

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE KASDI MERBAH DE OUARGLA**



**Faculté des Mathématiques  
et Sciences de la Matière  
Département de :  
Mathématiques**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en Mathématiques**

**Spécialité : Modélisation et Analyses numérique  
Par**

**Hemici Abdel Hak  
THÈME**

**Equations Aux Différences : Étude Qualitative**

Soutenu publiquement, le :09/06/2018  
devant le jury composé de :

Mr A. Houcin	M.A	l'université de	Président.
Mr I. Taleb	M.C.B	l'université de	Examinateur
Mr B. Benchik	M.A	l'université de	Examinateur
Mr M.Mammeri	M.C.B	l'université de	Rapporteur

2017/2018

# Remerciements

Nous remercions avant tout Dieu de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude.

Nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études.

Nous exprimons toutes notre profonde reconnaissance à notre encadreur **Dr. M. Mammeri** pour tout l'effort qu'il a fournis pour nous faciliter et aider à accomplir notre travail de fin d'étude.

Mes remerciements vont également à Monsieur professeur :**A. Hocine**, d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire.

Mes remerciement vont aussi à Monsieur professeur :**A. B. Benchik** et Monsieur professeur :**B. Talab** pour leur participation au jury.

Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques à l'université de Ouargla.

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci aux toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

# Table des matières

<b>Page vide</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Equations aux différences</b>	<b>8</b>
1.1 Définition et représentation . . . . .	8
1.1.1 Trajectoire (ou la solution) . . . . .	9
1.2 Points fixes et orbite périodique . . . . .	9
1.3 Stabilité . . . . .	10
1.4 Stabilité locale . . . . .	10
1.4.1 Bifurcation (Route vers le chaos) . . . . .	11
1.4.2 Différents types de bifurcations régulières . . . . .	12
1.4.3 Diagramme de bifurcation . . . . .	12
1.5 Attracteurs et Attracteurs chaotiques . . . . .	13
1.5.1 Attracteur . . . . .	13
1.5.2 Attracteurs chaotiques . . . . .	14
1.6 Exposant de L'ypunov . . . . .	15
1.6.1 Exposant de L'ypunov d'équation aux différence en 2-D . . . . .	15
<b>2 Equations aux défferances linéaires en 2-D</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Rappels sur les formes de Jordan réelles dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	19

2.3	Etude d'équation aux différences linéaires dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	20
2.3.1	Cas où A admet deux valeurs propres réelles distinctes . . . . .	21
2.3.2	Cas où A admet une valeur propre double (A non diagonale) . . . . .	23
2.3.3	Cas où A admet deux valeurs propres complexes conjuguées . . . . .	24
2.4	Exemple : équation aux différences de Fibonacci . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Equation aux différences non linéaires en 2-D</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Résultats analytiques . . . . .	30
3.2.1	Existence des points fixes . . . . .	30
3.2.2	Existence des solutions bornées . . . . .	33
3.2.3	Existence des solutions non bornées . . . . .	35
3.3	Simulations numériques . . . . .	37
3.3.1	Observation d'attracteurs multiples plis . . . . .	37

Page vide

# Introduction générale

Un système dynamique discret (ou une équation aux différences), est justement écrit sous forme générale par :  $X_{n+1} = f(X_n)$  où  $f$  est une application régulière engendrée par l'itération d'une application ou d'un difféomorphisme d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même, Par exemple dans les sciences de vie, deux animaux mâle et femelle d'un type de "lapin" sont mis dans un endroit lapinière chaque mois qui passe en voit que leur nombre croît et la population (les lapins) est multipliée par un certain paramètre, le paramètre définissant les conditions de vie de cette population. La loi de croissance de cette population s'écrit sous la forme :  $X_{n+1} = \lambda X_n$  où l'indice  $n$  indique le temps (numéro d'ordre de mois), le temps est discret sera donc noté par une variable  $n$  qui prend les valeurs entières ( $n \in \mathbb{Z}$ ) : Le premier état est  $X_1 = \lambda X_0$ ; où  $X_0$  désigne la population initiale ou la condition initiale de l'état de la population, le second état qui suit immédiatement le premier est  $X_2 = \lambda X_1 = \lambda^2 X_0$ ; et ainsi de suite de telle sorte que la  $n - ième$  état est donné par :  $X_n = \lambda^n X_0$ . On a donc une croissance exponentielle. Imaginons le nombre de cette population (les lapins) après un an ou deux ans.

En mathématiques, une équation aux différences quadratique en 2-D est un polynôme de degré deux avec un nombre quelconque de variables. Par exemple, le carré de la distance comprise entre deux points dans un espace euclidien en 2-D, donne une équation quadratique de quatre variables qui sont les deux coordonnées des deux points.

Les équations aux différences interviennent dans de nombreux domaines scientifiques : mathématiques financières, géométrie algorithmique, théorie des nombres, théorie des jeux, biologie moléculaire, statistique, etc...,

Les équations aux différences en 2-D été aussi largement étudiées comme les applications en 2-D, ces dernières années il y a une augmentation considérable de leurs études [16],[17] . L'une des raisons importantes pour cet état est le fait que elles présentent des dynamiques encore plus riches et complexes qui sont décidément distinctes du cas de dimensions inférieures.

Les équations aux différences en 3-D n'ont pas été aussi largement étudiés comme les

équations aux différences en 2-D, ces dernières années il y a une augmentation considérable de leurs études [18],[19],[20],[21],[22],[23].

Le premier objectif de notre mémoire est d'étudier l'existence des conditions suffisantes dans laquelle, équation aux différences (3.3) en 2-D possède des solutions bornées ou non bornées, c'est-à-dire nous cherchons les conditions suffisantes qui satisfaisant les paramètres  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  dans lesquelles les solutions de équation aux différences (3.3) sont bornées ou non bornées car la plupart des solutions chaotiques sont bornées.

Le deuxième objectif de notre mémoire a pour but d'étudier à la fois analytiquement et numériquement les comportement dynamiques de la nouvelle équation aux différences (3.3) qui est obtenues par modification de l'équation aux différences de Hénon en 2-D, la nouvelle équation, capables de réaliser des attracteurs chaotiques de type "Multiples-plis". Notre mémoire est organisée à travers trois chapitres comme suit :

**Dans le premier chapitre :** On rappellera les principales définitions et notions générales et spécifiques aux équation aux différences, utilisées tout au long de ce manuscrit (mémoire) concernant, les points fixes et leurs stabilités, bifurcation, attracteurs, attracteurs chaotiques, exposants de Lyapunov

**Dans le deuxième chapitre :** Nous allons considérer dans ce chapitre des systèmes d'équations récurrentes couplées, De tels systèmes peuvent être linéaires ou bien non linéaires. Ces modèles sont très utilisés aujourd'hui pour d'écrire les processus d'évolution des séquences génomiques, en épidémiologie, voire même en économie. Dans ce cours, nous verrons des exemples d'application de ces systèmes en démographie, avec la fameuse suite de Faibonacci.

**Dans le troisième chapitre :** Ce chapitre est consacré à étudier le comportement dynamique l'équation Hénon en 2-D modifiée qui est capable de générer des attracteurs chaotiques de types "multiples-plis", les points fixes, les solutions bornées, les solution non bornées et les bifurcations sont étudiés en détail, le comportement dynamique de base est décrit brièvement, l'existence d'attracteurs chaotiques de types Multiples-plis et Exposant L'ybunove, est justifiée par méthodes numériques.

# Chapitre 1

## Equations aux différences

### 1.1 Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à l'application de Poincaré aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des équations aux différences, ou dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Une équation aux différences est de la forme :

$$X_{k+1} = G(X_k) \tag{1.1}$$

où  $G$  est une application régulière d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même. L'application continue  $\frac{dx}{dt} = v(x)$  peut être étudiée comme une application discrète si, au lieu de considérer son flot continu  $\phi_t$ , on considère  $\tau > 0$  ("sorte" de période d'échantillonnage) et l'application associée.

$$G : \begin{array}{c} U \longrightarrow U \\ x \longmapsto G(x) = \phi_\tau(x) \end{array}$$

Comme  $\phi_\tau \circ \phi_\tau = \phi_{2\tau}$ , il est clair que l'étude de  $\phi_t$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k\text{-fois}}$$



lorsque l'entier  $k$  tend vers  $+\infty$  doivent être très similaires.

Nous rappelons ici, succinctement, comment les notions et résultats précédents, introduits pour les applications continues, se transposent aux les équations aux différences.

### 1.1.1 Trajectoire (ou la solution)

**Définition 1.1** Soit  $x_0 \in X$  une condition initiale et  $x(t, x_0)$  la solution de équations aux différences (1.1). L'ensemble des points  $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$  est la trajectoire (ou la solution) dans l'espace d'état passant par le points  $x_0$  à l'instant  $t = 0$ .

- Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial.
- La trajectoire d'une application dynamique autonome ne dépend que l'état initial.

## 1.2 Points fixes et orbite périodique

**Définition 1.2** On appelle point fixe d'un équations aux différences tout point  $x_n$  tel que

$$f(x_n) = x_n \tag{1.2}$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre

En général, on trouve les points fixes en résolvant l'équation :

$$f(x) = x \tag{1.3}$$

L'étude de ces points se ramène donc à la théorie des points fixes des fonctions numériques.

**Définition 1.3** Une solution  $O(x_0)$  s'appelle périodique s'il existe un  $p > 0$  t.q.

$$x(n + p) = x(n), \forall n \tag{1.4}$$

Une solution est dite éventuellement périodique s'il existe un  $p > 0$  et un  $N > 0$  tels que l'égalité (1.4) est vérifiée pour tout  $n > N$ .

Une solution périodique  $O(x_0)$  est toujours une suite de points périodique.

Tous ces points s'appellent point périodique de période  $p$  du système

**Définition 1.4** Le plus petit nombre  $p$  qui vérifie (1.4) s'appelle "période fondamentale" de la solution  $O(x_0)$ .

## 1.3 Stabilité

Puisque les solutions de la plupart des applications ne s'expriment, pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratiques on recourt également à des méthodes d'intégrations approchées. Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des applications, la réponse de cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Lyapunov (1857 - 1918).

Un point d'équilibre d'application continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : si l'on écarte l'application de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore : une petite perturbation, qui éloigne légèrement l'application de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

## 1.4 Stabilité locale

De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mathématiques et en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique

quantique, la physique nucléaire, etc..

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction réelle définie une équations aux différences, soit  $Df(x_0)$  sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe  $x_0$  de l'application  $f$ , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe  $x_0$  on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

**Définition 1.5** *Les valeurs propres du jacobienne  $Df(x_0)$  sont appelées multiplicateurs caractéristiques de  $f$  en  $x_0$ .*

**Définition 1.6** *Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

**Définition 1.7** *Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit instable si l'un des multiplicateurs et de module strictement supérieur à 1.*

**Définition 1.8** *Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit point selle si au moins un multiplicateur est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplicateurs sont tous de module strictement supérieur à 1.*

### 1.4.1 Bifurcation (Route vers le chaos)

La théorie de la bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'une application (un système), suite à une variation d'un paramètre de l'application. Ce changement se produit à des points particuliers appelés points de bifurcation. Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Notons que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcations, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements discontinus qu'on a déjà appelés bifurcation.

## 1.4.2 Différents types de bifurcations régulières

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations locales : La bifurcation de doublement de période, la bifurcation point selle (ou nœud-col) et la bifurcation de Neimark. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à  $|\lambda_i| = 1$  (où  $\lambda_i$  représente les multiplicateurs).

### **Bifurcation flip ou doublement de période ( $\lambda = -1$ )**

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à  $-1$ . Un cycle d'ordre  $k$  qui subie cette bifurcation va changer de nature et créer un cycle d'ordre  $2k$  de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

### **Bifurcation fold ou nœud-col ( $\lambda = 1$ )**

La bifurcation  $\lambda = +1$  correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à  $+1$ . Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre  $k$  en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

### **Bifurcation de Neimark ( $\lambda = \exp \pm i\theta$ )**

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobéenne possède deux multiplicateurs complexes conjugués  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  et de plus  $|\lambda_{i=1,2}| = 1$ .

## 1.4.3 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle (ou bifurcation). Les graphiques qui explicitent ces bifurcations, sont logiquement appelés diagrammes de bifurcation. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

## 1.5 Attracteurs et Attracteurs chaotiques

### 1.5.1 Attracteur

#### Définitions d'attracteur

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres solutions vers elle.

On donne une seule définition possible d'attracteur :

**Définition 1.9** [1] Soit  $\langle \mathbb{R}^2, f \rangle$  une équation aux différences, une sous-partie  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $A$  est fermée ;
2.  $A$  est positivement invariante ;
3.  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :
  - (a)  $U$  est positivement invariant ;
  - (b)  $U$  est attiré par  $A$  :  $\forall u \in U$  ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(f^t(u); A) = 0$ .

**Exemple 1.1** Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  considérons l'équation aux différences dont la fonction successeur est la suivante :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La variété instable  $\mathbb{R}_i^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$  est non-vide, fermée, et strictement positivement invariante.

De plus, elle est un attracteur global en un seul pas.

#### Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a et 3.b dans la définition sous-dessus est appelée voisinage attiré par  $A$ . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré  $U$ , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet  $A$  peut

admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. Le bassin d'attraction est l'ensemble des points de l'espace des phases qui subissent le phénomène d'attraction. Les trajectoires de ces points évoluent toutes vers l'attracteur

**Définition 1.10** *On appelle bassin d'attraction  $B(A)$  de  $A$  le plus grand des tels voisinages attirés, c'est-à-dire :  $B(A) = \bigcup \{U \in P(X) : U \text{ est un voisinage attiré par } A\}$ .*

#### **Propriétés d'un bassin d'attraction :**

1. Le comportement qualitatif d'une équation dépend fondamentalement du bassin d'attraction.
2. La frontière d'un bassin peut être lisse ou fractale, la fractalité est une conséquence du mouvement chaotique des solutions sur la frontière.
3. Les frontières d'un bassin peuvent être des types qualitativement différents. Par exemple la nature d'un bassin peut changer à partir d'une courbe simple lisse à un autre fractale. Ce phénomène est appelé métamorphose [2].

#### **Différents types d'attracteurs**

Comment distinguer un phénomène chaotique d'un phénomène aléatoire ? C'est la question que se posent les physiciens lorsqu'ils sont confrontés au comportement chaotique d'un système. Il existe trois types d'attracteurs qui caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et ils peuvent être de trois sortes : Les points fixes, les cycles limites (orbites périodiques) et les cycles limites (quasi-périodiques).

### **1.5.2 Attracteurs chaotiques**

Jusqu'en 1963 on ne connaissait que trois types d'attracteurs : le point fixe, le cycle limite et le tore. Le tracé représentant l'évolution d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps se comporte de manière «étrange» par rapport aux attracteurs des systèmes simples comme nous l'avons vu plus haut. C'est pourquoi D. Ruelle l'a nommé «attracteur étrange» . Un attracteur est dit étrange ou chaotique lorsque les points le constituant génèrent des trajectoires sensibles aux conditions initiales. Un

attracteur chaotique est généralement associé à l'existence d'une infinité de trajectoires instables de tous ordres.

**Définition 1.11** *Soit  $A$  est un attracteur de  $\mathbb{R}^2$ , on dit que  $A$  est un attracteur étrange si il est chaotique ( $A$  vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), un lecteur intéressé pourra consulter [2].*

## 1.6 Exposant de L'yapunov

La sensibilité aux conditions initiales généralement appelée "l'effet papillon" a été popularisée par le météorologue Edward Lorenz [3]. Elle se caractérise par le fait que la distance entre deux trajectoires de phase initialement voisines, tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps. Le mathématicien russe Alexander Lyapunov [4] s'est penché sur le phénomène de sensibilité aux conditions initiales et a proposé une grandeur permettant de la quantifier. Cette grandeur est appelée "exposant de Lyapunov". On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des exposants de Lyapunov est strictement positif. En outre, l'exposant de Lyapunov

### 1.6.1 Exposant de L'yapunov d'équation aux différence en 2-D

$G$  une application unidimensionnelle,  $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  tel que  $x_{n+1} = G(x_n)$ ,  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  deux point initiaux proches après  $n$  itération on aura :

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0)| \quad (1.5)$$

quand  $n$  tend vers l'infini et  $\varepsilon$  aussi

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0)}{\varepsilon} \right| \quad (1.6)$$

notons  $x_i = G^i(x_0)$  et on sait que

$$G^n(x_0) = G(G^{n-1}(x_0)) \quad (1.7)$$

par règle de chaîne on obtient :

$$\frac{dG^n(x_0)}{dx} = G'(x_{n-1})G'(x_{n-2})\dots G'(x_1)G'(x_0) \quad (1.8)$$

alors l'exposant de Lyapunov égale :

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |G'(x_i)| \quad (1.9)$$

**Définition 1.12** On considère l'équation aux différences du plan suivant :

$$X_{k+1} = G(X_k), X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

où la fonction  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est le champ de vecteurs associé avec le système (1.8). Soit  $J(X_k)$  sa Jacobéenne en  $X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots$ ,

et de définir la matrice :

$$T_n(X_0) = J(X_{n-1}) J(X_{n-2}) \dots J(X_1) J(X_0). \quad (1.11)$$

Par ailleurs, soit  $J_i(X_0, n)$  le module de la  $i^{\text{ième}}$  valeur propre de la  $n^{\text{ième}}$  matrice  $T_n(X_0)$ , où  $i = 1, 2$  et  $n = 0, 1, 2, \dots$

Maintenant on a la définition : les exposants de Lyapunov pour l'équation aux différences en dimension deux (1.10) sont définis par la relation :

$$l_i(X_0) = \ln \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} J_i(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right), i = 1, 2. \quad (1.12)$$



**Exemple 1.2** Soit l'équation aux différences quadratique suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - ax_k^2 = ax_k(1 - x_k) \\ y_{k+1} = b - x_k - by_k + x_k y_k = (b - x_k)(1 - y_k) \end{cases}$$

La matrice jacobienne de l'équation est :

$$\begin{pmatrix} a(1 - 2x) & 0 \\ (1 - y) & -b + x \end{pmatrix}$$

parce que la matrice jacobienne est triangulaire, les exposants de Lyapunov sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln a |1 - 2x| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln |-b + x| \end{cases}$$

# Chapitre 2

## Equations aux défferances linéaires en 2-D

### 2.1 Introduction

Nous allons considérer dans ce chapitre des systèmes d'équations aux différences couplées de la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (2.1)$$

De tels systèmes peuvent être linéaires :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ou bien non linéaires, si  $f$  et  $g$  sont des fonctions non linéaires de  $x_n$  et de  $y_n$ .

Ces modèles sont très utilisés aujourd'hui pour d'écrire les processus d'évolution des séquences génomiques, en épidémiologie, voire même en économie.

Nous donnons des exemples d'application de ces systèmes :

- En d'émographie, avec la fameuse suite de Fibonacci.

## 2.2 Rappels sur les formes de Jordan réelles dans $\mathbb{R}^2$

**Proposition 2.1** [5] Soit  $\mathbf{A}$  une matrice réelle carrée de dimension 2.

Alors il existe une matrice réelle inversible  $\mathbf{P}$  telle que  $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  est de l'une des formes suivantes :

$$(a) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (b) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \beta > 0.$$

ou  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$  sont des réels, en relation directe avec les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ .

On dit que  $\mathbf{J}$  est semblable à  $\mathbf{A}$ , suivant la matrice de passage  $\mathbf{P}$ .

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont aussi les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{J}$ .

Ce sont les valeurs  $\lambda$  solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \text{ avec } I : \text{matrice identité}$$

$$\iff \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0 \text{ équation caractéristique}$$

où  $\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$  est la trace de  $\mathbf{A}$  et  $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  son déterminant.

Le discriminant de l'équation caractéristique est  $\Delta = (\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - 4\det(\mathbf{A})$ .

Selon le signe de  $\Delta$ , on aura des valeurs propres :

- Réelles distinctes ( $\Delta > 0$ );
- Réelles égales ( $\Delta = 0$ );
- Complexes conjuguées ( $\Delta < 0$ ).

**Exemple 2.1** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ . on  $\text{tr}(\mathbf{A}) = 6$  et  $\det(\mathbf{A}) = 10$ .

L'équation caractéristique est donc  $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$  avec  $\Delta = -4$ .

Les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont  $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$ .

Le calcul des vecteurs propres conjugués associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  conduit à

$$\mathbf{V}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où la matrice de passage :}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie enfin que  $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Proposition 2.2** *Tout système récurrent dans  $\mathbb{R}^2$  du type  $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n$  peut être transformé en un système différentiel canonique équivalent,  $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{J}\mathbf{Y}_n$  où  $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  est la forme de Jordan associée à  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{X}_n = \mathbf{P}\mathbf{Y}_n$ .*

## 2.3 Etude d'équation aux différences linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Nous considérons donc des systèmes d'équations aux différences de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

On suppose que la matrice  $\mathbf{A}$  est inversible ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ), ce qui implique que  $(0, 0)$  est le seul point fixe. Ces systèmes peuvent aussi s'écrire sous la forme d'une équation aux différences d'ordre 2 [5] :

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}y_{n+1} \\
&\iff x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}(a_{21}x_n + a_{22}y_n) \\
x_{n+1} &= a_{11}x_n + a_{12}y_n \implies a_{12}y_n = x_{n+1} - a_{11}x_n \\
x_{n+2} &= a_{11}x_n + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}(x_{n+1} - a_{11}x_n) \\
x_{n+2} &= (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_n \\
x_{n+2} - (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_n &= 0 \\
x_{n+2} - \text{tr}(\mathbf{A})x_{n+1} + \det(\mathbf{A})x_n &= 0
\end{aligned}$$

[5] L'utilisation des formes de Jordan semble naturelle pour résoudre les systèmes linéaires dans la mesure où :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Or  $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$ , donc  $\mathbf{A}^n = \mathbf{PJ}^n\mathbf{P}^{-1}$ . La résolution des systèmes linéaires se ramène donc au calcul de la matrice  $\mathbf{J}^n$

### 2.3.1 Cas où $\mathbf{A}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes

$$\text{on } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dans la base de Jordan, on peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{J}^n \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n w_0 \\ \lambda_2^n z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n w_0 \\ \lambda_2^n z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11}\lambda_1^n w_0 + v_{21}\lambda_2^n z_0 \\ v_{12}\lambda_1^n w_0 + v_{22}\lambda_2^n z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = w_0 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \lambda_1^n + z_0 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \lambda_2^n$$

On peut maintenant représenter les solutions, soit dans le plan  $(x_n, y_n)$ , soit dans le plan  $(w_n, z_n)$  : qualitativement, les trajectoires seront les mêmes. La nature du point fixe va dépendre du signe et de la valeur des valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , c'est-à-dire des conditions  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| < 1$ .

**Exemple 2.2** Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = 0.25x_n + y_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont  $\lambda_1 = \frac{1}{2} < 1$  et  $\lambda_2 = \frac{3}{2} > 1$ . On a donc un point selle.

Les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres sont  $\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(associé à  $\lambda_1$ ) et  $\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  (associé à  $\lambda_2$ ).

La matrice de passage est donc  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

La forme de Jordan associée à  $\mathbf{A}$  est  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ .

Dans la base de Jordan, la solution est donc  $\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^n w_0 \\ (3/2)^n z_0 \end{pmatrix}$ , ce qui conduit à la solution finale :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = w_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1/2)^n + z_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (3/2)^n$$

### 2.3.2 Cas où $\mathbf{A}$ admet une valeur propre double ( $\mathbf{A}$ non diagonale)

$$\text{On } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} v_{01} & m_{21} \\ v_{02} & m_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Dans la base de Jordan, on peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{J}^n \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 \\ 0 & \lambda_0^3 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\text{On a donc } \mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda_0^n & n\lambda_0^{n-1} \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, il vient

$$\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^n & n\lambda_0^{n-1} \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0 \\ \lambda_0^n z_0 \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{01} & m_{21} \\ v_{02} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0 \\ \lambda_0^n z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{01}(\lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0) + m_{21}\lambda_0^n z_0 \\ v_{02}(\lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0) + m_{21}\lambda_0^n z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (\lambda_0 w_0 + n z_0) \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{pmatrix} n\lambda_0^{n-1} + z_0 \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} \lambda_0^n$$

**Remarque 2.1**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda_0^{n-1} = 0$  si  $|\lambda_0| < 1$ .

### 2.3.3 Cas où $\mathbf{A}$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées

Les valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  avec  $v_{1,2} = \vec{a} \pm i\vec{b}$ .

Alors  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  avec  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$ .

Dans la base de Jordan on a donc :

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Par mesure de simplification, mais surtout pour calculer  $\mathbf{J}^n$ , on utilise la notation des complexes en module et argument  $\lambda_1 = \rho(\cos \omega + i \sin \omega)$  et  $\lambda_2 = \rho(\cos \omega - i \sin \omega)$ . On a les relations  $\alpha = \rho \cos \omega$  et  $\beta = \rho \sin \omega$ , ainsi que  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  et  $\tan \omega = \frac{\alpha}{\beta}$ .

$$\text{Ainsi, } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \omega & -\rho \sin \omega \\ \rho \sin \omega & \rho \cos \omega \end{pmatrix} = \rho \mathbf{R}(\omega)$$

avec  $\mathbf{R}(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$  la matrice de rotation d'angle  $\omega$  et de centre l'origine.

Pour trouver la solution du système dans la base de Jordan, on a besoin de  $\mathbf{J}^n$  :

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{R}(\omega)$$

$$\mathbf{J}^2 = \rho \mathbf{R}(\omega) \rho \mathbf{R}(\omega) = \rho^2 \mathbf{R}(2\omega)$$

⋮

$$\mathbf{J}^n = \rho^n \mathbf{R}(n\omega)$$

En effet, concernant  $\mathbf{J}^2$ , quand on compose deux rotations, on obtient une nouvelle rotation dont l'angle est la somme des deux composées.



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \rho^n R(n\omega) \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \rho^n \begin{pmatrix} \cos n\omega & -\sin n\omega \\ \sin n\omega & \cos n\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= \rho^n \begin{pmatrix} \cos n\omega w_0 - \sin n\omega z_0 \\ \sin n\omega w_0 + \cos n\omega z_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour revenir aux coordonnées initiales, on utilise la relation  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{a} \end{pmatrix} \rho^n \begin{pmatrix} \cos n\omega w_0 - \sin n\omega z_0 \\ \sin n\omega w_0 + \cos n\omega z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \rho^n \left[ (\cos n\omega w_0 - \sin n\omega z_0) \vec{b} + (\sin n\omega w_0 + \cos n\omega z_0) \vec{a} \right]$$

Les termes en  $\cos(n\omega)$  et  $\sin(n\omega)$  sont responsables de la rotation dans le plan  $(x_n, y_n)$ , tandis que le terme  $\rho^n$  est responsable de l'évolution avec  $n$  de la distance au point  $(0, 0)$ .

Ainsi, la nature du point  $(0, 0)$  dépend de la position de  $\rho$  par rapport à 1 ( $\rho > 0$ ) :

— Si  $\rho < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n = 0$ , on se rapproche de  $(0, 0)$  en tournant autour : on a un foyer asymptotiquement stable ;

— Si  $\rho > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n = +\infty$ , on s'éloigne de  $(0, 0)$  en tournant autour : on a un foyer instable ;

— Si  $\rho = 1$ , alors  $\forall n, \rho^n = 1$ , on reste toujours à la même distance de  $(0, 0)$  en tournant autour : on a des centres.

**Exemple 2.3** Etudier le système  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  avec  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Les valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ , donc  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs propres sont  $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On calcule  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2$  et  $\tan \omega = \sqrt{3} \implies \omega = \frac{\pi}{3}$ . On a donc  $\rho > 1$ , l'origine est un foyer instable.

Par conséquent :

$$\mathbf{J} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \text{ ce qui implique que } \mathbf{J}^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos(n\frac{\pi}{3}) & -\sin(n\frac{\pi}{3}) \\ \sin(n\frac{\pi}{3}) & \cos(n\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}.$$

Dans la base de Jordan, la solution s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{J}^n \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \cos(n\frac{\pi}{3}) & -\sin(n\frac{\pi}{3}) \\ \sin(n\frac{\pi}{3}) & \cos(n\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} w_0 \cos(n\frac{\pi}{3}) - z_0 \sin(n\frac{\pi}{3}) \\ w_0 \sin(n\frac{\pi}{3}) + z_0 \cos(n\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

La solution finale du système est alors :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \cos(n\frac{\pi}{3}) - z_0 \sin(n\frac{\pi}{3}) \\ w_0 \sin(n\frac{\pi}{3}) + z_0 \cos(n\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \sqrt{3}w_0 \sin(n\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}z_0 \cos(n\frac{\pi}{3}) \\ w_0 \cos(n\frac{\pi}{3}) - z_0 \sin(n\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

Avec la condition initiale

$x_0 = 1$  et  $y_0 = 1$ , il vient  $w_0 = 1$  et  $z_0 = 1/\sqrt{3}$ , ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin(n\frac{\pi}{3}) + \cos(n\frac{\pi}{3}) \\ \cos(n\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(n\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

## 2.4 Exemple : équation aux différences de Fibonacci

Ce problème est apparu pour la première fois en 1202 dans le "Liber abaci" (Livre du calcul ou Livre de l'abaque), un livre écrit par le célèbre mathématicien italien Leonardo de Pise, plus connu sous le nom de Leonardo Fibonacci [6]. Fibonacci présente dans ce livre les chiffres arabes et le système d'écriture décimale positionnelle.

La suite de Fibonacci est définie de la manière suivante :

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ avec } x_0 = 0 \text{ et } x_1 = 1 \tag{2.5}$$

Les premiers termes de la suite sont donc :

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

**Exemple 2.4** *Etudier le système* 
$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ j_n + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$
 avec  $j_0 = 1$  et  $a_0 = 0$ .

$$a_{n+2} = j_{n+1} + a_{n+1} = a_n + a_{n+1}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont  $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , c'est-à-dire  $\lambda_1 \simeq 1,6$  et  $\lambda_2 \simeq -0,6$ .

Le point fixe origine sera donc un point selle, avec divergence selon le premier vecteur propre et oscillations convergentes autour du second vecteur propre.

Les vecteurs propres de  $\mathbf{A}$  sont  $\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ , donc  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ .

La forme de Jordan associée à  $\mathbf{A}$  est  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

avec  $\mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$

La solution finale est donc :

$$\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = w_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + z_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On ne s'intéresse en fait qu'à  $a_n$ , c'est-à-dire :

$$a_n = w_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + z_0 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Pour trouver  $w_0$  et  $z_0$  on utilise la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{(1-\sqrt{5})}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \end{pmatrix}$$

Ainsi, il vient :

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Pour finir, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $a_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ , puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$ . Ainsi, pour  $n$  grand,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \simeq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

# Chapitre 3

## Equation aux différences non linéaires en 2-D

### 3.1 Introduction

Dans le but de simplifier le système de trois équations différentielles du modèle de Lorenz [3], M. Hénon en 1976 [8] proposa un système quadratique discret en 2-D, et étudié en détail par d'autres [8],[9],[14],[15]. Il est possible de changer la forme de cette équation pour obtenir d'autres attracteurs chaotiques [10],[11],[12],[13],[17]. Ce chapitre a pour but d'étudier à la fois analytiquement et numériquement le comportement dynamique du nouvelle équation qui est obtenue par des modifications de l'équation de Hénon en 2-D

On considère l'équation Hénon en 2-D donné par :

$$H(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax_n^2 + by_n \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

tel que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a$  et  $b$  les paramètres de bifurcation. si  $b = 0$ , l'équation de Hénon se réduit à l'équation quadratique [7], qui est conjuguée au équation logistique. D'autre part l'équation (3.1) est capable de réaliser des types des attracteurs chaotiques. La procédure Hénon permet la construction d'une famille d'attracteurs dépendant des

deux paramètres  $a$  et  $b$ , mais n'a pas d'attracteurs de types "multiples-plis".

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation de Hénon modifiée donnée par :

$$f(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a \cos x_n + by_n \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

ou équivalent :

$$x_{n+1} = 1 - a \cos x_n + by_{n-1} \quad (3.3)$$

où le terme quadratique  $x^2$  dans l'équation Hénon est remplacé par le terme non linéaire  $\cos x$ , et nous étudions ce modèle pour certains valeurs de ses paramètres de bifurcation  $a$  et  $b$ . La motivation essentielle pour ce travail consiste à étudier le comportement dynamique l'équation Hénon modifiée qui est capable de générer des attracteurs chaotiques de types " multiples-plis " via une route de bifurcation doublant période vers le chaos qui n'a pas été étudiée avant dans la littérature. Le choix du terme  $\cos x$  a un rôle important en ce qu'il fait les solutions borné pour les valeurs de  $b$  telles que  $|b| < 1$ , et pour toutes les valeurs de  $a$ , alors qu'elles sont non bornées pour  $|b| \geq 1$ .

## 3.2 Résultats analytiques

### 3.2.1 Existence des points fixes

Dans cette section, nous commençons par l'étude d'existence des points fixes de l'équation (3.3).

Les points fixes de l'équation (3.3) sont obtenus par le théorème suivant :

**Théorème 3.1** *Les points fixes de l'équation  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a \cos x + by \\ x \end{pmatrix}$  sont les suivants :*

(i) *Si  $a = 0$ , et  $b = 1$ , alors il n'y a pas de points fixes pour  $f$ .*

- (ii) Si  $a = 0$  et  $b \neq 1$ , alors le point fixe de  $f$  est  $(\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-b})$ .
- (iii) Si  $a \neq 0$  et  $b = 1$ , alors le point fixe de  $f$  est  $[\cos^{-1}(\frac{1}{a}), \cos^{-1}(\frac{1}{a})]$  pour  $|a| \geq 1$ .
- (iv) Si  $a \neq 0$ , et  $b \neq 1$ , alors les points fixes de  $f$  sont contenus dans les intervalles  $]-\infty, \frac{1+|a|}{1-b}]$  si  $b > 1$  et si  $b < 1$  alors les points fixes de  $f$  sont contenus dans  $[\frac{1+|a|}{1-b}, +\infty[$ .

**Proof.** Les points fixes de l'équation (3.3) sont les solutions réelles du système :

$$1 - a \cos x + by = x, \quad x = y \quad (3.4)$$

On a alors l'équation :

$$1 - a \cos x + bx = x \quad (3.5)$$

(i) Si  $a = 0, b = 1$ , alors (3.5) implique  $1 + x = x$ , Donc il n'y a pas de valeur pour  $x$  qui satisfait la dernière équation donc il n'y a pas de point fixe pour  $f$ .

(ii) Si  $a = 0, b \neq 1$ , alors d'après (3.5) nous obtenons  $1 + bx = x$  on obtient  $x = \frac{1}{1-b}$  et le point fixe est  $(\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-b})$ .

(iii) Si  $a \neq 0, b = 1$ , alors d'après (3.5) nous obtenons  $1 - a \cos x + x = x$ , d'où  $x = \cos^{-1}(\frac{1}{a})$  tel que  $\frac{1}{|a|} \leq 1$  c'est-à-dire  $|a| \geq 1$ .

(iv) Si  $a \neq 0, b \neq 1$ , alors par (3.5)  $1 - a \cos x + bx = x \iff x = \frac{1-a \cos x}{1-b}$ ,

Ainsi  $|x| \leq \frac{1+|a|}{1-b}$  si  $b < 1$ ,

$|x| \geq \frac{1+|a|}{1-b}$  si  $b > 1$ ,

alors  $x \in ]-\infty, \frac{1+|a|}{1-b}]$  si  $b < 1$  et  $x \in [\frac{1+|a|}{1-b}, +\infty[$  si  $b > 1$ . ■

Remarquez que les natures des points fixes de la fonction  $f$  dans l'équation (3.3) dépendent toujours des paramètres de bifurcation  $a$  et  $b$ .

Par exemple, Si  $a = 0$  et  $b \neq 1$ ,

### la stabilité d'un point fixe $D(x, y)$

Prenant la matrice jacobienne linéarité  $\mathbf{J}(x; y)$ , la stabilité d'un point fixe peut être établie en calculant les valeurs propres  $\lambda$  de  $\mathbf{J}(x; y)$  correspondant au point fixe  $D(x; y)$  en utilisant l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J)$$

La matrice jacobienne du système (3.3) correspondant au point fixe  $D(x; y)$  est écrite sous la forme :

$$\mathbf{J}(x; y) = \begin{pmatrix} -a \sin x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne d'équation (3.3) calculé au point  $\mathbf{J}_D(x; y)$ , prend la forme :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a \sin x \lambda - b$$

Si le cas,  $a = 0$  et  $b \neq 1$ ,

Alors, avec ces valeurs le point fixe  $D\left(\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-b}\right)$  d'équation (3.3)

Donc la matrice jacobienne écrite sous la form :

$$\mathbf{J}_D\left(\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et leur polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - b$$

La matrice jacobienne au point  $D$  d'équation (3.3) possède les valeurs propres distinctes :

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{b}$$

Alors, pour  $b \geq 0$  :  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{b}$  et pour  $b < 0$  :  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b}$ .

Si  $a = 0$  et  $b \neq 1$ , le point fixe  $D(x, y)$  est asymptotiquement stable si seulement si la condition suivante est satisfait :  $-1 < b < 1$ .



### 3.2.2 Existence des solutions bornées

Dans cette subsection nous examinons et déterminons les conditions suffisantes des domaines de paramètres de bifurcation  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  pour laquelle l'équation (3) possède des solutions bornées et peut être chaotique, car la plupart des orbites chaotiques sont bornées. D'abord nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 3.2** *les solutions de l'équation (3.3) sont bornées pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et  $|b| < 1$ , et pour toutes conditions initiales  $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ .*

**Proof.** Soit  $|b| < 1$ , l'équation (3.3) exprimée sous la forme comme suit :

$$x_{n+1} = 1 - a \cos x_n + bx_{n-1} \quad (3.6)$$

Alors on obtient :

$$|x_n| \leq 1 + |a| + |b| |x_{n-2}|, \quad (3.7)$$

$$|x_{n-2}| \leq 1 + |a| + |b| |x_{n-4}|, \quad (3.8)$$

$$\dots |x_{n-4}| \leq 1 + |a| + |b| |x_{n-6}|, \quad (3.9)$$

Cela implique que :

$$|x_n| \leq 1 + |a| + |b| |x_{n-2}|, \quad (3.10)$$

$$|x_n| \leq (1 + |a|) + |b| (1 + |a| + |bx_{n-4}|), \quad (3.11)$$

$$|x_n| \leq (1 + |a|) + |b| (1 + |a|) + |b|^2 |x_{n-4}|, \dots \quad (3.12)$$

on obtient :

$$|x_n| \leq (1 + |a|) + |b| (1 + |a|) + |b|^2 (1 + |a|) + |b|^3 |x_{n-6}|, \dots \quad (3.13)$$

En continuant de cette façon, nous obtenons :

$$|x_n| \leq (1 + |a|)(1 + |b| + |b|^2 + |b|^3 + \dots + |b|^{k-1}) + |b|^k |x_{n-2k}| \quad (3.14)$$

D'après que  $|b| < 1$ , la somme la suite réelle géométrique nous permet d'obtenir les inégalités suivantes pour chaque  $n > 1$ ,  $k \geq 0$  :

$$|x_n| \leq (1 + |a|) \left( \frac{1 - |b|^k}{1 - |b|} \right) + |b|^k |x_{n-2k}|. \quad (3.15)$$

où  $k$  est le plus grand entier  $j$  tel que  $j \leq \frac{n}{2}$ . On a donc les deux cas suivants :

(1) si  $n$  est impair, c'est-à-dire  $\exists m \in \mathbb{N}$ , tel que  $n = 2m + 1$ , alors le plus grand entier  $k \leq \frac{n}{2}$  est  $k = \frac{n-1}{2}$ , pour lequel  $(x_n)_n$  vérifie les inégalités suivantes :

$$|x_{2m+1}| \leq (1 + |a|) \left( \frac{1 - |b|^m}{1 - |b|} \right) + |b|^m |x_1| = z_m, \quad (3.16)$$

(2) si  $n$  est pair, c'est-à-dire  $\exists m \in \mathbb{N}$ , tel que  $n = 2m$ , alors, le plus grand entier  $k \leq \frac{n}{2}$  est  $k = \frac{n}{2}$ , pour lequel  $x_n$  satisfait les inégalités suivantes :

$$|x_{2m}| \leq (1 + |a|) \left( \frac{1 - |b|^m}{1 - |b|} \right) + |b|^m |x_0| = u_m \quad (3.17)$$

Finalement, pour toutes les valeurs de  $a$  et toutes les valeurs de  $b$  satisfaisant  $|b| < 1$  et toutes les conditions initiales  $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ , on conclut que toutes les solutions de l'équation (3.3) sont bornées. ■

### 3.2.3 Existence des solutions non bornées

Dans cette sous-section, nous déterminons les conditions suffisantes pour lesquelles les solutions de l'équation (3.3) sont non bornées.

D'abord nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 3.3** *L'équation (3.3) possède des solutions non bornées dans les sous-régions suivantes de  $\mathbb{R}^2$  :*

$$\left\{ (a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| > 1, \text{ et } |x_0|, |x_1| > \frac{1+|a|}{1-|b|} \right\},$$

et

$$\{(a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| = 1, \text{ et } |a| < 1\}$$

**Proof.** (1) Pour tout  $n > 1$ , on a :  $x_n = 1 - a \cos x_{n-1} + bx_{n-2}$  .

Alors  $|bx_{n-2} - a \cos x_{n-1}| = |x_n - 1|$  et  $||bx_{n-2}| - |a \cos x_{n-1}|| \leq |x_n - 1|$  .

( Nous utilisons les inégalités :  $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$  ).

Cela implique que :

$$|bx_{n-2}| - |a \cos x_{n-1}| \leq |x_n| + 1. \quad (3.18)$$

car  $|\cos x_{n-1}| \leq 1$ ,

cela implique

$$-|a \cos x_{n-1}| \geq -|a|$$

et

$$|bx_{n-2}| - |a \cos x_{n-1}| \geq |bx_{n-2}| - |a| .$$

Enfin, on a (3.18) :

$$|bx_{n-2}| - (|a| + 1) \leq |x_n| . \quad (3.19)$$

et, par induction comme dans la section précédente, on a :

$$|x_n| \geq \begin{cases} \left( \frac{-(1+|a|)}{|b|-1} + |x_1| \right) |b|^{\frac{n-1}{2}} + \frac{(1+|a|)}{|b|-1} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \left( \frac{-(1+|a|)}{|b|-1} + |x_0| \right) |b|^{\frac{n}{2}} + \frac{(1+|a|)}{|b|-1} & \text{,si } n \text{ est pair.} \end{cases} \quad (3.20)$$

Ainsi, si  $|b| > 1$  et  $|x_0|, |x_1| > \frac{(1+|a|)}{|b|-1}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = +\infty$ .

(2) Pour  $b = 1$ , on a :

$$|x_n| \geq \begin{cases} (1 - |a|) \binom{n-2}{2} + x_1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (1 - |a|) \binom{n}{2} + x_0 & \text{,si } n \text{ est pair.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Par conséquent, si  $|a| < 1$ , alors on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = +\infty$ . Pour  $b = -1$ , on a du théorème les inégalités :

$$x_n \geq \begin{cases} -\binom{n-2}{2} + x_1 \left| \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} a(-1)^{p-1} \cos x_{n-(2p-1)} \right|, & \text{si } n \text{ est impair} \\ -\binom{n}{2} + x_0 + \left| \sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} a(-1)^{p-1} \cos x_{n-(2p-1)} \right|, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Car  $|a(-1)^{p-1} \cos x_{n-(2p-1)}| \leq |a|$ , alors on a :

$$x_n \geq \begin{cases} (|a| - 1) \binom{n-2}{2} + x_1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (|a| - 1) \binom{n}{2} + x_0 & \text{,si } n \text{ est pair.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Ainsi, si  $|a| < 1$ , alors on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = -\infty$ . Par conséquent, la preuve est terminée.

Il peut être facilement vu à partir des résultats ci-dessus que l'équation Hénon modifier de la forme (3.3) avec la fonction cosinus peut présenter par rapport au paramètre  $b$  les comportements suivants :

- (i) Si  $|b| < 1$ , alors l'équation (3.3) est bornée.
- (ii) Si  $|b| \geq 1$ , alors l'équation (3.3) est non bornée. ■

## 3.3 Simulations numériques

### 3.3.1 Observation d'attracteurs multiples plis

Dans cette section, nous présentons quelques attracteurs chaotiques de type multiples-plis obtenus par un choix approprié des paramètres  $a$  et  $b$ . Tous les portraits de phase présentés dans ce mémoire est fait dans le plan  $xy$ . Nous observons que les attracteurs chaotiques évoluent autour un grand nombre de points fixes, et il semble que le nombre de ces points augmente en augmentant  $a$  quand  $b$  est fixe.

Il y a plusieurs façons possibles pour un équation aux différences de passer de comportement régulier au chaos. Les diagrammes de bifurcation affichent ces routes et permettent de identifier les régions chaotiques dans l'espace- $ab$  à partir desquelles les attracteurs chaotiques peuvent être déterminés. Dans cette sous-section, nous illustrerons certains attracteurs chaotiques observés, ainsi que quelques autres phénomènes dynamiques. Fig.1, Fig.2 présentent respectivement le digramme de bifurcation et le spectre de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'équation aux (3.3) par rapport au paramètre  $a$ ,  $a \in [-2, 2]$  Des attracteurs chaotiques de l'équation (3.3) sont représentés sur Fig.4, Fig.5 et Fig.6.

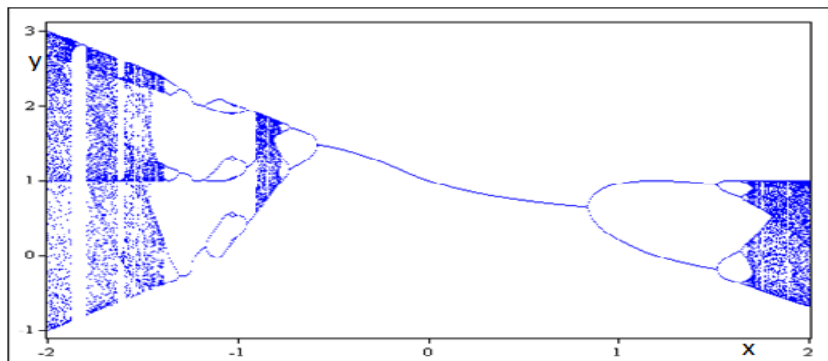


Fig.1 : Diagramme de bifurcation de (3.3) pour  $b = 0.3$   
et  $-2 \leq a \leq 2$ .

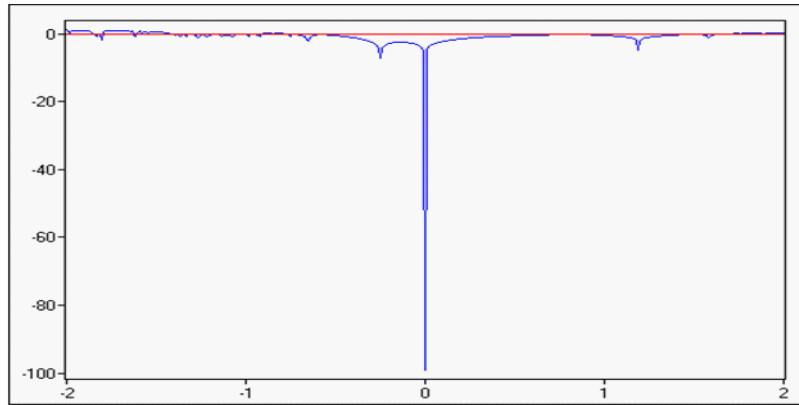


Fig.2 : Variation de l'exposant de l'yapunov de (3.3) pour  $b = 0.3$  et  $-2 \leq a \leq 2$ .

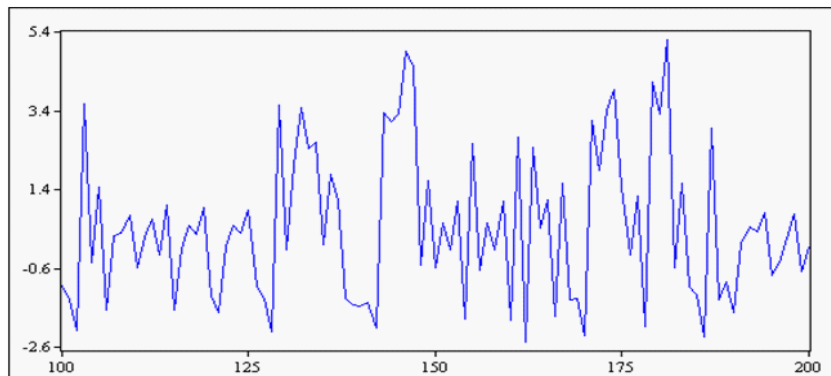


Fig.3 : Serie x correspondant de l'attracteur de (3.3) pour  $a = 3$  et  $b = 0.3$ .

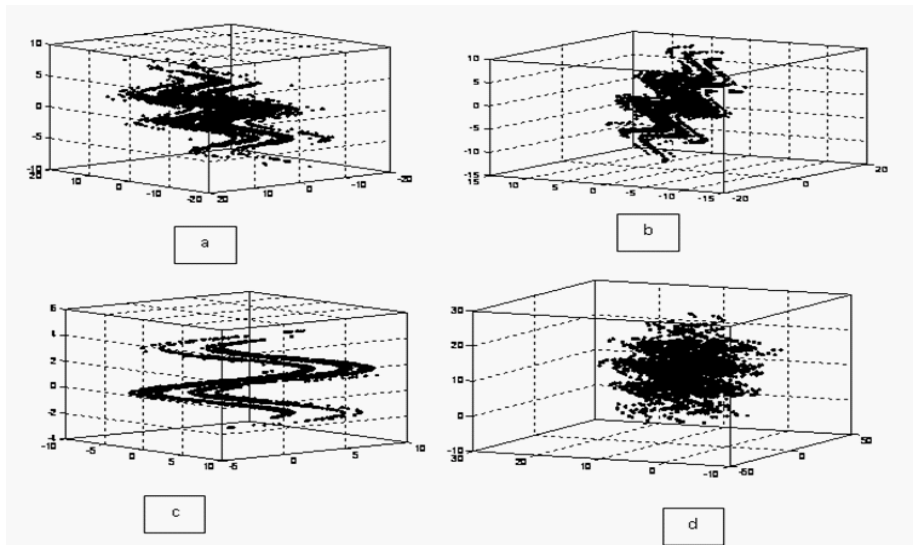


Fig.4 : Attracteurs chaotiques de type multiples-plis obtenus a partir de (3.3) pour (a)  $a = 4.8$  et  $b = 0.8$ , (b)  $a = 3.6$  et  $b = 0.8$ , (c)  $a = 4.0$  et  $b = 0.5$ , (d)  $a = 4.0$  et  $b = 0.9$ .

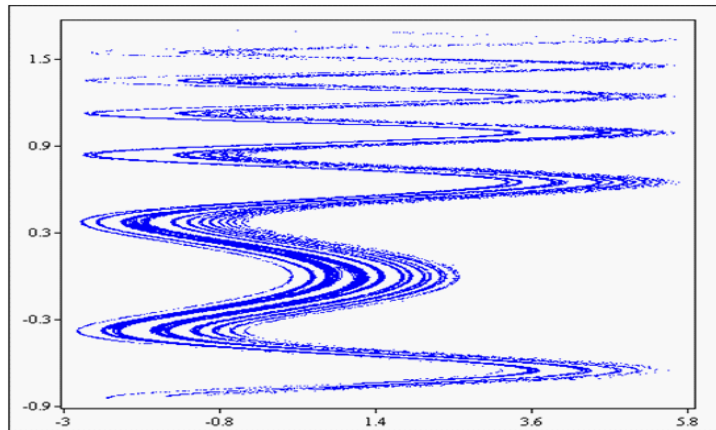


Fig.5 : Attracteur chaotiques de (3.3) pour  $a = 3$  et  $b = 0.3$ .

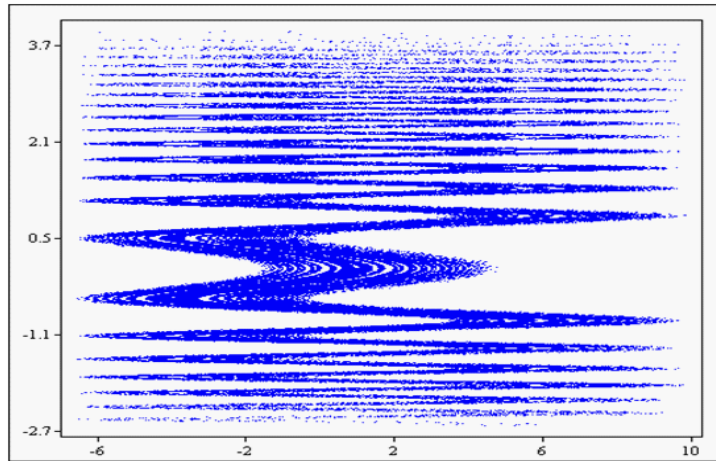


Fig.6 : Attracteur chaotiques de (3.3) pour  $b = 0.5$   
et  $a = 5$ .



# Conclusion général

Cette mémoire est consacrée à l'étude d'une nouvelle équation de Hénon en 2-D modifiée par une fonction sinusoïdale, cette nouvelle application réalise de nouveaux phénomènes comme l'existence d'une région chaotique.

Les points fixes, la stabilité et la bifurcation, l'existence des solutions bornées, le comportement dynamique sont décrits avec satisfaction, la structure dynamique et l'existence d'attracteurs chaotiques de types multiples-plis, sont justifiés par des méthodes numériques.

Notre prochain projet sera l'étude le cas général ou  $f$  est une fonction réelle bornée.

# Bibliographie

- [1] J. Guckenheimer, and P. Holmes., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York., 1983..
- [2] E. Zeraouia, and J. C. Sprott., Robust chaos and its applications, World Scientific Series on Nonlinear Science Series, no 79, A12 :2011. ISBN : 978-981-4374-07-1, 2011.
- [3] E. Lorenz., Deterministic nonperiodic flow Journal of the Atmospheric Sciences., 20, 130-141, 1963.
- [4] A. J. Dragt, and D. T. Abell., Symplectic maps and computation of orbits in particle accelerators. In : Integration algorithms and classical mechanics (Toronto, ON, 1993). Fields Inst. Commun., V. 10. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 59-85, 1996.
- [5] S. Charles. A. Chaumot et C. Lopes., équations aux différences linéaire dans  $\mathbb{R}^2$ ., LBBE, Lyon, (2016).
- [6] Suite de fibonacci, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_de\\_Fibonacci](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci).
- [7] M. Feigenbaum, The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformation, Journal of Stat. Phys., 21, 669–706, (1979).
- [8] Hénon. M., A two dimensional mapping with a strange attractor, Commun. Math. Phys., 50, (1976), 69–77, (1976).
- [9] M. Benedicks and L. Carleson., The dynamics of the Hénon maps, Ann. Math., 133, 1–25, (1991).
- [10] Cao. Y. and Liu. Z., Orientation-preserving lozi map, Chaos, Solitons & Fractals, 9, 11, 1857–1863, (1998).

- [11] Aziz Alaoui M. A., MultiFold in a Lozi-type map. In preparation.
- [12] Aziz Alaoui M. A., & C. Robert, & C. Grebogi., Dynamics of a Hénon-Lozi map, *Chaos, Solitons & Fractals*, 12 (11), 2323–2341, (2001).
- [13] Lozi. R., Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *Journal de Physique. Colloque C5, Supplément au n0 8*, 39, 9–10, (1978).
- [14] Sprott. J. C., *Strange Attractors : Creating Patterns in Chaos*, M &T Books, New York, (1993).
- [15] Sprott. J. C., *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, (2003).
- [16] Zeraoulia Elhadj, J. C. Sprott., A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos. To appear in *Inter.J. Bifur & Chaos*, 18(4) (2008).
- [17] Zeraoulia Elhadj, A new chaotic attractor from 2-D discrete mapping via bordercollision period doubling scenario, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Volume 2005, 235–238, (2005).
- [18] M. Mammeri., A Large Chaotic Region in a 3-D Sinusoid Discrete Map. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*. Vol. 55, no. 3, 133-144, 2016.
- [19] M. Mammeri., An identical period-doubling route to chaos in a family of 3-D sinusoid discrete maps, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics.*, Vol. 12. no.2, 1685 - 1689, 2016.
- [20] M. Mammeri., Existence of bounded orbits in 3-D quadratic map, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 8, no. 32, 1581-1589, 2014.
- [21] S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, C. Simó, and D. Turaev., Three-Dimensional Hénon-like Maps and Wild Lorenz-like Attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos.*, 15 (11), 3493–3508, 2005.
- [22] S. V. Gonchenko, J. D. Meiss, and I. I. Ovsyannikov., Chaotic Dynamics of Three-Dimensional Hénon Maps that Originate from a Homoclinic Bifurcation, *Regular and Chaotic Dynamics.*, 11 (2), 191–212, 2006.

- [23] S. V. Gonchenko, V. S. Gonchenko, and J. C. Tatjar., Bifurcation of ThreeDimensional Diffeomorphisms Non-Simple Quadratic Homoclinic Tangencies and Generalized Hénon Maps, Regul. Chaotic Dyn., 12 (3), 233-266, 2007.

## الملخص

نهتم في هذه المذكرة بدراسة معادلة الفروق دراسة نوعية .

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة كل من السلوك التحليلي والعددي للسلوك الديناميكي لمعادلة جديدة تم الحصول عليها

عن طريق تعديلات في معادلة Hénon

قمنا ابتداء بعرض المفاهيم الأساسية للمعادلة الفروق، ثم تطرقنا لعرض افكار اساسية مع تقديم امثلة لمعادلة الفروق

الخطية، و في الاخير درسنا السلوك الديناميكي لمعادلة Hénon المعدلة، يتم دراسة النقاط الثابتة، الحلول المحدودة،

التشعب، المناطق الفوضوية .

**الكلمات المفتاحية:** السلوك الديناميكي، معادلة Hénon، نقاط الثابتة، حلول المحدودة، التشعب، مناطق الفوضوية .

## Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire port sur Equation Aux différences Etude Qualitative.

Ce mémoire a pour but d'étudier à la fois analytiquement et numériquement le comportement dynamique de la nouvelle équation qui est obtenue par des modifications de l'équation de Hénon en 2-D .

Au début, nous avons fait quelque préliminaire (Définitions et notion générales et spécifiques aux équation aux différences) . Ensuite, quelques notions de base sur les équations aux différences linéaires ,En fin nous étudions le comportement dynamique l'équation Hénon en 2-D modifiée, les points fixes, les solutions bornées, les solution non bornées et les bifurcations sont étudiés en détail .

**Mots clés :** équation aux différences, équation de Hénon en 2-D, le comportement dynamique , point fixes , solution bornée , bifurcation.

## Abstract

The work discussed in our thesis deals with Equation Differences Qualitative Study.

The aim of this thesis is to study both sides of the dynamic behavior which are: the analytical and numerical behaviors of the new equation that is obtained by modifications of the Hénon equation in 2-D .

At the beginning, we presented some preliminary (definitions and general concept and specific to the difference equation). Then, some basic notions with examples about the linear difference equations. Finally, we studied the dynamic behavior of the modified 2-D Hénon equation, fixed points, the bounded solutions, the unbounded solutions and the bifurcations are studied in detail.

**Key words:** difference equation, 2-D Hénon equation, dynamic behavior, fixed point, bounded solution, bifurcation.