



جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات وإعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

من إعداد الطالبة : زنو سعيدة

الموضوع

طريقة مصفوفات العمليات لكثيرات حدود لوجندر في
حل المعادلات التكاملية لفولتيرا غير الخطية ذات
متغيرين

تناقش يوم 2019/06/.. من طرف لجنة المناقشة :

رئيسا	الرتبة أستاذ محاضر"ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	معمر محمد
ممتحنا	الرتبة أستاذ محاضر"ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	بن الشيخ ع / الكريم
مشرفا	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	عباسي حسين

الإهداء

الى من كلله الله بالهيبة والوقار .. الى من علمني العطاء بدون انتظار...
الى من أحمل اسمه بكل افتخار.. أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثمارا قد حان قطافها
بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم اهتدي بها اليوم وفي الغد والى الأبد. **أبي الغالي أحمد زنو.**
الى ملاكي في الحياة.. الى معنى الحب ومعنى الحنان والتفاني.. الى بسملة الحياة وسر الوجود.. الى من
كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي أكيد الى ست الحبايب **أمي الغالية مغنية يوسف.**
الى من بهم أكبر وعليهم أعتمد.. الى شموع تثير ظلمة حياتي.. الى من بوجودهم أكتسب قوة ومحبة لا
حدود لها.. الى من عرفت معهم معنا للحياة إخوتي الأعزاء ***ياسين* عبد المطلب *محمد الأمين***
الى من أرى التفاعل بعينها.. والسعادة في ضحكتها.. الى شعلة النور.. الى الوجه المفعم بالبراءة الى
فلذة قلبي وبلسم جراحي أخواتي الحبيبات ***سعدية* حليلة*كريمة*وسيلة*.**
الى توأم روحي ورفيقة دربي الى صاحبة القلب الطيب والنوايا الصادقة الى من رافقتني منذ أن حملنا
حقائب صغيرة ومعك سرت الدرب خطوة خطوة وما تزال ترافقني الى الان ***يسرى* ابتسام***
الى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي.. الى من تحلو بالأخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء الى ينبوع الصدق
الصافي الى من معهم سعدت، وبرفقتهم في دروب الحياة الحلوة والحزينة سرت الى من كانوا معي على
طريق النجاح والخير الى من عرفت كيف أجدهم وعلموني أن لا أضيعهم صديقاتي ورفيقات الدرب
حليلة المقدم* صفاء- ربيعة دري- *رانبا* ايناس* ناريمان A68
الى أوفي الاصدقاء وهاته الكلمة لاتوفيكم حقكم بل بصدق أنتن أخواتي ***جهاد سود* راوية**
ازدهار* أمال* سهيلة* نسيم* ارشاد* مسعودة* فردوس* نائلة* سميحة* جهاد، مديحة* * لطيفة* مريه
***سعيدة* نور الهدى* فراح* رفيده* أحلام.**
أهدي تخرجي الى من تمنو لي النجاح والتوفيق الى من ساندوني في المر قبل الحلو وكانوا لي خير العون
أزواج أخواتي: **السعيد_ بكر وكل عائلة* زنو* و* يوسف***
براعم الحياة و أجمل أحفاد للعائلة أبناء أخواتي **جاد_وسيم _ رائد.**
عملي لا يكتمل إذا لم أذكركم: عمي علي جلايية وزوجته وأبنائه.
انتهت هذه المرحلة بحياتي والتي قدمت لي أشخاص أعتز وأفتخر بهم بمعرفتي لهم ولم ييخلوا عليا بشيء
وأمدو لي يد العون **ضياء الحق* سفيان* ابن خالتي حسام يوسف***

Prabashir
Diganta

الشكر والعرفان

*بسم الله الرحمن الرحيم "سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا إنك أنت العليم الحكيم" الآية 32 من سورة البقرة.

ربي ان كان ما علمتنا قطرة من بحر العلم، الا أن سمة النقص موثوقة بصفة الانسانية فنشكر الله عزوجل أن وفقنا في انجاز هذا العمل وما كان من اكتمال فمن الله، وما كان من نقص فمننا .

بدأنا بأكثر من يد وقاسينا أكثر من هم وعانينا الكثير من الصعوبات وها نحن اليوم والحمد لله نطوي سهر الليالي وتعب الايام في هذا العمل المتواضع. من لم يشكر الناس لم يشكر الله "وقد بعث لنا المولى التوفيق على أيادي تميزت بالكرم فقد كان قبس الضياء في عتمة البحث، كما كان قبطان مركب العلم في هوج الدراسة المتلاطم ولعلي لا أعدو الحق إذ أقول أنه لي نعم الناصح الأمين ونعم الأب الوقور ونعم الأخ الحلیم أفاض علي بعلمه وشملني بفضله وسماحته منحني الثقة وغرس في نفسي قوة العزيمة ولم يدخر جهدا، ولم يبخل علي بشيء من وقته الثمين أبقاءه الله ذخرا لطلبة العلم وجعل ذلك في ميزان حسناته و أرضاه بما قسم له الأستاذ الدكتور *حسين عباسي*

صديقات الجامعة لا تفوتني أن أقدم لكم كل الشكر والتقدير كل باسمها:، **أمال، صبرينة أماني، ايمان، أميمة، رميصاء، نور الهدى، ميسون، فطيمة، ميساء، سليمة، نسرين، منال، فايضة، هاني.** تمنياتي لكم بالتوفيق ولكم كل الشكر على مساندتي ومآزرتي . كما لا يفوتني أن أهدي هذا العمل المتواضع الى تخصص **ثانية ماستر نمذجة تحليل عددي.**

كما نتقدم بالشكر الى **معلمة في الابتدائي* شهرة** التي من تعلمت على يدها معنى العلم وكانت لي النور الذي ينور طريقي.

كذلك الشكر الموصول إلى **الاستاذة خلو سمية** على مجهوداتها في تقديم المساعدة لي .
معبرة مليئة بكلمات شكر وتقدير، تعبر عن صدق المشاعر بداخلنا وإمتناننا لما قام به الكل من أجلنا فشكرا

الفهرس

3	1	دراسة مرجعية و مفاهيم أساسية
4	1.1	المعادلات التكاملية
4	1.1.1	أنواع المعادلات التكاملية
4	2.1.1	المعادلات التكاملية الخطية
5	3.1.1	المعادلات التكاملية غير الخطية
6	2.1	المعادلات التكاملية ذات متغيرين
6	1.2.1	المعادلات التكاملية ذات متغيرين الخطية:
6	2.2.1	المعادلات التكاملية ذات المتغيرين غير الخطية:
7	3.1	كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد
7	1.3.1	تعريف وخواص
9	4.1	كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغير واحد
10	5.1	كثيرات حدود لوجندر ذات متغيرين
10	6.1	كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين
12	2	تقنيات بناء مصفوفات العمليات لكثيرات حدود لوجندر
13	1.0.2	تقريب التابع بكثيرات حدود لوجندر المعدلة ذو متغير واحد:
16	1.2	مصفوفات العمليات لكثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغير واحد
16	1.1.2	مصفوفة العمليات للتكامل
19	2.1.2	المصفوفة الناتجة من جداء شعاعين
20	3.1.2	تقريب التابع ذو متغيرين وفق أساس كثيرات حدود لوجندر
22	4.1.2	تحليل الخطأ
26	2.2	مصفوفات العمليات للوجندر ذو متغيرين
26	1.2.2	مصفوفة العمليات للتكامل
29	2.2.2	المصفوفة الناتجة من جداء شعاعين أساس
32	3	تطبيق الطريقة الجديدة
33	1.3	حل معادلة تكاملية غير خطية لفولتيرا ذات متغيرين
35	1.1.3	التطبيق
37	2.3	تطبيقات عديدة



ترميز

الرمز	مدلوله
λ	وسيط المعادلة التكاملية
\square	الجزء الصحيح
c_i	معاملات كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد
\otimes	جداء كرونكر
$w(x)$	دالة الوزن
$p_n(x)$	كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد من الدرجة n للمتغير x
$Op_n(x)$	كثيرات حدود لوجندر المتعامد والمتجانس
$\psi_{mn}(x, t)$	كثيرات حدود لوجندر ذات متغيرين
\mathbf{P}	مصفوفة العمليات للتكامل
$\tilde{\mathbf{F}}$	مصفوفة العمليات لنتائج الجداء
f_{mn}	معاملات كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين

مقدمة

كثيرا ماتسفر النمذجة الرياضية للعديد من المسائل الفيزيائية على معادلات تكاملية ذات متغيرين كما أنها قد تسفر على نوع من أنواع المعادلات التكاملية لفولتيرا الخطية وغير الخطية والتي تنشأ عن نمذجة مسائل في نظرية الإحتمالات , مسائل ديرينج في الكهرباء الساكنة مشاكل نقل الجسيمات في الفيزياء الفلكية ديناميكا السكان وإنتشار الأوبئة وأجهزة أشباه الموصلات . لقد بدأ العالم فولتيرا العمل على معادلات هذا النوع من المعادلات في عام 1884 , ولاكن كانت دراسته الجادة في عام 1896.

-في منتصف الستينات من القرن الماضي بدأ حل المعادلات التكاملية عدديا وفي بداية الثمينات بدأت الطرق العددية تفرض نفسها في حل هذا النوع من المعادلات خاصة عند تعذر إيجاد الحلول التحليلية الصريحة وتطور الحواسيب والحاسبة الآلية. لكن بعض المعادلات التكاملية لا تتوفر لنا طريقة لحساب الحل الدقيق إلا في حالات معينة وتحت شروط مثالية أحيانا , لذا نلجأ إلى البحث عن الحل التقريبي رغم علمنا من الناحية النظرية أن المسألة تتمتع بحل وحيد.

قدم العديد من العلماء طرق عديدة لحل المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية بإستعمال كثيرات حدود لأن كثيرات الحدود من كثيرات الحدود من أبسط الدوال من ناحية التركيب وبالإعتماد على تقنيات بناء مصفوفات العمليات للتكامل وناتج الجداء لأسس تلك كثيرات الحدود من أجل إزالة التراكم المعقدة في المسائل , لتلك الأسباب جاءت فكرة بحثنا هذا الذي يهدف إلى بناء مصفوفة العمليات في معالجة المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية. في هذه المذكرة تم تقديم إحدى الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية لفولتيرا الخطية وغير الخطية :

$$\begin{aligned} U(x, t) = & \int_0^t \int_0^x k_1(x, t, y, z) H(y, z, U(y, z)) dy dz \\ & + \int_0^x k_2(x, t, y) G(y, t, U(y, t)) dy \\ & + \int_0^t k_3(x, t, z) (F(x, z, U(x, z))) dz \\ & + R(x, t), (x, t) \in [0, l] \times [0, T], \end{aligned}$$

التي تعتمد على كثير حدود لوجندر المعدل حيث نركز على علة إستعمال المصفوفات التنفيذية لنحصل على جملة معادلات ذات معاملات ثابتة يمكن حلها .

الطريقة جيدة والممتازة ويبين ذلك الأمثلة المدرجة .

وهذه المذكرة تتكون من ثلاثة فصول

الفصل الأول :

تتطرق فيه إلى بعض المفاهيم الأساسية حول المعادلات التكاملية وتصنيفاتها وكذلك المعادلات التكاملية ذات متغيرين [1],[2]. وكذلك تعريفات كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد [3] وذات متغيرين , وكذلك تعريفات كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغير واحد [3] وذات متغيرين.

الفصل الثاني :

تعرفنا في الفصل الثاني على كثيرات حدود لوجندر وخصائصها ومعدل كثيرات حدود لوجندر وكذا مصفوفات العمليات المرتبطة به وبعض خصائصها (مصفوفة العمليات للتكامل والمصفوفة الناتجة من جداء شعاعين أساس). وكذلك تقريب التابع لكثيرات حدود لوجندر المعدلة [4][?] وقنا كذلك بتجليل التقارب لكثيرات حدود لوجندر المعدلة.

الفصل الثالث :



قمتنا بإستعمال مصفوفات العمليات وتوظيفها في حل المعادلات التكاملية لفولتيرا ذات المتغيرين ولتبيان مدى جودة الطريقة أتيننا بعدة أمثلة مع مقارنة الحلول التقريبية مع الحلول الدقيقة .

الفصل الأول

دراسة مرجعية و مفاهيم أساسية

قائمة المحتويات

4	المعادلات التكاملية	1.1
6	المعادلات التكاملية ذات متغيرين	2.1
7	كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد	3.1
9	كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغير واحد	4.1
10	كثيرات حدود لوجندر ذات متغيرين	5.1
10	كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين	6.1

1.1 المعادلات التكاملية

للمعادلات التكاملية دورا بارزا في حل المشاكل الفيزيائية ولكن تعددت طرق حلها سواء كان حلا تحليليا أو عدديا , في هذا الفصل قمنا بتصنيف للمعادلات التكاملية الخطية والغير خطية و المعادلات التكاملية ذات متغيرين .

تعريف 1 [1, 2] : المعادلة التكاملية هي معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة $\varphi(x)$ تحت إشارة التكامل في المعادلة وقد يضاف أيضا خارج التكامل ويكون في طرفي المعادلة وتكون على الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt.$$

$$0 = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt.$$

- $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة ويطلب تعيينها

- $f(x), K(x, t)$ هي دوال معلومة قد تكون مركبة أو حقيقية وذلك من قيم t و x وندعوا $k(x, t)$ نواة المعادلة التكاملية.

* إذا كان x (الجزء العلوي للتكامل) عدد ثابت فهي معادلة فريدهولم وأما إذا كان مجهول فهي لفولتيرا.

1.1.1 أنواع المعادلات التكاملية

[1],[2] معظم المسائل الفيزيائية يمكن صياغتها و تحليلها بدلالة المعادلات التفاضلية و لحل المعادلة بكفاءة و بطرق أبسط نستخدم المعادلات التكاملية سواء كانت خطية أو غير خطية بذل المعادلات التفاضلية , وفي مايلي نذكر أشكال المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية وأنواعها .

2.1.1 المعادلات التكاملية الخطية

يمكننا القول عن المعادلات التكاملية أنها خطية إذا كانت العمليات الخطية محققة على الدوال المجهولة . وتأخذ بصفة عامة الشكل التالي:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (1.1)$$

حيث: λ - هو وسيط المعادلة التكاملية.

- $K(x, t)$ وتسمى نواة المعادلة التكاملية و تكون معلومة و تكون متصلة أو غير متصلة

- $f(x)$ دالة معلومة أيضا.

- $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المراد تعيينها. و تنقسم المعادلات التكاملية الخطية بشكل أساسي ضمن فئتين

- أساسيتين هما معادلات فريدهولم (fredholm) ومعادلات فولتيرا (volterra) التكاملية . إلا أننا سنميز أربع أصناف أخرى بالإضافة إلى الصنفين الأساسيين وهي
- معادلات فريدهولم التكاملية
 - معادلات فولتيرا التكاملية
 - المعادلات التكاملية-التفاضلية
 - المعادلات التكاملية الشادة
 - معادلات فولتيرا- فريدهولم التكاملية
 - معادلات فولتيرا- فريدهولم التكاملية-التفاضلية

3.1.1 المعادلات التكاملية غير الخطية

تعريف 2

المعادلة التكاملية غير الخطية هي معادلة:

- * ويكون المجهول فيها عبارة عن دالة , غالباً ما نرمز إليها بالرمز φ , أو أي حرف آخر.
- * تكون فيها الدالة المجهولة داخل رمز التكامل وقد تضاف إلى خارجه.
- * نسمي حلاً لمعادلة تكاملية غير خطية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I . وتكتب في الحالة العامة:

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t))dt \quad (2.1)$$

أو

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(\varphi(t))dt \quad (3.1)$$

إذا كان $x = b$ (متغير) فهي معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية أما إذا كان b ثابت فهي معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية.

حيث أن:

- 1- φ هي الدالة المجهولة ويطلب تعيينها.
- 2- f هي دالة معلومة معرفة على المجال $[a, b]$ وهي تؤدي نفس دور دالة الطرف الثاني في المعادلات التفاضلية.
- 3- k تسمى نواة المعادلة التكاملية وهي عبارة عن دالة ذات متغيرين معرفة على $D = [a, b] \times [a, b]$.
- 4- λ يسمى وسيط المعادلة التكاملية وهو عبارة عن ثابت.

5- F دالة غير خطية في $\varphi(t)$.

ملاحظة 1

سميت المعادلات التكاملية السابقة بالغير خطية لأن الدالة F غير خطية.

2.1 المعادلات التكاملية ذات متغيرين

[3] تكتب المعادلات التكاملية ذات المتغيرين بالشكل التالي:

$$\lambda\varphi(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d k(x, y, s, t)F(\varphi(s, t))dt \quad (4.1)$$

حيث:

- $\varphi(x, y)$ وهي الدالة المجهولة المطلوب تعيينها.

- $f(x, y)$ و $K(x, y, s, t)$ دوال معلومة قد تكون مركبة أو حقيقية.

* b و d ثوابت نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

أما إذا كانت $\lambda = 0$ نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول

* b و d دوال نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

أما إذا كانت $\lambda = 0$ نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول

* إذا كان إحداهما ثابت و الآخر متغير فإننا نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا-فريدهولم أو فريدهولم-فولتيرا.

تنقسم المعادلات التكاملية ذات متغيرين إلى قسمين خطية وغير الخطية.

ملاحظة 2

إذا كانت الدالة f خطية فإننا نقول عن المعادلة التكاملية ذات المتغيرين خطية والعكس صحيح.

1.2.1 المعادلات التكاملية ذات متغيرين الخطية:

نقول عن المعادلة التكاملية (24.1) أنها خطية إذا كان المؤثر F خطي وتأخذ الشكل التالي :

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d k(x, y, s, t)F(\varphi(s, t))dsdt.$$

2.2.1 المعادلات التكاملية ذات المتغيرين غير الخطية:

نسمي المعادلة التكاملية (24.1) بغير الخطية إذا كان $\varphi(s, t)$ مركب من دالة غير خطية.

مثال :

$$\varphi(x, y) = \int_a^b \int_c^d k(x, y, s, t) F(\varphi(t, s)) ds dt.$$

- المعادلة التكاملية التالية:

$$\varphi(x, y) = \int_a^x \int_c^d k(x, y, s, t) F(\varphi(t, s)) ds dt.$$

تسمى معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية غير الخطية ذات متغيرين .
والمعادلة التكاملية

$$\varphi(x, y) = \int_a^b \int_c^y k(x, y, s, t) F(\varphi(t, s)) ds dt.$$

هي معادلة فريدهولم-فولتيرا غير الخطية ذات متغيرين.

3.1 كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد

1.3.1 تعريف وخواص

تعريف 3 [4]

التعريف المباشر لكثيرات حدود لوجندر:

كثيرات حدود لوجندر هي كثيرات الحدود المعرفة على المجال $[-1, 1]$ بالعلاقة التالية [10]:

$$p_0(x) = 1, p_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (n \geq 1). \quad (5.1)$$

حيث

□ تعني الجزء الصحيح.

$p_n(x)$ كثيرات الحدود من الدرجة n للمتغير x .

تعريف 4

وكذلك يمكن تعريف كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد بالعلاقة التراجعية التالية:

$$P_{m+1}(x) = \frac{(2m+1)}{(m+1)} x P_m(x) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(x), m = 1, 2, 3, \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

وفيما يلي نذكر كثيرات حدود لوجندر الأولى من $p_0(x)$ إلى $p_{10}(x)$

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

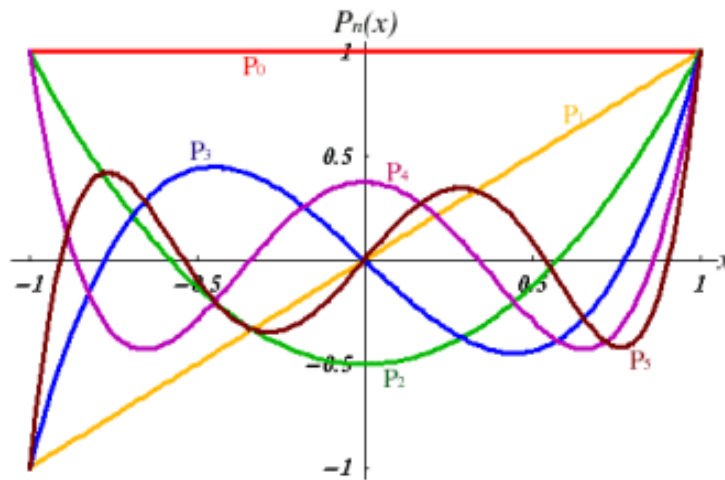
$$p_6(x) = \frac{1}{16}(23x^6 - 315x^4 + 15^2 - 5),$$

$$p_7(x) = \frac{1}{48}(1287x^7 - 2049x^5 + 945x^3 - 105x),$$

$$p_8(x) = \frac{1}{128}(1237x^8 - 16024x^6 + 630x^4 - 1260x^2 + 35),$$

$$p_9(x) = \frac{1}{256}(35530x^9 - 51480x^7 + 4036x^5 - 105x^3 + 630x),$$

$$p_{10}(x) = \frac{4}{256}(24088x^{10} - 109395x^8 + 360360x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 36).$$



شكل 1.1: تمثيل لبعض حدوديات لوجندر

4.1 كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغير واحد

تعريف 5 [4]

تعريف كثير حدود لوجندر المعدلة على المجال $[0, 1]$ كما موضحة في العلاقة التالية :

$$P_{i+1}(x) = \frac{(2i+1)(2x-1)}{(i+1)}P_i(x) - \frac{i}{i+1}P_{i-1}(x), i = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

• حيث أن $p_1(x) = 2x - 1$ و $p_0(x) = 1$

نذكر الحدود الأولى لكثيرات حدود لوجندر المعدلة المعرفة على المجال $[0, 1]$:

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_1(x) = 2x - 1,$$

$$p_2(x) = 6x^2 - 6x + 1,$$

$$p_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1,$$

$$p_4(x) = 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1,$$

$$p_5(x) = 252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1.$$

ملاحظة 3

لتعديل كثيرات حدود لوجندر من المجال $[-1, 1]$ إلى المجال $[0, l]$ عندها تسمى كثيرات حدود لوجندر المعدلة ويتم ذلك بأخذ التحويل التالي $y = \frac{2}{l}x - 1$

ملاحظة 4

أما تعديل كثيرات حدود لوجندر المعرفة على المجال $[0, 1]$ إلى المجال $[0, l]$, وذلك بإستعمال التحويل التالي $y = \frac{x}{l}$ فتتحصل على العلاقة التالية :

$$P_{i+1}(x) = \frac{(2i+1)(2\frac{x}{l}-1)}{(i+1)}P_i(\frac{x}{l}) - \frac{i}{i+1}P_{i-1}(\frac{x}{l}), i = 1, 2, \dots$$

وعليه نذكر الحدود الأربعة الأولى لكثيرات حدود لوجندر المعدلة المعرفة على $[0, l]$

$$p_0(x) = 1, \quad (7.1)$$

$$p_1(x) = \frac{2}{l}x - 1, \quad (8.1)$$

$$p_2(x) = \frac{6}{l^2}x^2 - \frac{6}{l}x + 1, \quad (9.1)$$

$$p_3(x) = \frac{20}{l^3}x^3 - \frac{30}{l^2}x^2 + \frac{12}{l}x - 1, \quad (10.1)$$

$$p_4(x) = \frac{70}{l^4}x^4 - \frac{140}{l^3}x^3 + \frac{90}{l^2}x^2 - \frac{20}{l}x + 1. \quad (11.1)$$

كما يمكننا كتابة كثيرات حدود لوجندر المعدلة $P_i(x)$ على الشكل التحليلي من الدرجة i المعرفة على المجال $[0, l]$ كما هو موضح [4]:

$$p_i(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} \frac{(i+k)! \left(\frac{1}{l}x\right)^k}{(i-k)(k!)^2}. \quad (12.1)$$

حيث أن $P_i(1) = 1$ و $P_i(0) = (-1)^i$.

إن كثيرات حدود لوجندر من كثيرات الحدود المتعامدة و شرط التعامد بالنسبة لتابع الوزن $\omega^{0,0}(x) = 1$ محقق أي:

$$\int_0^l P_i(x)P_j(x)dx = \begin{cases} \frac{l}{2i+1} & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (13.1)$$

5.1 كثيرات حدود لوجندر ذات متغيرين

تعرف كثيرات حدود لوجندر ذات المتغيرين على المجال $[-1, 1]$ بالشكل التالي [5]:

$$\psi_{mn}(x, t) = p_m(x)p_n(t)$$

حيث أن $p_m(x)$ و $p_n(t)$ كثيرات حدود لوجندر ذات متغير واحد .

6.1 كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين

يمكن تعريف كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين على $\Delta = [0, l] \times [0, T]$ بالشكل التالي :

$$\psi_{mn}(x, t) = p_m\left(\frac{2}{l}x - 1\right) p_n\left(\frac{2}{T}t - 1\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.1)$$

و p_m و p_n تمثل كثيرات حدود لوجندر من الدرجة m و n المعرفة على المجال $[-1, 1]$
 نذكر الحدود الأولى لكثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين :

$$\begin{aligned}
 \psi_{00}(x, t) &= 1 \\
 \psi_{01}(x, t) &= \frac{2t}{T} - 1 \\
 \psi_{02}(x, t) &= \frac{6t^2}{T^2} - \frac{6t}{T} + 1 \\
 \psi_{03}(x, t) &= \frac{20t^3}{T^3} - \frac{30t^2}{T^2} + \frac{12t}{T} - 1 \\
 \psi_{10}(x, t) &= \frac{2x}{l} - 1 \\
 \psi_{11}(x, t) &= \left(\frac{2x}{l} - 1\right)\left(\frac{2t}{T} - 1\right) \\
 \psi_{12}(x, t) &= \left(\frac{2x}{l} - 1\right)\left(\frac{6t^2}{T^2} - \frac{6t}{T} + 1\right) \\
 \psi_{13}(x, t) &= \left(\frac{2x}{l} - 1\right)\left(\frac{20t^3}{T^3} - \frac{30t^2}{T^2} + \frac{12t}{T} - 1\right) \\
 \psi_{20}(x, t) &= \left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{6x}{l} + 1\right) \\
 \psi_{21}(x, t) &= \left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{6x}{l} + 1\right)\left(\frac{6t}{T} - 1\right) \\
 \psi_{22}(x, t) &= \left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{6x}{l} + 1\right)\left(\frac{6t^2}{T^2} - \frac{6t}{T} + 1\right) \\
 \psi_{23}(x, t) &= \left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{6x}{l} + 1\right)\left(\frac{20t^3}{T^3} - \frac{30t^2}{T^2} + \frac{12t}{T} - 1\right) \\
 \psi_{30}(x, t) &= \left(\frac{20x^3}{l^3} - \frac{30x^2}{l^2} + \frac{12x}{l} - 1\right) \\
 \psi_{31}(x, t) &= \left(\frac{20x^3}{l^3} - \frac{30x^2}{l^2} + \frac{12x}{l} - 1\right)\left(\frac{2t}{T} - 1\right) \\
 \psi_{32}(x, t) &= \left(\frac{20x^3}{l^3} - \frac{30x^2}{l^2} + \frac{12x}{l} - 1\right)\left(\frac{6t^2}{T^2} - \frac{6t}{T} + 1\right) \\
 \psi_{33}(x, t) &= \left(\frac{20x^3}{l^3} - \frac{30x^2}{l^2} + \frac{12x}{l} - 1\right)\left(\frac{20t^3}{T^3} - \frac{30t^2}{T^2} + \frac{12t}{T} - 1\right)
 \end{aligned} \tag{15.1}$$

إن خاصية التعامد لكثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين تضمنها العلاقة التالية :

$$\int_0^T \int_0^l \psi_{ij}(x, t)\psi_{mn}(x, t)dxdt = \begin{cases} \frac{lT}{(2m+1)(2n+1)}, & i = m \text{ و } j = n \\ 0, & \text{غير ذلك.} \end{cases} \tag{16.1}$$

الفصل الثاني

تقنيات بناء مصفوفات العمليات لكثيرات حدود لوجندر

قائمة المحتويات

16	مصفوفات العمليات لكثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغير واحد
26	مصفوفات العمليات للوجندر ذو متغيرين



1.0.2 تقريب التابع بكثيرات حدود لوجندر المعدلة ذو متغير واحد:

[5] ليكن $H = L^2(0, l)$ فضاء هيلبرتي (فضاء شعاعي مزود بجداء سلبي $\langle \cdot, \cdot \rangle$). حيث أن:
الجداء السلبي معرف ب :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx \quad (1.2)$$

النظيم معرف ب :

$$\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (2.2)$$

تعريف 6

ليكن F فضاء شعاعي جزئي من H نقول عن $\varphi^* (\varphi^* \in F)$ أنه أحسن تقريب ل $f (f \in H)$ إذا كان :

$$\| f - \varphi^* \| = \min_{\varphi \in F} \| f - \varphi \| \quad (3.2)$$

نظرية 1 الشرط الازم و الكافي لكي يكون φ^* أحسن تقريب ل f من H هو:

$$\forall \varphi \in F; \langle f - \varphi^*, \varphi \rangle = 0 \quad (4.2)$$

نظرية 2 إن أحسن تقريب وحيد

ليكن التابع $y(x) \in L^2(0, l)$ إن تقريبه بكثيرات حدود لوجندر المعدل من الدرجة i يكون بالشكل [4] :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x),$$

حيث أن المعاملات c_i تكتب بالشكل التالي:

$$c_i = \frac{\langle f(x), p_i(x) \rangle}{\| p_i(x) \|_2^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

عمليا نحتاج فقط إلى عدد منتهي من الأساسات وليكن N و عليه نضع التقريب التالي:

$$y_N(x) \simeq \sum_{i=0}^N c_i P_i(x) = C^T \psi(x), \quad (5.2)$$



حيث أن:

C - يسمى معامل أساس لوجندر المعدل.

$\psi(x)$ - أساس لوجندر المعدل

تعطى على الشكل التالي:

$$C^T = [c_0, c_1, \dots, c_N],$$

$$\psi(x) = [\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_N(x)]^T. \quad (6.2)$$

مثال:

لتكن الدالة $f(x) = x^3 - x + 1$ نقوم بتقريبها بكثيرات حدود لوجندر المعدلة بشكل التالي :

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^N c_i p_i(x)$$

نأخذ $N = 3$ يصبح لدينا

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - x + 1 &\simeq \sum_{i=0}^3 c_i p_i(x) \\ &= c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) \\ &= [c_0, c_1, c_2, c_3] \times \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ p_3(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2)$$

حيث أن الثوابت c_i نجدها بالعلاقة التالية :

$$c_i = \frac{\langle f(x), p_i(x) \rangle}{\| p_i(x) \|_2^2} \quad (8.2)$$

لدينا قيم $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ موجودة في العلاقات (3.2) و (4.2) و (5.2) و (6.2) و

(7.2) على التوالي :

حساب c_0

$$c_0 = \frac{\langle f(x), p_0(x) \rangle}{\| p_0(x) \|_2^2} \quad (9.2)$$



(10.2)

$$\begin{aligned} \langle f(x), p_0(x) \rangle &= \int_0^l f(x), p_0(x) dx = \int_0^l (x^3 - x + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^l \\ &= \frac{l^4}{4} - \frac{l^2}{2} + l \end{aligned}$$

$$\| p_0(x) \|_2^2 = \int_0^l p_0(x)p_0(x) dx = \int_0^l dx = l \quad (11.2)$$

بتعويض العلاقتين (20.2) و (21.2) في العلاقة (19.2) نجد قيمة c_0 . وهكذا وبنفس الطريقة وباستعمال العلاقة (18.2) نجد:

$$c_0 = \frac{l^3}{4} - \frac{l}{2} + 1 \quad (12.2)$$

$$c_1 = (l(9l^2 - 10)) \quad (13.2)$$

$$c_2 = \left(\frac{l^3}{4}\right) \quad (14.2)$$

$$c_3 = \left(\frac{l^3}{20}\right) \quad (15.2)$$

ولنختار $l = 4$ نجد :

$$c_0 = 15, c_3 = \frac{16}{5}, c_2 = 16, c_1 = \frac{134}{5}$$

ثم نقوم بتعويض قيم c_i و p_i في العلاقة نجد

(16.2)

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &\simeq 15p_0(x) + \frac{134}{5}p_1(x) + 16p_2(x) + \frac{16}{5}p_3(x) \\ &= 15 + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\frac{134}{5} + 16\left(\frac{6}{16}x^2 - \frac{6}{4}x + 1\right) + \frac{16}{5}\left(\frac{5}{16}x^3 - \frac{30}{16}x^2 + 3x - 1\right) \\ &= 15 + \frac{67}{5}x - \frac{134}{5} + 6x^2 - 24x + 16 + x^3 - 6x^2 + \frac{48}{5}x - \frac{16}{5} \\ &= x^3 - x + 1 \end{aligned}$$

تحليل التقارب

في هذا القسم ، يتم تقديم تحليل الخطأ لطريقتنا. ومن المعروف أن كثيرات حدود لوجندر المعدلة $P_i(x)$



تشكل مجموعة كاملة من $L_2[0, 1]$ متعامدة [?]. نذكر أن $H^m[0, 1]$ هو فضاء سوبوليف لجميع الدوال $u(t)$ على $[0, 1]$ مثل ذلك $u(t)$ وكل مشتقاته من الدرجة m هي في $L_2[0, 1]$ وتعريف $\|\cdot\|_{H^m([0,1])}$ كمايلي: [?]

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{k=0}^m \|u^{(k)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ونصف نظيم يعرف كمايلي:

$$|u|_{H^{m;N}(\Omega)}^2 = \sum_{i=\min(m,N)}^N \|u^{(i)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

نلاحظ أنه كلما كان $N \geq m - 1$ ، لدينا

$$|u|_{H^{m;N}(\Omega)} = \|u^{(m)}\|_{L^2(\Omega)} = |u|_{H^m(\Omega)}$$

نفرض أن $u_N = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k P_k$ هو تقريب لوجندر للتابع $u \in H^m(\Omega)$ ، كما ثبت في [?] ، فإن الخطأ هو

$$\|u - u_N\|_{H^{m;N}(\Omega)} \leq CN^{-m} |u|_{H^{m;N}(\Omega)}$$

حيث C هو ثابت موجب حسب m .

1.2 مصفوفات العمليات لكثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغير واحد

1.1.2 مصفوفة العمليات للتكامل

[6] طريقة 1 : لدينا

$$y(x) \simeq \sum_{i=0}^N c_i P_i(x) = C^T \psi(x), \quad (17.2)$$

التكامل بالنسبة للشعاع $\psi(x)$ المعروف في (15.2) يعطى في الشكل التالي :

$$\int_0^x \psi(x') dx' \simeq \mathbf{p} \psi(x), \quad (18.2)$$



ومنه

$$\int_0^x \psi(x') dx' = \int_0^x \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int_0^x \psi_0(x') dx' \\ \int_0^x \psi_1(x') dx' \\ \vdots \\ \int_0^x \psi_n(x') dx' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0^T \psi(x) \\ C_1^T \psi(x) \\ \vdots \\ C_n^T \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0^T \\ C_1^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{bmatrix} \psi(x) \quad (19.2)$$

$$= P\psi(x)$$

حيث أن P هي المصفوفة التنفيذية للتكامل
نقوم بحساب C_0^T, C_1^T, C_2^T حتى نصل إلى C_n^T

$$\int_0^x \psi_0(x') dx' = \int_0^x dx' = x = C_0^T \psi(x)$$

$$= C_0^T \psi_0(x) + C_1^T \psi_1(x) + C_2^T \psi_2(x) + \dots + C_n^T \psi_n(x)$$

$$= \frac{l}{2} \psi_0(x) + \frac{l}{2} \psi_1(x) + 0\psi_2(x) + \dots + 0\psi_n(x)$$

وعليه نجد أن :

$$C_0^T = \left[\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0, 0, 0, \dots, 0 \right]$$

وبنفس الطريقة نجد

$$C_1^T = \left[\frac{-l}{6}, 0, \frac{l}{6}, 0, 0, \dots, 0 \right]$$

$$C_2^T = \left[0, \frac{-l}{10}, 0, \frac{l}{10}, 0, \dots, 0 \right]$$

$$C_n^T = \left[0, 0, \dots, 0, \frac{-l}{2n+1}, 0 \right]$$

وعليه نحصل على المصفوفة

$$P = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2n-1} & 0 & \frac{1}{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2n+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (21.2)$$



ومنه :

$$P\psi(x) = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{2n-1} & 0 & \frac{1}{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2n+1} & 0 \end{bmatrix} \psi(x) \quad (22.2)$$

طريقة 2 :

$$2(2n + 1)P_n(x) = l(P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) \quad (23.2)$$

 $P(x)$ كثير حدود لوجندر المعرف على $[0, l]$

بإذخال التكامل على العلاقة (32.2) نجد :

$$2 \int_0^x (2n + 1)P_n(x')dx' = l \left(\int_0^x P'_{n+1}(x')dx' - \int_0^x P'_{n-1}(x')dx' \right) \quad (24.2)$$

لدينا :

$$\int_0^x P'_{n+1}(x')dx' = P_{n+1}(x)$$

ومنه

$$\int_0^x P_n(x')dx' = \frac{l}{2(2n-1)}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) = \frac{l}{2} \left(\frac{-P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x)}{2n-1} \right) \quad (25.2)$$

بعد عملية التعويض نجد :

$$C_0^T = \frac{l}{2} [1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0]$$

$$C_1^T = \frac{l}{2} \left[\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots, 0, 0 \right]$$

$$C_2^T = \frac{l}{2} \left[0, \frac{-1}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0, 0, \dots, 0, 0 \right]$$

$$C_{n-1}^T = \frac{l}{2} \left[0, 0, \dots, \frac{-1}{2n-1}, 0, \frac{1}{2n-1} \right]$$

$$C_n^T = \frac{l}{2} \left[0, 0, 0, \dots, 0, \frac{-1}{2n+1}, 0 \right]$$



ومنه نجد مصفوفة العمليات للتكامل من الشكل

$$P = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{2n-1} & 0 & \frac{1}{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2n+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (26.2)$$

2.1.2 المصفوفة الناتجة من جداء شعاعين

نقوم بتقييم حاصل ضرب $\psi(x)$ و $\psi(x)^T$ وهذا ما نطلق عليه الناتج المصفوفي وفق أساس كثيرات لوجندر ، وليكن ،

$$\psi(x)\psi(x)^T = F_{ij}^T \psi(x)$$

حيث أن :

$$F_{ij}^T \psi(x) = \begin{bmatrix} F_{00}^T \psi(x) & F_{01}^T \psi(x) & F_{02}^T \psi(x) & \cdots & F_{0N}^T \psi(x) \\ F_{10}^T \psi(x) & F_{11}^T \psi(x) & F_{12}^T \psi(x) & \cdots & F_{1N}^T \psi(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{N0}^T \psi(x) & F_{N1}^T \psi(x) & F_{N2}^T \psi(x) & \cdots & F_{NN}^T \psi(x) \end{bmatrix}$$

وفي الأخير نتحصل على مصفوفة العمليات لناتج الجداء من الشكل :

$$F_{ij}^T \psi(x) = \begin{bmatrix} F_{00}^T & F_{01}^T & F_{02}^T & \cdots & F_{0N}^T \\ F_{10}^T & F_{11}^T & F_{12}^T & \cdots & F_{1N}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{N0}^T & F_{N1}^T & F_{N2}^T & \cdots & F_{NN}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \vdots \\ \psi_{MN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^N \psi_{00}(x)\psi_{ij}F_{ij} \\ \sum_{j=0}^N \psi_{01}(x)\psi_{ij}F_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^N \psi_{MN}(x)\psi_{ij}F_{ij} \end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة التنفيذية الناتجة من جداء شعاعين لوجندر ذات متغير واحد من الدرجة

$$[(N+1)(N+1)](M+1)$$

-الجداء السلمي لكثيرات حدود لوجندر يعرف ب :

$$\langle f(x, t), g(x, t) \rangle = \int_0^T \int_0^l f(x, t)g(x, t)dxdt,$$



-النظيم :

$$\|f(x, t)\|_2 = \langle f(x, t), f(x, t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T \int_0^l |f(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.1.2 تقريب التابع ذو متغيرين وفق أساس كثيرات حدود لوجندر

لتكن الدالة $f(x, t) \in X = L^2([0, l][0, T])$, نأخذ دوال لوجندر المعدلة $\psi_{mn}(x, t)$, $0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M$ ومنه كل دالة ذات متغيرين يمكن تحليلها بإستعمال أساس لوجندر المعدلة بالطريقة التالية :

$$f(x, t) \simeq f_{M,N}(x, t) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N f_{ij} \psi_{mn}(x, t)$$

حيث أن المعاملات f_{mn} :

$$f_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \int_0^T \int_0^l f(x, t) \psi_{mn}(x, t) dx dt$$

$$f(x, t) \simeq f_{M,N}(x, t) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N f_{mn} \psi_{mn}(x, t) = F^T \psi(x, t) = \psi^T(x, t) F \quad (27.2)$$

حيث أن F و $\psi(x, t)$ أشعة من الرتبة $1 \times (M+1)(N+1)$ وعبارتها كالاتي:

$$F^T = [f_{00}, \dots, f_{0N}, f_{10}, \dots, f_{1N}, \dots, f_{M0}, \dots, f_{MN}] \quad (28.2)$$

$$\psi(x, t) = [\psi_{00}(x, t), \dots, \psi_{0N}(x, t), \psi_{10}(x, t), \dots, \psi_{1N}(x, t), \dots, \psi_{M0}(x, t), \dots, \psi_{MN}(x, t)]^T \quad (29.2)$$

حيث F^T يسمى شعاع معاملات أساس لوجندر المعدلة $\psi(x, t)$ شعاع أساس لوجندر

معاملات كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين f_{mn} مؤخوذة ب:

$$f_{mn} = \frac{\langle f(x, t), \psi_{mn}(x, t) \rangle}{\|\psi_{mn}(x, t)\|_2^2} \quad (30.2)$$

بنفس الطريقة، أي المعادلات $k_1 \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $k_2 \in L^2(\Omega \times [0, l])$ و $k_3 \in L^2(\Omega \times [0, T])$ بإمكانها أن تعوض بمصطلح كثير حدود لوجندر على التوالي :

$$k_1(x, t, y, z) \simeq \psi^T(x, t) K_1 \psi(y, z), \quad (31.2)$$



$$k_2(x, t, y) \simeq \psi^T(x, t) K_2 \psi(y, t), \quad (32.2)$$

$$k_3(x, t, z) \simeq \psi^T(x, t) K_3 \psi(x, z), \quad (33.2)$$

حيث K_1, K_2, K_3 مصفوفات من النوع $K_q = [K_q^{(i,m)}]_{i,m=0}^M$ $q = 1, 2, 3, ,$ في اللتي

$$K_q^{(i,m)} = [k_{ijmn}^q]_{j,n=0}^N, i, m = 0, 1, \dots, M, q = 1, 2, 3,$$

ومعاملات كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين k_{ijmn} حيث $q = 1, 2, 3$ معطات ب

$$k_{ijmn}^1 \frac{\langle \langle k_1(x, t, y, z), \psi_{mn}(y, z) \rangle, \psi_{ij}(x, t) \rangle}{\| \psi_{ij}(x, t) \|_2^2 \| \psi_{mn}(y, z) \|_2^2}, i, m = 0, 1, \dots, M, j, n = 0, 1, \dots, N$$

$$k_{ijmn}^2 \frac{\langle \langle k_2(x, t, y), \psi_{mn}(y, t) \rangle, \psi_{ij}(x, t) \rangle}{\| \psi_{ij}(x, t) \|_2^2 \| \psi_{mn}(y, t) \|_2^2}, i, m = 0, 1, \dots, M, j, n = 0, 1, \dots, N$$

$$k_{ijmn}^3 \frac{\langle \langle k_3(x, t, z), \psi_{mn}(x, z) \rangle, \psi_{ij}(x, t) \rangle}{\| \psi_{ij}(x, t) \|_2^2 \| \psi_{mn}(x, z) \|_2^2}, i, m = 0, 1, \dots, M, j, n = 0, 1, \dots, N$$

مثال

لتكن الدالة $f(x, t) = x^2 + t$ نقوم بتقريبها وفق أساس كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين .
ولدينا مما سبق العلاقة التالية :

$$f(x, t) \simeq \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N f_{ij} \psi_{ij}(x, t)$$

لما نأخذ $N = 3$ و $M = 3$ يصبح لدينا

$$\begin{aligned}
 x^2 + t &\simeq \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f_{mn} \psi_{mn}(x, t) \\
 &= f_{00} \psi_{00}(x, t) + f_{01} \psi_{01}(x, t) + f_{02} \psi_{02}(x, t) + f_{03} \psi_{03}(x, t) + \dots + f_{33} \psi_{33}(x, t) \\
 &= [f_{00}, f_{01}, f_{02}, f_{03}, \dots, f_{33}] \times \begin{bmatrix} \psi_{00}(x, t) \\ \psi_{01}(x, t) \\ \psi_{02}(x, t) \\ \psi_{03}(x, t) \\ \vdots \\ \psi_{33}(x, t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

الثوابت f_{mn} نجدهم كما موضح في العلاقة (42.2)

وقيم $\psi_{13}(x, t), \psi_{12}(x, t), \psi_{03}(x, t), \psi_{02}(x, t), \psi_{11}(x, t), \psi_{01}(x, t), \psi_{10}(x, t), \psi_{00}(x, t)$
 $\psi_{33}(x, t), \psi_{32}(x, t), \psi_{31}(x, t), \psi_{30}(x, t), \psi_{23}(x, t), \psi_{22}(x, t), \psi_{21}(x, t), \psi_{20}(x, t)$
 العلاقة (37.2)

حساب $f_{33}, f_{10}, f_{11}, f_{01}$ حتى نصل f_{33}

$$\begin{aligned}
 \text{بعد تطبيق العلاقة (42.2) نجد القيم التالية: } f_{10} = \frac{T^2}{2}, f_{03} = 0, f_{02} = 0, f_{01} = \frac{T}{2}, f_{00} = \frac{l^2}{3} + \frac{T}{2}, \\
 f_{31} = 0, f_{30} = 0, f_{23} = 0, f_{22} = 0, f_{21} = 0, f_{20} = \frac{l^2}{6}, f_{13} = 0, f_{12} = 0, f_{11} = 0 \\
 f_{33} = 0, f_{32} = 0
 \end{aligned}$$

ثم نقوم باتعويض قيم f_{mn} و ψ_{mn} في العلاقة المذكورة سابقا وبأخذ $T = 1$ و $l = 1$ نجد

$$x^2 + t \simeq \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 f_{mn} \psi_{mn}(x, t) \simeq x^2 + t$$

4.1.2 تحليل الخطأ

في هذا الجزء , نحن معنيون بتحليل التقارب للطريقة المطروحة . نبدأ بإعتبار الخطأ لتقريب المعادلة المعطاة بمتغيرين بدلالة تحويلها بدوال لوجندر ذات متغيرين .

نفترض أن الدالة $f(x, t)$ مقربة بدوال لوجندر بما فيه الكفاية على Ω و $p_{MN}(x, t)$ هي كثيرات الحدود المعرف إلى f في النقاط (x_i, t_j) , أين $x_i = 0, 1, \dots, M$ هي جذور ل $(M + 1)$ كثير حدود شيبشاف



في $[0, l]$ و $t_j = 0, 1, \dots, N$ هي جذور ل $(N + 1)$ كثير حدود شبيشاف في $[0, T]$ [9].

$$f(x, t) - P_{M,N}(x, t) = \frac{\partial^{M+1} f(\xi, t)}{\partial x^{M+1} (M+1)!} \prod_{i=0}^M (x - x_i) + \frac{\partial^{N+1} f(x, \eta)}{\partial t^{N+1} (N+1)!} \prod_{j=0}^N (t - t_j) - \frac{\partial^{M+N+2} f(\xi', \eta')}{\partial x^{M+1} \partial t^{N+1} (M+1)! (N+1)!} \prod_{i=0}^M (x - x_i) \prod_{j=0}^N (t - t_j)$$

أين $\xi, \xi' \in [0, l]$ و $\eta, \eta' \in [0, T]$ الناتج .

$$\begin{aligned} |f(x, t) - P_{M,N}(x, t)| &\leq \max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{M+1} f(x, t)}{\partial x^{M+1}} \right| \frac{\prod_{i=0}^M |x - x_i|}{(M+1)!} \\ &+ \max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{N+1} f(x, t)}{\partial t^{N+1}} \right| \frac{\prod_{j=0}^N |t - t_j|}{(N+1)!} \\ &+ \max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{M+N+2} f(x, t)}{\partial x^{M+1} \partial t^{N+1}} \right| \frac{\prod_{i=0}^M |x - x_i| \prod_{j=0}^N |t - t_j|}{(M+1)! (N+1)!} \end{aligned} \quad (34.2)$$

نفرض أن هناك أعداد حقيقية C_1, C_2, C_3 , على نحو

$$\max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial f^{M+1}(x, t)}{\partial x^{M+1}} \right| \leq C_1, \quad (35.2)$$

$$\max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial f^{N+1}(x, t)}{\partial t^{N+1}} \right| \leq C_2, \quad (36.2)$$

$$\max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{M+N+2} f(x, t)}{\partial x^{M+1} \partial t^{N+1}} \right| \leq C_3. \quad (37.2)$$

بتعويض (47.2) - (49.2) في (46.2) وأخذ بالحسبان التقدير ل شبيشاف نحصل على [10]

$$\begin{aligned} |f(x, t) - P_{M,N}(x, t)| &\leq C_1 \frac{(l/2)^{M+1}}{(M+1)! 2^M} \\ &+ C_2 \frac{(T/2)^{N+1}}{(N+1)! 2^N} \\ &+ C_3 \frac{(l/2)^{M+1} (T/2)^{N+1}}{(M+1)! (N+1)! 2^{(M+N)}}. \end{aligned} \quad (38.2)$$

بمساعدة (50.2) نتحصل على النتائج .

نظرية 3

لتكن f_{MN} تكتب بالتقريب حيث $\psi(x, t)$ أساس كثيرات حدود لوجندر المعدلة ذات متغيرين والمقربة بأساس لوجندر المعدل على النحو التالي : $f_{MN}(x, t) = F_{MN}^T \psi(x, t)$, و $f(x, t) \in \Omega$.

$$F_{M,N} = [f_{00}, \dots, f_{0N}, f_{10}, \dots, f_{1N}, \dots, f_{M0}, \dots, f_{MN}]^T \quad (39.2)$$



و

$$f_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \int_0^T \int_0^l f(x,t) \psi_{mn}(x,t) dx dt \quad (40.2)$$

توجد الأعداد الحقيقية C'_3 و C'_2 ، C'_1

$$\begin{aligned} \|f(x,t) - f_{M,N}(x,t)\|_2 &\leq C'_1 \frac{(l/2)^{M+1}}{(M+1)!2^M} \\ &+ C'_2 \frac{(T/2)^{N+1}}{(N+1)!2^N} \\ &+ C'_3 \frac{(l/2)^{M+1}(T/2)^{N+1}}{(M+1)!(N+1)!2^{(M+N)}}. \end{aligned} \quad (41.2)$$

البرهان 1

ليكن $X_{M,N}$ فضاء كثير الحدود من الدرجة $M \leq x$ ودرجة $N \leq t$. كما هو مبين في الجزء 2، $f_{M,N}$ هو أفضل تقريب ل f في $X_{M,N}$ ، والذي هو

$$\|f(x,t) - f_{M,N}(x,t)\|_2 \leq \|f(x,t) - g(x,t)\|_2$$

حيث $g(x,t)$ هو أي كثير الحدود التعسفي في $X_{M,N}$. وعلى وجه الخصوص، لدينا

$$\begin{aligned} \|f(x,t) - f_{M,N}(x,t)\|_2^2 &= \int_0^T \int_0^l |f(x,t) - f_{M,N}(x,t)|^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_0^l |f(x,t) - P_{M,N}(x,t)|^2 dx dt \end{aligned} \quad (42.2)$$

حيث $P_{M,N}$ هو كثير الحدود محرف ل f . ومن (50.2) و (54.2) نحصل على:

$$(43.2)$$

$$\begin{aligned} \|f(x,t) - f_{MN}(x,t)\|_2^2 &\leq \int_0^T \int_0^l C_1 \frac{(l/2)^{M+1}}{(M+1)!2^M} + C_2 \frac{(T/2)^{N+1}}{(N+1)!2^N} + C_3 \frac{(l/2)^{M+1}(T/2)^{N+1}}{(M+1)!(N+1)!2^{(M+N)}} \\ &= lT \left[C_1 \frac{(l/2)^{M+1}}{(M+1)!2^M} + C_2 \frac{(T/2)^{N+1}}{(N+1)!2^N} + C_3 \frac{(l/2)^{M+1}(T/2)^{N+1}}{(M+1)!(N+1)!2^{(M+N)}} \right] \end{aligned}$$

من العلاقة (55.2) نستنتج أن (53.2) صالحة، مع

$$C'_1 = \sqrt{lT}C_1, \quad C'_2 = \sqrt{lT}C_2, \quad C'_3 = \sqrt{lT}C_3.$$

-النظرية 1 تقدم لنا معلومات حول خطأ التقريب الأفضل للوظيفة السلسة في الفضاء $X_{M,N}$ (التي ينتمي إليها الحل العددي، المعطى في طريقتنا). ومع ذلك، ليس لدينا الآن أي نتائج تحليلية تتعلق بالمسافة بين



الحل العددي التي قدمها وطريقتنا و أفضل تقريب للحل الدقيق في $X_{M,N}$ لذلك لا يمكننا الحصول على تقدير خطأ لأسلوبنا . ومع ذلك , كما هو موضح في الجزء 6 تشير النتائج العددية التي تم الحصول عليها للحصول على أمثلة مختلفة (حيث يكون الحل الدقيق معروف) إلا أن قاعدة الخطأ للنتيجة العددية التي تم الحصول عليها من خلال طريقتنا ε_M تميل إلى الصفر مع التقارب نفسه معدل كقاعدة خطأ من أفضل تقريب من الحل الدقيق في $X_{M,M}$ (الرمز بواسطة $\bar{\varepsilon}_M$) .

في تجاربنا العددية , قنا بتقييم المسافة $\|f_{M,N} - \bar{f}_{M,N}\|$ بين أفضل تقريب للحل الدقيق في $X_{M,N}$ و الحل الرقمي $\bar{f}_{M,N}$. مع هذا الغرض نحن بحاجة إلى نظرية مساعدة .

نظرية 4

ليكن $f_{M,N}(x, t)$ و $\bar{f}_{M,N}(x, t)$ دالتين من $X_{M,N}$ والتي يمكن كتابتها على الشكل $f_{M,N} = F_{M,N}\psi(x, t)$ و $\bar{f}_{M,N} = \bar{F}_{M,N}\psi(x, t)$ على التوالي . ثم هناك $\alpha_{M,N} \geq 0$ على نحو

$$\|f_{M,N} - \bar{f}_{M,N}\|_2 \leq \alpha_{M,N} \|F_{M,N} - \bar{F}_{M,N}\|_2 \quad (44.2)$$

البرهان 2

لإثبات العلاقة (56.2) , نكتب

$$(45.2)$$

$$\begin{aligned} \|f_{M,N}(x, t) - \bar{f}_{M,N}(x, t)\|_2^2 &= \int_0^T \int_0^l |f_{M,N}(x, t) - \bar{f}_{M,N}(x, t)|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^l \left| \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (f_{mn} - \bar{f}_{m,n}) \psi_{mn}(x, t) \right|^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_0^l \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |f_{mn} - \bar{f}_{m,n}|^2 \right) \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |\psi_{mn}(x, t)|^2 \right) dx dt \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |f_{mn} - \bar{f}_{m,n}|^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \int_0^T \int_0^l |\psi_{mn}(x, t)|^2 dx dt \\ &= \|F_{M,N} - \bar{F}_{M,N}\|_2^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \|\psi_{mn}(x, t)\|_2^2 \\ &= \|F_{M,N} - \bar{F}_{M,N}\|_2^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \frac{lT}{(2m+1)(2n+1)} \\ &= lT \|F_{M,N} - \bar{F}_{M,N}\|_2^2 \left(\sum_{m=0}^M \frac{1}{2m+1} \right) \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$



بإدخال الجذر التربيعي على طرفين العلاقة (57.2) نجد :

(46.2)

$$\|f_{M,N}(x,t) - \bar{f}_{M,N}(x,t)\|_2 \leq \sqrt{lT \left(\sum_{m=0}^M \frac{1}{2m+1} \right) \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} \right) \|F_{M,N} - \bar{F}_{M,N}\|_2}$$

أخيرا من العلاقة (58.2) , نستنتج أن العلاقة (56.2) صالحة مع

$$\alpha_{M,N} = \sqrt{lT \left(\sum_{m=0}^M \frac{1}{2m+1} \right) \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} \right)}.$$

ملاحظة 5

ليكن $M = N$ و $l = T$ يصبح

$$\|f(x,t) - f_{M,M}(x,t)\|_2 \leq \left(C'_1 + C'_2 + \frac{C'_3}{(M+1)!2^{2M+1}} \right) \frac{1}{(M+1)!2^{2M+1}},$$

لأجل ذلك

$$\|f(x,t) - f_{M,M}(x,t)\|_2 = \mathcal{O} \left(\frac{1}{(M+1)!2^{2M+1}} \right), \quad (47.2)$$

ومنه $f_{M,M}(x,t)$ أحسن تقريب لـ $f(x,t)$.

2.2 مصفوفات العمليات للوجندر ذو متغيرين

1.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل

[6] تكامل شعاع أساس كثيرات حدود لوجندر $\psi(x,t)$ معرف في (41.2) يعطى بالعلاقة التالية:

$$\int_0^t \int_0^x \psi(x',t') dx' dt' \simeq Q_1 \psi(x,t) = (P_1 \otimes P_2) \psi(x,t) \quad (48.2)$$

حيث $x \in [0, l]$ و $t \in [0, T]$ نسمي Q_1 المصفوفة التنفيذية للتكامل لأساس لوجندر المعدل ذو متغيرين

المعرف من $[0, l]$ إلى $[0, T]$ و Q_1 من الرتبة $(M+1)(N+1) \times (M+1)(N+1)$

$$Q_1 \psi(x,t) = (P_1 \otimes P_2) \psi(x,t)$$



وحيث P_1 و P_2 هما المصفوفات التنفيذية للتكامل ذات متغير واحد فقط معرف على التوالي في $[0, l]$ و $[0, T]$

والمصفوفة التنفيذية للتكامل P_1 و P_2 تعطى بالشكل التالي [6]:

$$P_1 = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{2M-1} & 0 & \frac{1}{2M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2M+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (49.2)$$

$$P_2 = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{2N-1} & 0 & \frac{1}{2N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{2N+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (50.2)$$

و \otimes يسمى جداء كرونكور (Kronecker), A و B مصفوفتين [7]

$$A \otimes B = (a_{ij}B) \quad (51.2)$$

-تناظريا، نكتب

$$\int_0^x \psi(x', t) dx' \simeq Q_2 \psi(x, t), \quad (52.2)$$

$$\int_0^t \psi(x, t') dt' \simeq Q_3 \psi(x, t), \quad (53.2)$$



أين Q_2 و Q_3 هي مصفوفات من الرتبة $(M + 1)(N + 1) \times (M + 1)(N + 1)$ المعرفتان بالشكل التالي :

$$Q_2 = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} I & I & O & \dots & O & O & O \\ \frac{-I}{3} & O & \frac{I}{3} & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & \frac{-I}{2M-1} & O & \frac{I}{2M-1} \\ O & O & O & \dots & O & \frac{-I}{M+1} & O \end{bmatrix} \quad (54.2)$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} P_2 & O & O & \dots & O \\ O & P_2 & O & \dots & O \\ O & O & P_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & P_2 \end{bmatrix} \quad (55.2)$$

O و I هي مصفوفات من الدرجة $(N + 1)(N + 1)$ على التوالي .
و أحيانا نحتاج إلى مصفوفتين D_1 و D_2 على النحو التالي :

$$\psi(0, t) = D_1 \psi(x, t), \quad (56.2)$$

$$\psi(x, 0) = D_2 \psi(x, t), \quad (57.2)$$

أين

$$D_1 = \begin{bmatrix} I & O & O & \dots & O \\ -I & O & O & \dots & O \\ I & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^M I & O & O & \dots & O \end{bmatrix} \quad (58.2)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \omega & O & O & \dots & O \\ O & \omega & O & \dots & O \\ O & O & \omega & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & \omega \end{bmatrix} \quad (59.2)$$



$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (60.2)$$

2.2.2 المصفوفة الناتجة من جداء شعاعين أساس

عند بعض الحسابات يمكننا أن نصادف الكتابة $\psi(x, t)\psi^T(x, t)F$ ونقوم الآن بحسابها

$$\psi(x, t)\psi^T(x, t)F \simeq \tilde{F}\psi(x, t) \quad (61.2)$$

حيث F معرف في العلاقة (40.2) و \tilde{F} هي المصفوفة التنفيذية للجداء من الرتبة $(M + 1)(N + 1) \times (M + 1)(N + 1)$

$$\begin{aligned} \psi(x, t)\psi^T(x, t) &= \begin{bmatrix} \psi_{00}(x, t) \\ \psi_{01}(x, t) \\ \vdots \\ \psi_{MN}(x, t) \end{bmatrix} \times [\psi_{00}(x, t), \psi_{01}(x, t), \dots, \psi_{MN}(x, t)] \\ &= \begin{bmatrix} \psi_{00}(x, t)\psi_{00}(x, t) & \psi_{00}(x, t)\psi_{01}(x, t) & \cdots & \psi_{00}(x, t)\psi_{MN}(x, t) \\ \psi_{01}(x, t)\psi_{00}(x, t) & \psi_{01}(x, t)\psi_{01}(x, t) & \cdots & \psi_{01}(x, t)\psi_{MN}(x, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{MN}(x, t)\psi_{00}(x, t) & \psi_{MN}(x, t)\psi_{01}(x, t) & \cdots & \psi_{MN}(x, t)\psi_{MN}(x, t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\psi(x, t)\psi^T(x, t)F =$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{00}(x, t)\psi_{00}(x, t) & \psi_{00}(x, t)\psi_{01}(x, t) & \cdots & \psi_{00}(x, t)\psi_{MN}(x, t) \\ \psi_{01}(x, t)\psi_{00}(x, t) & \psi_{01}(x, t)\psi_{01}(x, t) & \cdots & \psi_{01}(x, t)\psi_{MN}(x, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{MN}(x, t)\psi_{00}(x, t) & \psi_{MN}(x, t)\psi_{01}(x, t) & \cdots & \psi_{MN}(x, t)\psi_{MN}(x, t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ \vdots \\ F_{MN} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_{00}(x, j)\psi_{ij}F_{ij} \\ \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_{01}(x, j)\psi_{ij}F_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_{MN}(x, j)\psi_{ij}F_{ij} \end{bmatrix}$$



نضع العبارة

$$\psi_{ij}(x, t)\psi_{kh}(x, t) = \sum_{r=0}^{i+k} \sum_{s=0}^{j+h} a_{rs}\psi_{rs}(x, t) \quad (62.2)$$

نستخرج المعاملات a_{rs} بالطريقة الموالية:ضرب طرفي المعادلة (73.2) في $\psi_{mn}(x, t)$,

$$,m = 0, 1, \dots, i + k$$

$$n = 0, 1, \dots, j + h$$

ونكامل النتيجة

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l \psi_{ij}(x, t)\psi_{kh}(x, t)\psi_{mn}(x, t)dxdt &= \\ \sum_{r=0}^{i+k} \sum_{s=0}^{j+h} a_{rs} \int_0^T \int_0^l \psi_{rs}(x, t)\psi_{mn}(x, t)dxdt & \quad (63.2) \\ = \frac{lT a_{mn}}{(2m+1)(2n+1)}, \end{aligned}$$

طريقة مفصلة توضح كيفية إستخراج المعاملات a_{rs} لتكن العلاقة التالية

$$\psi_{ij}(x, t)\psi_{kh}(x, t) = \sum_{r=0}^{i+k} \sum_{s=0}^{j+h} a_{rs}\psi_{rs}(x, t) \quad (64.2)$$

ملاحظة 6 - تم تغيير المعاملات من a_{rs} إلى المعاملات a_{mn} لأن في حالة تكامل جداء دالتين غير متساويتين دائماً يساوي 0 ويبقى إلا a_{mn}

وعليه فإن

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \left\langle \frac{\psi_{ij}\psi_{kh}\psi_{mn}(x, t)}{\|\psi_{mn}(x, t)\|^2} \right\rangle \\ &= \frac{\int_0^T \int_0^l \psi_{ij}\psi_{kh}\psi_{mn}(x, t)dxdt}{\|\psi_{mn}(x, t)\|^2} \\ &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \int_0^T \int_0^l \psi_{ij}(x, t)\psi_{kh}(x, t)\psi_{mn}(x, t)dxdt \\ &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \int_0^T \int_0^l p_i(x)p_j(t)p_k(x)p_h(t)p_m(x)p_n(t)dxdt \\ &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \int_0^T p_j(t)p_h(t)p_n(t)dt \int_0^l p_i(x)p_k(x)p_m(x)dx \\ &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \omega'_{j,h,n} \omega_{i,k,m} \end{aligned}$$



حيث: $\omega_{i,k,m}$ و $\omega'_{j,h,n}$ على التوالي:

$$\begin{aligned}\omega_{i,k,m} &= \int_0^l p_i(x)p_k(x)p_m(x)dx \\ \omega'_{j,h,n} &= \int_0^T p_j(t)p_h(t)p_n(x)dt\end{aligned}\quad (65.2)$$

- بإمكانها أن تحسب بطريقة سهلة وذلك بتعويض a_{mn} في المعادلة (75.2) يكون لدينا [8].

$$\psi_{ij}(x, t)\psi_{kh}(x, t) = \sum_{m=0}^{i+k} \sum_{n=0}^{j+h} \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \omega_{i,k,m} \omega'_{j,h,n} \psi_{mn}(x, t). \quad (66.2)$$

- إذا إحتفنا فقط بـ $\psi(x, t)$ في (41.2) فالمصفوفة \tilde{F} في (73.2) الظاهرة كما في التالي :

$$\tilde{F} = [F^{(i,j)}], i, j = 0, 1, \dots, M, \quad (67.2)$$

- على النحو المعادلة (79.2) . $F^{(i,j)}$, $i, j = 0, 1, \dots, M$ معطاة بـ.

$$F^{(i,j)} = \frac{2j+1}{l} \sum_{m=0}^M \omega_{i,j,m} A_m, \quad (68.2)$$

و A_m , $m = 0, 1, \dots, M$ من $(N+1) \times (N+1)$ مصفوفات على الشكل :

$$[A_m]_{kh} = \frac{2h+1}{T} \sum_{n=0}^N \omega'_{k,h,n} f_{mn}, k, h = 0, 1, \dots, N. \quad (69.2)$$

أين $K = [K^{(i,j)}]$, $i, j = 0, 1, \dots, M$ مصفوفة $(M+1)(N+1) \times (M+1)(N+1)$

$$K^{(i,j)} = [k_{imjn}]_{m,n=0}^N, i, j = 0, 1, \dots, M, \quad (70.2)$$

لدينا

$$\psi^T(x, t)K\psi(x, t) \simeq \hat{K}\psi(x, t), \quad (71.2)$$

حيث \hat{K} هي $1 \times (M+1)(N+1)$ شعاع معرف بـ

$$\hat{K} = [K_{00}, \dots, K_{0N} K_{10}, \dots, K_{1N}, \dots, K_{M0}, \dots, K_{MN}], \quad (72.2)$$

و

$$K_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{lT} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \sum_{r=0}^M \sum_{s=0}^N \omega_{i,r,m} \omega'_{j,s,n} K_{ijrs}, \quad (73.2)$$

$$m = 0, 1, \dots, M, n = 0, 1, \dots, N.$$

الفصل الثالث

تطبيق الطريقة الجديدة

قائمة المحتويات

33	حل معادلة تكاملية غير خطية لفولتيرا ذات متغيرين
37	تطبيقات عددية

1.3 حل معادلة تكاملية غير خطية لفولتيرا ذات متغيرين

في هذا الجزء, نقدم الطريقة العددية من أجل حل المعادلة التكاملية غير الخطية لفولتيرا ذات المتغيرين من الشكل :

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & \int_0^t \int_0^x k_1(x, t, y, z) H(y, z, U(y, z)) dy dz \\
 & + \int_0^x k_2(x, t, y) G(y, t, U(y, t)) dy \\
 & + \int_0^t k_3(x, t, z) (F(x, z, U(x, z))) dz \\
 & + R(x, t), (x, t) \in [0, l] \times [0, T],
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

لهذا الغرض , نفترض أنه

$$H_1(x, t) = H(x, t, U(x, t)), \tag{2.3}$$

$$G_1(x, t) = G(x, t, U(x, t)), \tag{3.3}$$

$$F_1(x, t) = F(x, t, U(x, t)). \tag{4.3}$$

باستعمال المعادلات (2.3) – (4.3) , المعادلة (1.3) يمكن كتابتها

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & \int_0^t \int_0^x k_1(x, t, y, z) H_1(y, z) dy dz + \int_0^x k_2(x, t, y) G_1(y, t) dy \\
 & + \int_0^t k_3(x, t, z) F_1(x, z) dz + R(x, t).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

نقوم بتقريب الدوال في المعادلة (5.3) باستخدام الطريقة المذكورة في الفصل السابق

$$U(x, t) \simeq D^T \psi(x, t) \tag{6.3}$$

$$H_1(x, t) \simeq A^T \psi(x, t) \tag{7.3}$$

$$G_1(x, t) \simeq B^T \psi(x, t) \tag{8.3}$$

$$F_1(x, t) \simeq C^T \psi(x, t) \tag{9.3}$$



$$R(x, t) \simeq E^T \psi(x, t) \quad (10.3)$$

$$k_1(x, t, y, z) \simeq \psi^T(x, t) K_1 \psi(y, z) \quad (11.3)$$

$$k_2(x, t, y) \simeq \psi^T(x, t) K_2 \psi(y, t) \quad (12.3)$$

$$k_3(x, t, z) \simeq \psi^T(x, t) K_3 \psi(x, z) \quad (13.3)$$

أين الأشعة A, B, C و D من الدرجة $1 \times [(M + 1)(N + 1)]$ غير معروفة لأنها تتكون من دوال مجهولة , والأشعة E, K_1, K_2, K_3 معروفة لأنها تتكون من دوال معلومة . بتعويض المعادلات (6.3) – (13.3) في المعادلة (5.3) , نحصل على

$$\begin{aligned} D^T \psi(x, t) &= \psi^T(x, t) K_1 \int_0^t \int_0^x \psi(y, z) \psi^T(y, z) A dy dz \\ &+ \psi^T(x, t) K_2 \int_0^x \psi(y, t) \psi^T(y, t) B dy \\ &+ \psi^T(x, t) K_3 \int_0^t \psi(x, z) \psi^T(x, z) C dz \\ &+ E^T \psi(x, t), \end{aligned}$$

وباستعمال المعادلات (60.2), (64.2), (65.2) , (73.2) يكون لدينا

$$\begin{aligned} D^T \psi(x, t) &= \psi^T(x, t) K_1 \tilde{A} Q_1 \psi(x, t) \\ &+ \psi^T(x, t) K_2 \tilde{B} Q_2 \psi(x, t) \\ &+ \psi^T(x, t) K_3 \tilde{C} Q_3 \psi(x, t) + E^T \psi(x, t). \end{aligned} \quad (14.3)$$

دعنا نعرف

$$\Lambda_1 = K_1 \tilde{A} Q_1$$

$$\Lambda_2 = K_2 \tilde{B} Q_2$$

$$\Lambda_3 = K_3 \tilde{C} Q_3$$

نضع التقريب (83.2) في (14.3) نحصل على

$$D^T - \hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_2 - \hat{\Lambda}_3 - E^T = 0 \quad (15.3)$$

مع الأخذ بعين الإعتبار (2.3) – (4.3) و (6.3) , المعادلات (7.3) – (9.3) يمكن أن تعاد كتابتها على الشكل التالي :

$$H(x, t, D^T \psi(x, t)) = A^T \psi(x, t) \quad (16.3)$$

$$G(x, t, D^T \psi(x, t)) = B^T \psi(x, t) \quad (17.3)$$

$$F(x, t, D^T \psi(x, t)) = C^T \psi(x, t) \quad (18.3)$$

مجموع المعادلات (16.3) – (18.3) في $(N + 1)(M + 1)$ النقاط $(x_i, t_j) (i = 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, N)$ تعطي

$$H(x_i, t_j, D^T \psi(x_i, t_j)) - A^T \psi(x_i, t_j) = 0, \quad (19.3)$$

$$G(x_i, t_j, D^T \psi(x_i, t_j)) - B^T \psi(x_i, t_j) = 0, \quad (20.3)$$

$$F(x_i, t_j, D^T \psi(x_i, t_j)) - C^T \psi(x_i, t_j) = 0, \quad (21.3)$$

أين x_i و t_j هي أصفار ل $L_{M+1}(\frac{2}{l}x - 1)$ و $L_{N+1}(\frac{2}{T}t - 1)$ على التوالي . المعادلات (15.3) و (19.3) – (21.3) تشكل جملة معادلات ل $4(M + 1)(N + 1)$ المعادلات الغير خطية التي يمكن حلها من أجل العناصر A, B, C و D بإستعمال طريقة نيوتن التكرارية المعروفة .

1.1.3 التطبيق

في هذا الجزء , يتم تقديم نوعين من المعادلات التفاضلية الجزئية التي يمكن إعادة صياغتها على أنها معادلة تكاملية لفلتيرا ذات متغيرين . لذلك يمكننا تطبيق الطريقة المقدمة لهذا النوع من المعادلات .

-مشكلة كوشي :

النظر في مشكلة كوشي غير الخطية [11]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} + \frac{\partial}{\partial t'} (f(x', t', u)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial x'} (g(x', t', u)) + h(x', t', u) \quad (22.3)$$

مع $(x', t') \in W := \{(x', t') : x' - t' \geq 0, x' + t' \geq 0\}$ ويخضع ل

$$u(x', x') = \alpha(x') \quad \text{و} \quad u(t', -t') = \beta(t').$$

[11] قام الكاتبون بتغيير المتغيرات $y = x' + t'$, $z = x' - t'$ تثبت أن العلاقة (22.3) تكافئ المعادلة التكاملية لفلتيرا ذات المتغيرين

$$U(x, t) = \int_0^t \int_0^x H(y, z, U(y, z)) dy dz + \int_0^x (G(y, t, U(y, t)) - G(y, 0, U(y, 0))) dy \quad (23.3)$$

$$+ \int_0^t (F(x, z, U(x, z)) - F(0, z, U(0, z))) dz + R(x, t), \quad (24.3)$$

حيث

$$U(y, z) = u((y + z)/2, (y - z)/2),$$

$$F(y, z, U) = (f((y + z)/2, (y - z)/2, U) - g((y + z)/2, (y - z)/2, U))/4,$$

$$G(y, z, U) = -(f((y + z)/2, (y - z)/2, U) + g((y + z)/2, (y - z)/2, U))/4,$$

$$H(y, z, u) = -h((y + z)/2, (y - z)/2, U))/4,$$

$$R(x, t) = \alpha(x/2) + \beta(t/2) - \alpha(0).$$

في الحالة الخاصة عندما يتم الحصول على معادلة تلغراف القسري $f(x', t', u) \equiv u$ و $g(x', t', u) \equiv 0$ في الحالة الخاصة عندما يتم الحصول على معادلة تلغراف القسري [11].

سيتم النظر في معادلة النموذج (23.3) في المثال 1 .
- (مشكلة داربوا)

النظر في مشكلة داربوا [12]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = H(x, t, U),$$

بالشروط الأولية

$$U(x, 0) = f_1(x), \quad U(0, t) = f_2(t), \quad (x, t) \in \Omega,$$

يتم إعطاء f_1 و f_2 دوال مستمرة في $\Omega[0, 1] \times [0, 1]$ حيث $f_1(0) = f_2(0)$. يتبين أن هذه المشكلة تكافئ المعادلة التكاملية لفلتيرا ذات متغيرين الموضحة

$$U(x, t) = \int_0^t \int_0^x H(y, z, U(y, z)) dy dz + R(x, t),$$

حيث

$$R(x, t) = f_1(x) + f_2(t) - f_1(0).$$

2.3 تطبيقات عددية

في هذا الجزء , سنقدم بعض الأمثلة لبرهان قابلية تطبيق طريقتنا .
لتوضيح خطأ الطريقة , نضع الرموز :

$$E_{M,N}(x, t) = |U(x, t) - U_{M,N}(x, t)|, \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$e_{M,N}(x, t) = |U(x, t) - \bar{U}_{M,N}(x, t)|, \quad (x, t) \in \Omega,$$

حيث $U_{M,N}(x, t), U(x, t)$ هي الحل الدقيق و $\bar{U}_{M,N}(x, t)$ هي الحل الدقيق و $e_{M,N}(x, t)$ هي الفرق بين الحل الدقيق والتقريب , وتقريبه بإستعمال معدلات لوجندر ذو متغيرين و الحل محسوب بالطريقة المقدمة , على التوالي . يتم الإعلان عن القيم المطلقة للأخطاء $e_{M,N}(x, t)$ في بعض نقاط الشبكة المحددة للحصول على الأمثلة . تم إجراء الحسابات على جهاز الكمبيوتر شخصي وذلك بإستخدام معالج بسرعة 2.20 غيغاهرتز وكتبت الرموز في *Mathematica8* .

في جميع الأمثلة المقدمة في هذا الجزء لدينا $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ و $M = N$. نقدم الرموز التالية

$$\varepsilon_M = \|E_{M,M}(x, t)\|_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_M = \|e_{M,M}(x, t)\|_2,$$

$$\gamma_M = \frac{1}{(M+1)!2^{2M+1}},$$

$$\beta_M = \|D_{M,M} - \bar{D}_{M,M}\|_2, \quad (25.3)$$

لمقارنة النتائج العددية مع التحليل النظري للخطأ . في العلاقة (25.3) , $D_{M,M}$ هي شعاع المعاملات الأفضل تقريبا و $\bar{D}_{M,M}$ هي شعاع المعاملات للحل المحسوب . لاحظ أنه , وفقا (22.3) , فإن ل γ_M نفس السلوك غير المقارب مثل $\|f(x, t) - f_{M,M}(x, t)\|_2$, حيث f عبارة عن دالة سلسلة $f_{M,M}$ هي أفضل تقريب لها في $X_{M,M}$.

يتم تعريف القيمة $\alpha_{M,M}$ المعروضة في الجداول 2, 4, 6, 8, 10 بواسطة النظرية 2 . نلاحظ أنه وفقا لهذه النظرية , يجب أن يكون لدينا $\|U_{M,M} - \bar{U}_{M,M}\|_2 \leq \alpha_{M,M}\beta_M$ وبالتالي $\bar{\varepsilon}_M \leq \varepsilon_M + \alpha_{M,M}\beta_M$, وهو ماتؤكد النتائج في الجداول .

مثال 1 المعادلة التالية هي المعادلة التكاملية غير الخطية لي فولتيرا ذات متغيرين في حالة معينة ل (23.3)

وتم تحليلها في [11]:

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & \int_0^t \int_0^x \frac{1}{4} \left(\sin U(y, z) \cos \left(\frac{y-z}{2} \right) \sin \left(\frac{y+z}{2} \right) \right. \\
 & + \cos U(y, z) \sin \left(\frac{y-z}{2} \right) \cos \left(\frac{y+z}{2} \right) \left. dydz \right. \\
 & - \int_0^x \frac{1}{4} (\sin U(y, t) + \cos U(y, t) - \sin U(y, 0) - \cos U(y, 0)) dy \quad (26.3) \\
 & + \int_0^t \frac{1}{4} (\cos U(x, z) - \sin U(x, z) - \cos U(0, z) + \sin U(0, z)) dz \\
 & + \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{t}{2};
 \end{aligned}$$

الحل الدقيق هو $U(x, t) = \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) \sin\left(\frac{x+t}{2}\right)$. وذلك وفق M, M من أجل حساب الخطأ لدينا

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^{M+1} U(x, t)}{\partial x^{M+1}} \right| & \leq \frac{1}{2} \left| \cos \left(\frac{x-t}{2} \right) \cos \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \left| \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) \sin \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \\
 \left| \frac{\partial^{M+1} U(x, t)}{\partial t^{M+1}} \right| & \leq \frac{1}{2} \left| \cos \left(\frac{x-t}{2} \right) \cos \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \left| \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) \sin \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,
 \end{aligned}$$

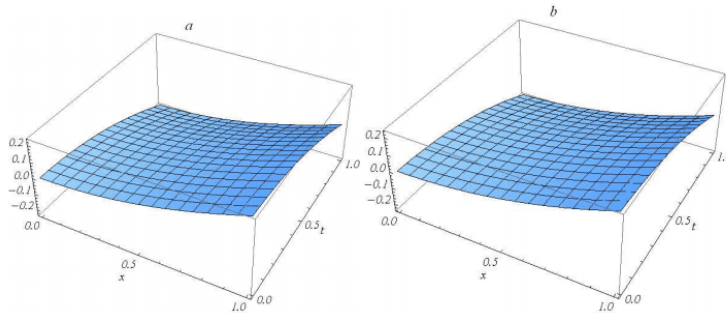
و

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^{M+1} U(x, t)}{\partial x^{M+1}} \right| & \leq \frac{1}{2} \left| \cos \left(\frac{x+t}{2} \right) \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \left| \cos \left(\frac{x-t}{2} \right) \sin \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \\
 \left| \frac{\partial^{M+1} U(x, t)}{\partial t^{M+1}} \right| & \leq \frac{1}{2} \left| \cos \left(\frac{x+t}{2} \right) \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \left| \cos \left(\frac{x-t}{2} \right) \sin \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,
 \end{aligned}$$

وأخيرا وفقا للمناقشة النظرية للخطأ نجد

$$C'_1 = 1, \quad C'_2 = 1.$$

عرض النتائج العددية في الجدول 1.3 و الجدول 2.3. ويتم رسم الحل الدقيق $U(x, t)$ والحل التقريبي مع $M = 2$ في الشكل 1.3.



شكل 1.3: حل الدالة $U(x, t)$ في المثال b ; التقريبي مع $M = 2$

جدول 1.3: النتائج العددية للمثال 1

$M=6$	$M=4$	$M=2$	(x,t)
2.4×10^{-8}	2.9×10^{-6}	8.2×10^{-4}	(0,1,0,2)
7.5×10^{-8}	4.0×10^{-6}	1.1×10^{-3}	(0,2,0,6)
1.6×10^{-8}	1.7×10^{-6}	2.3×10^{-4}	(0,3,0,4)
9.8×10^{-8}	8.1×10^{-6}	5.8×10^{-4}	(0,4,0,9)
4.5×10^{-8}	5.4×10^{-6}	9.5×10^{-4}	(0,5,0,8)
1.1×10^{-8}	1.6×10^{-6}	4.1×10^{-4}	(0,6,0,7)
3.2×10^{-8}	4.4×10^{-7}	1.0×10^{-3}	(0,7,0,5)
1.8×10^{-8}	7.4×10^{-6}	2.9×10^{-3}	(0,8,0,1)
1.4×10^{-7}	1.7×10^{-5}	2.4×10^{-4}	(0,9,0,1)
1.3×10^{-7}	9.6×10^{-7}	1.2×10^{-3}	(1,0,0,3)

 جدول 2.3: أخطاء L_2 للمثال 1

6	4	2	M
1	1	1	C'_1
1	1	1	C'_2
2.42203×10^{-8}	1.62760×10^{-5}	5.20833×10^{-3}	γ_M
1.27697×10^{-8}	3.35755×10^{-6}	1.06004×10^{-3}	ε_M
1.95513	1.78730	1.53333	$\alpha_{M,M}$
1.30369×10^{-7}	9.81623×10^{-6}	8.02737×10^{-5}	β_M
9.70179×10^{-8}	6.52271×10^{-6}	1.06096×10^{-3}	$\bar{\varepsilon}_M$

مثال 2 نعتبر المعادلة التكاملية غير الخطية لفولتيرا ذات المتغيرين

$$U(x, t) = \int_0^t \int_0^x (y^2 + z^2) U^2(y, z) dy dz + \int_0^x U(y, t) dy + \int_0^t U^3(x, z) dz + R(x, y),$$

حيث $K_3 = 1, K_2 = 1, K_1 = (y^2 + z^2)$

$$R(x, t) = -\frac{4}{3}x^3(2 + \cos t) \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) + x \sin t - \frac{1}{2}x^2 \sin t + \frac{1}{20}x^5(-2t + \sin(2t))$$

$$+ \frac{1}{72}x^3(-4t^3 + 6t \cos(2t) + (-3 + 6t^2) \sin(2t)),$$

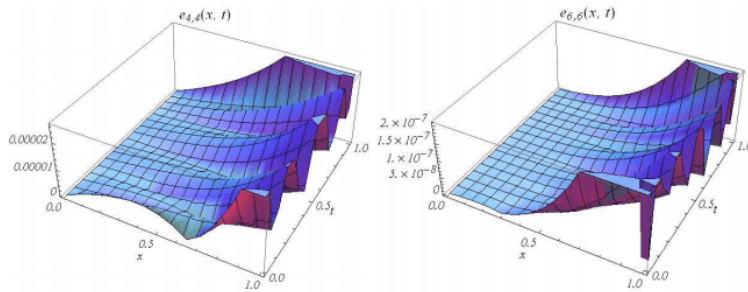
ولديه الحل الدقيق $U(x, t) = x \sin t$. لقد طبقنا الطريقة الواردة في هذه الورقة على المعادلة. وتظهر النتائج العددية المتوصل إليها في الجدول 3.3، الجدول 4.3، الشكل 2.3 والشكل 3.3.

جدول 3.3: الحل العددي للمثال 2

$M=6$	$M=4$	$M=2$	$t) (x,$
9.3×10^{-10}	1.1×10^{-6}	3.8×10^{-5}	(0.1 ,0.1)
2.7×10^{-9}	6.6×10^{-7}	5.2×10^{-4}	(0.2 ,0.2)
5.2×10^{-9}	2.7×10^{-6}	9.5×10^{-4}	(0.3 ,0.3)
5.5×10^{-9}	3.0×10^{-6}	7.1×10^{-4}	(0.4 ,0.4)
2.1×10^{-8}	2.5×10^{-6}	2.8×10^{-4}	(0.5 ,0.5)
2.8×10^{-8}	9.1×10^{-6}	1.7×10^{-3}	(0.6 ,0.6)
4.4×10^{-8}	6.3×10^{-6}	2.8×10^{-3}	(0.7 ,0.7)
7.8×10^{-8}	1.0×10^{-5}	2.6×10^{-3}	(0.8 ,0.8)
1.3×10^{-7}	1.9×10^{-5}	2.4×10^{-4}	(0.9 ,0.9)
4.8×10^{-7}	6.3×10^{-5}	7.5×10^{-3}	(1.0 ,1.0)

جدول 4.3: الحل العددي للمثال 2

6	4	2	M
0	0	0	C'_1
1	1	1	C'_2
2.42203×10^{-8}	1.62760×10^{-5}	5.20833×10^{-3}	γ_M
1.39388×10^{-8}	5.00479×10^{-6}	1.57477×10^{-3}	ε_M
1.95513	1.78730	1.53333	$\alpha_{M,M}$
3.62856×10^{-7}	3.38611×10^{-5}	1.43427×10^{-3}	β_M
6.61371×10^{-8}	8.99625×10^{-6}	1.65234×10^{-3}	$\bar{\varepsilon}_M$


 شكل 2.3: مخطط المعادلة $e_{M,M}(x,t)$ في المثال 2 ; اليسار : $M = 4$, اليمين : $M = 6$

مثال 3 [12] نعتبر المعادلة التكاملية لفولتيرا غير الخطية ذات متغيرين [?]

$$U(x, t) = \int_0^t \int_0^x (x + t - y - z)U^2(y, z)dydz + x + t - \frac{1}{12}xt(x^3 + 4x^2t + 4xt^2 + t^3).$$

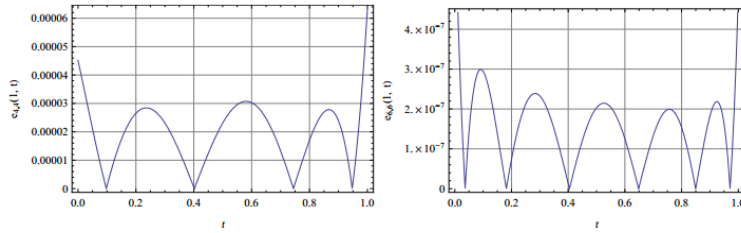
حيث

$$K_1 = (x + t - y - z)$$

$$K_2 = 0$$

$$K_3 = 0$$

$$R(x, t) = x + t - \frac{1}{12}xt(x^3 + 4x^2t + 4xt^2 + t^3)$$



شكل 3.3: مخطط المعادلة $e_{M,M}(1, t)$ في المثال 2 ; اليسار : $M = 4$, اليمين : $M = 6$

الحل الدقيق هو $U(x, t) = x + t$. في الجدول 6.3 يتم عرض العددية لهذا المثال مع $M = 1, 2$ مع النتائج التي تم الحصول عليها في باستخدام دالة (Haar) ذات متغيرين [12]. الأخطاء L_2 تم الإعلان عنها في الجدول 6.3 . نلاحظ أن الطريقة العددية عند أخذ $M = 3$ تعطي الحل الدقيق , والذي يتبع من حقيقة أن $U(x, t)$ كثير حدود من الدرجة الأولى في x و t .

جدول 5.3: الحل العددي للمثال 3

تقريب بطريقة المقال $m=32$	الطريقة الحالية $M=2$	الطريقة الحالية $M=1$	$(x, t) = (\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i})$
	1.3×10^{-2}	9.9×10^{-2}	$i=0$
3.1×10^{-2}	3.5×10^{-3}	7.9×10^{-4}	$i=1$
3.1×10^{-2}	4.5×10^{-4}	9.5×10^{-3}	$i=2$
3.1×10^{-2}	6.1×10^{-4}	5.0×10^{-3}	$i=3$
3.1×10^{-2}	5.7×10^{-4}	3.4×10^{-4}	$i=4$
3.1×10^{-2}	3.6×10^{-4}	2.6×10^{-3}	$i=5$
2.2×10^{-9}	2.0×10^{-4}	4.2×10^{-3}	$i=6$

 جدول 6.3: الخطأ L_2 للمثال 3

3	2	1	M
0	0	0	C'_1
0	0	0	C'_2
3.25521×10^{-4}	5.20833×10^{-3}	6.25000×10^{-2}	γ_M
0	0	0	ε_M
1.67619	1.53333	1.33333	$\alpha_{M,M}$
0	6.71749×10^{-3}	6.14194×10^{-2}	β_M
0	2.48064×10^{-3}	2.57175×10^{-2}	$\bar{\varepsilon}_M$

مثال 4 نعتبر المعادلة التكاملية الخطية ذات متغيرين

$$U(x, t) = \int_0^t (x^2 e^{-2z}) U(x, z) dz + x^2 (-1 + e^{-t} + x^2 + e^t - x^2 e^t),$$

حيث أن

$$K_1 = 0$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = x^2 e^{-2z}$$

$$R(x, t) = x^2 (-1 + e^{-t} + x^2 + e^t - x^2 e^t)$$

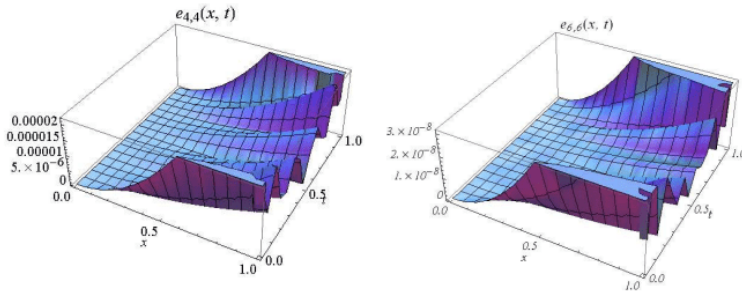
لديها الحل الدقيق $U(x, t) = x^{x^2 e^t}$. ونوضح النتائج العددية في الجدول 7.3 و الجدول 8.3 و الشكل 4.3 و 5.3.

جدول 7.3: النتائج العددية للمثال 4

$M=6$	$M=4$	$M=2$	(x,t)
1.3×10^{-9}	2.0×10^{-7}	2.9×10^{-5}	(0.1,0.1)
5.8×10^{-9}	4.7×10^{-7}	1.6×10^{-4}	(0.2,0.2)
1.3×10^{-8}	9.5×10^{-7}	4.9×10^{-4}	(0.3,0.3)
2.3×10^{-8}	2.4×10^{-6}	5.8×10^{-4}	(0.4,0.4)
3.6×10^{-8}	3.4×10^{-7}	1.5×10^{-5}	(0.5,0.5)
5.2×10^{-8}	4.9×10^{-6}	1.3×10^{-3}	(0.6,0.6)
7.0×10^{-8}	5.6×10^{-6}	3.0×10^{-3}	(0.7,0.7)
9.1×10^{-8}	6.9×10^{-6}	3.4×10^{-3}	(0.8,0.8)
1.1×10^{-7}	1.7×10^{-5}	6.2×10^{-4}	(0.9,0.9)
1.4×10^{-7}	6.4×10^{-5}	1.4×10^{-2}	(1.0,1.0)

 جدول 8.3: أخطاء L_2 للمثال 4

6	4	2	M
0	0	0	C'_1
2.71829	2.71829	2.71829	C'_2
2.42203×10^{-8}	1.62760×10^{-5}	5.20833×10^{-3}	γ_M
1.54843×10^{-8}	7.42911×10^{-6}	2.35947×10^{-3}	ε_M
1.95513	1.78730	1.53333	$\alpha_{M,M}$
2.71113×10^{-8}	5.75190×10^{-6}	6.69639×10^{-4}	β_M
1.60187×10^{-8}	7.58967×10^{-6}	2.38230×10^{-3}	$\bar{\varepsilon}_M$


 شكل 4.3: مخطط المعادلة $e_{M,M}(x,t)$ في المثال 4 ; اليسار : $M = 4$, اليمين : $M = 6$

مثال 5 نعتبر المعادلة التكاملية غير الخطية لفولتيرا ذات متغيرين [12, 13]

$$U(x,t) = \int_0^t \int_0^x U^2(y,z) dy dz + x^2 t^2 - \frac{1}{45} x t (9x^4 + 10x^2 t^2 + 9t^4).$$

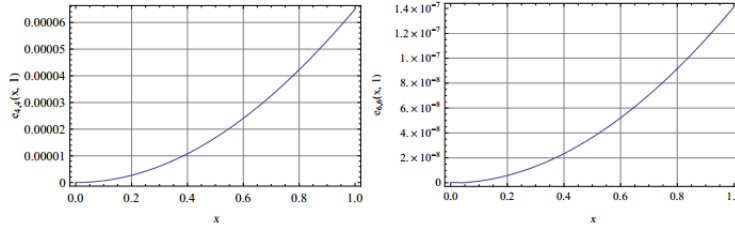
حيث

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = 0$$

$$K_3 = 0$$

$$R = x^2 t^2 - \frac{1}{45} x t (9x^4 + 10x^2 t^2 + 9t^4)$$


 شكل 5.3: مخطط المعادلة $e_{M,M}(x, 1)$ في المثال 4 ; اليسار : $M = 4$, اليمين : $M = 6$

الحل الدقيق لهذه المعادلة هو $U(x, t) = x^2 + t^2$ ويوضح الجدول 9.3 والجدول 10.3 النتائج العددية التي تم الحصول عليها هنا [12] لهذا المثال. الحل الصريح من أجل $M = 4$ وذلك لأن الدالة $U(x, t)$ هي كثير حدود من الدرجة الثانية بدلالة x و t .

جدول 9.3: النتائج العددية للمثال 5

$m=32$	$M=2$	$M=1$	$(x, t) = (\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i})$
	1.4×10^{-3}	1.3×10^{-2}	$i=0$
3.2×10^{-2}	2.8×10^{-6}	3.6×10^{-3}	$i=1$
1.6×10^{-2}	1.7×10^{-4}	4.7×10^{-4}	$i=2$
8.5×10^{-3}	1.3×10^{-5}	6.1×10^{-4}	$i=3$
4.6×10^{-3}	3.5×10^{-5}	6.1×10^{-4}	$i=4$
2.6×10^{-3}	3.2×10^{-5}	4.1×10^{-4}	$i=5$
1.6×10^{-4}	1.9×10^{-5}	2.6×10^{-4}	$i=6$

جدول 10.3: الأخطاء L_2 للمثال 5

6	4	2	M
0	0	0	C'_1
0	0	0	C'_2
1.62760×10^{-5}	3.25521×10^{-4}	5.20833×10^{-3}	γ_M
0	0	0	ε_M
1.78730	1.67619	1.53333	$\alpha_{M,M}$
0	8.08042×10^{-4}	7.16616×10^{-3}	β_M
0	2.49049×10^{-4}	2.63807×10^{-3}	$\bar{\varepsilon}_M$

خاتمة

في هذه المذكرة قدمنا طريقة لحل معادلة تكاملية لفولتيرا غير الخطية ذات متغيرين بأخذ التحليل باستعمال كثيرات حدود لوجندر المعدلة إلى $[0, 1]$ حيث كان الدافع وراء إختيارنا لكثيرات الحدود هته هي نتائج التقريب المعطاة في الفصل الثاني و قد أظهرت النتائج المدونة في الامثلة العددية في الفصل الثالث مدى فاعلية الطريقة ، بحث أن الخطأ كان صغيرا ، نوصي باستعمال هذه الطريقة لحل جميع المعادلات التكاملية و التفاضلية.

أدريان ماري لوجندر :

الميلاد: 18 سبتمبر 1752 باريس , فرنسا

الوفاة: 10 يناير 1833 (80 سنة) باريس , فرنسا

الإقامة: فرنسا

الجنسية: فرنسي

هو عالم كان له دور معطاء في عدة فروع من الرياضيات ومنها الإحصاء ونظرية العداد والجبر التجريدي والتحليل الرياضي.

عضو في الجمعية الملكية , والأكاديمية الفرنسية للعلوم , والأكاديمية الأمريكية للفنون والعلوم, و الأكاديمية البروسية للعلوم

المراجع العلمية

- [1] S.KRASNOV ,A.KISSLEV ,G.MAKARENKO ,EQUATIONS INTGRALES ,PROBLMES ET EXERCICES ; DITIONS MIR ,MOSCOU ,1981..
- [2] ABDUL-MAJID WAZWAZ ,LINEAR AND NON- LINEAR INTEGRAL EQUATIONS METHODS AND APPLICATIONS ,SAIT XAVIER UNIVERSITY CHICAGO .USA. 2011., Saitxavieruniversitychicago.USA.
- [3] MALEKNEJAD, K., SOHRABI, S., AND BARANJI, B. APPLICATION OF 2D-BPFs TO NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS, COMMON NONLINEAR SCI NUMER SIMULAT, 2010 15(3), 528-535.
- [4] M. H. AKRAMI, M. H. ATABAKZADEH AND G. H. ERJAEI, “THE OPERATIONAL MATRIX OF FRACTIONAL INTEGRATION FOR SHIFTED LEGENDRE POLYNOMIALS” IRANIAN JOURNAL OF SCIENCE TECHNOLOGY,IJST (2013) 37A4: 439-444.
- [5] E. KREYSZIG, INTRODUCTORY FUNCTIONAL ANALYSIS WITH APPLICATIONS, JOHN WILEY AND SONS, 1989.
- [6] R.Y. CHANG, M.L. WANG, SHIFTED LEGENDRE DIRECT METHOD FOR VARIATIONAL PROBLEMS, J. OPTIM. THEORY. APPL. 39 (1983) 299–307.
- [7] P. LANCASTER, THE THEORY OF MATRICES: WITH APPLICATIONS, SECOND ED., ACADEMIC PRESS, NEW YORK, 1984.
- [8] C. HWANG, M. Y. CHEN, A DIRECT APPROACH USING THE SHIFTED LEGENDRE SERIES EXPANSION FOR NEAR OPTIMUM CONTROL OF LINEAR

- TIME-VARYING SYSTEMS WITH MULTIPLE STATE AND CONTROL DELAYS, INT. J. CONTROL 43 (1986) 1673–1692.
- [9] M. GASEA, T. SAUER, ON THE HISTORY OF MULTIVARIATE POLYNOMIAL INTERPOLATION, J. COMPUT. APPL. MATH. 122 (2000) 23–35.
- [10] J.C. MASON, D.C. HANDSCOMB, CHEBYSHEV POLYNOMIALS, CRC PRESS LLC, 2003.
- [11] S. MCKEE, T. TANG, T. DIOGO, AN EULER-TYPE METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND, IMA J. NUMER. ANAL. 20 (2000) 423–440.
- [12] E. BABOLIAN, S. BAZM, P. LIMA, NUMERICAL SOLUTION OF NON-LINEAR TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS USING RATIONALIZED HAAR FUNCTIONS, COMMUN. NONL. SCI. NUMER. SIMUL. 16 (3) (2011) 1164–1175.
- [13] G.Q. HAN, K. HAYAMI, K. SUGIHARA, J. WANG, EXTRAPOLATION METHOD OF ITERATED COLLOCATION SOLUTION FOR TWO-DIMENSIONAL NON-LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATION. APPL MATH COMPUT 112 (2000) 49 - 61.
- [14] S. NEMATI, *Y. ORDOKHANI: ALZAHRA UNIVERSITY.
-



الملخص:

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم أشكال من مصفوفات العمليات (التكامل وناتج الجداء) لكل من كثيرات حدود لوجندر المعدل والتي تظهر في الطرائق العددية لمعالجة وإيجاد الحل التقريبي لبعض مسائل المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية حديثة الدراسة، أدت تلك المصفوفات إلى تحويل المسائل إلى جمل معادلات جبرية أعطت لنا إمكانية البرمجة وسهولة الحل.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التكاملية لفولتيرا ذات متغيرين غير الخطية، كثيرات حدود لوجندر، مصفوفات العمليات.

Abstract:

The main objective of this work is to present forms of process matrices (integration and output) for each of the many logargon boundaries that appear in numerical methods to address and find approximate solutions to some of the problems of linear and nonlinear complementary linear equations, Algebraic equations gave us the possibility of programming and ease of solution.

Key words: Voltaire integrative equation with two nonlinear variables many logarithms, operations matrices.

Résumé :

L'objectif principal de ce travail est de présenter des formes de matrices de processus (intégration et sortie) pour chacune des nombreuses frontières de logargon qui apparaissent dans les méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées à certains problèmes d'équations à certains problèmes d'équations linéaires complémentaires linéaires et non linéaires, les équations algébriques nous ont donné la possibilité de programmation et la facilité de solution.

Les mots clés :

Equations intégratives de Voltaire à deux variables non linéaires, plusieurs logarithmes, matrices d'opération.