UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE : MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et statistiques

Par : RAMDANI ILHAM

Thème :

ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES NON LINÉAIRE

Soutenu publiquement le : 30/06/2019

Devant le jury composé de :

Prof . Baheddi Aissa	Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur
Dr . Mezabia Mouhamed Hadi	Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Prof . Said Mouhamed Said	Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur

Remerciement

Tout d'abord grâce à dieu le tout puissant et miséricordieux de m'avoir donné la foi et m'avoir permis d'apprendre et à réaliser ce travail.

Je tiens à remercier l'ensemble des enseignants auxquels nous exprimons toute notre gratitude et notre sympathie et que sans leur collaboration et soutient de ce travail n'aurait pu être réalisé.

Je remercier en particulier **Dr Baheddi Aissa** pour l'encadrement technique et pour m'avoir guidé, encouragé et conseillé pendant toute la période de formation. Je tiens à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler avec lui. Ainsi j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin par le fruit de leurs connaissances.

J'exprime également ma gratitude aux membres du Jurys **Mohammed Alhadi Mzabia** , **Said Mouhamed Said** qui m'ont honoré en acceptant de juger ce travail. Un merci spécial au **Dr Hamdi Aissa Balhadj**. Merci à tous et à toutes.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes enseignants du cycle primaire jusqu'au cycle universitaire dont les conseils précieux m'ont guidé ; qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

En particulier, l'ensemble des enseignants de l'université **Kasdi Merbah Ouargla**. Mes très **chère parent** pour le sacrifice qu'ils ont constitué pendant la durée de mes études et qui mon fournis au quotidien soutien et une confiance sans faille et de ce fait, je ne saurais exprimer ma gratitude seulement par des mots.
Mon frère : **Salah**.
Mes soeurs : **Solef** , **Feriel**.
Mes oncles, tantes, cousin et cousine.
Mes camarades et toutes
Mes amies :**Radia**, Acouak, Chaima ,Hanna, Asma, Sabrina.

A tous ceux ou celles qui me sont chers et que j'ai omis involontairement de citer.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
Ω	un ensemble fondamentale non vide .
$(X_n)_{n\in N}$ et $(Y_n)_{n\in N}$	des processus stochastiques.
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	Ensembles des réels et des réels positifs
$\mathbb{R}^d$	Ensemble des vecteurs réels à d dimension
$\mathbb{P}, \mathbb{E}$	Probabilité et espérance
R-S	Riemann-Stieltjes
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité
B_t ou MB	Mouvement Brownien
exp	la fonction exponentielle

Introduction

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations différentielles stochastiques.
Par conséquent, la formation d'équations différentielles stochastique , mais la plupart des équations de cette forme sont des équations non linéaires, quelles soient dues aux propriétés du matériau ou d'autre.
Pour résoudre ces équations, il y a plusieurs façons de mentionner : (l'approche Fokker-Planck, l'approche équivalente de la linéarisation...).
Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de cette dernière approche : la méthode de linéarisation statistique. La méthode de linéarisation statistique surmonte un bon nombre de limitations et des difficultés rencontrées dans les méthodes pour l'étude des equation différentielle stochastique . Cette méthode est basée sur le concept du remplacement de l'équation non linéaire par une equation linéaire associé
Ce document est répartit en trois chapitres. Nous commençons dans le premier chapitre par l'état d'art et la présentation des préliminaires où nous rappelons quelques notions et outils de base que nous les rencontrerons par la suite tels le processus stochastique, le mouvement brownien ...etc.
Dans le deuxième chapitre, on aborde le calcul d'intégrale stochastique ; de Riemann, Stieltjes,

d'Itô et Stratonovich, et de la formule d'Itô.

En troisième chapitre, on développe la méthode de linéarité statistique et la simulation ; la méthode de linéarité statistique dans le cas uni-dimensionnelle, cette méthode est base sur le changement de variable. Enfin en simule un cas dans logicielle R.

Chapitre 1

Notation Général

1.1 État d'art

- **Auteur** : Peter E.Kloeden et Echkard Platen.
- **Titre** : Numerical solution of stochastic differential equations.
- **Source** : Springer.
- **Année** : 1995.

Chapitre 4 : Stochastic differential equations.

Résume :

Dans ce chapitre l'auteur étudies des cas de réductibilité des équations différentielles stochastiques non linéaire à des équations différentielle stochastique linéaire soit :

- équation différentielle stochastique linéaire explicite de la forme :

$$dY_t = a(t)dt + b(t)dB_t.$$

- équation différentielle stochastique linéaire **autonome** de la forme :

$$dY_t = (a_1 Y_t + a_2)dt + (b_1 Y_t + b_2)dB_t.$$

- **Auteur** :Rebiha Zeghdane.
- **Titre** : Dynamique de structures soumises à des sollicitations aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique des equations différentielles stochastiques.
- **Source** : Thèse de doctorat.
- **Année** : Soutenu le 12/04/2014. Université de Sétif.

chapitre 1 : Stochastic differential equations.

Résume :

Dans cette partie, on donne une liste de certaines equations différentielles stochastiques dont les solutions générales explicites . Ces equations sont très utilisées car elles peuvent être utilisées pour confirmer l'efficacité des méthodes numériques.

Synthèse

la lecteur précédent aide à la résolution l'équation différentielle non linéaire.

1.2 Espace de probabilité et variable aléatoire :

dans cette partie Ω est ensemble fondamentale non vide.

1.2.1 Tribu

Définition 1.2.1 *Une famille F est un sous ensemble des parties de Ω forme une tribu si elle vérifies les propriétés suivantes :*

1. $\Omega \in F$.
2. $A \in \beta$ *alors* $\bar{A} \in F$.
3. *pour toute* , $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in F$ *alors* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

— *Si* $\Omega = \mathbb{R}$ *la tribu engendrée par les intervalles ouverte de forme* $]-\infty, x]$ *pour toute* $x \in \mathbb{R}$ *appelé la tribu borélienne est on notée* $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$.

— Le couple (Ω, F) est appelle un espace musurable .

1.2.2 Mesure

Définition 1.2.2 [1] ***(Mesure)***

Soi $(E, \boldsymbol{F})$ un espace mesurable on appelle mesure positive sur E est un application $\mu : \boldsymbol{F} \longmapsto [0, +\infty[$ vérifiée :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Additive dénombrable : si $\{A_n\}_{n \in N}$ est une famille dénombrable d'ensembles deux a deux disjointe alors $\mu(\cup_{n \in N}) = \sum_{n \in N} \mu(\boldsymbol{A}_n)$.*

on appelé $(E, \boldsymbol{F}, \mu)$ un espace mesure.

Définition 1.2.3 ***(Mesure de Lebesgue sur** $\mathbb{R}$ **)***

On appelle mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R})$ la mesure μ définie par :

$$\mu(]a, b[) = \mu([a, b[) = \mu([a, b])$$

où a,b sont des réels.

Proposition 1.2.4 *La mesure de Lebesgue est une mesure continue sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0. \end{aligned}$$

Définition 1.2.5 *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est par définition la mesure sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ obtenue par prolongement de l'application définie sur les pavés $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ donnée par :*

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

1. Bernard.C, Théorie des probabilités :Une introduction élémentaire, Calvage & Mounet, Paris 2013.P71

1.2.3 Espace de probabilité

On peut maintenant définir la notion de probabilité :

Définition 1.2.6 *Soit F une tribu sur Ω. une mesure de probabilité sur (Ω, F) est une application $P : F \to [0\ 1]$ telle que :*

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

On appelle (Ω, F, P) un espace de probabilité.

1.3 Variable Aléatoire

1.3.1 variable aléatoire unidimensionnelle

Définition 1.3.1 *On appelle variable aléatoire définie sur $(\Omega, \boldsymbol{F})$ a valeurs dans $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ toute les application mesurable X de $(\Omega, \boldsymbol{F})$ sur $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ c'est-a-dire vérifiant :*

$$\forall B \in \boldsymbol{B},\ X^{-1}(B) \in \boldsymbol{F}$$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \boldsymbol{B}\ , \forall B \in \boldsymbol{B}\} = \{X \in \boldsymbol{B}\}.$$

Définition 1.3.2 ***(loi probabilité de variable aléatoire)***
La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est la loi de probabilité P_x définie sur l'espace $(\mathbb{R}, \boldsymbol{F})$ par :

$$\forall B \in \boldsymbol{B}\ P_x(B) = P(\omega | X(\omega) \in \boldsymbol{B}) = P(X^{-1}(B))$$

Définition 1.3.3 ***(Fonction de répartition)***
On appelle fonction de répartition de X la fonction de répartition suivante :

$$\boldsymbol{F}_X(x) = Px(X \leqslant x)$$

Proposition 1.3.4 [2] *Soir Fx la fonction de répartition d'un variable aléatoire absolument continu alors :*

(P_1) F_X *est continu sur* $\mathbb{R}$, *derive pour toute point.*

(P_2) F_X *est croissant sur* $\mathbb{R}$.

(P_3) F_X *est a valeurs dans [0, 1].*

(P_4) $lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Définition 1.3.5 ***(Fonction de densité de probabilité)***
La dérive de la fonction de répartition $F_X(x)$ *par rapport a* x *donne la fonction de densité* f_x *de probabilité*

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f_x(\xi) d\xi$$

1.3.2 variable aléatoire multidimensionnelles

Les considérations précédentes se généralisent a des couples et des multiples de variables aléatoires. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires a valeurs réelles. On peut considérer ces variables comme une unique variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$$(X_1, X_2, ...X_n) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$$

On défini la **fonction de répartition conjointe** d'un série de variable aléatoire (ou des composantes d'un variable aléatoire multidimensionnelle de dimension n) en fonction de la probabilité conjointe :

$$F_{X_1, X_2, ...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbf{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n)$$

La **fonction de densité de probabilité conjointe** s'obtient a partir des dérivées partielles successives de la fonction de répartition conjointe :

$$f_{X_1, X_2, ...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1, X_2, ...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 .... \partial x_n}$$

2. TASSI.PH et S.lEGAIT, *Théorie des probabilités :en vue des applications statistique*, editionds TECHNIP,PARIS 1990, P73

L'intégrale de la fonction de densité de probabilité conjointe suit la réglé :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,....X_n}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,....,\varepsilon_n) = 1.$$

La fonction de répartition conjointe se calcule aussi de la fonction de densité de probabilité conjointe :

$$F_{X_1,X_2,....X_n}(x_1,x_2,.....,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,X_2,....X_n}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,....,\varepsilon_n) d\varepsilon_1, d\varepsilon_2,....,d\varepsilon_n.$$

1.4 Processus Stochastique

Processus aléatoire ou stochastique est un famille des variable aléatoire $\{X(n); n \in T\}$ définie sur un espace de probabilité a valeur dans un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ $\acute{a}$

- l'indice T peut être continu ou discrète .
- le processus est un fonction variable (trajectoiriel) : si $\omega \in \ \Omega$ fixé $\ n \longrightarrow X_n(\omega)$.

-le processus est un application : si $\ n \in \ T$ fixé $\omega \longrightarrow X_n(\omega)$.

-$X(n,\omega)$ est un ensemble de réalisation , que s'appelle processus stochastique.

1.4.1 Filtration

1. une filtration indexée par I est une famille $(\mathbf{F}_t)_{t\in\mathbf{I}}$, de sous-tribus de F, c'est-à-dire $(\mathbf{F}_t \subset \mathbf{F})$, possédant la propriété de croissance suivante :

$$s < t \Rightarrow \mathbf{F}_s \subset \mathbf{F}_t$$

2. Soit $(X_n)_{n\in N}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathbf{F}, F_t, \mathbf{P})$. On dit que le processus est adapte a la filtration $\mathbf{F}_t$ si X_t est mesurable par rapport a $\mathbf{F}_t$ pour tout t : $E[|x_t|] \leqslant \infty$.
3. Pour un processus aléatoire $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, il y a une filtration naturelle, constituée des sous tribus engendrées par les variables aléatoires X,$\forall s < t, \mathbf{F}_t = \sigma(X_0, X_1, ..., X_t)$

- la quadratique $(\Omega, \mathbf{F}, (\mathbf{F}_t)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$ est un espace de probabilité Filtre.

1.4.2 Temps d'arrêt

Soit $\{\mathbf{F}_n\}_{n>0}$ un filtration sur espace de $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ est T un variable aléatoire de Ω dans $\{0, 1, 2, 3, ..., +\infty\}$;on dit T est un temps d'arrêt si pour toute entier k $\ \{T < k\} \in \mathbf{F}_n$

-l'ensemble $\{A \in \mathbf{F}, A \cap \{T \leqslant n\} \in \mathbf{F}_n \forall n\}$ est un sous tribu de $\mathbf{F}$.

1.4.3 Martingale et martingale locale

Définition 1.4.1 [3] *Soit* $(\Omega, \boldsymbol{F}, F_n, \boldsymbol{P})$ *un espace de probabilité filtre .*
un martingale par rapport à la filtration $\{\boldsymbol{F}_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ *est un processus stochastique* $\{X_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ *satisfait les propriété suivante :*

1. $E[|X_n|] < \infty$ *(c-a-d intégrable pour toute n).*
2. $\{X_n\}_{n>0}$ *adapte à la filtration* $\boldsymbol{F}_n$ *.*
3. $E[X_n \diagup \boldsymbol{F}_s] = X_s \ \forall s < n$.

- **sur-martingale :** on dit que le processus est un sur-martingale si il vérifié les propriétés 1,2 et $E[X_n \diagup \mathbf{F}_s] < X_s \forall n < s$.
- **sou-martingale :** si aussi vérifié les propriétés 1,2 et $E[X_n \diagup \mathbf{F}_s] > X_s \forall n < s$

Définition 1.4.2 ***(martingale local)***
Soit X un processus càd-lag adapte. On dit le processus est une martingale local s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\geqslant 1}$ *tel que* $P[lim_{n\to\infty} T_n = \infty] = 1 \ n \geqslant 1$ *et le processus d'arrêté* X_{T_n} *est une martingale, si de plus* $X_0 = 0$ *on écrire* $X \in M^{loc}$.
Toute martingale càd-lag est un martingale local mais le réciproque n'est pas vrais.

Le théorème suivante et commue sous le mon de théorème de décomposition de Dood-Meyer des sur-martingale.

Théorème 1.4.3 *Soit X une sur martingale càd-lag. Alors X admet une décomposition un que de la forme :*

$$X = X_0 + M - A$$

ou M est une martingale local càd-lag nulle en 0 est A est un processus prévisible, croissant et nul en 0. Si X est positive, alors A est intégrable, i.e. $E[A_{\bar{T}}] < \infty$ *òu* $A_{\bar{T}} = lim_{t\longrightarrow \bar{T}} A_t$ *p.s.*

3. Nils. B, *Martingales et calcul stochastique*, cour Université d'Orléans 2014.P27

1.5 Mouvement Brownien

En 1827, la première description du mouvement brownien est due au botaniste écossais Robert Brawn. Le mouvement brownien joue un rôle fondamental dans les théorèmes des processus stochastique en temps continu.

Définition 1.5.1 *Soit un processus stochastique définie sur la base* $B : (B_t, t \geqslant 0)$ *on dit que* B *est un mouvement brownien si,*

i) $B_0 = 0$ *(P-s continu).*

ii) $\forall t \geqslant 0\ B_t \sim N(0, t)$.

iii) *si* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_n$ *les variable aléatoire* $B_{t_0} - B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendants.*

Proposition 1.5.2 [4] B_t *est un processus gaussien centre [pour plus détaille peut voire référence [4]] donc la fonction de covariance est :* $cov(B_t, B_s) = min\{t, s\}$

Proposition 1.5.3 [5] *toute mouvement brawien est un martingale relativement a sa filtration.pour toute* $s \leqslant t$ $E[B_t|F_s] = B_s$.

Définition 1.5.4 *(Processus de Wiener)*
Le processus de Weiner est le modèle mathématique du mouvement brownien ;

Définition 1.5.5 [6]
(le processus de Wiener dans $\mathbb{R}$ *).On suppose* $W = \{W_t\}_{t \geqslant 0}$ *est un processus stochastique .On dit que* W *est un processus de Wiener si vérifier les condition suivent :*

i. $W_0 = 0.ps$

ii *Si* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_n$*, pour les variable aléatoire* $W_{t_0} - W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendant.*

iii. *Si* $0 \leq s \leq t$ *, alors* $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$

4. Jean-François Le Gall,*Brownian Motion,Martingales,and Stochastic Calculus.*Orsay,France January 2016 .spring .P19
5. Léonard Gallardo, *Mouvement brownien et calcul d'Itô.* Hermann.P256
6. Peter Rudzis,*Brownieann Motion*, june 7th,2017. P17

iv. *le solution W est continue (ie. il existe un mesure $F \subset \Omega$ telle que $P(F) = 1$ et pour $\omega \in F$;$t \longrightarrow W_t(\omega)$ est continue.)*

1.6 Mouvement Brownien multidimensionnelle

Définition 1.6.1 *Un processus $B = (\Omega, \boldsymbol{F}, F_t, (B_t)_{t\geqslant 0}, \boldsymbol{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_n$ est appelé mouvement brownien n-dimensionnel si*

i) $B_0 = 0$

ii) $\forall 0 \leqslant t \leqslant s$, *les vecteurs aléatoire $B_s - B_t$ est indeponde de F_t.*

iii) $\forall 0 \leqslant t \leqslant s, B_s - B_t \sim N_n(0, (s-t)I_d.)$
ou I_d la matrice identité de $\mathbb{R}$.

1.6.1 variation bornée

Définition 1.6.2 *(**variation**) Soit $f : [01] \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit la $\alpha -$ variation de f par*

$$var(f, \alpha) = lim_{\xi \to 0} sup_{\{t_k\}:\rho(t_k)<\xi} \sum_k |f(k_{k+1}) - f(t_k)|^\alpha \tag{1.1}$$

ou $\rho(t_k) = max_k |t_k - t_{k-1}|$ est le pas de la subdivision de [0 ,1] et le sup est pris sur l'ensemble de ces subsidions.

- *Si $\alpha = 1$, on appelle variation totale.*
- *Si $\alpha = 2$ on appelle variation quadratique.*
- *Si $var(f, 1) < \infty$ on dit que f est a variation bornée(ou finie).*

Remarque 1.6.3 *Pour une fonction f de classe C^1, la variation quadratique tend vers 0 sur toute intervalle $[0, t]$, en effet, avec une $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$, on a avec le théorème des accroissements finis :*

$$v_f(t_0, t_1, ...t_n) := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 = \sum_{i=1}^n (f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}))^2$$
$$\leqslant \delta \|f'\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n |t_i - t_{i-1}| = \delta \|f'\|_\infty^2 t$$

ou $t_i^* \in]t_i, t_{i-1}[$ est donné par le théorème des accroissements finis applique a la fonction deriable f.

Définition 1.6.4 [7] ***(Semi martingale)***
Une semi martingale est un processus càd-lag adopté $X = (X_t)_{t>0}$ admettant une décomposition de la forme :

$$X_t = X_0 + M_t + A_t. \tag{1.2}$$

òu M est une martingale locale càd-lag nulle en 0 et A est un processus adapté à variation finie et nulle en 0. Une semi martingale continue est un semi martingale telle que dans la décomposition (1.2), M et A sont continue est unique.

Proposition 1.6.5 *Soit $X = (X_t)_{t>0}$ un semi martingale alors :*

1. *on suppose un autre semi martingale continu $Y_t = Y_0 + N_t + A'$: $\langle X, Y\rangle = \langle M, N\rangle$*
2. *$\forall t \in T, si 0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k_n}^n = T$ est un subdivision de [0 T] de pas tendant ver 0, on a la convergence en probabilité :*

$$lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{k_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \langle X, X\rangle_T.$$

Proposition 1.6.6 ***(Variation quadratique brownienne*** *) Sois $t > 0$ et $\{0 = t_0 < t_1 ... t_n = t\}$ une subdivision de[0,t], notons $v_B(t_0, t_1, ..., t_n) = \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$. Alors*

1. *$v_B(t_0, t_1, ..., t_n)$ converge dans L^2 vers t lorsque le pas de la subdivision $\delta := max_{0<i<n}(t_i - t_{i-1})$ tend vers 0.*
2. *De plus, si la subdivision est uniforme, la convergence est presque sure.*

Proposition 1.6.7 *Presque surement, les trajectoire du mouvement brownien sont a trajectoire a variation non bornées.*

7. Jean-François Le Gall,*Brownian Motion,Martingales,and Stochastic Calculus*.Orsay,France January 2016 .spring .P73

Démonstration : Il suffit de justifier la remarque générale suivante : si f est continue sur [0 1] et

$$lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}|f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})|^2 = a \in]0,+\infty[$$

alors $var(f,1)=\infty$. Pour cela, supposons que $var(f,1)<\infty$ et notons $\rho_f(u)=sup_{|x-y|<u}|f(x)-f(y)|$ le module de continuité de f. Alors

$$\sum_{k=0}^{n}|f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})|^2 \leqslant \rho_f(\frac{1}{n})\sum_{k=0}^{n}|f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})| \leqslant \ \rho_f(\frac{1}{n})\ var(f,1) \longrightarrow 0$$

quand $n\longrightarrow\infty$ puisque par continuité de f : $lim_{n\to\infty}\rho_f(\frac{1}{n})=0$. Il est donc nécessaire d'avoir $var(f,1)=\infty$.

Chapitre 2

Calcul stochastique

2.1 Intégrale de Riemann

Définition 2.1.1 *On appelle subdivision de l'intervalle [a,b] toute famille finie* $(x_i)_{i\in\{0,1,..,n\}}$ *des réels vérifiant les condition suivante :*

1. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ x_i \in [a, b]$.
2. $x_0 = a,\ x_n = b$.
3. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ x_{i-1} < x_i$.

Définition 2.1.2 *Soit f une application définie sur l'intervalle [a,b] l'application f est dit en escalier sur l'intervalle [a,b] si f est constante sur chaque intervalle* $]x_{i-1}, x_i[\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

construction[1]

Soit [a,b] un intervalle compact (ferme et borne) de $\mathbb{R}$, soit $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ un subdivision de l'intervalle [a,b], soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borne on définie les deux

1. Douglas S Kurtz,Charles W Swartz, *Theories of integration : the Integrals of Riemann,Lebesgue*,Henstoch-Kurzweil,and Mcshane.Series in real analysis-vol9. Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.2004.P35

fonctions en escalier :

$$M_i = sup_{x_{i-1}<x<x_i} f(x).$$

$$m_i = inf_{x_{i-1}<x<x_i} f(x).$$

On définie la somme de Darboux inférieur μ et supérieur L de cette subdivision par :

$$\mu(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Alors l'intégrale de f est définie par :

$$I_- = inf \mu(f, P).$$

$$I_+ = sup L(f, P).$$

Définition 2.1.3 ***(intégrale de Riemann)***
Une fonction bornée $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit intégrable au sens de Riemann si $I_+ = I_-$. on appelé alors ce nombre l'intégrale de Riemann de f sur [a,b] et on le ***note*** $\int_a^b f(x)dx$.

2.2 Intégrale de Riemann Stieltjes :

Définition 2.2.1 *soit $f : [a\ b] \longmapsto \mathbb{R}$ un fonction continue et $g : [a\ b] \longmapsto \mathbb{R}$ un fonction a variation bornée ,et soit $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, ...x_n = b\}$ une subdivision de intervalle [a b] ; $[x_{i-1}\ x_i] \subset [a\ b]$ $\forall i \in \overline{1, n}$ et $\forall t_i \in [x_{i-1}\ x_i]$;*
On définie ***la somme de Riemann Stieltjes*** *:*

$$S(f, g, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Si la limite de cette somme existe et borne on dit que l'intégral de f au sens se Riemann-Stieltjes R-S est sous la forme :

$$I = \int_a^b f(x)dg(x) = lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ [g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

si g(x)=x donc l'intégrale I est un intégrale de Riemann.

Proposition 2.2.2 ***(linéarité de l'intégrale de R-S)***

1- si $\int_a^b fdg_1$ *et* $\int_a^b fdg_2$ *existe on définie* $g = g_1 + g_2$*, donc f intégrable par rapport à g et on a :*

$$\int_a^b fdg = \int_a^b fdg_1 + \int_a^b fdg_2. \tag{2.1}$$

2- si $\int_a^b f_1 dget \int_a^b f_2 dg$ *existe, on définie* $f = f_1 + f_2$ *, donc f est intégrable par rapport à g et on :*

$$\int_a^b fdg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg. \tag{2.2}$$

3- si $\int_a^b f\ dg$ *existe et* $\alpha \in \mathbb{R}$*, donc* $\int_a^b \alpha f dg = \alpha \int_a^b fdg$

Remarque 2.2.3 *L'espérance mathématique s'ectrit*

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_\Omega xdP = \int_\mathbb{R} xdF(x) \\ &= \int_\mathbb{R} xP(x)dx \end{aligned}$$

Proposition 2.2.4 ***(Intégrale par partie)***

Si f intégrable par rapport a g dans intervalle [a,b], et g intégrale par apport a f dans l'intervalle [a,b] alors

$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_0^b g(x)df(x).$

2.3 Intégration d'Itô

Dans cette section,nous définissons l'intégrale stochastique par rapport a une (semi)martingale continue, en considérant d'abord l'intégrale des processus élémentaires puis en utilisant un argument d'isométrie entre espace de Hilbert ($L^2[s,t]$) pour passe au cas général.
Nous établissant ensuite la célébré formule d'Itô, qui est l'outil principal du calcule stochastique.

Définition 2.3.1 [2] *Soit* $s, t \in \mathbb{R}_+ (s < t)$ *et* $(H_t)_{t>0}$ *une famille croissante de sous tribus de* $\boldsymbol{F}$*, on définit* $H^2([s,t])$ *comme l'ensemble des fonctions* $f : [0, \infty[* \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les trois condition suivantes :*

2. Vincent.B, Philippe .B. *Équations différentielles stochastiques en dimension finie et infinie*.P3

1. $(t,\omega) \longrightarrow f(t,\omega)$ *est* $[0,\infty[*\boldsymbol{F}$*-mesurable.*

2. (B_t) *est un martingale relativement a* (H_t) *et le processus* $\omega \longrightarrow f(t,\omega)$ *est* $H_t - adapte.$

3. $E[\int_s^t f^2(t,\omega)dt] < \infty.$

on a toujours $\boldsymbol{F}_t \subset H_t$ *et dans la plupart des cas, on pourra prendre* $H_t = \boldsymbol{F}_t$ *pour définir les intégrales qui nous intéresse.on notera* $\phi(s,t)$ *plutôt que* $\phi \in H^2[s,t]$*.*

Définition 2.3.2 ***(les fonction élémentaires)***
une fonction $\phi \in H^2([s,t])$ *est dite élémentaire s'il existe une subdivision* $s = t_0 < t_1 < .. < t_n = t$ *et des fonction* $a_0, a_1, ..., a_{n-1} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}[}(t)$$

ou χ *est la fonction caractéristique d'intervalle.Ces fonctions élémentaires sont l'équivalent stochastique des fonctions étagées servant a définir l'intégrale de Lebesgue. On remarque que chacun des* a_j *est* $H_j - mesurable.$

construction [3]
Dans cette parties, nous allons essayer de donner un sens pour certain fonction, a l'expression : $\int_0^t f(s,\omega)dB_t(\omega)$.
On considéré un espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $\mathbf{F}_t$, (B_t) est un mouvement brownien adapte a cette filtration. la tribu prévisibles sur $\Omega * [0,\infty[$ la plus petite tribu rendant mesurable touts les processus continues adaptes a la filtration $\mathbf{F}_t$, un processus prévisible s'il est mesurable par rapport a cette tribu.
On définie alors les variables aléatoires de carre intégrable

$$L^2(dP) = \{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable \ telle \ que \ E[X^2] < \infty\}$$

et les processus stochastique de carre intégrable

$$L^2(dP * dt) = \{X : \Omega * [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable \ telle \ que \ E[\int_0^T f^2(.,t)dt] < \infty\}$$

3. Silvère.B , *Mouvent brownien et intégrale d'Itô*, CAOR - Centre de Robotique Unité Mathématiques et Systémes septembre 2012 .P34

ou $E[\int f^2 dt]$ est une intégrale double $\int_{\Omega*[0,T]} f^2(\omega,t)dPdt$. On défini alors un sous ensemble H^2 de $L^2(dP{*}dt)$ en imposant que les processus doivent adaptées, pour toute t de $[0,T] on a f(.,t) F_t-mesurable$. on pose

$$H^2 = H^2([0,T]) = \{f : \Omega * [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ adapte et mesurable telle que } E[\int_0^T f^2(.,t)dt] < \infty\}$$

Finalement on considère les sous-espace de H^2 constitue par les fonction élémentaires

$$H_0^2 = \{f \in H^2 / f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\chi_[t_i, t_{i+1}](t)\}$$

Nous allons maintenant définie l'intégrale sur H_0^2. On veut bien sur avoir $\int_u^v 1dB_t = B_v - B_u$. si l'on veut de plus que l'intégrale stochastique soit un opérateur linaire on poser pour $f \in H_0^2$:

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(\omega)$$

C'est une application qui associe a un élément de H_0^2 une variable aléatoire. On veut maintenant faire une extension à l'espace H^2 , pour cela nous devons savoir que $I : H_0^2 \longrightarrow H^2$ est une fonction continue. Le lemme suivant nous le donne.

Lemme 2.3.3 *(Isométrie d'Itô)*
pour $f \in H_0^2$ on a :

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP*dt)}.$$

L'isométrique d'Itô établi la continuité de I et préserve les distance de H_0^2 vers $L^2(dP)$, de plus toute suite de Cauchy dans H_0^2 est une suite se Cauchy dans $L(dP)$.

Démonstration :[4] $f \in H_0^2$;Posons, pour simplifier les notation, $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Alors, en utilisant l'indépendance de ΔB_i *et* ΔB_j pour $i < j$

$$E[a_i a_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0 & \text{si} i \neq j \\ E[a_i^2](t_{i+1} - t_i) & \text{si} i = j \end{cases}$$

4. Vincent. B, Philippe. B, *Équations différentielles stochastiques en dimension finie et infinie.* P3

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\|I(f)\|^2_{L^2(dP)} &= E[(\int_0^T f dB)^2] = E[[\sum_{i=0}^{n-1} a_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})]^2] \\ &= E[\sum_{i,j} a_i a_j \Delta B_i \Delta B_j] \\ &= \sum_i E[a_i^2](t_{i+1} - t_i) \\ &= E[\int_0^T f^2 dt] = \|f\|^2_{L^2(dP*dt)}\end{aligned}$$

alors $\|I(f)\|^2_{L^2(dP)} = \|f\|^2_{L^2(dP*dt)}$

Lemme 2.3.4 *(Densité de H_0^2 dans H^2)*
pour tout $f \in H^2$, il existe une suite $\{f_n\}$ avec $f_n \in H_0^2$ telle que :

$$\|f - f_n\|_{L^2_{(dP*dt)}} \longrightarrow 0$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$
On définit :

$$I(f) = lim_{n\longrightarrow\infty} I(f_n)$$

pour une suite $\{f_n \subset H_0^2\}$ qui converge vert $f \in L^2(dP * dt)$.

Définition 2.3.5 *Soit $f \in H^2$. On définit alors l'intégrale d'Itô par :*

$$\int_0^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T f_n(t,\omega)dB_t(\omega) \tag{2.3}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})[B(t_i) - B(t_{i-1})]. \tag{2.4}$$

ou la limite est prise dans $L^2(dP)$ et ou (f_n) est une suite de fonction élémentaires telle que

$$E[\int_0^T (f(t,\omega) - f_n(t,\omega))^2 dt] \longrightarrow_{n\longrightarrow\infty} 0 \tag{2.5}$$

Remarque 2.3.6 *intégrale par rapport à un mouvement brownien ne peut pas être interprétée comme une intégrale de Riemann ou de Lebesgue-Stieltjes, car la fonction d'échantillon d'un mouvement brownien est, avec la probabilité 1, de non bornée variation.*

2.3.1 L'intégrale d'Itô en dimension quelconque

On considère maintenant $(B_t^1, B_t^2, ..., B_t^n)$ un mouvement brownien en dimension n.et $v = [v_{ij}(t, \omega)]$ matrice de $(m * n)$ satisfait les condition suivante :

1. v_{ij} est $B^n * \mathbf{F}$-mesurable.
2. v_{ij} est $\mathbf{F}_t$-adapte.
3. $P[\int_0^T v_{ij}^2 ds < \infty \forall t > 0] = 1$

On définit alors l'intégrale de v par rapport la B comme étant le vecteur colonne de dimension m dont la i^{eme} composante est donnée par :

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^T v_{ij}(s, \omega) dB_j(s, \omega) \tag{2.6}$$

Théorème 2.3.7 *Si $f \in C$ et pour $\forall t \in [a, b]$: $X(t) = \int_a^t f(s)dB_s$, alors $(X_t)_{t\in[ab]}$ est un martingale par a pour à la filtration $\boldsymbol{F}_t = \sigma(B_t, t \geqslant 0)$.*

2.4 Intégrale de Stratonovich

L'intégrale de Stratonovich , développée par Ruslan L. Stratovovich et D.L Fisk, est une intégrale stochastique. Généralement l'intégrale d'Itô est la plus utilisée, malgré que parfois l'intégrale de Stratonovich est plus simple a utiliser.
Il est possible de passer d'une a l'autre en effectuant des changement de variables simple ce qui les rendent équivalentes.

Définition 2.4.1 *Soit $B = \{B_t, t > 0\}$ un semi martingale (def1.6.4) continue et $f(t) = F(t, X_t)$ un fonction différentiable continue. Intégrale de stratonovich de f(t) par rapport a B sur l' intervalle [0,T] définie par :*

$$\int_0^T f(t) \circledast dB(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f((t_{i-1} - t_i)/2)[B(t_{i-1}) - B_i]. \tag{2.7}$$

telle que $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < ..... < t_n = T\}$ une subdivision de l'intervalle.

Proposition 2.4.2 [5] *On suppose que* $X_t = X_0 + A_t + M_t, t \in [0,T]$ *une semi martingale, et* Y_t *un processus aléatoire continue adapte. nous avons donc :*

1. $\sum_i Y_i \Delta X_i \xrightarrow{P} \int_0^T Y_t dX_t, n \longrightarrow \infty$;
2. $\sum_i Y_i \Delta X_i^2 \xrightarrow{P} \int_0^T Y_t d\langle X\rangle_t, n \longrightarrow \infty$.

En particulier si $Y \equiv 1$ *on a*

$$\sum_i \Delta X_i^2 \xrightarrow{P} \langle X\rangle_t \ , n \longrightarrow \infty$$

Donc, le processus aléatoire $\langle X\rangle_t, \quad n \in [0T]$ *a variation quadratique .*

Corollaire 2.4.3 *Si* X_t *et* t *deux semi martingale, donc*

$$\sum_i \Delta X_i \Delta Y_i \xrightarrow{P} \langle X\rangle_T n \longrightarrow \infty$$

Preuve

$$\begin{aligned}\sum_i \Delta X_i \Delta Y_i &= \sum_i \frac{(\Delta X_i + \Delta Y_i)^2 - (\Delta X_i - \Delta Y_i)^2)}{4} \\ &= \sum_i \frac{(\Delta(X+Y)_i)^2 - (\Delta(X-Y)_i)^2}{4} \longrightarrow \frac{\langle X+Y\rangle_T - \langle X-Y\rangle_T}{4} \\ &= \langle X,Y\rangle_T \quad n \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

Proposition 2.4.4 *Soient* X Y *deux semi martingale continues, alors : intégrale d'Itô et de stratanovich sont égales.*

$$\int_0^T Y_t \circledast dX(t) = \int_0^T Y_t dX(t) + \frac{1}{2}\langle X,Y\rangle_T \tag{2.8}$$

Preuve :

D'après la propriété (2.4.2) et corollaire (2.4.3) on a :

$$\begin{aligned}lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_i \frac{Y_i + Y_{i+1}}{2}\Delta X_i &= lim_{n\longrightarrow\infty}[\sum_i Y_i \Delta X_i + \sum_i \frac{Y_{i+1} - Y_i}{2}\Delta X_i] \\ &= lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_i Y_i \Delta X_i + \frac{1}{2} lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_i \Delta Y_i \Delta X_i \\ &= \int_0^T Y_s dX_s + \frac{1}{2}\langle X,Y\rangle_T.\end{aligned}$$

5. Vigirdas.M,*Introduction to Stochastic Analysis :Integrals and Differential Equations*, ISTE Ltd and John Wiley and Sons, 2011.P 109

2.5 La Formule d'Itô

La formule d'Itô l'un des sujets les plus importants du mouvement brownien, cette formule est l'extension du calcul de différenciation et d'intégration du calculs stochastique .
Nous allons présenter un théorème dans lequel un processus stochastique $f(t, X(t)$ a une différentielle stochastique,à condition que X(t) ait un différentielle stochastique, nous expliquons d'abord une notation généralement utilisé.

Proposition 2.5.1 [6]*(Changement de variable)*
la formule de changement de variable, si f et g sont de classe C^1 alors :

$$(f \circ g)^{'}(T) = f^{'}(g(T))g^{'}(T). \tag{2.9}$$

s'écrit :

$$f(g(T)) = f(g(0)) + \int_0^T f^{'}(g(t))g^{'}(t)dt. \tag{2.10}$$

si $f \in C^1$ et g est seulement continue alors on à encore avec l'intégrale de Stieltjes :

$$f(g(T)) = f(g(0)) + \int_0^T f^{'}(g(t))dg(t). \tag{2.11}$$

la mémé formule reste vrai pour un processus X a variation finie(1.6.2) en faisant un calcule trajectoriel, le cas précédent s'applique.
pour une fonction $f \in C^1$ on a alors :

$$f(X_T) = f(X_0) + \int_0^T f(X_t)dX_t. \tag{2.12}$$

La formule d'Itô généralise cette propriété pour des semi martingales(1.6.4) lorsque F est C^2 et fait apparaitre un terme supplémentaire du au fait que ces processus ne sont pas a variation finie.

Théorème 2.5.2 [7] *(Formule d'Itô)*
Soient X une semi martingale et $f : [0\ T] * \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{1,2}$. Alors

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X, X\rangle_t. \tag{2.13}$$

6. Jean-Chiristophe. B, *processus stochastiques M2*,cour Université de Rennes1,2017, P 149
7. Zhang.j,*Backward stochastic differential equations : from linear to fully nonlinear theory* , Springer 2017, P33

Proposition 2.5.3 *(formule d'Itô multidimensionnelle)*
Si on considère $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 alors :

$$f(X_T^1, ..., X_T^n) = f(X_0^1, ..., X_0^n) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t^1, ..., X_t^n) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(X_t) d\langle X_i, X_j \rangle_t. \tag{2.14}$$

Démonstration :[8] On traite le cas n=1, on considérons une suite $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < ..... < t_n^n = t\}$ est un subdivision de [0 t] , on peut écrire

$$f(X_T) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{n-1} (f(X_{t_i^n}) - f(X_{t_{i-1}^n})), \tag{2.15}$$

par un développement de Taylor , on a

$$f(y) - f(x) = f^{'}(x)(y - x) + \frac{1}{2} f^{''}(x)(y - x)^2 + o((y - x)^2), \tag{2.16}$$

Où $lim_{h \longrightarrow 0} \frac{o((y-x)^2)}{h^2} = 0$ (h=y-x).Donc d'après l'équation (2.15) :

$$f(X_T) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{n} (f^{'}(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) + \frac{1}{2} f^{''}(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 + o((X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2)), \tag{2.17}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f^{'}(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^{''}(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 + 0, \tag{2.18}$$

$n \longrightarrow +\infty$

$$lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} f^{'}(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) + \frac{1}{2} lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} f^{''}(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \tag{2.19}$$

d'âpre la définition (2.3.5) on a que :

$$f(X_T) - f(X_0) = \int_0^T f^{'}(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(X_t) d\langle X \rangle_t. \tag{2.20}$$

ce qui permet de conclure, vu que $\langle X \rangle_t = t$,

Remarque 2.5.4 *Cette démonstration évite un très grand nombre de détails techniques concernant la convergence des divers termes. Notamment, il faut choisir les points $X_{t_{i-1}^n}$ (et non $X_{t_i^n}$ ou autre chose) pour le développement de Taylor.*

8. Léveque.O, *cour de probabilites et calcul stochastique* ,EPFL Semester d'hiver 2004-2005 . P51

Chapitre 3

Méthode de linéarisation de l'équation différentielle stochastique

3.1 Équation différentielle stochastique

3.1.1 Introduction

Les problèmes non linéaires intéressent de nombreux scientifiques et ingénieurs, car la plupart des systèmes physiques du monde réel sont par nature non linéaires. De nombreuses équations différentielles non linéaires apparaissent dans des contextes physiques, chimiques et biologiques. Trouver des méthodes classique pour résoudre et analyser ces équations a été un sujet intéressant dans le domaine des équations et systèmes dynamiques.

3.1.2 Existence et Unicité

Définition 3.1.1 *On considère $Y = (Y_t)_{t\in[0T]}$ un processus a valeur dans $\mathbb{R}$. .Nous prouvons alors considéré un system d'équation non linéaire :*

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dB_t, \tag{3.1}$$

ou $a(t, Y_t)$ est un coefficient non linéaire, $b(t, Y_t)$ est aussi un coefficient non linéaire. $B = (B_t)$ bruit blanc gaussien. Les hypothèses d'un théorème d'existence et d'unicité sont généralement des conditions suffisantes, mais non nécessaires, pour assurer la conclusion du théorème. Peut-on obtenir des théorèmes d'existence et d'unicité pour de telles équations ? Quelles sont les propriétés des solutions ?

Proposition 3.1.2 [1] *(Itô) Soit l'équation différentielle stochastique suivante*

$$dY_t = a(t, Y_t))dt + b(t, Y_t)dB_t, \quad Y_0 = y_0. \tag{3.2}$$

Alors il existe une constante C> 0 et $\varepsilon > 0$ telle que

1 : le condition de Lipschitz

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C\sqrt{|x - y|}, \quad t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

2 : le condition de décroissance linéaire

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + \sqrt{|x|}), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Alors l'équation différentielle stochastique (3.2) admet une solution unique Y_t à valeur dans $\mathbb{R}$, continue presque surement et satisfait la condition initiale $Y_0 = y_0$.
l'unicité est dans le sens que si X_t et Y_t sont deux solution continues presque surement telle que $Y_t = X_t$, alors

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t| > 0\right] = 0$$

1. Alexander S. Cherny Hans-Jurgen Engelbert, *Singular Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005. P 17

Proposition 3.1.3 [2] *(Stroock, Varadhan). Soit l'équation différentielle stochastique suivante*

$$dY_t^i = a^i\left(t, Y_t\right) dt + \sum_{j=1}^{m} b^{ij}\left(t, Y_t\right) dB_t^j, \quad Y_0 = y_0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

le coefficient a est mesurable et borné, le coefficient b est continu et borné, et pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $\varepsilon(t,x) > 0$ tel que

$$\|b(t,x)\lambda\| \geq \varepsilon(t,x)\|\lambda\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Et qu'il existe une solution de l'équation qui est unique en loi , c'est à dire solution faible.

Remarque 3.1.4 [3]

1- *on peut remplace la condition de Lipschitz global par une condition local :*
$\forall N > 0, \exists K_N > 0$ *tel que* $\forall t \in [0,T], \forall x, y \in \mathbb{R}^d, |x| < N, |y| < N$:

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K_{|N}|x - y| \tag{3.7}$$

2- *Pour la condition de Lipschitz soit satisfaite, il suffit que $a(t,Y)$ et $b(t,y)$ admettent des dérivées partielles continues et bornées pour tout $t \in [0,T]$.*

3- *Dans le cas d'un équation différentielle stochastique autonome c'est a dire $a(t,x) = a(x)$ et $b(t,x) = b(x)$, la condition de restriction sur la croissance est conséquence de la condition Lipschitz.*

2. Alexander. S, *Cherny Hans-Jurgen Engelbert,Singular Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.P 19

3. Rebiha Zeghdane, *Dynamique de structures soumises à des sollicitations aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique,des equations différentielles stochastiques*,Thèse de doctorat ;université de Sétif, soutenu le 12/04/2014. P 15

3.2 La résolution des EDS non linéaire

Un méthode classique pour la recherche des solutions approximatives du système non linéaires est basée sur des techniques de linéarisation :" linéarisation statistique " .
Cette méthode consiste a remplacer l'équation non linéaire par une équation linéaire.

3.2.1 La linéarisation statistique EDS non linéaire et uni-dimensionnelle

Proposition 3.2.1 [4] *Soit l'équation EDS non linéaire suivante :*

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dB_t \tag{3.8}$$

On peut écrire l'équation [3.8] sous forme d'une EDS linéaire d'après la méthode de linéarisation et on trouve la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dB_t \\ avec\ X_t = u(t, Y_t). \end{cases} \tag{3.9}$$

où encore

$$\begin{cases} a(t, Y_t) = a_1(t)u(t, Y_t) + a_2(t) \\ b(t, Y_t) = b_1(t)u(t, Y_t) + b_2(t). \end{cases}$$

Si $\frac{\partial u}{\partial y}(t, y_t) \neq 0$, *d'après le théorème d'inverse[(3.2.2] il existe un inverse locale* $y = v(t, x)$ *et* $x = u(t, y)$,*et la solution* Y_t *est de la forme* $Y_t = v(t, u(t, X_t)$.

Théorème 3.2.2 ***(Théorème d'inverse local)***[5] *Soit* Ω *est un ouverte de* E *et*

$$f : \Omega \longmapsto E.$$

$$\omega \longmapsto x = f(\omega)$$

une fonction de classe C^1 *(continue et différentiable).*
Soit $\omega_0 \in \Omega$, $x_0 = f(\omega_0)$. *Supposons que* $df(x_0)$ *(c-à-d* $df(\omega_0) \neq 0$*) alors, il existe un voisinage* $U(\omega_0)$ *de* x_0 *et un voisinage* $V(x_0)$ *de* x_0 *tel que la restriction de* f *à* $U(\omega_0)$ *soit une bijection de* $U(\omega_0)$ *sur* $V(x_0)$ *.*
En autre, la réciproque

$$f^{-1} : V(x_0) \to U(\omega_0).$$

4. Kloeden.E and Eckhard P, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer 1995. P 148
5. Lesfari.A, calcule différentiel, cour Université Chouaïb Doukkali Maroc P24

f^{-1} est de classe C^1 (si f est de classe $C^k, k \in N^*$, alors f^{-1} est également de classe C^k).

Remarque 3.2.3 *ce théorème signifie qu'une fonction est inversible au voisinage d'un point en lequel sa réciproque est aussi inversible.*

On doit définir les condition de $u(t, Y_t)$?

L'application de la formule d'Itô de $u(t, Y_t)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} dX_t &= du(t, Y_t), \qquad (3.10) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t)dy + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, Y_t)dtdt + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t, Y_t)dtdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, Y_t)dydy] \end{aligned}$$

Remarque 3.2.4 *Si Y_t est un processus d'Itô a valeur dans $\mathbb{R}$, on peut définir une règle de calcul formelle pour $d < Y, Y >_t$ par les règles suivantes :*

$$d < Y, Y >_t = dY_t dY_t,$$

$$dtdt = 0,$$

$$dB_t dB_t = dt.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} d < Y, Y >_t &= dY_t dY_t \\ &= (a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dB_t)(a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dB_t) \\ &= b^2(t, Y_t)dt. \end{aligned}$$

En remplacent dY_t par son expression (3.8) on trouve :

$$dX_t = [\frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) + a(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}b^2(t, Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, Y_t)]dt + b(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t)dB_t \qquad (3.11)$$

$X_t = u(t, Y_t)$ est la solution approximative de l'équation [3.8], alors on identifie l'équation [3.9] à l'équation [3.11] on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) + a(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}b^2(t, Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, Y_t) = a_1(t)X_t + a_2(t) \\ b(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) = b_1(t)X_t + b_2(t). \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + a(t,Y_t)\dfrac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \dfrac{1}{2}b^2(t,Y_t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = a_1(t)u(t,Y_t) + a_2(t) & (3.12) \\ b(t,Y_t)\dfrac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t). & (3.13) \end{cases}$$

Proposition 3.2.5 *(les caractéristiques de l'EDS linéaire)*

- *l'EDS linéaire est* ***autonome*** *si tout les coefficients* $a_1(t), a_2(t), b_1(t),$ *et* $b_2(t)$ *sont des constantes.*
- *l'EDS linéaire est* ***homogène*** *si* $a_2(t) = 0$ *et* $b_2(t) = 0$.
- *l'EDS linéaire est* ***au sens étroite*** *(ou un bruit additif) si* $b_1(t) = 0$ *et a un bruit multiplicatif si* $b_2(t) = 0$.

Nous allons trouve la forme $X_t = u(t, Y_t)$ en fonction de (3.9).

Les Types de solution :

- Sous certaines conditions de régularité sur a et b la solution des EDS :

$$dY_t = a(t,Y_t)dt + b(t,Y_t)dB_t$$

  est un processus de diffusion.
- une solution est forte si elle est valable pour chaque processus de Wiener donné (et à valeur initiale)
- un processus de diffusion , dont la densité de transition satisfait l'équation de Fooker-Plank, comme solution de l'EDS.
- une solution est une solution faible si elle est valable pour des coefficients données , mais non spécifiée pour le processus de Wiener, c'est-à-dire que sa loi de probabilité est unique.

1 : **la Recherche des conditions de réductibilité l'EDS non linéaire a un EDS linéaire**

Soient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = a_1(t)u(t,Y_t) + a_2(t). & (3.14) \\ b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t). & (3.15) \end{cases}$$

On dérive équation (3.14) par rapport à y et on écrit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}(t,Y_t) &= \frac{\partial}{\partial y}[a_1(t)u(t,Y_t) + a_2(t) - a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)], \\ &= a_1\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - \frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - a(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t), \\ &- \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) - b(t,Y_t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}(t,Y_t) &= (a_1(t) - \frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t))\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - (a(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) \\ &- \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

ou dérive aussi d'équation (3.15) par rapport à t et on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)) = \frac{\partial}{\partial t}(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t))$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t) = b_1'(t)u(t,Y_t) + b_2'(t) + b_1(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)$$

$$\Longrightarrow b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t) = b_1'(t)u(t,Y_t) + b_2'(t) + b_1(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) - \frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) \tag{3.17}$$

On dérive aussi l'équation (3.15) par rapport à y et on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) &= \frac{\partial}{\partial y}(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t)). \\ \Longrightarrow \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) &= b_1(t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) \\ \Longrightarrow b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) &= (b_1(t) - \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t). \end{aligned} \tag{3.18}$$

On a d'après l'équation (3.15) :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)=\frac{1}{b(t,Y_t)}(b_1(t)u(t,Y_t)+b_2(t)) \qquad (3.19)}$$

On introduit l'équation (3.15) dans l'équation (3.18) on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) &= \frac{1}{b(t,Y_t)}[(b_1(t)-\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)],\\ &= \frac{1}{b(t,Y_t)}[((b_1(t)-\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))\frac{1}{b(t,Y_t)}(b_1(t)u(t,Y_t)+b_2(t)).\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)=\frac{1}{b^2(t,Y_t)}(b_1(t)-\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))(b_1(t)u(t,Y_t)+b_2(t)). \quad (3.20)}$$

d'après l'équation (3.14)) on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)=-a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)-\frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)a_1(t)u(t,Y_t)+a_2(t).$$

on introduit les equation (3.19) et (3.20) dans l'équation précédente equation et on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) = -a(t,Y_t)[\frac{1}{b(t,Y_t)}(b_1(t)u(t,Y_t)+b_2(t))] - \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)[\frac{1}{b^2(t,Y_t)}(b_1(t)\\ -\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))(b_1(t)u(t,Y_t)+b_2(t))]+a_1(t)u(t,Y_t)+a_2(t).\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) = (b_1u(t,Y_t)+b_2(t))[-\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}-\frac{1}{2}(b_1(t)-\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))]+a_1(t)u(t,Y_t)+a_2(t). \quad (3.21)}$$

on introduit les equation (3.17), (3.19), (3.20) dans l'équation (3.16) :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}(t,Y_t) + (\frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t) - a_1(t))\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) \\
&+ (a(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t), \\
&= \frac{1}{b(t,Y_t)}[b_1^{'}(t)u(t,Y_t) + b_2^{'}(t) + b_1(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) \\
&- \frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)\frac{1}{b(t,Y_t)}(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t))] \\
&+ (\frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t) - a_1(t))(\frac{1}{b(t,Y_t)}(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t)) + (a(t,Y_t) \\
&+ b(t,Y_t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))\frac{1}{b^2(t,Y_t)}(b_1(t) - \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t)).
\end{aligned}$$

En partant de l'équation (3.21),on a donc trouvé :

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) = &-\frac{2}{b^2(t,Y_t)}[\frac{1}{b(t,Y_t)}(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t)) + \frac{b_1(t)}{b(t,Y_t)}\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) \\
&+ (-\frac{1}{b(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t) - \\
&a_1(t) + \frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t))(\frac{1}{b(t,Y_t)})(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t)) \\
&+ (a(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial \partial b}{\partial y}(t,Y_t))(\frac{1}{b^2(t,Y_t)}(b_1(t) \\
&- \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))(b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t)]
\end{aligned}}$$

Remarque 3.2.6 *:*

- *Le changement de variable utilisée par la méthode de linéarisation pour la réductibilité certainne EDS non linéaire a une EDS linéaire.*

Résultat : les caractéristique de $X_t = u(t,Y_t)$

$$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

1- u continue dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

2- u vérifie les condition de Cauchy Schwartz $u \in C^2(\mathbb{R})$

3- u est de classe $C^3(\mathbb{R})$.

2 : **Recherche de la formule de** $u(t, Y_t)$ **:**

On suppose $X_t = u(t, Y_t)$, l'équation (3.14) et (3.15) en ecrire sous forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) + a(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}b^2(t, Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, Y_t) = a_1(t)u(t, Y_t) + a_2(t). \\ b(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) = b_1(t)u(t, Y_t) + b_2(t). \end{cases}$$

Dans ce cas on suppose que $b(t, y) \neq 0$ et $b_1 \neq 0$. D'âpre l'équation(3.15) (un equation différentielle ordinaire) la solution de cette equation est :

$$u(t, Y_t) = -C\frac{b_2(t)}{b_1(t)}exp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t, z)}dz) - \frac{b_2(t)}{b_1(t)}. \tag{3.22}$$

Démonstration 1 *d'âpres l'équation(3.15) on a :*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) - \frac{b_1(t)}{b(t, y)}u(t, Y_t) = \frac{b_2(t)}{b(t, y)}.$$

en recherche la solution homogène de cette equation *,*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) - \frac{b_1(t)}{b(y)}u(t, Y_t) = 0. \\ &\Longrightarrow \frac{u'}{u} = \frac{b_1(t)}{b(y)} \\ &\Longrightarrow ln(\frac{u(t, Y_t)}{u(0, Y_0)}) = \int_0^y \frac{b_1(t)}{b(t, z)}dz \\ &\Longrightarrow \begin{cases} u(t, Y_t) = Cexp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz). \\ u(0, Y_0) = C. \end{cases} \end{aligned}$$

On ***varias le constante*** *C=C(y) donc u s'écrire sous la forme :*

$$u(t, Y_t) = C(y)exp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t, z)}dz) \tag{3.23}$$

la dérivée de cette équation par rapport à y est :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) = C'(y)exp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t, z)}dz) + C(y)\frac{b_1(t)}{b(t, y)}exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t, z)}dz) \tag{3.24}$$

Alors

$$\begin{aligned} C^{'}(y)exp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t, z)}dz) + C(y)\frac{b_1(t)}{b(t, y)}exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t, z)}dz) \\ -C(y)\frac{b_1(t)}{b(t,)}exp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t, z)}dz) = \frac{b_2(t)}{b(t, y)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow C^{'}(y) = \frac{b_2(t)}{b(t,y)} exp(-b_1(t) \int_0^y \frac{1}{b(t,z)} dz)$$
$$\Longrightarrow C(y) = -\frac{b_2(t)}{b_1(t)} \int_0^y [-\frac{b_1(t)}{b(t,z)} exp(-b_1(t) \int_0^y \frac{1}{b(t,z)} dz)] dz$$
$$\Longrightarrow C(y) = -\frac{b_2(t)}{b_1(t)} [exp(-b_1(t) \int_0^y \frac{1}{b(t,z)} dz) + C]$$
$$\Longrightarrow C(y) = -\frac{b_2(t)}{b_1(t)} exp(-b_1(t) \int_0^y \frac{1}{b(t,z)} dz) - C\frac{b_2(t)}{b_1(t)}.$$

la solution générale de l'équation est :

$$u(t,Y_t) = -\frac{b_2(t)}{b_1(t)} [exp(-b_1(t) \int_0^y \frac{1}{b(t,z)} dz) + c][exp(b_1(t) \int_0^y \frac{1}{b(t,z)} dz)]$$
$$\Longrightarrow u(t,Y_t) = -C\frac{b_2(t)}{b_1(t)} exp(b_1(t) \int_0^y \frac{1}{b(t,z)} dz) - \frac{b_2(t)}{b_1(t)}.$$

3 : **La recherche des coefficient d'EDS linaire :**

Pour trouve les coefficients d'équation linaire en va faire un étude des cas :

► 1^{ere} ***cas***

si tout les coefficients $a_1(t), a_2(t), b_1(t),$ **et** $b_2(t)$ **sont des constantes :**

dans ce cas on écrire les deux equation (3.14) et (3.15) sous forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = a_1 u(t,Y_t) + a_2. & (3.25) \\ b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = b_1 u(t,Y_t) + b_2. & (3.26) \end{cases}$$

Premièrement en résoudre la solution générale d'équation (3.26) prise en compte des condition sur les coefficients, ensuite, nous allons compenser la valeur de $u(t, Y_t)$ dans l'équation (3.25) pour trouve les coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$.

La solution générale d'équation (3.26) *est* :

$$u(t,Y_t) = -C\frac{b_2}{b_1}exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz) - \frac{b_2}{b_1}. \tag{3.27}$$

D'après le calcule des dérive partielle par rapport a t et par apport a y on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Cb_2\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz)]exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz).$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -C\frac{b_2}{b(t,Y_t)}exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C\frac{b_2}{b^2(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz - C\frac{b_2}{b^2(t,Y_t)}b_1 exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz.$$

Alors après l'équation (3.25) trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = a_1 u(t,Y_t) + a_2.$$
$$\Longrightarrow - Cb_2 exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz)[\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz] + \frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}b_1 - \frac{a_1}{b_1}]$$
$$= -\frac{a_1}{b_1}b_2 + a_2.$$

(*pour réduire le nombre de variable*)On dérive cette equation par rapport a y :

$$- Cb_2 exp(b_1\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz)[\frac{\partial}{\partial y\partial t}\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz) + \frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)$$
$$+ \frac{b_1}{b(t,Y_t)}\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz] + b_1\frac{a(t,Y_t)}{b^2(t,Y_t)} - \frac{b_1}{b(t,Y_t)}\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\frac{b_1^2}{b(t,Y_t)} - \frac{a_1}{b(t,Y_t)}]] = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y\partial t}(\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz) + \frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)$$
$$+ \frac{b_1}{b(t,Y_t)}\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz] + b_1\frac{a(t,Y_t)}{b^2(t,Y_t)} - \frac{b_1}{b(t,Y_t)}\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\frac{b_1^2}{b(t,Y_t)} - \frac{a_1}{b(t,Y_t)} = 0 \tag{3.28}$$

on écrire cette égalité sous forme :

$$\begin{cases} [b_1 A(t,y) + \frac{1}{2}b_1^2 + B(t,y) - a_1] = 0. \\ A(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz] - \frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t). \\ B(t,y) = b(t,Y_t)\frac{\partial}{\partial y\partial t}(\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz) + b(t,Y_t)\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}] - b(t,Y_t)\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t). \end{cases} \tag{3.29}$$

On dérive cette equation par rapport à y on obtient alors :

Si $\frac{\partial A}{\partial y}(t,y) \neq 0$ on à :

$$b_1 = -\frac{\frac{\partial B(t,y)}{\partial y}}{\frac{\partial A(t,y)}{\partial y}}$$

donc

- **Si** $b_1(t) \neq 0 \Rightarrow u(t,y_t) = -C\frac{b_2(t)}{b_1(t)}exp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(z)}dz) - \frac{b_2(t)}{b_1(t)}$.
- **Si** $b_1(t) = 0 \Rightarrow u(t,y_t) = b_2(t)(\int_0^y \frac{1}{b(z)}dz) + C$.

Alors la forme de constante a_1 d'âpre l'équation (3.29) est :

$$\mathbf{a}_1 = b_1 A(t,y) + \frac{1}{2}b_1^2 + B(t,y).$$

Remarque 3.2.7 .

- *Nous allons obtenir la valeur de la seconde constante b_2 à partir de la première valeur de la constante b_1 pour compense la première dans l'équation (3.26) et la correspondance.*
- *De même pour obtenir la valeur de la constante a_2 on obtenir à partir de remplace compense a_1 dans l'équation (3.25) et la correspondance.*

Exemple 3.2.8 *On a l'EDS de la forme :*

$$dY_t = \frac{1}{2}exp(-2Y_t)dt + exp(-Y_t)dB_t,$$

1 On faire un changement de variable de la forme $X_t = u(Y_t)$

2 on calcule $A(y)$:

$$A(y) = -\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{db}{dy}(y) = 0$$

3 la formule de u est :

$$u(y) = b_2(t)(\int_0^y \frac{1}{b(z)}dz) + C.$$

4 $b_2(t) = C = 1$ et $a_1(t) = a_2(t) = 0$,

alors $dX_t = dB_t$, la solution de l'EDS non linéaire est :

$$Y_t = ln[B_t + exp(Y_0)].$$

▶ 2^{eme} ***cas***

si $a_2(t) = 0$ **et** $b_2(t) = 0$,

d'après les condition l'équation (3.14) et (3.15) écrire sous forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = a_1(t)u(t,Y_t). & (3.30) \\ b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = b_1(t)u(t,Y_t). & (3.31) \end{cases}$$

On recherche la valeur de $b_1(t)$ et de $a_1(t)$ de la même manière utilisé dans la première cas ;

La solution générale d'équation (3.31) est :

$$u(t,Y_t) = Cexp\Big(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz\Big),$$

(*pour réduire le nombre de variable*) ; en dérive le $u(t,Y_t)$ par rapport a t et y :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) = Cexp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz)[b_1'[\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz] + b_1(t)\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz]].$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = Cexp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz)[\frac{b_1(t)}{b(t,Y_t)}].$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = Cexp(b_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz)[(\frac{b_1(t)}{b(t,Y_t)})^2 - b_1(t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{1}{b^2(t,Y_t)}].$$

Nous compenser ces valeur dans l'équation (3.30) nous obtenir :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)+a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)+\frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)=a_1(t)u(t,Y_t).$$

$$\Longrightarrow Cexp(b_1(t)\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)[b_1^{'}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz]+b_1(t)\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)+b_1(t)\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}+\frac{1}{2}b_1^2(t)$$
$$-\frac{1}{2}b_1(t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)]=a_1(t)Cexp(b_1(t)\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz),$$

(on a le terme $Cexp(b_1(t)\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)>0)$ alors :

$$b_1^{'}(t)[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz]+b_1(t)\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)+b_1(t)\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}+\frac{1}{2}b_1^2(t)-\frac{1}{2}b_1(t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)-a_1(t)=0.$$

en dérive par rapport a y (pour réduire le coefficient $a_1(t)$) on va trouve :

$$b_1^{'}(t)\frac{\partial}{\partial y}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz]+b_1(t)\frac{\partial}{\partial y\partial t}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)+b_1(t)\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}-\frac{1}{2}b_1(t)\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)]=0$$
$$\Longrightarrow\frac{b_1^{'}(t)}{b_1(t)}=-\frac{1}{\frac{\partial}{\partial y}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz]}[\frac{\partial}{\partial y\partial t}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)+\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)]$$

On pose

$$K(t,Y_t)=-\frac{1}{\frac{\partial}{\partial y}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz]}[\frac{\partial}{\partial y\partial t}(\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)})-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)].$$

Alors

$$b_1(t)=Cexp(\int_0^t K(t,Y_t)).$$

est $a_1(t)$ est un valeur de forme :

$$a_1(t)=b_1^{'}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz]+b_1(t)\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y\frac{1}{b(t,z)}dz)b_1(t)\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}+\frac{1}{2}b_1^2(t)-\frac{1}{2}b_1(t)\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t).$$

▶ 3^{eme} ***cas***

dans ce cas on pose que $b_1=0$ et $a_1=0$ alors en écrire le système sous forme

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)+a(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)+\frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)=a_2(t). & (3.32)\\ b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)=b_2(t). & (3.33)\end{cases}$$

en dérive l'équation (3.33) par rapport à t et y :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}[b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)] = \frac{\partial}{\partial y}[b_2(t)] \Leftrightarrow \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = 0. & (3.34) \\ \frac{\partial}{\partial t}[b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)] = \frac{\partial}{\partial t}[b_2(t)] \Leftrightarrow \frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t) = b'(t) & (3.35) \end{cases}$$

en dérive aussi l'équation (3.32) par rapport à y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} &= -\frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - a(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) - \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) \\ &- b(t,Y_t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) \end{aligned} \tag{3.36}$$

d'après l'équation (3.35)

$$\begin{aligned} b'(t) &= \frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t) \\ &= b(t,Y_t)[\frac{1}{b(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t)] \\ &= b(t,Y_t)[\frac{1}{b(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - \frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - a(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) \\ &- \frac{1}{2}b^2(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) - b(t,Y_t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) \end{aligned}$$

d'après les deux equation (3.33) et (3.34) on a :

$$\begin{aligned} b'(t) &= b(t,Y_t)[\frac{1}{b^2(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t)b_1(t) - \frac{1}{b(t,Y_t)}\frac{\partial a}{\partial y}(t,Y_t)b_1(t) + \frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) \\ &- \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - \frac{1}{2}b^3(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)] \\ &= b_1(t)b(t,Y_t)[\frac{1}{b^2(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t) - \frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}] + \frac{1}{b(t,Y_t)}(\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))^2 - \frac{1}{2}\frac{b^2(t,Y_t)}{b_1(t)}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t)] \end{aligned} \tag{3.37}$$

On à d'âpre l'équation (3.34) on à :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)] = 0 \\ \Longrightarrow &\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + 2\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) = 0 \\ \Longrightarrow &b(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) = -\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - 2\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b(t,Y_t)}(\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))^2 - \frac{1}{2}\frac{b^2(t,Y_t)}{b_1(t)}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) &= \frac{1}{2}\frac{b(t,Y_t)}{b_1(t)}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) \\
&+ \frac{b(t,Y_t)}{b_1(t)}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) + \frac{1}{b(t,Y_t)}(\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t) + \frac{1}{b_1(t)}\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)(-\frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)) \\
&+ \frac{1}{b_1(t)}(\frac{\partial b}{\partial y})(t,Y_t))^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t).
\end{aligned}$$

en remplace cette valeur à l'équation

$$b_1'(t) = b_1(t)b(t,Y_t)[\frac{1}{b^2(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t) - \frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)].$$

on suppose que

$$\gamma(t,Y_t) = [\frac{1}{b(t,Y_t)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,Y_t) - b(t,Y_t)\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a(t,Y_t)}{b(t,Y_t)}] + \frac{b(t,Y_t)}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,Y_t)]$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{b_1'(t)}{b_1(t)} &= \gamma(t,Y_t) \\
\Longrightarrow ln(\frac{b_1(t)}{b_1(0)}) &= \int_0^t \gamma(s,Y_s)ds. \\
\Longrightarrow b_1(t) &= Cexp(\int_0^t \gamma(s,Y_s)ds).
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b_1(t)\frac{1}{b(t,Y_t)} \Longrightarrow u(t,Y_t) = b_1(t)(\int_0^y \frac{1}{b(t,z_t)}dz).$$

Remarque 3.2.9 *On remplace $u(t,Y_t)$ dans l'équation (3.32) est on trouve la valeur de $a_1(t)$.*

3.3 ÉTUDE DE CAS

Remarque 3.3.1 .

- *on a :*

$$\begin{aligned} cos(2x) &= cos^2(x) - sin^2(x), \\ &= 2cos^2(x) - 1, \\ &= 1 - 2sin^2(x) = \frac{1 - tan^2(x)}{1 + tan^2(x)}. \end{aligned}$$

- $sin(2x) = 2cos(x)sin(x)$
- $tan(2x) = \dfrac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)}$

On définie un equation différentielle stochastique non linéaire :

$$dY_t = -(sin(2Y_t) + \frac{1}{4}sin(4Y_t))dt + (\sqrt{2} * cos^2(x))dB_t.$$

on linéarisé cette equation au forme :

$$\begin{cases} dX_t = (a_1X_t + a_2)dt + (b_1X_t + b_2)dt. \\ X_t = u(Y_t). \end{cases}$$

telle que les coefficients a_1, a_2, b_1 *et* b_2 sont des constante.

D'âpre les conditions de la première cas on a :

1- On calcule la valeur $A(Y_t)$:

$$\begin{aligned}
A(Y_t) &= \frac{a(Y_t)}{b(Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(Y_t),\\
&= \frac{(sin(2Y_t) + \frac{1}{4}sin(4Y_t))}{(\sqrt{2}cos^2(x))} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[\sqrt{2}cos^2(x))],\\
&= \frac{(sin(2Y_t) + \frac{1}{4}sin(4Y_t))}{(\sqrt{2}cos^2(Y_t))} - \frac{1}{2}(-2cos(Y_t)sin(Y_t)),\\
&= \frac{sin(2Y_t)}{\sqrt{2}cos^2(Y_t)}[-\frac{1}{cos(Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{cos(2Y_t)}{cos(Y_t)} + cos(Y_t)],\\
&= \frac{sin(2Y_t)}{\sqrt{2}cos^2(Y_t)}[-\frac{1}{cos(Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{1)}{cos(Y_t)} - cos(Y_t) + cos(Y_t)],\\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{cos(Y_t)sin(Y_t)}{cos(Y_t)}[\frac{1}{2cos(Y_t)}],\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}tan(Y_t).
\end{aligned}$$

2- On calcule le valeur de b_1 :

$$\frac{\partial A}{\partial y}(Y_t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{cos^2(Y_t)},$$

alors

$$b_1 = -\frac{\frac{\partial B(t,y)}{\partial y}}{\frac{\partial A(t,y)}{\partial y}},$$

comme on a dans ce cas $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$;

$$\begin{aligned}
B(Y_t) &= b(Y_t)\frac{\partial A}{\partial y}(Y_t) = 0,\\
&\Longrightarrow b_1 = 0.
\end{aligned}$$

3- On recherche les valeurs de a_1 et a_2 ; d'apre l'équation (3.14) on a :

$$[-sin(2X_t) - \frac{1}{2}sin(2X_t)cos(2X_t)]\frac{1}{\sqrt{2}X_t} + \frac{1}{2}2cos^4(X_t)\frac{1 + cos(X_t)sin(X_t)}{cos^4(X_t)}$$

$$\frac{sin(X_t)}{\sqrt{2}cos(X_t)}[-2\frac{-2}{2}cos(2X_t)\frac{cos(X_t)}{cos(X_t)}] + 2cos^2(X_t)]$$

$$= u(X_t)[-2 + 2cos^2(X_t) - 2cos^2(X_t) + 1]$$

$$= -u(X_t)$$

$$\Longrightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 0.$$

Alors l'EDS linéaire à coefficients constantes non homogène est :

$$dX_t = -X_t dt + dB_t.$$

la solution de EDS est :

$$X_t = exp(-t)[X_0 + \int_0^t exp(s)dB_s] \tag{3.38}$$

On a

$$\begin{aligned} u(Y_t) = X_t \Longleftrightarrow X_t &= \frac{1}{\sqrt{2}} tan(Y_t). \text{ (solution approché)} \\ \Longrightarrow Y_t &= arctan(\sqrt{2} * X_t). \text{ (solution exacte)} \end{aligned}$$

3.4 simulation

Logiciel R

Le logiciel **R** est un logiciel de statistique créé par Ross Ihaka & Robert Gentelmann. Il est à la fois un langage informatique et un environnement de travail : les commandes sont exécutées grâce à des instruction codées dans un langage relativement simple , résultats sont affichés sous forme de texte et las graphique sont visualisée directement dans une fenêtre qui leur est propre.

Quelque fonctions utiles :

- **rnorm**(p, sd) : p variables aléatoires suit la loi normale d'espérance 0 et de variance $(sd)^2$.
- **cumsum** : cumulatif somme d'un vecteur.
- **sqrt** : le racine carre.
- **sd** : écart type .
- **sum** : somme des éléments.

3.4.1 la simulation de mouvement brownien

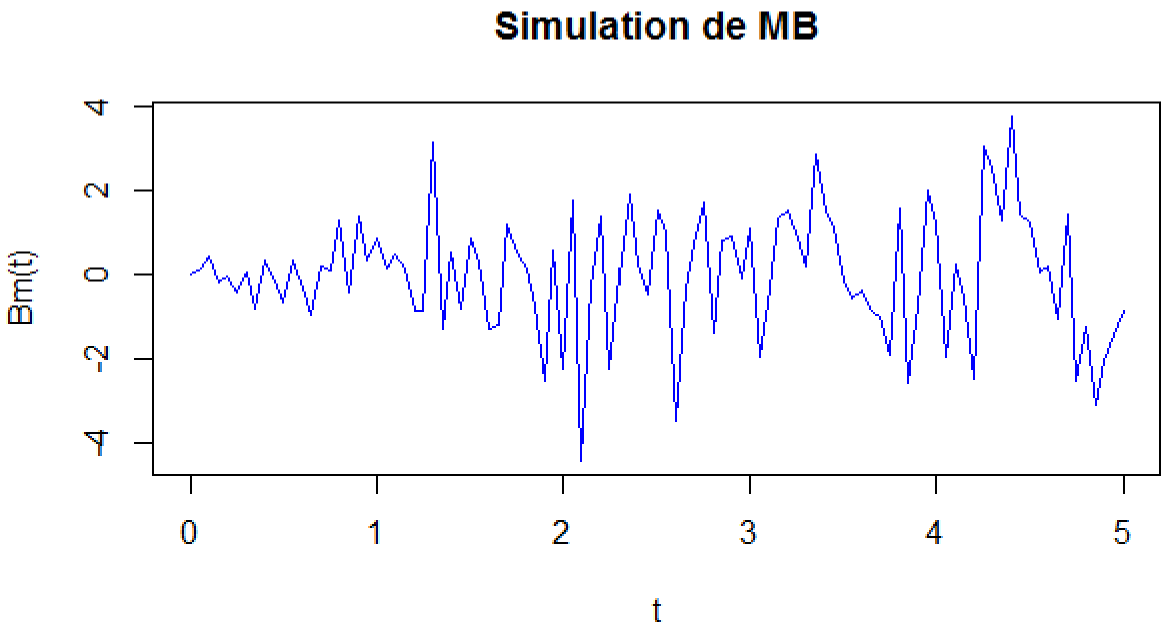
d'âpre la définition d'un mouvement brownien (1.5.1)

$$\forall 0 \leqslant i,\ B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$$

simulation de mouvement brownien
$T < -5$
$n < -10$
$p < -2^n$
$temps < -seq(0, T, length = p + 1)$
le pas entre deux quelconques temps consécutives est $(1/p)$
$C < -rnorm(p, sd = sqrt(1/p))$
$D < -c(0, cumsum(C))$
$for(i\ in 1 : p + 1)\{$
$B < -fonction(t)\{$
$if(t == time[i])$
$D[t] < -D[time[i]]$
D[t]
} }
la valeur de mouvement Brownien en le temps $t = 5$
$B(5)$

La résultat est :

[1]-3.42585



3.4.2 simulation de terme stochastique ($\int_0^t exp(s)dB_s$)

d'âpre la définition de d'intégrale d'Itô (2.3.5)on a :

```
f <-numeric(p)  (création du contenant)
FB <-fonction(t){
f[1] <-0
for (i in 2 : p)
f[i] <-exp((t/p) * (i - 1)) * (B(t/p * i) - B((t/p) * (i - 1)))
}
sum(f)
}
FB(0.23)
```

La solution est

[1]23.39727

3.4.3 simulation de la solution EDS linéaire

$X_t = \exp(-t)[X_0 + \int_0^t \exp(s)dB_s] \quad X_0 = P.$

```
P <-2
X <-function(t){
exp(-t) * (P + FB(t))
}
X(0.23)
```

La solution en temp $t = 0.23$ est

[1]1.091106

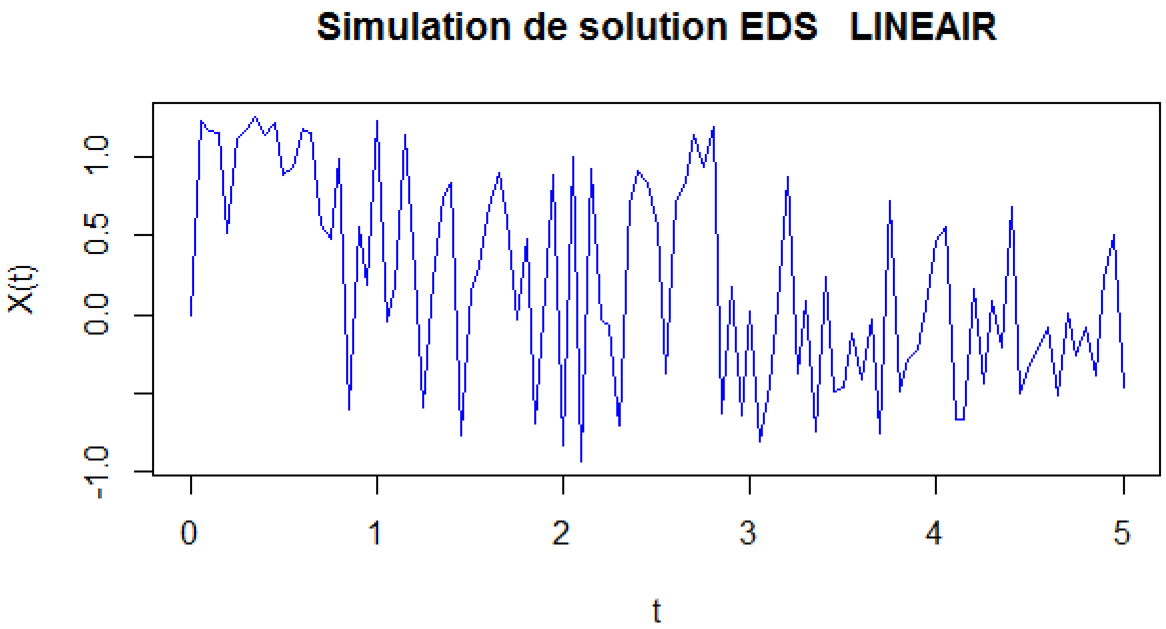
3.4.4 simulation de la solution EDS non linéaire

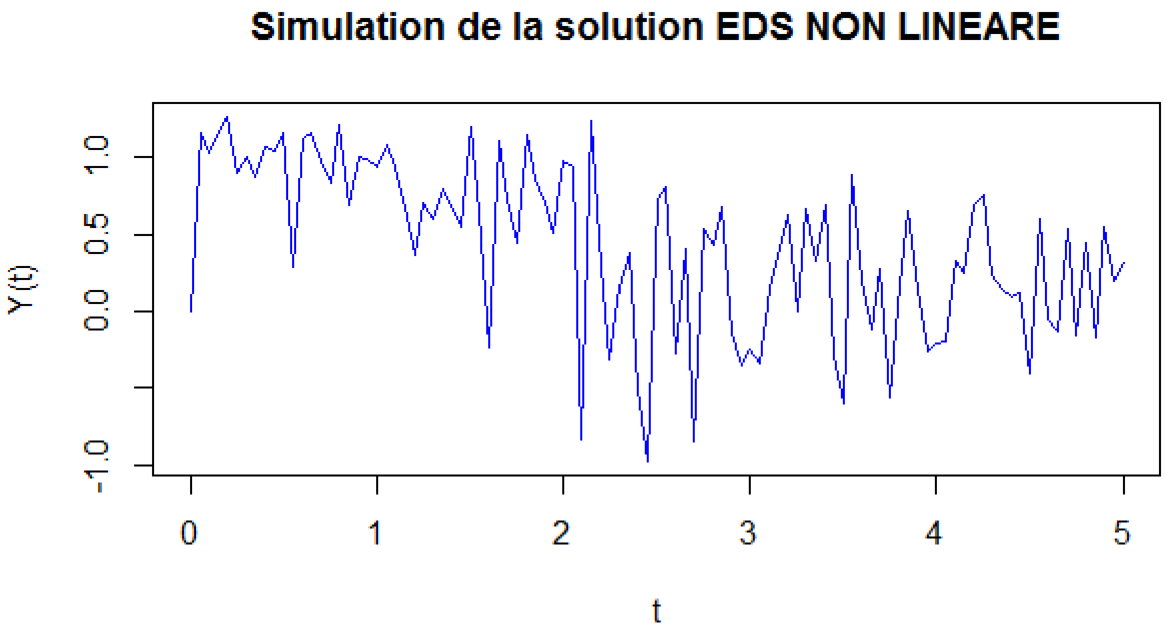
$Y_t = arctan(\sqrt{2} * X_t)$

```
p <-2
Y <-function(t){
atan(sqrt(2) * X(t))
}
Y(0.23)
```

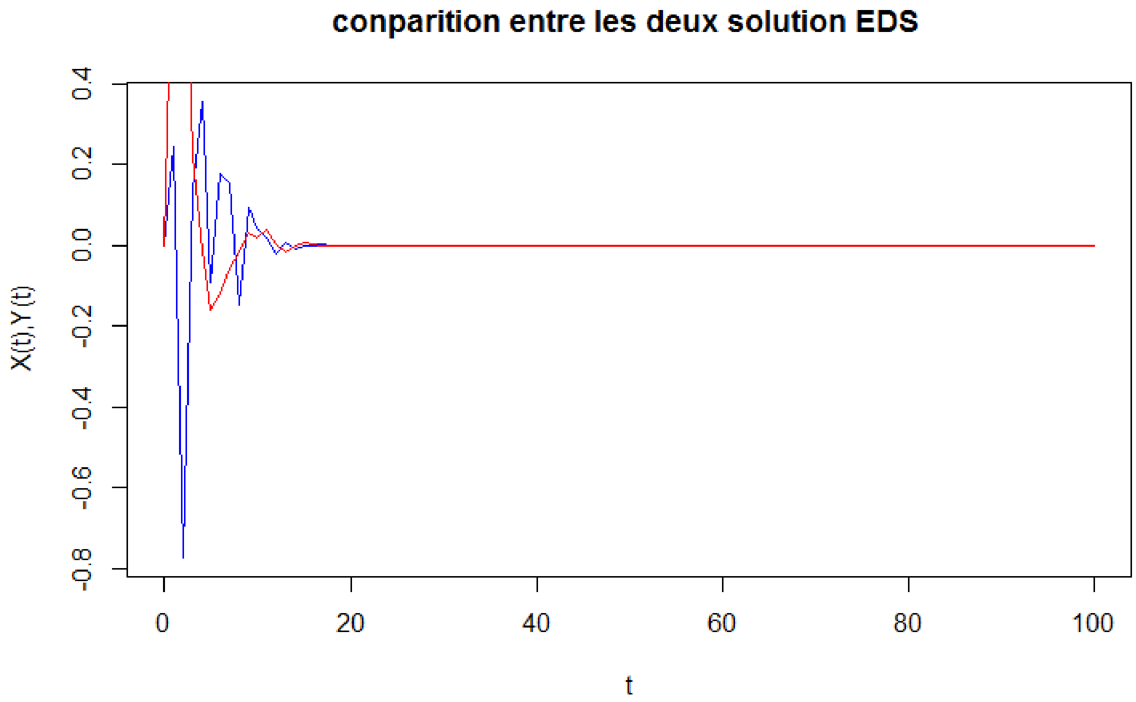
La solution en temp $t = 0.23$ est

[1]1.066595


Simulation de solution EDS LINEAIR
X(t)
-1.0
0.0
0.5
1.0
0
1
2
3
4
5
t


Simulation de la solution EDS NON LINEARE
Y(t)
-1.0
0.0
0.5
1.0
0
1
2
3
4
5
t

	EDS LINÉAIRE	EDS NON LINÉAIRE
EDS	$dX_t = -X_t dt + dB_t$	$dY_t = -(sin(2Y_t) + \frac{1}{4}sin(4Y_t))dt + (\sqrt{2}cos^2(x))dB_t$
SOLUTION	$X_t = exp(-t)[X_0 + \int_0^t exp(s)dB_s]$	$Y_t = arctan(\sqrt{2}X_t)$
S. $t = 0.23$	1.091106	1.066595



comparaison entre EDS linéaire et EDS non linéaire :

1- la formule de l'équation différentielle stochastique linéaire est plus simple de la forme d'équation différentielle stochastique linéaire .

2- les deux solution EDS linéaire et EDS non linéaire sont approche.

3- en remarque que les deux solution sont égale d'âpre un temps.

Conclusion

On expose, dans ce travail, une méthode de résolution d'une equation différentielle stochastique non linéaire par les techniques de linéarisation statistique.
On a présenté, au début, des notions sur les intégrales stochastiques et la formule d'Itô dans le cas uni-dimensionnelle d'une manière générale.
Pour la résolution d'une équation différentielle stochastique non linéaire uni-dimensionnelle on a utilisé la méthode de linéarisation statistique ; cette méthode est basé sur le changement de variable d'une telle equation non linéaire. Ce changement de variable consiste a transformer l'équation différentielle stochastique non linéaire par un equation différentielle stochastique linéaire toute en linéarisant les coefficients dérives et les coefficients de diffusions de l'équation différentielle stochastique non linéaire.
On termine ce travail avec une simulation sous logicielle R deux type d'équations différentielles stochastique linéaires et non linéaires. On constate que les différents résultats (solution exacte de l'équation non linéaire et la solution de l'équation linéaire) sont proches.

Bibliographie

[1] Abdelaziz Belqadhi,*Etude du calcul stochastique : martingales, mouvement brownien et intégration d'Itô*,cours,Ecole polytechnique federale de lausanne,14 janvier 2008.

[2] Bernard.C, *Théorie des probabilités :Une introduction élémentaire*, Calvage & Mounet, Paris 2013.

[3] Brezis. H, *Analyse fonctionnelle théories et applications*. Dunod 1999.

[4] Capasso.V et D.Bakstein ,*An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes :Theory, Models, and Applications to Finance, Biology, and Medicine*,Birkha¨user Boston 2005.

[5] Douglas. S Kurtz,Charles W Swartz, *Theories of integration : the Integrals of Riemann,Lebesgue,Henstoch-Kurzweil,and Mcshane*.Series in real analysis-vol9. Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.2004.

[6] Jean-Chiristophe Breton, *processus stochastiques M2*,cour Université de Rennes1,2017.

[7] Jean-François Le Gall,*Brownian Motion,Martingales,and Stochastic Calculus*.Orsay,France January 2016 .spring.

[8] John W. *LAMPERTI,Probability : A Survey of the Mathematical Theory.*

[9] Julien Jacque,*Introduction au logiciel R*.univ-lyon2 France.

[10] Haifeng.Y and Lam Toh, *On Henstock Method to Stratonovich Integral with respect to continuous Semimartingale.*Article ID534864, International journal of stochastic Analsis, Volume 20014,

[11] Ivan Nourdin, *Sur une généralisation des intégrales d'Itô*,backward et de Fisk-stratonovich, Mémoire de DÉA, Universite Henri Poincaré-Nancy 1 Departement de Probabilités, soutenu le 25 juin 2001.

[12] Kloeden.E Eckhard.P ,*Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer 1995 .

[13] Léonard Gallardo, *Mouvement brownien et calcul d'Itô*. Hermann.

[14] Lesfari.A ,*calcule différentiel*, cour Université Chouaïb Doukkali Maroc.

[15] Maryse BEGUIN,*INTRODUCTION A LA THEORIE DE LA MESURE ET DE L'INTEGRATION*,ANNEE 2009.

[16] Nils B,*Martingales et calcul stochastique*,cour Université d'Orléans 2014.

[17] Oksendal.B K. Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications. Springer, 5th edition, 2002

[18] Rebiha Zeghdane, *Dynamique de structures soumises à des sollicitations aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique,des equations différentielles stochastiques*,Thèse de doctorat ;université de Sétif, soutenu le 12/04/2014.

[19] Silvère Bonnabel, *Mouvent brownien et intégrale d'Itô*, CAOR - Centre de Robotique Unité Mathématiques et Systémes septembre 2012.

[20] TASSI.PH et S.lEGAIT,*Théorie des probabilités :en vue des applications statistique*, TECHNIP,PARIS 1990.

[21] Thierry Chonavel, *Equations différentielles stochastiques*, Notes de coure-Filière 4,2011-2016.

[22] Vigirdas Mackevicius,*Introduction to Stochastic Analysis :Integrals and Differential Equations*, ISTE Ltd and John Wiley and Sons, 2011.

[23] Vincent Bénézech, Philippe Bouafa. *Équations différentielles stochastiques en dimension finie et infinie.*

[24] Vincent.G ,Introduction à la programmation en R,Ecole d'actuariat,univ Laval 2016.

[25] Zhang.J ,Backward, *stochastic differential equations : from linear to fully nonlinear theory* , Springer 2017.

Abstract

The objective of this is the study of the method of linear statistics to the resolution of stochastic differential equations in the one-dimensional case .
This method was used to convert the nonlinear equation into a linear equation using the Itô formula.
Keywords : *Non linear SDE, linearization.*

Résume

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la statistique linéaire à la résolution d'équations différentielles stochastique dans le cas uni-dimensionnelle.
Cette méthode a été utilisée pour convertir l'équation non linéaire en une équation linéaire en utilisant la formule d'Itô.
Mots Clés : *EDS non linéaire,linéarisation.*