Les espaces de Sobolev avec poids et ses applications

MOULAY Nour.el.houda (Encadreur : K.Kaliche)

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
moulaynourelhouda6@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce taravail est d'etudier les propriétés fonctionnelles (immersion, densité, compacité, espace de trace...) des espaces de Sobolev avec poids qui sont trés bien adaptées a l'étude théorique et numérique de probléme aux limites elliptique dans domaine non bornés. Un exemple d'application á l'equation de Laplace sera traité.

Mots Clés : Les espace de Sobolev a poids, L'inégalité de Hardy, L'équation de Laplace.

1. Introduction

Les espaces de Sobolev avec poids forment un cadre fonctionnelle adéqant pour l'étude des problémes elliptiques dans domaine non bornés. On peut citer comme exemple de ces domaines : les domaines éxtérieurs, le demi-espace et l'espace tout entier. On prend un exemple d'appliation l'equation de Laplace dans tout l'espace entier.

2. Définition et notations

On note $r = |x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, la norme euclidienne de $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Considérons les fonctions de poids :

$$\rho = \rho(r) = (1+r^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \lg\rho = \lg(2+r^2)$$

2.1 Définition

Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (typiquement non borné), $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$, $m \in \mathbb{N}$ on définit l'espace de Sobolev à poids $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) \quad \forall\lambda \in \mathbb{N}^n \quad 0 \leqslant |\lambda| \leqslant m \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\Omega)\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\lambda|\leqslant m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p\Big)^{1/p}$$

C'est un espace de Hilbert quand $p = 2$. On écrit $W_\alpha^m(\Omega)$ au lieu de $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$. Dans ce cas, cette définition sera utilisée, ici essentiellement dans les cas où

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}$$

Dans le cas contraire, c'est à dire $n/p + \alpha \in \{1, ..., m\}$, comme par exemple quand $n = 2$ et $p = 2$, on ajoute un poids logarithmique.

2.2 Définition

Pour tout nombres entiers non négatif n et m, $p < 1$ et α, β nombres réels

$$K(m,n,p,\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \notin \{1...m\}, \\ m - \frac{n}{p} - \alpha & \text{si } \frac{n}{p} - \alpha \in \{1...m\}. \end{cases}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un entier $m \geqslant 0$ et réels α, β et $p \geqslant 1$ on pose :

$$W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) \quad \forall\lambda \in \mathbb{N}^n \quad 0 \leqslant |\lambda| \leqslant k \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad |(\lg\rho)^{\beta-1} \quad D^\lambda u \in L^p(\Omega);$$
$$\forall\lambda \in \mathbb{N}^n \quad k+1 \leqslant |\lambda| \leqslant m \quad \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad |(\lg\rho)^\beta \quad D^\lambda u \in L^p(\Omega).\}$$

m : caractérise la régularité des fonctions.
β : caractérise les facteurs logarithmiques qui permettent d'exclure de valeurs critiques.
α : caractérise le comportement des fonctions quand $|x|$ tends vers l'infini

Cet espace est équipe de la norme :

$$\|u\|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{0\leqslant|\lambda|\leqslant k} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad (\lg\rho)^{\beta-1} \quad D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p$$

$$+ \sum_{k+1\leqslant|\lambda|\leqslant m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} \quad (\lg\rho)^\beta \quad D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p\Big)^{1/p}$$

et de semi-norme :

$$|u|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\lambda|\leqslant m} \|\rho^\alpha \quad (\lg\rho)^\beta \quad D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p\Big)^{1/p}$$

3. Propriétés fondamentales

Nous avons immédiatement les propriétés fodamentales :

1- On a les inclusions continues suivants :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow .... \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$$

2- dans le cas $p = 2$ on note $W_\alpha^m(\Omega) = W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire :

$$(u,v)_{W_\alpha^m(\Omega)} = \sum_{|\lambda|\leqslant m} \int_\Omega \rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \bar{D}^\lambda v dx$$

3- $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ quand Ω est un demi espace ou un domaine extérieur lipschitsien

4- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad m \in \mathbb{Z}$ l'application $\quad u \longmapsto \rho^\beta u$ est un isomorphisme de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$
L'application $\quad u \longmapsto \rho^{-\beta} u \quad$ est l'isomorphisme inverse.

6- L'application $\quad u \longmapsto D^\lambda u \quad$ est linéaire et continue de $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ dans $W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$ pour tout multi-indice. λ avec $|\lambda| \leq m$

4. Inégalité de Hardy

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement important dans les espaces á poids, notamment pour étendre des inégalités de type Poincaré ou Poincaré-Wirtinger ou encore de Deny-Lions á des domaines non bornés.

4.1 Lemme (Inégalité de Hardy)

Soient $1 < q < +\infty$ et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq -1$. Soit f une fonction mesurable positif définit sur $[0, +\infty[$ tel que

$$\int_0^{+\infty} t^{\beta+q}|f(t)|^q dt < +\infty.$$

on pose

$$F(t) = \begin{cases} -\int_t^{+\infty} f(t) \quad dt & \text{si} \quad \beta > -1, \\ \int_0^t f(t) \quad dt & \text{si} \quad \beta < -1. \end{cases}$$

Alors,

$$\int_0^{+\infty} t^\beta |F(t)|^q dt \leqslant \left(\frac{q}{\beta-1}\right)^q \int_0^{+\infty} t^{\beta+q}|f(t)|^q dt.$$

Une conséquence intressante de l'inégalité de Hardy, corollaire suivant

4.2 Corollaire

Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ou $\mathbb{R}^n - \omega$, où ω est un domaine borné non vide et lipschitzien.

On suppose que

$$n/p + \alpha \notin \{1, ..., m\}.$$

Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall u \in \mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega); \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leqslant C_1 |u|_{m,\alpha,\Omega}$$

où

$$|u|_{m,\alpha,\Omega} = \Big(\sum_{|\lambda|=m} \|\rho^\alpha D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p\Big)^{1/p}.$$

5. Application á l'equation de Laplace

Considérons l'équation de Laplace :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

Cette équation a été étudié par Giroire [1] et Amrouche, Girault et Giroire [2]. On résume les résultats obtenus dans les théorèmes suivants :

5.1 Théorème

Soient $m \in \mathbb{Z}$ et p un réel dans $]1, +\infty[$. Alors

(i) Pour tout entier strictement positif tel que $\frac{n}{p} \in \{1, ..., l+1\}$, les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :

$$\Delta : W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta \mapsto W_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Delta : W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n) \mapsto W_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[l+1-n/p]}^\Delta$$

(ii) Si $n/p \neq 1$ et $n/q \neq 1$, alors l'opérateur

$$\Delta : W_m^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/p]} \mapsto W_m^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/q]}$$

est un isomorphisme.

Soit $l \geq 0$ un entier tel que $n/q \in \{1, ..., l+1\}$, les Laplaciens

$$\Delta : W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-l-n/p]}^\Delta \mapsto W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[l+1-n/q]}^\Delta$$

$$\Delta : W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[2-l-n/p]}^\Delta \mapsto W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/q]}^\Delta$$

$$\Delta : W_{-l}^{2,q}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[2+l-n/q]}^\Delta \mapsto W_{-l}^{0,q}(\mathbb{R}^n)$$

sont des isomorphismes.
On peut trouver des résultats similaires concernant l'équation 5.1 par Boulmezaoud [3] dans le cas du demi-espace et par Amrouche, Girault et Giroire [4] dans le cas d'un domaine extérieur.

Références

[1] J Giroire. Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales. *Thèse de Doctorat d'Etat. Université Pierre et Marie Curie, Paris*, 1987.

[2] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted sobolev spaces for laplace's equation in $\mathbb{R}^n$. *J. Math. Pures Appl*, 73(6) :579–606, 1994.

[3] T.Z. Boulmezaoud. On the laplace operator and the vector potential problems in the half-space : an approach using weighted spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(8) :633–669, 2003.

[4] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Dirichlet and neumann exterior problems for the n-dimensional laplace operator : an approach in weighted sobolev spaces. *J. Math. Pures Appl*, 76(9) :55–81, 1997.