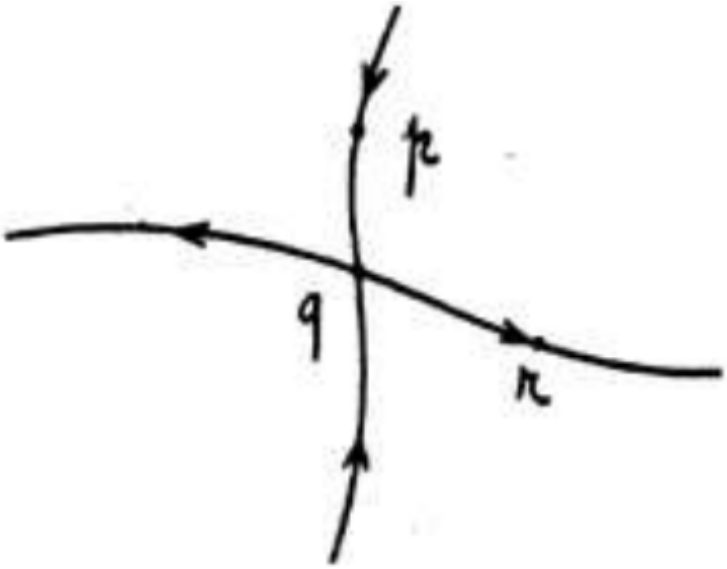

Figure 2.1:

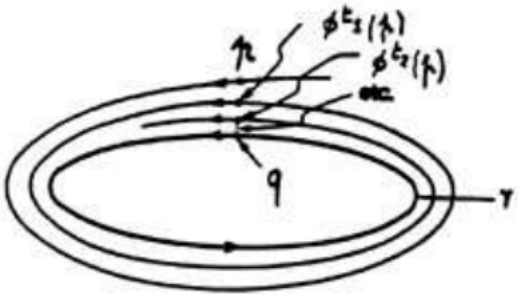

Figure 2.2: Tout point de γ est un point ω-limite de p

Définition 2.2. *On appelle* région trappe *(ou sous-ensemble positivement invariant) pour le champ de vecteurs (3.1) un sous-ensemble compact $M \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\forall p \in M, \phi^t(p) \in M, \forall t \geq 0. \tag{2.2}$$

Remarque. *Tous les résultats que nous énoncerons dans ce chapitre sont valides pour des sous ensembles négativement invariants, en remplaçant $\omega(p)$ par $\alpha(p)$.*

Exemple. *Considérons l'équation de Duffing*

$$\ddot{x} = x - x^3 - \delta \dot{x},\ \delta \geq 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y & = & f(x,y) \\ \dot{y} &= & x - x^3 - \delta y & = & g(x,y). \end{cases}$$

Pour $\delta = 0$, ce système est conservatif. L'hamiltonien est donné par

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

Pour $\delta > 0$, on a

$$\frac{dH}{dt} = \langle \nabla H, (f,g) \rangle = -\delta y^2 \leq 0 \tag{2.4}$$

Comme $\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right)$ est un vecteur perpendiculaire aux courbes de niveau de la fonction $H(x,y)$ qui pointe dans le sens de H croissant, cette inégalité exprime précisément que les courbes de niveau du système conservatif $(\delta = 0)$ sont des régions trappes pour le système dissipatif $(\delta > 0)$.

Lemme 2.1. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une région trappe pour le champ de vecteurs F, alors pour tout $p \in M$ on a :*

1. *$\omega(p) \neq \emptyset$.*
2. *$\omega(p)$ est fermé.*
3. *$\omega(p)$ est invariant sous le flot, c-à-d.*

$$q \in \omega(p) \Rightarrow \phi_s(q) \in \omega(p), \forall s \in \mathbb{R}.$$

4. *$\omega(p)$ est connexe.*

Remarque. *$\omega(p)$ est supposé être muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^n$, c-à-d. les ouverts (resp. les fermés) de $\omega(p)$ sont les traces des ouverts (resp. des fermés) de $\mathbb{R}^n$ sur $\omega(p)$ ce qui veut dire $O \subset \omega(p)$ est ouvert, si et seulement si, $O = U \cap \omega(p)$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$. $F \subset \omega(p)$ est fermé, si et seulement si, $F = A \cap \omega(p)$ avec A fermé de $\mathbb{R}^n$.*

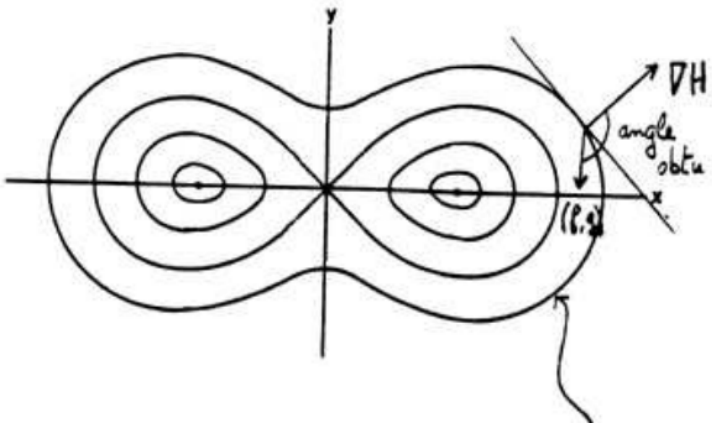

Figure 2.3: courbes de niveau de $H(x, y)$

Montrons qu'il n'est pas possible d'écrire $\omega(p)$ comme union disjointe de deux ouverts non vides, ce qui est encore équivalent à dire que les seuls sous-ensembles de $\omega(p)$ qui sont à la fois ouverts et fermés sont l'ensemble vide et $\omega(p)$.

Proof.

1. Soit une suite (t_n) qui tend vers $+\infty$ et soit $(p_n = \phi^{t_n}(p))$. Comme M est compact, (p_n) possède une sous-suite convergente dont la limite appartient à $\omega(p)$. Donc, $\omega(p)$ n'est pas vide.

2. Il suffit de montrer que le complémentaire de $\omega(p)$ est ouvert. Soit$q \notin \omega(p)$. Alors il doit exister $U(q)$ un voisinage de q tel que $U(q) \cap \{\phi^t(p) | t \geq T\} = \emptyset$, pour un certain $T > 0$. Donc $U(q) \cap \omega(p) = \phi$. Comme q est arbitraire, le résultat est établi.

3. Soit $q \in \omega(p)$ et $\tilde{q} = \phi^s(q)$. Soit une suite t_n qui tend vers $+\infty$, telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \phi^{t_n}(p) = q.$$

Puisque

$$\phi_{t_n+s}(p) = \phi_s s(\phi_{t_n}(p)) \longrightarrow \phi_s(q) = \tilde{q}, \tag{2.5}$$

cela montre que $\tilde{q} \in \omega(p)$. En fait, il y a une petite lacune à combler dans cet argument : il n'est pas évident que $\phi^s(q)$ existe pour tout $s \in]-\infty, +\infty[$. Puisque M est une région trappe, $\phi^s(q)$ existe certainement pour tout $s \in [0, +\infty[$, donc il suffit de montrer que $\phi^s(q)$ existe pour tout $s \in]-\infty, 0]$. Soient $t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$ tels que $\phi^{t_n}(p) \longrightarrow q.\phi^s(\phi^{t_n}(p)) = \phi^{t^n+s}(p)$ existe pour tout s tel que $t^n + s > 0$, c-à-d. pour tout $s \in [-t_n, 0]$.
Passant à la limite pour $n \longrightarrow \infty$, on voit que $\phi^s(q)$ existe pour tout $s \in]-\infty, 0]$.

4. On prouve cette affirmation par l'absurde. Supposons que $\omega(p) = (\omega(p) \cap A_1) \cup (\omega(p) \cap A_2) = F_1) \cup F_2$, où A_1, A_2 sont des fermés de $\mathbb{R}^n, F_1 \cap F_2 = \phi, F_1 \neq \phi$et $F_2 \neq \phi$.
   Comme $\omega(p)$ est fermé, F_1 et F_2 sont encore fermés dans$\mathbb{R}^n$. Puisque$F_1 \cap F_2 = \emptyset$, il existe V_1 et V_2 voisinages de F_1 et F_2 tels que $V_1 \cap V_2 = \phi$. Puisque l'orbite de p passe un nombre infini de fois près de F_1 et de F_2 (c'est-à-dire dans V_1 et dans V_2), elle doit aussi, par continuité, se trouver infiniment souvent en dehors de V_1 et de V_2. Donc, quelque soit $T > 0$, il existe $t > T$ tel que $\phi t(p) \in M \backslash (V_1 \cup V_2) = K$. Donc on peut trouver une suite $t_n, t_n \longrightarrow +\infty$ telle que $\phi^{t_n}(p) \in K$. Puisque K est compact, en passant éventuellement à une sous-suite, on a $\phi^{t_n}(p) \longrightarrow q, q \in K$. Cela voudrait dire que $q \in \omega(p)$ et donc $q \in V_1 \cup V_2$, ce qui est la contradiction recherchée.

□

Corollaire 2.1. $q \in \omega(p) \Rightarrow \omega(q) \subset \omega(p)$.

Proof. Soit $r \in \omega(q)$, alors $\exists t_n, t_n \longrightarrow +\infty$ tq $\phi t_n(q) \longrightarrow r$. Par la propriété (iii) du lemme 1, $\phi^{t_n}(q) \in \omega(p)$. Puisque $\omega(p)$ est fermé (propriété (ii) du lemme 1),$r \in \omega(p)$.

□

2.2 Section de Poincaré

à partir de maintenant nous supposerons que le système (3.1) est un système plan:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) & q = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \dot{y} = g(x,y). \end{cases}$$

Définition 2.3. *Soit S un segment ouvert dans $\mathbb{R}^2$. S est appelé une section locale transverse du champ $F(q) = (f(q), g(q)) \Leftrightarrow F(q)$ n'a pas de points fixes sur S et ne devient jamais tangent à S. Une telle section est souvent appelée une section de Poincaré.*

Remarque. *: Si $q \in \mathbb{R}^2$n'est pas un équilibre, c-à-d. $F(q) \neq 0$, alors il existe toujours une section locale transverse en q.*

Redressement d'un champ de vecteurs (n = 2) Soit $q \in \mathbb{R}^2$, t.q. $F(q) \neq 0$. Soit S une section locale transverse en q, et $\vec{e} = (e_1, e_2)$ un vecteur unitaire dans la direction de S. Pour $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ suffisamment petits, définissons $\Psi(t,s) = d\omega f \phi^t(q + s\mathbb{R}^2)$.

Proposition 4. *Supposons que le champ $F(x)$ soit de classe $C^r (r \geq 1)$. Il existe U voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et V voisinage de q dans $\mathbb{R}^2$ tel que l'application $\Psi : U \longrightarrow V$ soit un difféomorphisme de classe C^r (bijection de classe C^r dont l'inverse est de classe C^r). De plus, dans les coordonnées (t, s) le flot du champ F(x) est donné par*

$$(t_0, s_0) \mapsto \phi^t(t_0, s_0) = (t + t_0, s_0) \tag{2.6}$$

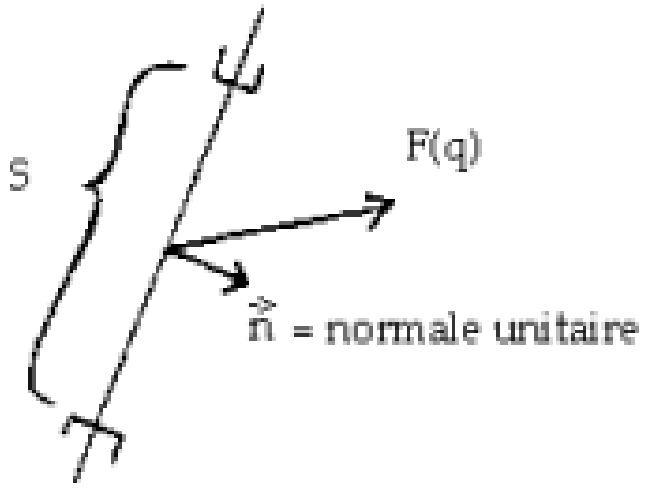

Figure 2.4: $\langle F(q), \vec{n} \rangle > 0 (ou < 0) \forall q \in S$

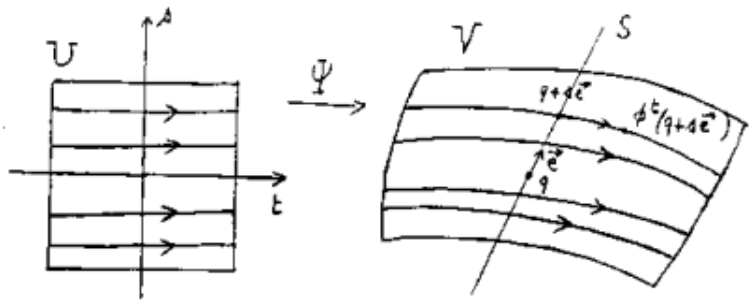

Figure 2.5:

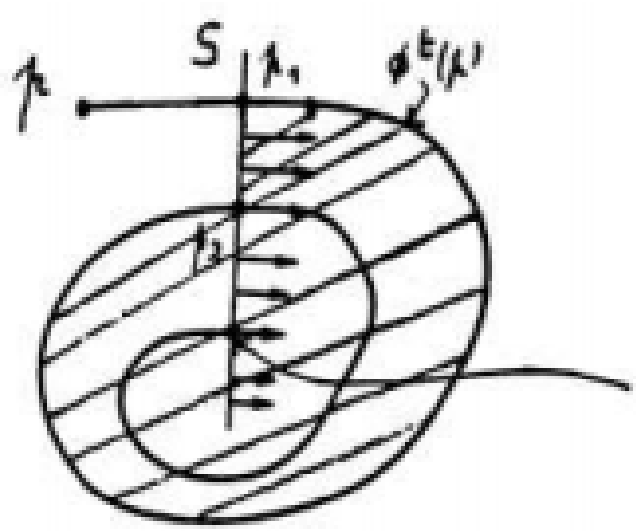

Figure 2.6: p_3 doit se trouver ici si $\phi^t(p)$ recoupe encore S

Proof. Pour montrer que Ψ est un difféomorphisme local au voisinage de $(0,0)$, par le Théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que le déterminant de la matrice jacobienne de $\Psi(t,s)$ est différent de 0, en $t = s = 0$. En effet, on calcule facilement que l'on a:

$$\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(t,s)}|_{t=s=0} = \begin{vmatrix} f(q) & g(q) \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix} = \langle F(q), \vec{n}\rangle \neq 0. \tag{2.7}$$

De plus,

$$\phi t(\psi(t_0,s_0)) = \phi^t(\phi t_0(q+s_0\vec{e})) = \phi^{t+t_0}(q+s_0\vec{e}) = \Psi(t+t_0,s_0) \tag{2.8}$$

, ce qui établit la formule(2,1) .
Le fait important qu'il faut retenir de cette proposition et que nous utiliserons dans la suite est que toute trajectoire qui rentre dans V coupe la section transverse. Voici la clef de la preuve du Théorème de Poincaré-Bendixson. Nous y verrons pour la première fois l'idée de section de Poincaré à l'≈ìuvre. □

Proposition 5. *Soit $S \subset M$ une section locale transverse de $F(q)$. Alors $O_+(p) =_{d\omega f}$ $\phi t(p)|t \geq 0$ intersecte S selon une suite monotone, c-à-d. si $pi = i\psi me$ intersection de $\phi t(p)$ avec S, alors $pi \in [pi-1, pi+1]$.*

Proof. La démonstration est visuelle:

La région hachurée est une région trappe. Cela résulte du fait que S est une section locale transverse et que les trajectoires d'une équation autonome ne se coupent

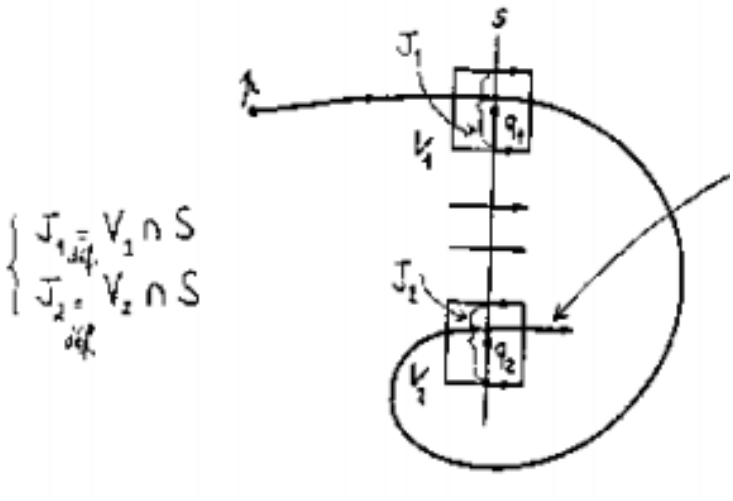

Figure 2.7: Cette trajectoire ne peut plus repasser à proximité de q_1, d'où $q_1 \notin \omega(p)$, contradiction

pas. Donc si l'orbite $\phi^t(p)$ recoupe encore une fois S, elle doit nécessairement le faire en un point p_3 tel que $p_2 \in [p_1, p_3]$. □

Remarque. *Dans cette démonstration, on utilise implicitement le fait qu'une courbe fermée simple continue décompose le plan en 2 régions distinctes* ***(Théorème de Jordan).*** *Ceci n'est évidemment plus le cas en dimension $n \geq 3$ et donne indirectement la raison pour laquelle le théorème de Poincaré-Bendixson ne se* ***"généralise"*** *pas en dimension$n \geq 3$*

Corollaire 2.2. *$\omega(p)$ intersecte S en au plus un point.*

Proof. La démonstration se fait par l'absurde. Supposons que $\omega(p)$ intersecte S en au moins 2 points$q_1, q_2, q_1 \neq q_2$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages de q_1 et q_2 sur lequel le champ de vecteurs peut être redressé. Puisque q_1 et $q_2 \in \omega(p)$, la trajectoire $\phi^t(p)$ intersecte V_1 et V_2 une infinité de fois et donc J_1 et J_2, ce qui est incompatible avec le fait que $O+(p)$intersecte S selon une suite monotone, donc $q_1 = q_2$. □

Proposition 6. *Si $\omega(p)$ ne contient pas de points fixes, alors $\omega(p)$ est une orbite périodique.*

Proof. Soit $q \in \omega(p), q$ n'est pas un point fixe. On va montrer que l'orbite de $q, \{\phi^t(q), t \in \mathbb{R}\}$ est une trajectoire périodique γ. Donc $\gamma \subset \omega(p)$. Mais alors puisque $\omega(p)$est connexe, ne contient pas de points fixes et est constitué de trajectoires, on doit nécessairement avoir que $\omega(p) = \gamma$.[En effet, si $\omega(p) \backslash \gamma \neq \phi$ par connexité de$\omega(p)$ il existe

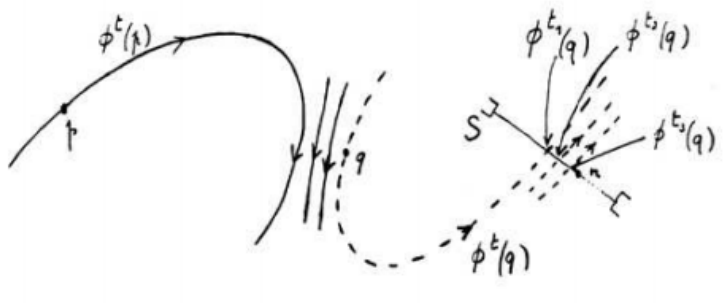

Figure 2.8:

$r \in \gamma \cap \omega(p) \backslash \gamma$ Soit S une section locale transverse en r. Tout voisinage de r contient un point $u \in \omega(p) \backslash \gamma$ et, pour u suffisamment proche de r, l'orbite passant par u coupera S. Mais alors S contient deux points distincts de $\omega(p)$ ce qui contredit le Corollaire 5] □

Soit $r \in \omega(q)$. Puisque $q \in \omega(p)$, $\omega(q) \subset \omega(p)$et donc$r \in \omega(p)$. Cela montre que r n'est pas un point fixe. Soit S une section locale transverse passant par r. Puisque $r \in \omega(q)$, l'orbite$\phi^t(q)$traverse Sune infinité de fois, c-à-d. $\exists t_n, t_n \longrightarrow +\infty t q \phi^{t_n}(q) \in Set\phi_n^t(q) \longrightarrow r$. Comme $\phi^t(q) \subset \omega(p)$et que $\omega(p)$ intersecte S en au plus un point (Corollaire 5), on doit avoir $\phi_1^t(q) = \phi_2^t(q) = \phi_3^t(q) = ... = r$ donc$\phi^{t_2 - t_1}(q) = q$ et$\phi^t(q)$ est une orbite fermée.

Remarque. *Il suit de la démonstration précédente que deux possibilités peuvent se présenter. Soit $q \in$ orbite de p, auquel cas$\phi^t(p)$ est une orbite périodique, soit q orbite de p, auquel cas $lim t \longrightarrow +\infty \phi^t(p), \gamma = 0$,o√π $d(\phi^t(p), \gamma)$ dénote la distance de$\phi^t(p)$ àγ. Dans ce cas, on dit que$\gamma = \omega(p)$ est un cycle limite.*

Théorème 3. *Soit $\dot{x} = F(x), x \in \mathbb{R}^2$ et soit M une région trappe pour le champ de vecteurs $F(x)$ qui ne contient qu'un nombre fini d'équilibres. Alors, $\forall p \in M$on a une des trois possibilités suivantes: (i) $\omega(p)$est un équilibre (ii)$\omega(p)$ est une orbite périodique (iii) $\omega(p)$ est constitué d'un nombre fini d'équilibres connectés par des trajectoires.*

Remarque. *Dans le cas o√π $\omega(p)$ est une orbite périodique, soit $\omega(p)$ co√Øncide avec la trajectoire passant par p, auquel cas $\phi^t(p)$ est une orbite périodique, soit la trajectoire passant par p s'enroule autour d'une trajectoire périodique que l'on appelle un cycle limite. 2) Dans le cas (iii), on peut montrer qu'il existe au plus une trajectoire connectant deux équilibres distincts. Une telle trajectoire s'appelle une solution hétérocline. Une trajectoire située dans $\omega(p)$ qui connecte un équilibre à lui-m√™me s'appelle une solution homocline.*

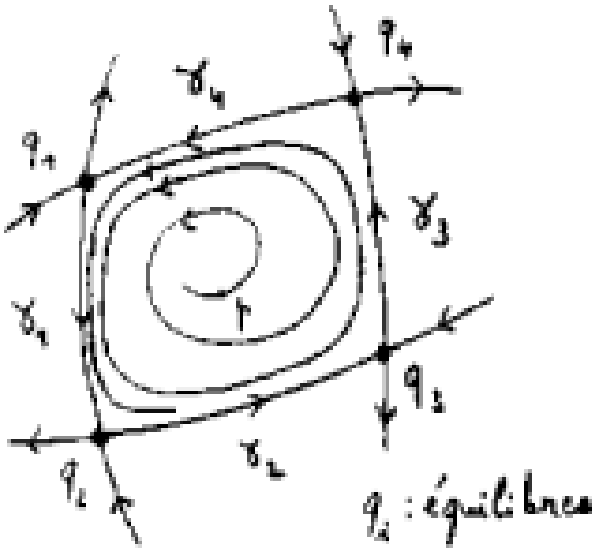

Figure 2.9: $\omega(p) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup q_1, q_2, q_3, q_4$

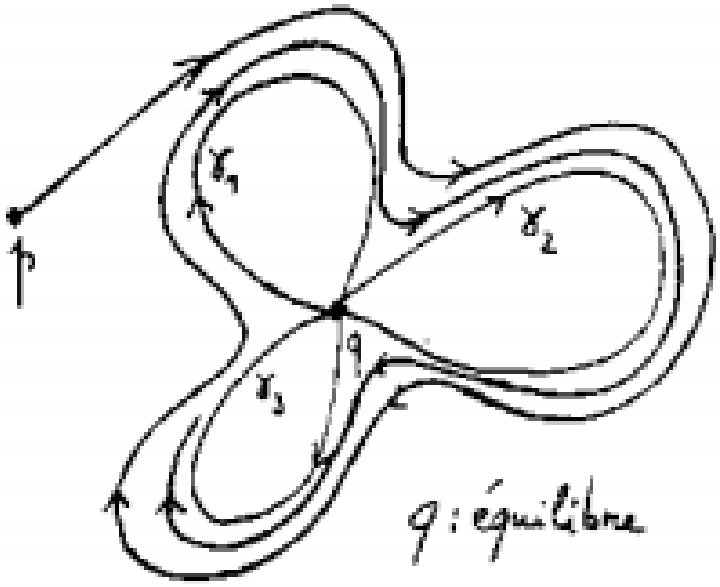

Figure 2.10: $\omega(p) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup q$

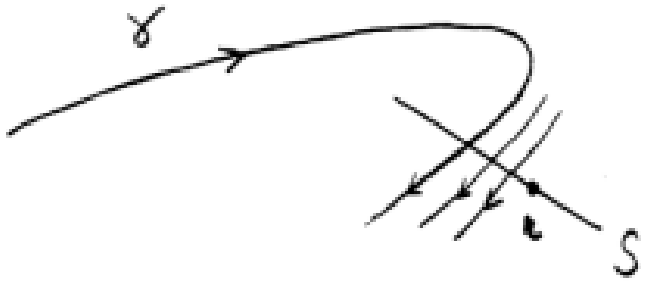

Figure 2.11:

Proof. 1er cas: $\omega(p)$ ne contient que des équilibres. Alors puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'équilibres et que $\omega(p)$ est connexe, il faut donc que $\omega(p)$ se réduise à un équilibre. 2ème cas: $\omega(p)$ ne contient aucun équilibre, alors la proposition 6 montre que $\omega(p)$ est une orbite périodique. 3ème cas: $\omega(p)$ contient des équilibres et des points réguliers ($= points$ o√π$F(q) \neq 0$). Soit $\gamma \subset \omega(p)$ une trajectoire passant par un point régulier, il faut montrer que γ connecte 2équilibres, c-à-d. $\omega(\gamma)$ = un équilibre et $\alpha(\gamma)$ = un autre équilibre. La preuve se fait à nouveau par l'absurde. Supposons que $\omega(\gamma)$ contienne un point régulier r, □

et soit S une section locale transverse au voisinage de r. Alors comme $\gamma \subset \omega(p)$ et $\omega(p)$ coupe S en au plus un point, le m√™me argument que celui utilisé dans la proposition 6 montre que γest nécessairement une orbite périodique, mais alors$\omega(p) = \gamma$ et $\omega(p)$ ne contiendrait pas d'équilibres, ce qui est la contradiction recherchée. On montre de la m√™me fa√ßon que $\alpha(\gamma)$ = un équilibre. Il reste à établir que 2 équilibres distincts dans $\omega(p)$ sont connectés par au plus une trajectoire dans $\omega(p)$. Supposons qu'il y en ait deux que nous appelons $\gamma_1, \gamma_2 \subset \omega(p)$ Soient $q_1 \in \gamma_1, q_2 \in \gamma_2$ et S_1, S_2 deux sections locales transverses au voisinage de q_1 et q_2. Puisque $q_1, q_2 \in \omega(p), O_+(p) = \{\phi^t(p) | t \geq 0\}$coupe $S1$ et S_2 en au moins2 points a et b(voir la figure). La région hachurée est alors une région trappe et donc $\phi^t(p)$ ne peut plus repasser arbitrairement près des points de γ_1 et γ_2 situés en dehors de la région trappe, ce qui est la contradiction recherchée. Pour pouvoir utiliser le théorème de Poincaré-Bendixson, il est parfois utile de disposer d'un critère qui permet de conclure qu'une région trappe ne contient pas de trajectoires fermées.

Critère de Bendixson Soit Ω un domaine simplement connexe du plan $\mathbb{R}^2$ et supposons que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ et ne change pas de signe dans Ω, alors l'équation (3.3)

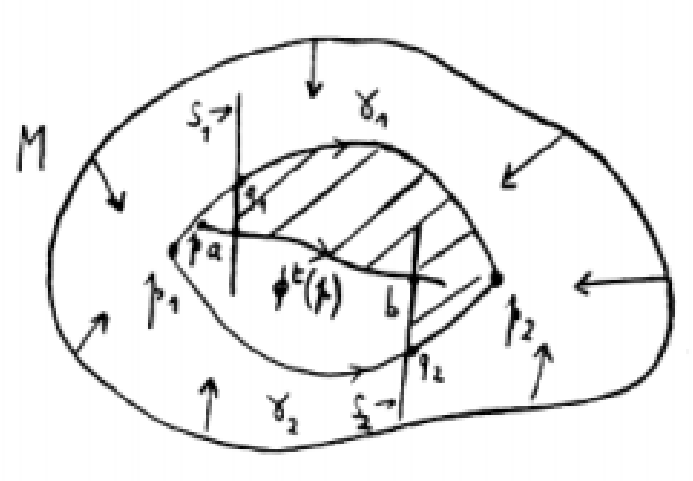

Figure 2.12: $p_1, p_2 \omega quilibres dans \omega(p)$

ne possède pas de trajectoires fermées dans Ω. Démonstration. Supposons que Ω contienne une trajectoire fermée γ.

Proof. Supposons que Ω contienne une trajectoire fermée γ. Alors,

$$\int_\gamma f\,dy - g\,dx = \int_0^T \left(f\frac{dy}{dt} - g\frac{dx}{dt} \right) dt = 0 \tag{2.9}$$

(en utilisant(3.3)). Or, par le théorème de Green, on a

$$\int_\gamma f\,dy - g\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\,dy \neq 0 \tag{2.10}$$

(par hypothèse), ce qui est la contradiction recherchée. □

2.3 Exemples d'applications du Théorème de Poincaré-Bendixson

Établir l'existence d'une orbite périodique. Pour établir l'existence d'une orbite périodique à partir du Théorème de Poincaré-Bendixson, on doit trouver une région trappe M qui ne contient pas d'équilibres. Considérons à titre d'exemple le système

$$\dot{x} = y - \frac{1}{4}x(1-2r^2),\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}y(1-r^2),$$

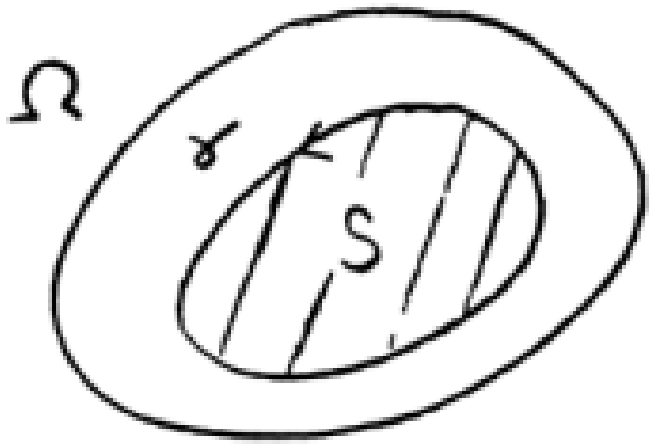

Figure 2.13: trajectoire fermée de période T.

où $r^2 = x^2 + y^2$. Cherchons d'abord les points fixes de ce champ de vecteurs. La première équation donne

$$y = \frac{1}{4}x(1 - 2r^2) \tag{2.11}$$

et après substitution dans la deuxième équation on trouve

$$-x\left(1 + \frac{1}{8}(1 - 2r^2)(1 - r^2)\right) = 0. \tag{2.12}$$

Donc il y a un point fixe à l'origine $(x, y) = (0, 0)$ et tout autre point fixe doit vérifier l'équation

$$2r^4 - 3r^2 + 9 = 0. \tag{2.13}$$

Comme cette équation n'a pas de racines réelles, l'origine est donc le seul point fixe du système. En différentiant l'expression $r^2 = x^2 + y^2$ par rapport à t et, en passant aux coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned} r\dot{r} =& x(y - \frac{1}{4}x(1 - 2r^2)) + y(-x + \frac{1}{2}y(1 - r^2)) \\ =& \frac{1}{4}x^2(1 - 2r^2) + \frac{1}{2}y^2(1 - r^2) \\ =& \frac{1}{4}r^2(1 + \sin^2\theta) - \frac{1}{2}r^4, \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{r} = \frac{1}{4}r(1 + \sin^2\theta) - \frac{1}{2}r^3. \tag{2.14}$$

Figure 2.14: Cas typique pour $F(x)$: le nombre d'oscillations de $F(x)$ entre $-\beta$ et $+\beta$ est arbitraire.

Notons que $\dot{r} > 0$ pour tout θ pour autant que $\frac{r}{4} - \frac{r^3}{2} > 0$, c'est-à-dire $r^2 < \frac{1}{2}$ et que $\dot{r} < 0$ pour tout θ pour autant que $r - r^3 < 0$, c'est-à-dire $r > 1$. Soit

$$M = \left\{(r, \theta),\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq 1\right\} \tag{2.15}$$

. Puisque l'origine est le seul point fixe du système, la région M ne contient pas d'équilibres. Puisque $\dot{r} > 0$ si $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dot{r} < 0$si $r > 1$, toutes les trajectoires restent dans M, pour tout $t \geq 0$. Comme M est compacte, c'est donc une région trappe qui ne contient pas d'équilibres. En vertu du Théorème de Poincaré-Bendixson, il existe donc au moins une orbite périodique dans M.

2.3.1 Équation de Liénard et de Van der Pol

On appelle équation de Liénard une équation du type

$$x\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0, f(x) de classe C^r, r \geq 1 \tag{2.16}$$

. **Hypothèses** a) $F(x) = \int_0^x f(s)ds$est une fonction impaire. b)$F(x) \longrightarrow +\infty$quand$x \longrightarrow +\infty$ et $\exists \beta > 0$ tel que pour $x > \beta$,$F(x)$soit positive et strictement croissante. c) $\exists\ alpha > 0$tel que pour$0 < x < \alpha, F(x) < 0$.

On va établir le

Théorème 4. *Sous les hypothèses a) b) et c), l'équation de Liénard possède au moins une solution périodique. Si de plus $\alpha = \beta$, alors il existe une unique solution périodique qui est l'ensemble ω-limite de tout point $p \in \mathbb{R}^2, p \neq (0, 0)$.*

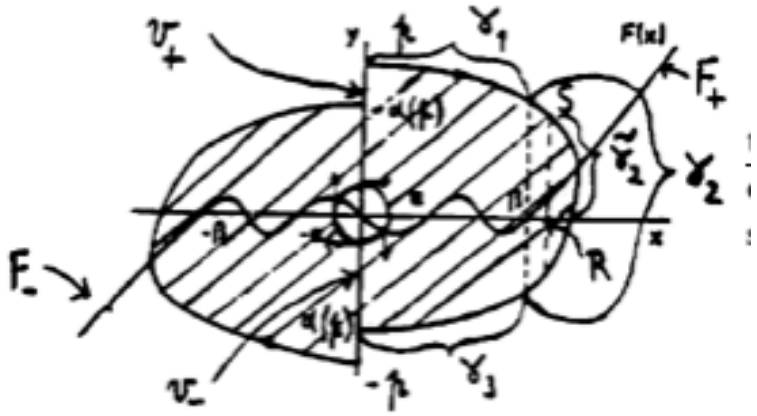

Figure 2.15: trappe: cercle autour de l'origine de rayon suffisamment petit, p suffisamment grand

Proof. Pour étudier l'équation (3.5) il est commode de faire le changement de variables $(x, \dot{x}) \longrightarrow (x, y = \dot{x} + F(x))$ de sorte que

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = x- \equiv g(x, y). \end{cases} \tag{2.17}$$

Ce système possède $(0, 0)$ comme unique équilibre. Soit

$$H(x, y) =_{d\omega f} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{2.18}$$

l'énergie du système conservatif $x\dot{r} = y, \dot{y} = -x$.Utilisant (3.6) on a:

$$\dot{H} = \langle (x, y), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = -xF(x) \geq 0, si|x| \leq \alpha \tag{2.19}$$

ce qui montre que les orbites débutant sur un cercle de rayon inférieur à α ne peuvent pas entrer à l'intérieur de celui-ci. Remarquons que le caractère impair de la fonction $F(x)$ implique que si $(x(t), y(t))$ est une solution du système (3.6), alors la réflection $(-x(t), -y(t))$de cette solution à travers l'origine est encore une solution. □

Notons $v_+ = \{(0, y)|y > 0\}$et$v_- = \{(0, y)|y < 0\}, F_+ = \{(x, F(x))|x > 0\}$et $F_- = \{(x, F(x))|x < 0\}$. L'allure du champ de vecteurs rend plausible l'assertion que toute trajectoire débutant sur v_+, traverse d'abord F_+, puis v_-, puis F_-, puis $v+$ etc ... (il n'est pas difficile de montrer ceci rigoureusement). Soit$p \in v_+$ et notons $\alpha(p)$ la première intersection de la trajectoire issue de p avec v_- . On va montrer que si p est suffisamment grand alors

$$H(\alpha(p)) - H(p) = \frac{1}{2}(|\alpha(p)|^2 - |p|^2) < 0. \tag{2.20}$$

La réflection de l'orbite joignant p à $\alpha(p)$ est une autre orbite qui nous permet de définir une région trappe pour le champ de vecteurs (région hachurée sur la figure). D'après le théorème de Poincaré-Bendixson, comme cette région trappe ne contient aucun équilibre, elle contient nécessairement une orbite fermée. Il reste à établir l'inégalité (3.7) pour p suffisamment grand. Pour ce faire on subdivise l'orbite allant de p à $\alpha(p)$ en trois chemins comme indiqués sur la figure. On a

$$\begin{aligned} H(\alpha(p)) - H(p) =& \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3}\right) dH + \int_{\gamma_2} dH = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} \frac{dH}{dt}\frac{dt}{dx}\right) dx + \int_{\gamma_2} \frac{dH}{dt}\frac{dt}{dy} dy \\ =& (\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3}) \frac{-xF((x)}{y - F((x)} dx + \int_{\gamma_2} F(x(y)) dy \end{aligned}$$

On peut supposer que $\alpha(p) \longrightarrow -\infty$ quand$p \longrightarrow +\infty$, sinon il n'y a rien à établir. Dans ce cas, les intégrales sur γ_1 et $\gamma_3$tendent vers zéro quand $p \longrightarrow +\infty$. Cela résulte de ce que lorsque$p \longrightarrow +\infty$, tous les points de l'arcγ_1 (resp.γ_3) tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) (justifiez !) et que $xF(x)$est bornée sur l'intervalle d'intégration $[0, \beta]$. Nous allons établir que l'intégrale le long de γ_2 tend vers $-\infty$quand $p \longrightarrow +\infty$. Comme $F(x(y)) > 0$le long de γ_2 et que l'on intègre de y positif à y négatif, on a que

$$\int_{\gamma_2} F(x(y)) dy < \int_{\tilde{\gamma}_2} F(x(y)) dy, \tag{2.21}$$

pour n'importe quel sous-arc $_{\tilde{\gamma}_2}$ deγ_2. Choisissons $_{\tilde{\gamma}_2}$ comme sur la figure, o√π R est fixé une fois pour toutes, suffisamment proche de $(\beta, 0)$. Puisque le long de $_{\tilde{\gamma}_2}$

$$F(x(y)) \geq \delta = F(R) > 0 \tag{2.22}$$

et que l'on intègre de y positif à y négatif, on a que

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} F(x(y)) \leq -\delta |RS|, \tag{2.23}$$

o√π S est défini sur la figure. Puisque $|RS|$ devient arbitrairement grand quand $p \longrightarrow +\infty$, on en déduit que l'intégrale le long de$\tilde{\gamma}_2$ et donc de γ_2 tend vers $-\infty$ quand $p \longrightarrow +\infty$. En combinant les résultats obtenus, on obtient donc que

$$H(\alpha(p)) - H(p) < 0, \tag{2.24}$$

pour p suffisamment grand, et donc $|\alpha(p)| < |p| (puisque H(p) = \frac{1}{2}|p|^2)$. Il reste à établir l'unicité de cette solution périodique quand $\alpha = \beta$. Ce cas contient comme cas particulier celui de l'équation de Van der Pol

$$x\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \varepsilon > 0, F(x) = \varepsilon(\frac{x^3}{3} - x) \tag{2.25}$$

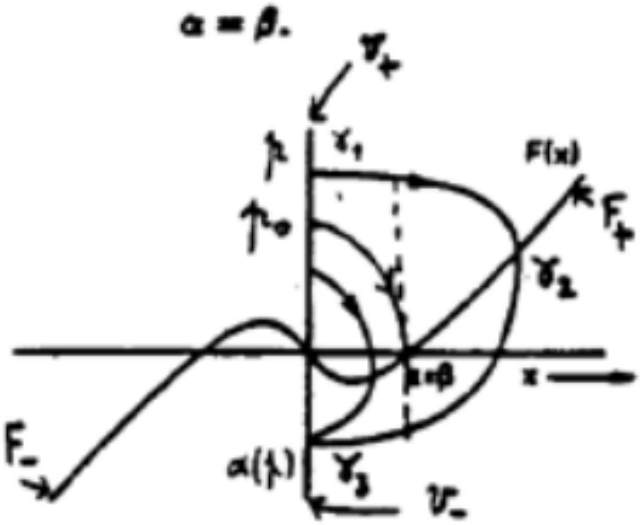

Figure 2.16:

$F(x)$ a l'allure suivante:

Soit $p_0 \in v_+$ tel que la trajectoire issue de p_0 intersecte F_+ en $(\alpha, 0) = (\beta, 0)$. Nous allons montrer que la fonction

$$\delta(p) =_{d\omega f} H(\alpha(p)) - H(p)$$

est telle que

$$\delta(p) > 0 si 0 < p \leq p_0 \delta(p) d\omega croit strictement vers -\infty quand p \longrightarrow +\infty, d\psi sque p \geq p_0.$$

Donc il existe un unique $q_0 > p_0$ tel que $\delta(q_0) = 0$. À cause de l'invariance des trajectoires sous la réflection $(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$, la solution issue de q_0 est alors l'unique solution périodique du système. √âtablissons (3.10). Pour $p \leq p_0$,

$$\delta(p) = \int_\gamma dH = \int_\gamma F(x(y))dy$$

Puisque$F(x(y)) < 0$ pour $0 < x < \alpha$et que l'on intègre de $y$positif ày négatif, on voit bien que $\delta(p) > 0$. Pour $p > p_0$, on partage à nouveau le chemin γ en trois chemins γ_1,$\gamma_2$etγ_3 comme en (3.8). Lorsque p croit, le long de γ_1, la fonction $y - F(x)$croit et donc

$$\int_{\gamma_1} \frac{-xF(x)}{y - F(x)} dx$$

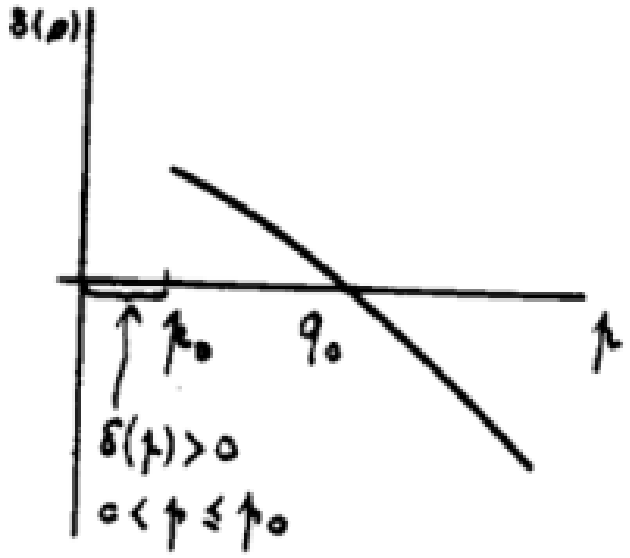

Figure 2.17:

décroit. Il en va de mv™me pour l'intégrale le long de γ_3. Pour ce qui est de

$$\int_{\gamma_2} F(x(y)dy$$

quand p croit, le domaine d'intégration en y s'agrandit et le graphe de $x(y)$ s'éloigne vers la droite. Comme $F(x)$ est croissante et que l'on intègre de y positif à y négatif, cela montre également que cette intégrale décroit quand p augmente. En conclusion, $\delta(p)$décroit pour $p \geq p_0$ et, puisque l'intégrale le long de γ_2 tend vers $-\infty$ quand $p \longrightarrow +\infty$et $\delta(p_0) > 0$,$\delta(p)$ possède un unique zéro pour $p > p_0$, qui correspond à l'unique solution périodique du système. Le théorème de Poincaré- Bendixson implique que cette solution périodique est l'ensemble ω-limite de tout point $p \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

2.3.2 Ensembles limites qui ne sont pas des orbites périodiques.

Nous discutons maintenant un exemple qui illustre les possibilités (i) et (iii) énoncées dans le Théorème de Poincaré-Bendixson. Soit le système

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \lambda H \frac{\partial H}{\partial x}$$

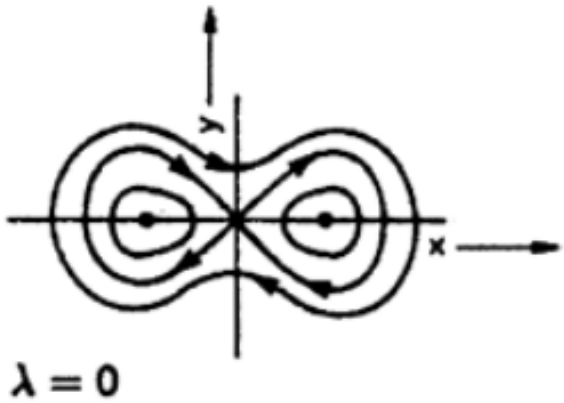

Figure 2.18: λ = 0

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \lambda H \frac{\partial H}{\partial y}$$

o√π $\lambda \in \mathbb{R}, H(x,y) = y^2 - 2x^2 + x^4$.

- Quand$\lambda = 0$, la fonction $H(x,y)$ garde une valeur constante le long de toute trajectoire $(x(t), y(t))$ du système puisque l'on a

$$d\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

  Le système est conservatif. Il possède trois équilibres $(0,0), (1,0)$ et$(-1,0)$. Les systèmes linéarisés au voisinage de ces équilibres correspondent respectivement à un point selle en $(0,0)$ et deux centres en $(\pm 1, 0)$. Les orbites du système non linéaire sont données par les courbes $H(x,y) = constante$; le point selle reste un point selle et les centres restent des centres

- Quand$\lambda \neq 0$, on voit facilement que les équilibres doivent vérifier

$$(\frac{\partial H}{\partial x})^2 + (\frac{\partial H}{\partial y})^2 = 0$$

  et donc ils sont encore donnés par $(0,0)$ et $(\pm 1, 0)$. L'analyse des systèmes linéarisés au voisinage des équilibres ne change pas (vérifier cette affirmation). On calcule facilement dH/dt le long d'une trajectoire $(x(t), y(t))$:

$$\frac{dH}{dt} = \lambda H[(\frac{\partial H}{\partial x})^2 + (\frac{\partial H}{\partial y})^2]$$

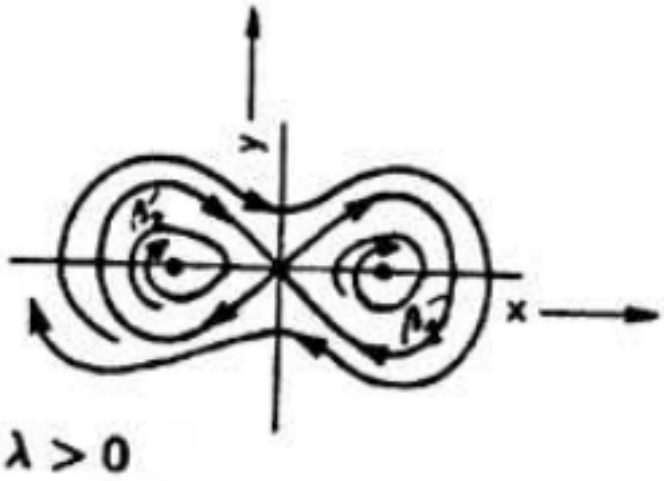

Figure 2.19:

. Donc la courbe $H(x,y) = 0$ est encore invariante sous le système. Elle est constituée de 3 orbites: l'équilibre et les deux boucles β_1 etβ_2 (voir la figure ci-dessous).

- Quand $\lambda > 0$, le long de toute trajectoire débutant à l'intérieur d'une boule on a $H < 0$et $dH/dt < 0$. Il suit du Théorème de Poincaré-Bendixson que l'ensemble ω-limite d'une telle trajectoire est $(1,0)$ (si elle débute à l'intérieur de β_1) ou $(-1,0)$ (si elle débute à l'intérieur de β_2)

- Quand $\lambda < 0$, on a $dH/dt > 0$ à l'intérieur des boucles et $dH/dt < 0$à l'extérieur de celles-ci. Il suit alors du Théorème de Poincaré-Bendixson que l'ensemble ω-limite d'une trajectoire débutant à l'intérieur d'une boucle $\beta_i (i = 1,2)$ est $\beta_i \cup \{(0,0)\}$ et l'ensemble ω-limite d'une trajectoire débutant à l'extérieur des boucles est $\{(0,0)\} \cup \beta_1 \cup \beta_2$. L'ensemble α-limite d'une trajectoire débutant à l'intérieur d'une boucle est soit l'équilibre $(1,0)$, soit l'équilibre $(-1,0)$.

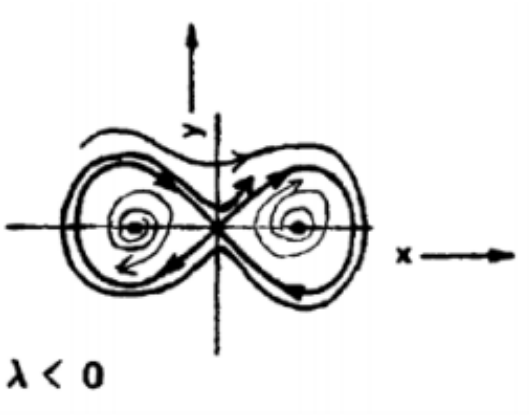

Figure 2.20:

Chapitre

3

Annexe

3.0.1 Henri Poincaré

est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français, né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le17 juillet 1912 à Paris. Poincaré a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitatives des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos , il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte et de la théorie des systèmes dynamiques. Il est considéré comme un des derniers grands savants universels, maitrisant l'ensemble des branches des mathématiques de son époque2 et certaines branches de la physique.

3.0.2 Ivar Otto Bendixson (1861-1935)

est un mathématicien suédois.Il a travaillé sur les infinis de Cantor et est connu pour le théorème de Poincaré-Bendixson, le théorème de Cantor-Bendixson (en) et le théorème de Bendixson-Dulac Bendixson se consacre d'abord à la théorie des ensembles de Cantor, pour laquelle il trouve entre autres un exemple d'ensemble parfait3 totalement discontinu1 et démontre que tout ensemble fermé non dénombrable peut être décomposé comme union disjointe d'un ensemble complet et d'un ensemble dénombrable (théorème de Cantor-Bendixson). Il est aujourd'hui surtout connu pour le théorème de Poincaré-Bendixson, qui décrit le comportement des courbes intégrales des équations différentielles autonomes de premier ordre (qui, dans la théorie originale de Poincaré, décrivent l'évolution temporelle des systèmes dynamiques) en deux dimensions au voisinage d'une singularité. Ce théorème énonce que la courbe se termine par un point singulier (source ou puits), ou bien qu'il existe un cycle limite (la courbe intégrale "orbite" autour du point singulier). Bendixson en a donné la démonstration en 1901, indépendamment de Poincaré. Il a également étudié les solutions périodiques des équations différentielles par la méthode du développement en fraction continue. Dans le domaine de la résolution des équa-

tions algébriques, il a repris la méthode d'Abel pour déterminer si une équation est soluble par radicaux (Abel s'était borné à montrer que certaines équations du cinquième degré ne sont pas solubles par radicaux)

Bibliography

[1] Arnold, *Ordinary Differential Equations*. Springer, 1992.

[2] M. W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2013.

[3] M.C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems*. Academic Press, 1987.

[4] J. Milnor, *Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem*. American Mathematical Monthly, 521-524, 1978.

[5] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer, 1982.

[6] Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. AMS, 2012.

Résumé

Le problème de l'existence d'orbites périodiques et de points critiques est fondamental dans l'analyse du comportement des équations différentielles et dans plusieurs applications. Cependant, dans de nombreux cas, il n'est pas facile de trouver une telle solution. Les systèmes à deux dimensions jouent ici un rôle important. L'une des raisons est qu'une équation unidimensionnelle du second ordre peut être réduite à un système de deux équations du premier ordre. Le Théorème de Poincaré-Bendixson donne des conditions permettant de prouver l'existence d'une solution périodique de l'équation. De plus, dans de nombreux cas, pour les systèmes à deux dimensions, l'existence d'une orbite périodique donne également l'existence d'un point critique. L'existence d'un type particulier d'orbites périodiques, c'est-à-dire de cycles limites, est particulièrement intéressante. Elle découle fréquemment du Théorème de Poincaré-Bendixson.

Mots clefs : Ensemble ω-limite, orbite périodique, redressement d'un champ de vecteurs.

Abstract

The problem of existence of periodic orbits and critical points is fundamental in the analysis of behaviour of differential equations and in several applications. However, in many cases it is not easy to find such a solution. Two-dimensional systems play here an important role. One of reasons is that a one-dimensional equation of the second order may be reduced to a system of two equations of the first order. The Poincaré–Bendixson Theorem gives conditions which enable us to prove the existence of a periodic solution of the equation. Moreover, for two-dimensional systems in many cases the existence of a periodic orbit gives also the existence of a critical point. The existence of a particular kind of periodic orbits, i.e. limit cycles, is in many situations particularly interesting. Frequently, it follows from the Poincaré–Bendixson Theorem.

Keywords: ω-limit set, periodic orbit, Straightening Theorem for Vector Fields.