ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUE NON LINAIRE

RAMDANI ILHAM*   BAHADI AISSA

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algérie
ilhamradani07@gmail.com

1. Introduction

J'étudie, dans ce mémoire, l'équation différentielle stochastique non linéaire . J'aborde deux points : l'étude d'existence et de l'unicité de la solution d'une telle équation. J'utilise la méthode de linéarisation pour trouve une approximation linéaire de cette équation.
Mots Clés : *EDS non linéaire,linéarisation.*

2. PROBLÉMATIQUE

1. Quelles sont les conditions nécessaires pour l'existence et l'unicité de solution ?
2. Quelles sont les méthodes de linéarisation statistique ?
3. Quelles sont les techniques de non linéarisation statistique ?

Définition 2.1 *On définit l'EDS multidimensionnelles :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \\ X_0 = z. \end{cases} \tag{2.1}$$

ou T>0, $b(t,X_t) : [0,T]*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma(t,X_t) : [0,T]*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}^{n*m}$ *sont deux fonctions mesurables oú Z une variable aléatoire quelconque. Cette équation se récrit sous la forme intégrale suivante :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^T b_i(t,X_t)dt + \sum_{j=1}^{d}\int_0^T \sigma(t,X_t)_{ij}dB_t^j$$

3. EXISTENCE ET UNICITÉ

Théorème 3.1 *On considère l'espace de probabilité* $(\Omega, \boldsymbol{F}, (F_t)_{t>0}, \boldsymbol{P})$*, Soit l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \tag{3.1}$$

avec la condition initiale $X_0 = x_0 = z$ *ou* B_t *ou est un mouvement brawien n-dimensionnel et z un variable aléatoire indépendante de* $B_t - B_0, t > 0$.

$$b : (t,X_t) \in [0,T]*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\sigma : (t,X_t) \in [0,T]*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}^{n*m}.$$

$$|b| = (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$|\sigma| = (trace(\sigma*\sigma^t))^{\frac{1}{2}}.$$

deux applications sont mesurables et vérifier les propriétés :

1. $\exists K_1 > 0 tel que \forall t > 0, \forall x,y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(t,X_t) - b(t,y_t)| + |\sigma(t,X_t) - \sigma(t,y_t)| \leqslant K_1|x-y|(condition de lipscgitz) \tag{3.2}$$

2. $\exists K_2 > 0 tel que \forall t > 0, \forall X \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(t,X_t)|^2 + |\sigma(t,X_t)|^2 \leqslant K_2(1+|X|^2) \tag{3.3}$$

Alors l'équation différentielle stochastique (3.1) admet une solution unique X_t *a valeur dans* $\mathbb{R}^n$*, continue presque surement et satisfaisant la condition initiale* $X_0 = z$.

L'unicité est dans le sens que si $X_t et Y_t$ sont deux solution continue presque surement telle que $X_0 = x_0 = z$, alors

$$P[sup_{0<t<T}|X_t - Y_t| > 0] = 0. \tag{3.4}$$

4. Formule d'Itô

Proposition 4.1 *Soient* $X = (X_t)_{t>0}$ *solution d'équation différentielle stochastique(3.1) : Considérons une fonction* $F \in C^2([0T]*\mathbb{R}^n)$*. Alors le processus* $(F(t,X_t))_{t>0}$ *est solution de l'équation différentielle stochastique, telle que :*

$$\begin{aligned} F(T,X_T) - F(0,X_0 &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^T \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,X_t)dX_t^i + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)dt \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)d\langle X^i, X^j\rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,X_t)b_t^{il}dB_t^l + \sum_{i=1}^{n}\int_0^T \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,X_t)\sigma_t^i dt + \\ &\int_0^T \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)\sigma_t^{il}\sigma_t^{jl}dt. \end{aligned}$$

5. Les Méthodes de linéarisation statistique

1. Linéarisation statistique pour les systèmes non linéaire a un degré de liberté.
2. Linéarisation statistique pour les systèmes non linéaire a plusieurs degré de liberté.

6. les technique de non-linéarisation statistique

Dans cette section, une technique NLS proposée par To et Li est présentée. L'idée de base de cette technique est de remplacer équation qui gouverne par un équation de FPK soluble.

EXEMPLE :

- Bruit additive :

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t)dt + \sigma dB_t, \qquad X(0) = 0. \\ f(X_t := -4X_t^3 - X_t^2 + 5X, \\ u(X) = X_4 + \frac{1}{3}X_t^{23} - \frac{5}{2}X_t^2. \end{cases}$$

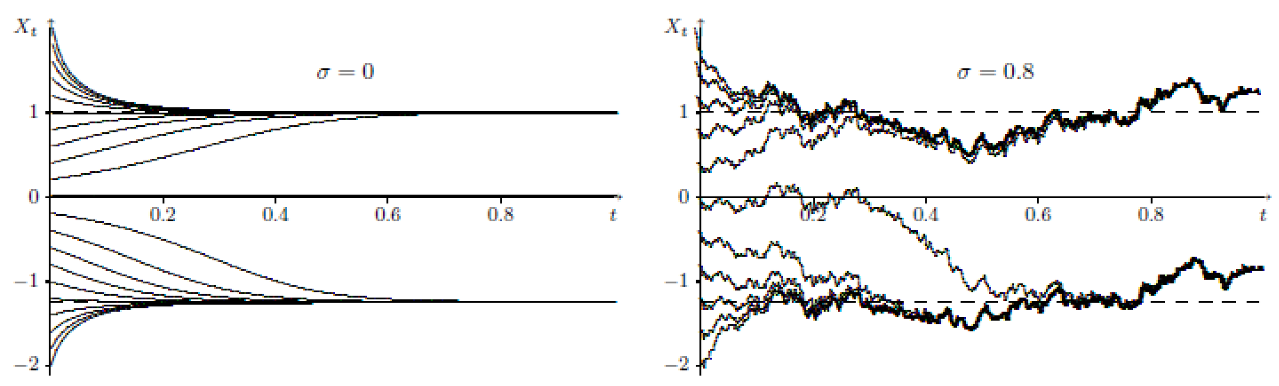

FIGURE 1: *La solution d'equation* $dX_t = f(X_t)dt + \sigma dB_t$ *pour* $\sigma = 0, et \sigma = 0.8$

- bruit multiplicative (equation de Verhulst) :

$$\begin{cases} dX_t = 5\lambda X_t - X_t^2)dt + \sigma X_t dB_t \quad X(0) = 0. \\ X_t = 1/Y_t. \end{cases}$$

$$X_t = \frac{X_0 exp(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}{1 + X_0\int_0^t exp(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma B_t ds}$$

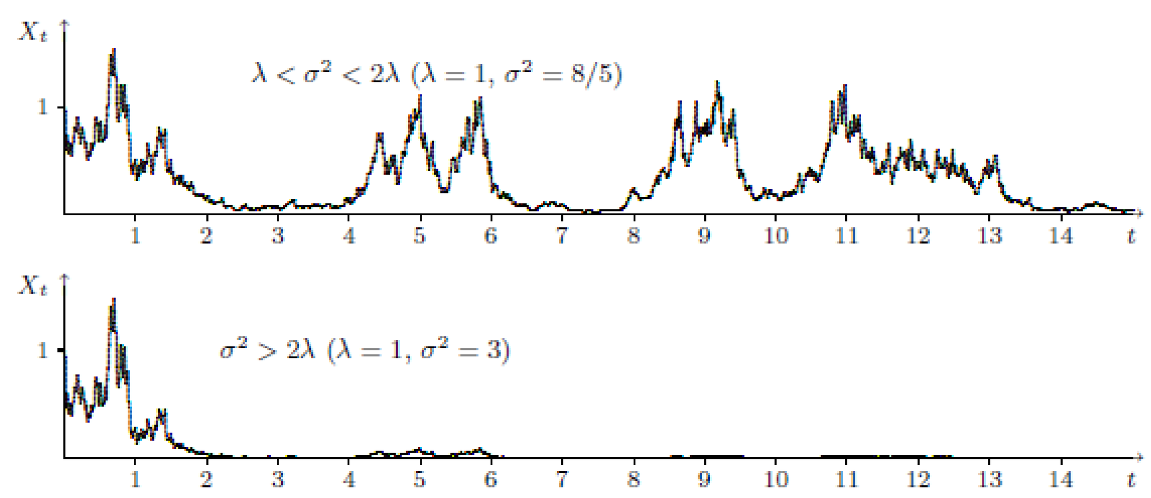

FIGURE 2: *solution d'equation de Verhulst* $dX_t = 5\lambda X_t - X_t^2)dt + \sigma X_t dB_t$.

Références

[1] *Vigirdas Mackevicius,Introduction to Stochastic Analysis : integrals and Differential Equations,WILEY 2011*

[2] *Cho W.S.To,Nonlinear Random Vibration : Analytical Techniques and Applications, CRC Press 2012*

[3] *Peter E.Kloeden Eckhard Platen :Numerical Solution of Stochastic,springer 1995*