UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : MOULAY Nour.el.houda

Thème

Les espaces de Sobolev avec poids et un application à l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$

Soutenu publiquement le : 03/ 07/ 2019

Devant le jury composé de :

Djamel Ahmed Chacha	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Kaliche Kalthem	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire :

Mes chers parent

*"Merci mama****Merci papa"*

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

Mes frères, mes sœurs

Tous mes amis surtout

*Amina*Maissoune*Bassma*Hani*Masaouda*Maroua*

Mes collègues des mathématiques

Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Nour el houda

REMERCIEMENT

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui ont contribué de loin ou de près de cette recherche.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur mademoiselle Kaliche Keltoum professeur au département de mathématiques de l'Université de Ouargla de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse,. Je garderai dans mon cœur votre générosité, votre compréhension et votre efficacité.

Je remercie aussi Tarek Benarabi Doctorant en instrumentation, option traitement signal médical de l'Université des sciences et de la téchnologie Houari Boumédiène, Je voudrai le remercier pour disponibilité et du temps consacré à mon travail..

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail. Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Enfin, un grand merci à ma famille, pour son soutien et ses encouragements. Merci à ma mère, merci à mes sœurs et mes frères. Merci pour tout !

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

De nombreux problèmes de la physique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles posées dans des domaines non bornés comme l'espace tout entier $\mathbb{R}^n$, un domaine extérieur (le complémentaire d'un compact de $\mathbb{R}^n$) ou le demi espace $\mathbb{R}^n_+$. La résolutions des tels équations nécessite souvent une prise en compte du comportement des fonctions à l'infini. En effet, l'infinité du domaine géométrique pourrait compliquer significativement l'analyse des équations considérées théoriquement et numériquement.

Pour aborder tels équations en domaines non bornés, plusieurs auteurs ont eu recours aux espaces $\widetilde{\mathbf{H}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ obtenu par complétion de l'espace $\mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la norme $\|\nabla\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, ou encoure aux espaces homogènes $\mathbf{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $\mathbf{L}^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ à gradient dans $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Les résultats obtenus dans ces cadres fonctionnels sont toutefois comparables et présentent l'inconvénient de ne rien dire du comportement à l'infini des données et des solutions. Une autre approche est celle des espaces de Sobolev avec poids qui sont introduits initialement par Hanouzet dans [10] ou Kudrjavcev dans [11] puis développés notamment par Giroire dans [8] . Ces espaces se présentent comme un outil largement efficace et maniable. En effet, les fonctions de ces espaces satisfont des inégalités avec poids de type Poincaré et ont un comportement à l'infini bien caractérisé.

L'objectif de ce travail est d'étudier les espaces de Sobolev á poids et leurs propriétées fonctionnelles. Ces espaces ont été très largement utilisés pour la résolutions des problème elliptiques issus de la mécanique des fluides dans des domaines non bornés. Ces espaces sont en général composés de fonctions u, vérifiant des conditions de la forme

$$\int_\Omega \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad |D^\lambda u|^p \quad < \infty.$$

pour des dérivées d'ordre $|\lambda| \leq m$ Ici ρ désigne le poids de base :

$$\rho = \rho(r) = (1 + r^2)^{1/2}.$$

On observe que $\rho \sim r$ quand $r \longrightarrow +\infty$. La constante **1** est ajoutée afin que l'espace ne dépende pas du choix de l'origine.

Ces poids sont parfois modifiés dans des cas critiques, notamment en dimension **2**. Lorsque $p = 2$, on les multiplie à des ordres précis par des puissances supplémentaires du poids logarithmique qui l'on note par

$$\lg \rho = \lg(r^2 + 2).$$

Cette modification est faite dans le but de pallier à certaines difficultés, notamment l'invalidité de l'inégalité dite de Hardy, qui permet d'étendre l'inégalité de Poincaré à des domaines non bornés

La contribution principale de cette mémoire est répartie dans deux chapitres :

Le premier chapitre est dévoué aux notations, définition et les propriétés fonctionnelle (les injections, densité, les espaces de trace, les inégalité de hardy....) des espaces de Sobolev à poids.

Le deuxième chapitre on étudie l'éxistence et l'incité du problème de Laplace dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ et le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DE LES ESPACES DE SOBOLEV À POIDS

Le but de ce chapitre est d'étudier les propriétés fonctionnelles (immersion, densité, compacité, espace de trace...) des espaces de Sobolev avec poids qui sont trés bien adaptées a l'étude théorique et numérique des problémes elliptiques dans des domaines non bornés.

Notation et Définitions

$\mathbb{R}^n$ désignant l'éspace eucllidien de dimention **n,** on note $\mathbb{R}^n_+$ le demi espace ouvert

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}.$$

et $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ le demi espace fermé :

$$\overline{\mathbb{R}^n_+} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}.$$

Le point générique x de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, sera souvent note $x = (x', x_n)$ avec $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$ appartienant á $\mathbb{R}^{n-1}$.

On désigne $D(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et $D'(\Omega)$ son dual (espace de distributions)(voir [13]).

D_i désignant la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$ on note $|\lambda| = \lambda_1 + ... + \lambda_n$, On pose

$$D^\lambda = D_1^{\lambda_1}...D_n^{\lambda_n} = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1}...\partial x_n^{\lambda_n}}.$$

On note $L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue des (classes de) fonctions mesurables de puissance p^{-ime} intégrables sur Ω, muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ (ou $\|\cdot\|_p$ en l'absence d'ambiguité), définie par :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

et par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de sobolev constitué des fonctions ayant leurs dérivée jusqu'á l'ordre **m** dans $L^p(\Omega)$ et muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|\leq m} \|D^\lambda u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$|\lambda|\leq m$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note indifféremment $[s]$ ou $E(s)$ sa partie entiére. Pour tout réel $p > 1$, on note p' son conjugué défini par la relation :

1 1

$$\frac{}{\mathbf{p}} + \frac{}{\mathbf{p}^{3}} = \mathbf{1}.$$

Soit **l** un entier. Dans la suite P_l désigne l'espace des polynômes à variables dans $\mathbb{R}^n$ de degré total inférieur ou égal à **l,** avec la convention $P_l = \{0\}$ quand **l** est strictement négatif. On pose

$$P_l^{\Delta} = \{q \in P_l | \Delta q = 0\}.$$

On note A_l^{Δ} le sous-espace des polynômes P_l, impair par rapport á x_N ou de manière équivalente qui vérifié la condition $\phi(x', 0) = 0$. On note aussi N_l^{Δ} le sous-espace des polynômes P_l, impair par rapport x_N ou de manière équivalente qui vérifié la condition $\partial\phi(x', 0) = 0$.

D'autre part, pour tout sous-espace fermé **Y** d'un espace de Banach **X,** on note **X/Y** l'es- pace quotient de **X** par **Y** et le polaire de **Y** dans le dual X' de **X :**

$$X' \perp Y = \{ f \in X'; \quad \forall v \in Y; < f, v >= 0 \}.$$

Pour $m \geq 0$, $n/p + \alpha \notin \{1, \cdots, m\}$, l'espace quotient $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)/P_{[m-\alpha-n/p]}$, est muni de la norme :

$$[u]_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \| u \|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)/P_{[m-\alpha-n/p]}}$$

$$= \inf_{\phi \in P_{[m-\alpha-n/p]}} \| u + \phi \|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

On note $r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, la norme euclidienne de $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On définit les fonctions de poids :

$$\rho = \rho(r) = (1 + r^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \lg \rho = \lg(2 + r^2).$$

Définition :([10])

Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (typiquement non borné), $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$, $m \in \mathbb{N}$.
On définit l'espace de Sobolev à poids $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \lambda \in \mathbb{N}^n \quad 0 \leq |\lambda| \leq m \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\Omega)\}.$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\lambda| \leq m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}.$$

C'est un espace de Hilbert quand $p = 2$. On écrit $W_\alpha^m(\Omega)$ au lieu de $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$.

Exemple 1 :

Pour $\alpha = 1$, $m = 2$:

$$W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \rho^{-1} u, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Exemple 2 :

Pour $\alpha = 0$, $m = 2$:

$$W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \rho^{-2} u, \quad \rho^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

La définition précédente sera utilisée, ici essentiellement dans les cas où

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \cdots, m\}.$$

Dans le cas contraire, c'est à dire $\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, \cdots, m\}$, comme par exemple quand $n = 2$ et $p = 2$, on ajoute des poids logarithmiques. Donc
la définition sera modifié comme suite :

Définition :

Pour tous nombres entiers non négatif **n** et **m,** et $p > 1$, α et β nombres réells, on défi- nit :

$$
K(m,n,p,\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \notin \{1\ldots m\}, \\ m - \frac{n}{p} - \alpha & \text{si } \frac{n}{p} - \alpha \in \{1\ldots m\}. \end{cases}
$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un entier $m \geq 0$ et des réels α, β et $p \geq 1$ on pose :

$$
W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) \quad \forall \lambda \in \mathbb{N}^n \quad 0 \leq |\lambda| \leq k \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad |(\lg \rho)^{\beta-1} \quad D^\lambda u \in L^p(\Omega);
$$

$$
\forall \lambda \in \mathbb{N}^n \quad k+1 \leq |\lambda| \leq m \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad |(\lg \rho)^{\beta} \quad D^\lambda u \in L^p(\Omega).\}
$$

Cet espace est équipe de la norme :

$$
\|u\|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{0 \leq |\lambda| \leq k} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad (\lg \rho)^{\beta-1} \quad D^\lambda u\|^p_{L^p(\Omega)}
$$

$$
+ \sum_{k+1 \leq |\lambda| \leq m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad (\lg \rho)^{\beta} \quad D^\lambda u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}.
$$

et de semi-norme :

$$
|u|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{\substack{|\lambda| \leq m \\ |\lambda| = m}} \|\rho^{\alpha} \quad (\lg r) \quad D\, u\|^{\beta}_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}.
$$

Dans la définition de l'espace $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)$, **m** caractérise la régularité des fonctions, α caracté-rise le comportement du poids (et donc des fonctions) quand $|x|$ tends vers l'infini et β carac-térise le comportement du poids près de l'origine

Propriétés fondamentales

Nous avons immédiatement les propriétés fondamentales (voir [10]) :

1 Pour $\mathbf{u} \in W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ muni de la norme :

$$\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)}$$

est un espace de Banach (de Hilbert dans le cas $p = 2$). La démonstration est analogue à celle des espaces de sobolev habituels.

2 Pour $\phi \in D(\bar{\Omega})$, c'est-à-dire ϕ restriction à Ω d'un fonction $D(\mathbb{R})$. L'application :

$$\mathbf{u} \longmapsto \phi \mathbf{u}$$

est linéaire continue de $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

3 Dans le cas $p = 2$, on note $W^{m}_{\alpha}(\Omega)$ au lieu de $W^{m,2}_{\alpha}(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{W_{\alpha}^{m}(\Omega)} = \sum_{|\lambda| \leq m} \int_{\Omega} \rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^{\lambda}\mathbf{u}\bar{D}^{\lambda}\mathbf{v}dx.$$

4 Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ l'application $\mathbf{u} \longmapsto \rho^{\beta}\mathbf{u}$ est un isomorphisme de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{m,p}_{\alpha-\beta}(\mathbb{R}^n)$.

L'application $\mathbf{u} \longmapsto \rho^{-\beta}\mathbf{u}$ est l'isomorphisme inverse.

5 $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ coïncide algépriquent et topologique avec l'espace des restrictions á $\mathbb{R}^n_+$ des fonction de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

6 L'application $\mathbf{u} \longmapsto D^{\lambda}\mathbf{u}$ est linéaire et continue de $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ dans $W^{m-|\lambda|,p}_{\alpha}(\Omega)$. pour tout multi-indice. λ avec $|\lambda| \leq m$.

7. L'espace $\mathbf{W}_{\alpha}^{m,p}(\mathrm{R}^n)$ contient les polynômes de degré inférieur ou égale à **l** avec

$$\mathbf{l = [m - \alpha - n/p]} .$$

Exemples

$\mathbf{W}_1^{4,3}(\mathrm{R}^3)$ contient les polynômes de degrés $\mathbf{l \leq [4 - (1 + 1)] = 2}$. $\mathbf{W}_2^{5,4}(\mathrm{R}^6)$ contient les polynômes de degrés $\mathbf{l \leq [5 - (2 + 3/2)] = 3/2}$. $\mathbf{W}_3^{3,4}(\mathrm{R}^7)$, $\mathbf{l = [3 - (2 + 7/4) = -3/4 < 0]}$ alors $\mathbf{P_l = \{0\}}$.

les espace duals

Nous commençons par démontrés un résultat de densité (voir [10])

Théorème 1.3.1

- $\mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathbf{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$.

Nous démontrons seulement le premier résultat, la démonstration du deuxième est analogue. On se ramène par troncature aux propriétés de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. *Soit* $\phi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x) = 1$, *pour* $r \leq 1$ $\phi(x) = 0$ *pour* $r \geq 2$ *et posons :*

$$\phi_k(x) = \phi\left(\frac{x}{k}\right), \qquad u_k = \phi_k u.$$

Nous montrons que, pour $u \in W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $u_k \in W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\lim_{k \to +\infty} \|u_k - u\|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{1.1}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^n$ *avec* $|\lambda| \leq m$ *exprimons :*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} |D^{\lambda}(u_k - u)|^p dx\right)^{1/p},$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} |D^{\lambda}(\phi_k u) - D^{\lambda} u|^p dx\right)^{1/p}.$$

On utilise formule de leibniz sur $D^{\lambda}(\phi_k u)$ *on obtient :*

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \left|\sum_{\mu \leq |\lambda|} \binom{\lambda}{\mu} (D^{\mu}\phi_k)(D^{\lambda-\mu}u) - D^{\lambda}u\right|^p dx\right)^{1/p},$$

$$\leq \left(\int_{r \geq k} \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} |\phi_k - 1|^p |D^{\lambda}u|^p dx\right)^{1/p},$$

$$+ \sum_{\substack{\mu\ \lambda \\ \mu \leq \lambda}} \binom{\lambda}{\mu} \Sigma \int_{k \leq r \leq 2k} \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} (D^{\mu}\phi_k)(D^{\lambda-\mu}u)|^p dx \Sigma_{1/p} .$$

Dans cette inégalité, il est immédiat que le première terme de droite tend vers zéro quand **k** *tend vers l'infini. pour les autres termes ; on a*

$$\mathbf{D}^{\mu}\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{k}^{|\mu|}}\mathbf{D}^{\mu}\phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{k\leq r\leq 2k} \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \left|(\mathbf{D}^{\mu}\phi_k)(\mathbf{D}^{\lambda-\mu}\mathbf{u})\right|^p \mathbf{dx} &\leq \mathbf{C}\int_{k\leq r\leq 2k} \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2}\mathbf{k}^{-|\mu|p}\left|\mathbf{D}^{\lambda-\mu}\mathbf{u}\right|^p\mathbf{dx} \\ &\leq \mathbf{C}\int_{k\leq r\leq 2k} (1+4\mathbf{k}^2)^{\frac{|\mu|p}{2}}\mathbf{k}^{-|\mu|p}\rho^{(\alpha-m+|\lambda|-|\mu|)p/2}\left|\mathbf{D}^{\lambda-\mu}\mathbf{u}\right|^p\mathbf{dx} \\ &\leq \mathbf{C}\int_{k\leq r\leq 2k} \rho^{(\alpha-m+|\lambda-\mu|)p/2}\left|\mathbf{D}^{\lambda-\mu}\mathbf{u}\right|^p\mathbf{dx}.\end{aligned}$$

Comme cette dernière expression tend vers zéro quand **k** *tend vers l'infini, on obtient (1.1)*

Soit maintenant $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *à support compact, alors* **u** *appartient* $\mathbf{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. *Par suite, il existe une suite* $(\Psi_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(\Psi_l) \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$. *telle que* **u** *et* (Ψ_l) *aient leurs supports dans un compact fixe et de plus*

$$\lim_{k\to+\infty} \|\Psi_l - \mathbf{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Alors, d'après la propriété des supports

$$\lim_{k\to+\infty} \|\Psi_l - \mathbf{u}\|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

Ce qui termine la démonstration.

Conséquence. $\mathbf{W}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *est un espace normal, par suite son dual est un espace de distribution. Par définition on pose :*

$$\mathbf{W}^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n) = (\mathbf{W}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n))'.$$

Inégalité de Hardy

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement important dans les espaces à poids, notamment pour étendre des inégalités de type Poincaré ou Poincaré-Wirtinger ou encore de Deny-Lions à des domaines non bornés.

On cite ici les inégalités suivantes et on renvoie à [9], [1] ou [5] pour la preuve.

Lemme 1.4.1

Soit $f \in D(]0,1[)$, *on a :*

(i) *Si* $\beta \neq -1, \gamma \in \mathbb{R}$ *et* $a \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right)$

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^\beta \left(\lg \frac{a}{t}\right)^\gamma dt \leq \left(\frac{2p}{|\beta+1|}\right)^p \int_0^1 \left|\frac{df}{dt}\right|^p t^{\beta+p} \left(\lg \frac{a}{t}\right)^\gamma dt.$$

(ii) *Si* $\gamma \neq -1$ *et* $a \geq 1$:

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^{-1} \left(\lg \frac{a}{t}\right)^\gamma dt \leq \left(\frac{p}{|\gamma+1|}\right)^p \int_0^1 \left|\frac{df}{dt}\right|^p t^{-1+p} \left(\lg \frac{a}{t}\right)^{\gamma+p} dt.$$

preuve

(i) $\beta \neq -1$, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\beta+1}\left(\lg \frac{a}{t}\right)^\gamma\right) = t^\beta \left(\lg \frac{a}{t}\right)^\gamma p\left(\frac{1}{\lg(\frac{a}{t})}\right),$$

ou $p(x) = (\beta+1) - \gamma x$

pour $t \in]0,1[$ et $a \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right)$ on a : $\frac{a}{t} \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right)$;

d'où : $0 \leq \left(\lg \frac{a}{t}\right)^{-1} \leq \frac{|\beta+1|}{2|\gamma|}$,

$$\left|p\left(\frac{1}{\lg(\frac{a}{t})}\right)\right| \geq |\beta+1| - |\gamma| \left(\lg \frac{a}{t}\right)^{-1} \geq \frac{|\beta+1|}{2}.$$

On obtient donc :

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^\beta \left(\lg \frac{a}{t}\right)^\gamma dt \leq \frac{2}{|\beta+1|} \left|\int_0^1 |f(t)|^p \frac{d}{dt}\left(t^{\beta+1}\left(\lg \frac{a}{t}\right)^\gamma\right) dt\right|.$$

0

$\frac{2}{} \int 1 \quad \underline{d} \quad \underline{a}$

0 0

$$\leq \frac{2}{|\beta+1|}\left(|f(t)|^p t^{\beta+1}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^\gamma\Big|_0^1\right) + \frac{2p}{|\beta+1|}\left|\int_0^1 |f(t)|^{p-1}\frac{d|f|}{dt}\, t^{\beta+1}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^\gamma dt\right|$$

$$\leq \frac{2p}{|\beta+1|}\int_0^1 |f(t)|^{p-1}\, t^{\beta(p-1)/p}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^{\gamma\frac{p-1}{p}}\left|\frac{df}{dt}\right| t^{\beta/p+1}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^{\gamma/p} dt.$$

$$\leq \frac{2p}{|\beta+1|}\left(\int_0^1 |f(t)|^p\, t^\beta \left(\lg\frac{a}{t}\right)^\gamma dt\right)^{p-1/p}\left(\int_0^1 \left|\frac{df}{dt}\right|^p t^{\beta+p}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^\gamma dt\right)^{1/p}.$$

d'ou l'inégalité (i).

(ii) $\gamma \neq -1.$ on a : $t^{-1}(\lg\frac{a}{t})^\gamma = -\frac{1}{\gamma+1}\frac{d}{dt}(\lg\frac{a}{t})^{\gamma+1}$ et de la même façon que précédemment on obtient pour $f \in D(]0,1[)$:

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^{-1}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^\gamma dt \leq \frac{1}{|\gamma+1|}\left|\int_0^1 |f(t)|^p \frac{d}{dt}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^{\gamma+1} dt\right|$$

$$\leq \frac{p}{|\gamma+1|}\int_0^1 |f(t)|^{p-1}\, t^{-(p-1)/p}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^{\gamma(p-1)/p}\left|\frac{df}{dt}\right| t^{(p-1)/p}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^{\gamma/p+1} dt.$$

$$\leq \frac{p}{|\gamma+1|}\left(\int_0^1 |f(t)|^p\, t^{-1}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^\gamma dt\right)^{p-1/p}\left(\int_0^1 \left|\frac{df}{dt}\right|^p t^{p-1}\left(\lg\frac{a}{t}\right)^{\gamma+p} dt\right)^{1/p}.$$

d'ou l'inégalité (ii).

Donc le cas $\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \cdots, m\}$ l'inégalité de Hardy est donné par le lemme suivant :

Lemme 1.4.2

Soient $1 < q < +\infty$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *avec* $\beta \neq -1$. *Soit* f *une fonction mesurable positif sur* $[0, +\infty[$ *tel que*

$$\int_0^{+\infty} t^{\beta+q}|f(t)|^q dt < +\infty.$$

on pose

$$F(t) = \begin{cases} -\int_t^{+\infty} f(t)dt & si \quad \beta > -1, \\ \int_0^t f(t)dt & si \quad \beta < -1. \end{cases}$$

Alors,

$$\int_0^{+\infty} t^{\beta}|F(t)|^q dt \leq \left(\frac{q}{|\beta - 1|}\right)^q \int_0^{+\infty} t^{\beta+q}|f(t)|^q dt.$$

Une conséquence intéressante de l'inégalité de Hardy, le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.3

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ *ou* $\mathbb{R}^n \backslash \omega$, *où* ω *est un domaine borné non vide et lipschitzien. On suppose que*

$$n/p + \alpha \notin \{1, \cdots, m\}.$$

Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ *telle que*

$$\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\Omega); \|u\|_{W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)} \leq C_1|u|_{m,\alpha,\Omega},$$

où

$$|u|_{m,\alpha,\Omega} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\rho^{\alpha} D^{\lambda} u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

Cette corollaire 1.4.3 est établi par Giroire [8] dans le cas particulier quand $p = 2$ et par Amrouche, Girault et Giroire quand $\Omega = \mathbb{R}^n$ (voir [8]) ou quand Ω est un domaine extérieur dans tout l'espace (voir [2]) et par Boulmezaoud quand $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ (voir[6]).

Les inclusions compactes

On a les inclusions continues suivants (voir [9]) :

$$W^{m,p}_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,p}_{\alpha-1}(\Omega) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-m}(\Omega).$$

Théorème 1.5.1

Pour $m \in \mathbb{N}$, $1 < p < +\infty$, *on a les inclusions algébriques et topologiques suivantes :*
Si $\alpha \in \mathbb{R}$ *avec* $\alpha + \frac{1}{p}$ ™ 0 *ou* $m < \alpha + \frac{1}{p}$, *alors :*

$$W^{m,p}_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-j,p}_{\alpha-j}(\Omega).$$
$$W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{m-j,p}_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+).$$

preuve

$\alpha + \frac{1}{p}$ ™ 0 : on va montrer que : $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{m-j,p}_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$ pour m “ 1.
Soit $u \in W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$; i.e : $x^{\alpha}_n D^{\lambda} u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ pour $|\lambda|$ ™ m.

On veut montrer que :

$x^{\alpha-1}_n D^{\gamma} u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ pour $|\gamma|$ ™ $l-1$. La fonction $\frac{1}{x_n}$ étant continue sur $\mathbb{R}^n_+$, $x^{\alpha-1}_n D^{\gamma} u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ est mesurable. On a donc :

-P.P $x' \in \mathbb{R}^{n-1}.x^{\alpha-1}_n D^{\gamma} u(x', x_n) \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}_+)$,

et

- $x^{\alpha}_n \frac{d}{dx_n} D^{\gamma} u(x', x_n) \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Pour $|\gamma|$ ™ $l - 1$. Par la suite : $x_n \longrightarrow D^{\gamma} u(x', x_n)$ (pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$) est continue sur $[0, +\infty[$ car $\alpha + \frac{1}{p} < 1$.

Par ailleurs, comme $\alpha + \frac{1}{p}$ ™ 1, il résulte que trace $D^{\gamma} u(x', 0)$ est nécessairement nulle, d'où :

$$\text{p.p. } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, D^\gamma u(x', x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x', x_n)\, dx_n.$$

Par suite,

$$|D^\gamma u(x', x_n)| \leq \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x', x_n) \right| dx_n.$$

On applique le lemme 1.4.2. avec $\beta = -(\alpha - 1)p$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} x_n^{(\alpha-1)p} |D^\gamma u(x', x_n)|^p dx_n \leq \left(\frac{p}{|1 + (\alpha - 1)p|} \right)^p \int_0^{+\infty} x_n^{\alpha p} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x', x_n) \right|^p dx_n.$$

Cette inégalité étant vraie pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{(\alpha-1)p} |D^\gamma u|^p dx \leq \left(\frac{p}{|1 + (\alpha - 1)p|} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u \right|^p dx.$$

avec $|\gamma| \leq l - 1$. Ceci montre que l'on a :

$$W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+) \longleftrightarrow W^{m-j,p}_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$$

En itérant ce résultat, on obtient :

$$W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+) \longleftrightarrow W^{m-j,p}_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+), \text{ pour } \quad j = 0, 1, \cdots, m.$$

Les espaces de Trace

Comme toute fonctions **u** appartenant à $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ est localement dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, La trace de **u** sur l'hyperplan $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$ est localement dans $W^{m-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1}_{\alpha})$ (voir [12] par exemple).

Nous nous proposons d'étudier le comportement à l'infini des traces sur un hyperplan des fonctions de $W^{m,p}_{0}(\mathbb{R}^n)$ Pour cela, nous avons besoin d'introduire des nouveaux espaces.

1.6.1 L'espace $W^{\sigma,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$:

On définit les traces de fonctions de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ (ici nous ne considérons pas le cas $\beta f = 0$).

Pour tout $\sigma \in]0;1[$, On introduit l'espace par :

$$\overset{0}{W}{}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}^n);\quad \omega^{-\sigma} u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{et} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy < \infty \right\}$$

Avec

$$\omega = \begin{cases} \rho & \text{si } \frac{n}{p} \neq \sigma, \\ \rho(\lg\rho)^{1/\sigma} & \text{si } \frac{n}{p} = \sigma. \end{cases}$$

C'est un Banach réflexif. Cet espace est équipée de la norme :

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\left\| \frac{u}{\omega^{\sigma}} \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, On définit l'espace $W^{\sigma,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$:

$$\overset{\alpha}{W}{}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}^n);\ \omega^{\alpha-\sigma} u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{et} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|\rho^{\alpha}(x)u(x)-\rho^{\alpha}(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy \right\}$$

Avec

$$\omega = \begin{cases} \rho & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \neq \sigma, \\ \rho(\lg\rho)^{1/(\sigma-\alpha)} & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha = \sigma. \end{cases}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ on désigne par $W^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (voir [9], [6]) :

$$W^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \{u \in D'(\mathbb{R}^n);\ 0 \leq |\lambda| \leq k\ \rho^{\alpha-s+|\lambda|}(\lg \rho)^{-1}D^{\lambda}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\ k+1 \leq |\lambda| \leq [s]-1 \quad \rho^{\alpha-s+|\lambda|}D^{\lambda}u \in L^p(\mathbb{R}^n); \quad |\lambda| = [s] \quad D^{\lambda}u \in W^{\sigma,p}_{\alpha}\}$$

Où $k = s - \frac{n}{p} - \alpha$ si $\frac{n}{p} + \alpha \in \{\sigma, \cdots, \sigma + [s]\}$, avec $\sigma = s - [s]$, et $k = -1$ dans les autres cas. C'est un espace réflexif de Banach équipée de la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \Big\{ \sum_{0 \leq |\lambda| \leq k} \|\rho^{\alpha-s+|\lambda|}(\lg \rho)^{-1}D^{\lambda}u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k+1 \leq |\lambda| \leq [s]-1} \|\rho^{\alpha-1+|\lambda|}D^{\lambda}u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big\}^{\frac{1}{p}} + \sum_{|\lambda|=[s]} \|D^{\lambda}u\|^p_{W^{\sigma,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

De même, nous pouvons définir pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, l'espace :

$$W^{s,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{ v \in D'(\mathbb{R}^n); \quad (\lg \rho)^{\beta} v \in W^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \}$$

Nous avons les inclusions algébriques et topologiques de l'espace de Sobolev $W^{s,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ dans le cas où $\frac{n}{p} + \alpha \notin \{\sigma, \cdots, \sigma + [s] - 1\}$:

$$W^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{s-1,p}_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{\sigma,p}_{\alpha-[s],\beta}(\mathbb{R}^n)$$

$$W^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{[s],p}_{\alpha+[s]-s,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-s,\beta}(\mathbb{R}^n)$$

Où $\frac{n}{p} + \alpha \in \{\sigma, \cdots, \sigma + [s] - 1\}$ ensuite nous avons :

$$W^{s,p}_{\alpha,\beta} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{s-j+1,p}_{\alpha-j+1,\beta} \hookrightarrow W^{\sigma-j,p}_{\alpha-j,\beta-1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{s,p}_{\alpha-[s],\beta}$$

$$W^{s,p}_{\alpha,\beta} \hookrightarrow W^{[s],p}_{\alpha+[s]-s,\beta} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{[s]-j+1,p}_{\alpha-\sigma-j+1,\beta} \hookrightarrow W^{[s]-j,p}_{\alpha-\sigma-j,\beta-1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-s,\beta-1}$$

Si u est une fonction sur $\mathbb{R}^n_+$ on note sa trace d'ordre j sur hyperplan Γ par :

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \gamma_j u : x' \in \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \partial^j_n u(x', 0).$$

Rappelons maintenant le lemme des traces suivant due à Hanouzet (voir [9]) et étendue par Amrouche-Nècasovà (voir [4]) à cette classe des espaces de Sobolev pondérés :

Lemme 1.6.1 *Pour tout entier* $\mathbf{m \geq 1}$ *et* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, *l'application :*

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1}) : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \longrightarrow \Pi_{j=0}^{m-1} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$$

peut être étendu à une application linéaire continue toujours désigné par $\boldsymbol{\gamma}$,

$$\gamma : W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \Pi_{j=0}^{m-1} W^{m-j-1/p,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$$

De plus γ *est surjectif et* $\mathbf{ker}\, \gamma = \overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$.

CHAPITRE 2

APPLICATION AU PROBLÈME DE LAPLACE

Le but de ce chapitre est de présenter certains résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n_+$.

L'equation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$

Considérons l'équation de Laplace :

$$-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Cette équation a été étudié par Giroire [8] et Amrouche, Girault et Giroire [1]. On résume les résultats obtenus dans les théorèmes suivants :

Théorème 2.1.1 *([?])*

Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$ *,* $\mathbf{m} \geq 2$ *et* $\frac{n}{p} \notin \{1...m\}$ *l'opérateur défini par :*

$$\Delta : W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/P^{\Delta}_{[m-n/p]} \longmapsto W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.2}$$

est un isomorphisme.

Pour la démonstration on a besion le lemme suivant :

Lemme 2.1.2 *Pour* $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbf{m} \geq 2$ *et* $\mathbf{n/p} \notin \{1, \cdots, m\}$ *l'opérateur défini par :*

$$\Delta : W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/P_{[m-n/p]} \longmapsto W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/P_{[m-2-n/q]} \tag{2.3}$$

est un isomorphisme.

preuve de théorème :

Cet opérateur est évidemment linéaire, continue et injectif. Pour montrer la subjectivité, prenons $\mathbf{f} \in W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$, du lemme précédent, il existe $\mathbf{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/P^{\Delta}_{[m-n/p]}$ tel que $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$, ceci veut dire que pour tout $\mathbf{r} \in P_{[m-2-n/p]}$, il existe $\mathbf{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}_0^n)$ et $\mathbf{q} \in P_{[m-n/p]}$ tels que :

$$\Delta(\mathbf{u} + \mathbf{q}) = \mathbf{f} + \mathbf{r}.$$

Mais, comme pour tout $\mathbf{r} \in P_{[m-2-n/p]}$, il existe $\mathbf{s} \in P_{[m-n/p]}$ tel que $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{r}$. On déduit alors que

$$\Delta(\mathbf{u} + \mathbf{q} - \mathbf{s}) = \mathbf{f}.$$

Comme

$$\Delta(\mathbf{q}-\mathbf{s}) \in \mathcal{P}_{[m-2-n/p]} \implies \exists\, \mathbf{R} \in \mathcal{P}_{[m-n/p]} : \Delta\mathbf{R} = \Delta(\mathbf{s}-\mathbf{q})$$

$$\implies \Delta(\mathbf{R}+\mathbf{q}-\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{r}+\mathbf{q}-\mathbf{s} \in \mathcal{P}_{[m-n/p]}.$$

On a bien : $\Delta(\mathbf{u}+\mathbf{Q}) = \mathbf{f}$ et $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}^{\Delta}_{[m-n/p]}$

Corollaire 2.1.3

Soit $\mathbf{m} \geq \mathbf{1}$ *un nombre entier et supposons que* $\mathbf{n/p} \notin \{1,\cdots,m\}$. *Soit* $\mathbf{u} \in \mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : |\lambda| = m,\ D^{\lambda}u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Alors il existe un polynôme $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_{m-1}$, *dépendant de* $\mathbf{u}$ *tel que :*

$$\mathbf{u}+\mathbf{Q} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$[\mathbf{u}+\mathbf{Q}]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C|\mathbf{u}|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposition 2.1.1

Soit le nombre entier $\mathbf{l} \geq \mathbf{1}$ *tel que* $\frac{n}{p} \in \{1,\cdots,l\}$ *alors, l'opérateur de Laplace défini par :*

$$\Delta : W^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[1+l-n/p]} \rightarrowtail W^{-1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

est un isomorphisme.

preuve

D'après le théorème (2.1.1), on sait que pour $\mathbf{m} \geq \mathbf{2}$ tel que $\frac{n}{p} \in \{1,\cdots,l\}$ l'opérateur défini par :

$$\Delta : W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[m-n/p]} \rightarrowtail W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.5}$$

est un isomorphisme.

Utilisant la dualité et transposition, ou voit que l'opérateur défini par :

$$\Delta : W_0^{-m+2,p'}(\mathbb{R}^n) \rightarrowtail W_0^{m,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[m-n/q]} \tag{2.6}$$

est un isomorphisme.

Alors, l'argument d'obtenir, pour tout entier **l ≥ 1** :

$$\Delta : W_l^{-m+2+l,p'}(\mathbb{R}^n) \longmapsto W_l^{-m+l,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[m-n/p]} \tag{2.7}$$

est un isomorphisme.

En choisissant **m = l + 1**, on obtient :

$$\Delta : W_l^{l,p'}(\mathbb{R}^n) \longmapsto W_l^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/q]} \tag{2.8}$$

par dualité et transposition on déduit que

$$\Delta : W_{-l}^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \longmapsto W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.9}$$

est un isomorphisme.

Théorème 2.1.4

Soit **m ≥ 1** *et* **l ≥ 1** *deux nombres entiers tels que* $\frac{n}{p} \notin \{1, \cdots, l+1\}$. *Alors l'opérateur de Laplace défini par :*

$$\Delta : W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \longmapsto W_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.10}$$

est un isomorphisme.

preuve

Ce théorème est une conséquence de la proposition (2.1.1) et la régularité des solutions du Laplacien.

Le corollaire suivant est obtenu de la proposition (2.1.1) par dualité et transposition.

Corollaire 2.1.5

Soit **l ≥ 1,** *un nombres entier tel que* $\frac{n}{p}$ *Alors, l'opérateur de Laplace défini par :*

$$\Delta : W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longmapsto W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-\frac{n}{p'}]} \tag{2.11}$$

est un isomorphisme.

La régularité des solutions de l'opérateur de Laplace permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 2.1.2

Soit $\mathbf{m \geq 0}$ *et* $\mathbf{l \geq 0}$ *deux nombres entiers avec* $\frac{n}{p}' \notin \{1, \cdots, l+1\}$ *Alors ; l'opérateur de Laplace défini par :*

$$\Delta : W^{1+m,p}_{l+m}(\mathbb{R}^n) \rightarrowtail W^{-1+m,p}_{l+m}(\mathbb{R}^n) \perp P^{\Delta}_{[l+1-\frac{n}{p}']} \tag{2.12}$$

est un isomorphisme .

Finalement, on peut changer le signe de **m** *par dualité. Alors, en résumant tous les résultats obtenus précédemment,on obtient :*

Proposition 2.1.3

Soit $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}$ *et soit* **p** *un nombre réel dans* $]1, +\infty[$*. Alors*

(i) *Pour tout entier* **l** *strictement positif tel que* $\frac{n}{p}' \notin \{1, \cdots, l+1\}$ *Les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :*

$$\Delta : W^{1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^n)/P^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \rightarrowtail W^{-1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Delta : W^{1+m,p}_{l+m}(\mathbb{R}^n) \rightarrowtail W^{-1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^n) \perp P^{\Delta}_{[l+1-n/p]}$$

(ii) *Si* $\frac{n}{p} \neq 1$ *et* $\frac{n}{p}' \neq 1$, *alors l'opérateur*

$$\Delta : W^{1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^n)/P_{[1-n/p]} \rightarrowtail W^{-1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^n) \perp P_{[1-n/p']}$$

est un isomorphisme.

On peut trouver des résultats similaires concernant l'équation 5.1 par Boulmezaoud [5] dans le cas du demi-espace et par Amrouche, Girault et Giroire [2] dans le cas d'un domaine extérieur.

L'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n_+$

Dans ce paragraphe, nous donnons des résultats fondamentaux de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n_+$. Ces résultats sont démontrées par Boulmezaoud (voir [7]) dans le cas particulier, où $p = 2$ pour $n \geq 3$, ensuite généralisé par Amrouche-Něcasová (voir [3]) et Amrouche (voir [4]) en théorie L^p pour $N \geq 2$, avec des solutions de quelques cas critiques par des moyens de facteurs logarithmiques dans le poids.

Tout d'abord, On considère le problème de Dirichlet :

$$P_D \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{Dans } \mathbb{R}^n_+, \\ u = g & \text{Dans } \Gamma \end{cases}$$

On a les résultats suivants :

Théorème 2.2.1 *(Amrouche-Něcasová [4]). Soit* $l \in \mathbb{Z}$ *tel que :*

$$\frac{n}{p} \notin \{1, \cdots, l\} \qquad et \qquad \frac{n}{p} \notin \{1, \cdots, -l\}. \tag{2.13}$$

Pour tout $f \in W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ *et* $g \in W_l^{1-1/p,p}(\Gamma)$ *satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \phi \in A^{\Delta}_{[1+l-n/p']},$$

$$(f, \phi)_{W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n_+) \times \mathring{W}_{-l}^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+)} = (g, \partial_N \phi)_{W_l^{1-1/p,p}(\Gamma) \times W_{-l}^{-1/p',p'}(\Gamma)}. \tag{2.14}$$

Le problème (P_D) *admet la solution* $u \in W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ *unique, á un élément de* $A^{\Delta}_{[1-l-n/p]}$ *et il existe une constante* C *tel que :*

$$\inf_{q \in A^{\Delta}_{[1-l-n/p]}} \|u + q\|_{W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\left(\|f\|_{W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{W_l^{1-1/p,p}(\Gamma)}\right).$$

Théorème 2.2.2 *(Amrouche-Něcasová [4]). Soit* $l \in \mathbb{Z}$ *et* $m \geq 1$ *deux entiers tels que*

$$\frac{n}{p} \notin \{1, \cdots, l+1\} \qquad et \qquad \frac{n}{p} \notin \{1, \cdots, -l-m\}. \tag{2.15}$$

Pour tout $f \in W_{m+l}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ *et* $g \in W_{m+l}^{m+1-1/p,p}(\Gamma)$ *satisfaisant la condition (2 ;14) de compatibilité. Le problème* (P_D) *admet la solution* $u \in W_{m+l}^{m+1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ *unique ,á un élément de* $A^{\Delta}_{[1-l-n/p]}$ *et il existe une constante* C *tel que :*

$$\inf_{q \in A^{\Delta}_{[1-l-n/p]}} \|u + q\|_{W_{m+l}^{m+1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\left(\|f\|_{W_{m+l}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{W_{m+l}^{m+1-1/p,p}(\Gamma)}\right).$$

Maintenant, on considère le problème de Neumann :

$$\mathbf{P_N}\quad \begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{Dans } \mathbb{R}^n_+, \\ \partial \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{Dans } \Gamma \end{cases}$$

On a les résultats suivants

Théorème 2.2.3 *(Amrouche [3]). Soit* $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}$ *tel que :*

$$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} \notin \{1,\cdots,\mathbf{l}\} \qquad et \qquad \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} \notin \{1,\cdots,-\mathbf{l}+1\}. \tag{2.16}$$

Pour tout $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{0,p}_{l}(\mathbb{R}^n_+)$ *et* $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}_{1-l}(\Gamma)$ *satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \phi \in \mathbf{N}^{\Delta}_{[l-n/p]}$$

$$(\mathbf{f},\phi)_{W^{0,p}_{l}(\mathbb{R}^n_+)\times W^{0,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n_+)} + (\mathbf{g},\partial_N \phi)_{W^{-1/p,p}_{l-1}(\Gamma)\times W^{1-1/p',p'}_{-l+1}(\Gamma)} = \mathbf{0}. \tag{2.17}$$

Le problème $(\mathbf{P_N})$ *admet une solution* $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,p}_{l-1}(\mathbb{R}^n_+)$ *unique, á un élément de* $\mathbf{N}^{\Delta}_{[2-l-n/p]}$ *et il existe une constante* $\mathbf{C}$ *tel que :*

$$\inf_{q \in N^{\Delta}_{[2-l-n/p]}} \|\mathbf{u}+\mathbf{q}\|_{W^{1,p}_{l-1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \mathbf{C}\left(\|\mathbf{f}\|_{W^{0,p}_{l}(\mathbb{R}^n_+)} + \|\mathbf{g}\|_{W^{-1/p,p}_{l-1}(\Gamma)}\right).$$

Théorème 2.2.4 *Soit* $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}$ *et* $\mathbf{m} \geq \mathbf{1}$ *deux entiers tels que*

$$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} \notin \{1,\cdots,\mathbf{l}\} \qquad et \qquad \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} \notin \{1,\cdots,-\mathbf{l}-\mathbf{m}\} \tag{2.18}$$

Pour tout $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{m-1,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n_+)$ *et* $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{m+1-1/p,p}_{m+l}(\Gamma)$ *satisfaisant la condition (2.17)de comptabilité le problème* $(\mathbf{P_N})$ *admet une solution* $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m+2,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n_+)$ *unique, á un élément de* $\mathbf{N}^{\Delta}_{[2-l-n/p]}$ *et il existe une constante* $\mathbf{C}$ *tel que*

$$\inf_{q \in N^{\Delta}_{[2-l-n/p]}} \|\mathbf{u}+\mathbf{q}\|_{W^{m+1,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \mathbf{C}\left(\|\mathbf{f}\|_{W^{m-1,p}_{m+l-1}(\mathbb{R}^n_+)} + \|\mathbf{g}\|_{W^{m-1/p,p}_{m+l-1}(\Gamma)}\right).$$

CONCLUTION

Dans ce mémoire, on a présenté en premier temps, les espaces de Sobolev avec poids et leurs propriétés fondamentales. En deuxième temps, on a utilisé ces espaces comme cadre fonctionnel pour montrer l'existence et l'unicité des solutions de l'équations de Laplace dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^n$ et dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$.

BIBLIOGRAPHIE

[1]C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted sobolev spaces for laplace's equation in R^n. J. Math. Pures Appl, 73(6) :579–606, 1994

[2]C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Dirichlet and neumann exterior problems for the n-dimensional laplace operator : an approach in weighted sobolev spaces. J. Math. Pures Appl, 76(9) :55–81, 1997.

[3]C. Amrouche, S. N ěcasová, Laplace equation in the half-space with a nonhomogeneous Dirichlet boundary condition, Mathematica Bohemica 126 (2) (2001) 265–274.

[4]C. Amrouche, The Neumann problem in the half-space, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 335 (2002) 151–156.

[5]T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space : an approach using weighted spaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 26(8) :633–669, 2003.

[6]T.Z. Boulmezaoud. On the Stockes system and on the biharmonic equation in the half-space : an approach via weighted Sobolev spaces. Math. Methods Appl. Sci., 25(5) :373–398, 2002.

[7]T.Z. Boulmezaoud, Espaces de Sobolev avec poids pour l'´equation de Laplace dans le demi-espace, C. R. Acad. Sci. Paris, S´er. I 328 (1999) 221–226.

[8]J. Giroire. Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales. Thèse de Doctorat d'Etat. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.

[9]B.Jacques camus . Quelque résultats sur les espace de Sobolev avec poids ; publication des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes,1968-1969

[10]B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au probleme de dirichlet dans un demi espace. Rend. Sem. Mat., 46 :227–272, 1971.

[11]L.D. Kudrjavcev. Direct and inverse imbeddings theormes, application to the solution of elliptic equation by variational method Trudy Mat. Inst. Steklov, 55 : 1-182, 1959.

[12]NECAS, J les méthodes directes en théorie des equations elliptiques, paris(1967)

[13]L.SCHWARTZ Distribution, Hermann(1967)

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الخصائص الوظيفية منها : (الغمر, الكثافة, الفضاء التتبع, و المساواة هاردي .....الخ) للفضاء سوبوليف مع الأوزان التي تم تكييفها بشكل جيد للغاية للدراسة المشكلة النظرية و العددية لمشاكل في الحدود ذات شكل البيضوي في المجالات الغير محدودة, سيتم معالجة مثال تطبيقي على معادلة لابلاس.

الكلمات المفتاحية : فضاء سوبوليف للأوزان, مساواة هاردي, معادلة لابلاس

Abstract

The object of this work is to study the functional properties (immersion, density, spase of trace, Hardy's inequality.....) of Sobolev spaces with weights which are very well adapted to solve theoretically and numerically elliptic boundary problems in unbounded domains. an example of application to the laplace equation will be treated.

Keywords: Sobolev's space has weight, Hardy's inequality,

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier les propriétés fonctionnelles (immersion, densité, compacité, espace de trace...) des espaces de Sobolev avec poids qui sont très bien adaptées a la résolution théorique et numérique des problèmes elliptiques aux limites en domaines non bornés. Un exemple d'application á l'équation de Laplace sera traité.

Mots Clés : Les espace de Sobolev a poids, L'inégalité de Hardy, L'équation de Laplace.