Théorème de Poincaré-Bendixson et applications

Université Kasdi Merbah - Ouargla
Étudiant : Ahmed Bakria
Encadreur: Mohamed El Amine Bahayou

Résumé

Le théorème de Poincaré-Bendixson est un outil très important dans l'étude des systèmes dynamiques, il est énoncé par Henri Poincaré et la preuve est finalement complétée par Ivar Bendixson en 1901. Grâce a ce théorème et sous des hypothèses nous pouvons assurer l'existence d'un cycle limite
Le théorème de Poincaré-Bendixson affirme que si une solution maximale reste bornée, alors soit elle converge, soit son comportement asymptotique est celui d'une fonction périodique. Ce théorème possède plusieurs conséquences géométriques (topologiques).

Mots clefs : Redressement local d'un champ de vecteurs, systèmes dynamiques, ensembles limites, Théorème du point fixe de Brouwer.

Notions préliminaires

redressement local d'un champ de vecteurs.

Théorème de redressement d'un champ de vecteurs dans un Banach Si X est un champ de vecteurs de classe C^k, où k est un entier strictement positif ou infini, alors il existe un C^k-difféomorphisme f d'un ouvert V contenant 0 dans un ouvert V' contenant p_0, tel que $f(0) = p_0$ et $f * X$ soit le champ constant égal à $X(p_0)$.
Ce théorème possède un équivalent pour les variétés différentielles :

Théorème de redressement d'un champ de vecteurs dans une variété Soit M une variété de dimension n et de classe C^k, où k est un entier strictement positif ou infini, et X un champ de vecteurs contenant un point p_0 de M. Si $X(p_0)$ est un vecteur non nul, alors il existe une carte locale ϕ définie sur un ouvert V de $\mathbf{R}^n$ tel que l'image de V par cette carte soit un ouvert U de M contenant p_0 et tel que l'image du champ de vecteur X par ϕ sur $\mathbf{R}^n$ vérifie

$$\varphi_* X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Théorème du flot Soit U un ouvert contenant p_0 et inclus dans ω. Il existe S une section transverse à X en p_0 inclus dans un hyperplan affine de direction H, un réel strictement positif σ et un difféomorphisme f défini sur un ouvert V, inclus dans U, et à valeurs dans $S\times]-\sigma,\sigma[$, qui envoie S dans$H \times \{0\}$ et tel que le flot $\alpha(t,p)$ défini par X vérifie :

$$\forall (t,p) \in]-\sigma,\sigma[\times S \quad \frac{\partial f \circ \alpha}{\partial t}(t,p) = (0,1) \quad et \quad f\circ\alpha$$

Théorème de la boule chevelue Sur une sphère réelle S^n dont la dimension n est paire, tout champ de vecteurs continu X s'annule en au moins un point, i.e. il existe v (dépendant de X) tel que $X(v) = 0$.

Théorème du point fixe de Brouwer Il existe plusieurs formes du théorème, selon le

Théorème de Poincaré-Bendixson

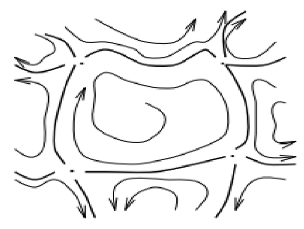
Théorème
Un ensemble limite $w(x)$ non vide compact d'un systéme dynamique C^1, du plan, qui ne contient pas de point d'équilibre est une orbite périodique.
Démonstration
On commence par exhiber une orbite périodique dans $\omega(x)$ puis on montre qu'il n'y en a pas d'autre. Soit y un point de $\omega(x)$. Sa trajectoire positive $\gamma^+(y)$ est contenue dans le compact $\omega(x)$ donc admet au moins un point limite $z \in \omega(x)$. Comme $\omega(y) \subset \omega(x)$, z n'est pas un point d'équilibre. Il existe donc une section transverse S au niveau de z, coupée une inflnité de fois par$\gamma^+(y)$. Par le corollaire énoncé ci dessus, ces points d'intersection sont tous confondus avec z et la trajectoire de y est périodique. 2'eme étape Il reste 'a prouver que $\omega(x)$ n'est constitué que de $\gamma(y)$. Si tel n'était pas le cas $\omega(x) - \gamma(y)$ serait un ouvert non vide de $\omega(x)$, qui ne peut pas être fermé par connexité de $\omega(x)$. Il y aurait donc un point d'accumulation z de $\omega(x)$ $\gamma(y)$ dans $\gamma(y)$. Prenant une section locale S en$z$($f(z)$est non nul par hypothése) on voit que S doit contenir un point de $\omega(x) - \gamma(y)$ ce qui constitue une contradiction

Le cas du plan

Les avantages du plan Dans le plan deux phénoménes nouveaux apparaissent
simplicité des sections : une section transverse est un segment de droite, donc un objet très simple muni d'un ordre naturel. On peut parler de monotonie le long d'une section.
2) **le théorème de Jordan** : il nous apprend qu'un arc fermé simple Z sépare le plan en deux composantes connexes. $C-$ est Zainsi divisé en deux régions, l'une bornée qu'on appelle l'intérieur de , l'autre non bornée (devinez son p'tit nom). Nous n'aurons en fait besoin que du théorème de Jordan dans le cas des arcsC^1 par morceaux. La démonstration, plus simple que dans le cas général, se trouve dans [B-G]. Ce résultat permet d'affirmer qu'une courbe continue qui se trouve *á* un instant dans et ultérieurement en dehors coupe en au moins un point
Le cas de la sphère, du tore. On peut tenter de généraliser le théorème de PoincaréBendixson au cas des surfaces. On développe ici le cas de la sphère et du tore. Dans le cas de la sphère on peut appliquer tous les théorèmes utilisés, notamment celui de Jordan. Le théorème de Poincaré-Bendixson est donc vérifié. On a même un peu mieux puisque tout ensemble limite est nécessairement compact. On retrouve que tout champ continûment différentiable sur la sphère admet au moins un point critique (appliquer le paragraphe précédent.). Ceci permet d'obtenir le théorème de la boule de billard chevelue en approximant un champ de vecteurs continu par des champs réguliers et en extrayant une suite de points critiques convergente. Dans le cas du tore, le théorème de Jordan est mis en défaut et le théorème de Poincaré-Bendixson ne survit pas ' a cette perte. Par exemple, une droite de pente irrationnelle dans $\mathbf{R}^2$ se projette densément sur le tore $\mathbf{R}^2 = \mathbf{Z}^2$:

Applications de Théorème

Description des ensembles limites. Le théorème de Poincaré-Bendixson permet de décrire tous les ensembles limites compacts d'un système dynamique plan. Deux cas se présentent, soit c'est une trajectoire périodique, soit c'est une union de points d'équilibres et de trajectoires reliants ces points , par exemple :



La trajectoire centrale spirale vers un cycle de singularités *á* quatre points critiques. Ce type de portrait de phase ne survit pas*á* de petites perturbations du champ de vecteurs. Si on bouge un peu f on peut faire disparaitre les trajectoires reliant deux points critiques.

Conclusion

Le théorème de Poincaré-Bendixson est puissant mais se généralise mal. Toute la machinerie développée pour le démontrer est essentielle pour les systèmes dynamiques.
Le lecteur intéressé pourra trouver des développements dans [H-S] (application de premier retour de Poincaré), [P-M] (stabilité structurelle, voir le paragraphe 3.1 de cet article) et [I] (pour un exposé général qui complète bien [H-S]).

References

[1] M. W. Hirsch, S. Smale R.L. Devaney: *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Academic Press 2013
[2] J. Milnor: *Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem*, American Mathematical Monthly, 521-524, 1978.