

N° Série...../2019

Université Kasdi Merbah Ouargla



Faculté des sciences appliquées

Département Génie Mécanique

MEMOIRE

Pour obtenir le Diplôme de Master

Option : Maintenance Industrielle

Présenté Par :

-KHALIFA TAHAR

- BELKHIR ISMAIL

-THÈME-

*Etude Du Comportement Vibratoire Des Plaques Stratifiées à
Différents Empilements*

Jury:

President: Khalfi Mehdi	M.C	UKM, Ouargla
Examineur: Bouakba Mostapha	M.A	UKM, Ouargla
Rapporteur: Mebarki Abd Eleamine	M.A	UKM, Ouargla

Année universitaire: 2018/2019

Remerciement

Remerciement

Nous tenons à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Abdeleamine MEBARKI, notre encadreur pour son assistance, sa disponibilité et son encouragement pendant l'accomplissement de ce travail. Nous lui en sommes profondément reconnaissants.

Nous souhaitons également remercier chaleureusement Bouakba Mostapha, maitre de conférences à l'université d'Ouargla, qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Nous tenons à lui exprimer nos plus profondes gratitude.

Nous sommes également extrêmement reconnaissants envers Monsieur qui nous Khalfi Mehdi a fait l'honneur de participer au jury et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner. Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à notre formation, trouvent ici nos gratitude et nos remerciements.

Résumé

L'utilisation des matériaux composites concerne aujourd'hui de nombreux secteurs industriels (militaire, sports, loisir, médecine.....etc.). Pour les besoins de la technologie moderne, une bonne connaissance du comportement vibratoire de ces structures est indispensable dans la conception ou la vérification de tout système déformable dans un environnement dynamique. Pour atteindre de tels objectifs, la détermination des caractéristiques dynamiques est nécessaire.

L'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées minces, consiste à la détermination des fréquences et modes propres. Cette recherche s'effectue sur de la fibre de verre /polyesters et Epoxy et fibre naturel / polystyrène à partir de relations fondamentales de la théorie classique dans stratifiés à renforcement unidirectionnel. Elles peuvent également être obtenues Par simulation numérique par les éléments finis utilise le code de calcule Ansys. Les techniques de résolution pour chaque type de stratifié sont également examinées après avoir associé les conditions aux limites.

L'objectif de cette étude est donc d'identifier le maximum des paramètres clés permettant de mieux comprendre le comportement vibratoire des plaque composites stratifiées Nous cherchons à dégager l'influence de différents conditions aux limites, de l'angle d'orientation des fibres, du nombre de couches, et de la géométrie de la plaque sur sa fréquence propre et les son déformées propre.

Mots clés : plaques composites, stratifiées, vibrations, *ANSYS*

Abstract:

The use of composite materials now concerns many industrial sectors. To meet the needs of modern technology, a good knowledge of the vibration behavior of these structures is necessary in the design or verification of any deformed system in a dynamic environment. To achieve these goals, defining dynamic characteristics is essential.

The free vibration analysis of high class composite plates consists of the determination of frequencies and self-codes. This research was carried out on fiberglass / polyester and fibrated with natural polystyrene from the basic relationships of classical theory in unidirectional booster segments.. Using numerical simulations and finite elements uses the Ansys calculator code. Resolution techniques for each type of laminate are also examined after associating the boundary conditions.

The aim of this study is to determine the maximum of the main parameters that allow for a better understanding of the vibration behavior of class composite plates. We seek to determine the effect of the different boundary conditions, the fiber orientation angle, the number of layers, and the geometry of the plate at its frequency and distortion.

Key words: composite plates, stratified plates, vibrations, ANSYS

ملخص:

يتعلق استخدام المواد المركبة الآن بالعديد من القطاعات الصناعية. لتلبية احتياجات التكنولوجيا الحديثة ، معرفة جيدة بالسلوك الاهتزازي لهذه الهياكل أمر ضروري في تصميم أو التحقق من أي نظام مشوه في بيئة ديناميكية. لتحقيق هذه الأهداف ، وتحديد الخصائص الديناميكية أمر ضروري.

تحليل الاهتزاز الحر للصفائح المركبة الطبقة الرفيعة يتكون من تحديد الترددات والأكواد الذاتية. تم إجراء هذا البحث على polyesters et fibre naturel et polystyrène / fibre de verre من العلاقات الأساسية للنظرية الكلاسيكية في الشرائح ذات التعزيز أحادي الاتجاه. عن طريق المحاكاة العددية والعناصر المحدودة يستخدم رمز آلة حاسبة Ansys. و يتم فحص تقنيات الدقة لكل نوع من الصفائح أيضاً بعد ربط شروط الحدود..

والهدف من هذه الدراسة هو تحديد الحد الأقصى للمعلمات الرئيسية التي تسمح بفهم أفضل للسلوك الاهتزازي للصفائح المركبة الطبقة، ونسعى إلى تحديد تأثير الظروف الحدودية المختلفة، وزاوية اتجاه الألياف، عدد الطبقات، وهندسة اللوحة على ترددها وتشوهها.

الكلمات المفتاحية: اللوحات المركبة، اللوحات متعددة الطبقات، الاهتزازات، Ansys

Liste des figures

Figure 1.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite	2
Figure 1.2 : Constitution d'un matériau composite	3
Figure 1.3 : les différentes familles des matrices.	4
Figure 1.4 : Différentes familles du renfort.....	13
Figure 1.5 : Présentation de l'interface, matrice et fibre.....	13
Figure 1.6 : Constitution d'un Monocouche.	14
Figure 1.7 : Constitution d'un stratifié.	15
Figure 1.8 : Désignations des stratifiées.....	16
Figure 1.9 : Constitution d'un sandwich.	16
Figure .21: Plaque rectangulaire, de dimensions a, b et d'épaisseur h.....	22
Figure 2.2 : Matériau isotrope transverse	27
Figure 2.3 : Système de coordonnées et les éléments de réduction	29
Figure 2.4 : couche spécialement orthotrope	34
Figure 2.5 : couche généralement orthotrope	35
Figure 2.6 : Schématisation d'un appui simple.....	36
Figure 2.7 : Représentation d'un encastrement.....	36
Figure 2.8 : Variation du moment de torsion le long d'un bord	37
Figure 2.9 : Plaque rectangulaire.....	39
Fig. 3.1 : Axes d'orthotrope d'une couche composite symétrique orthotrope	46
Fig. 3.2: lignes modale d'une plaque rectangulaire orthotrope et isotrope en EEEE (effet d'orthotropie)	50
Figure 3.3 : lignes modale d'une plaque rectangulaire orthotrope et isotrope en AAAA(effet d'orthotropie)	51
Figure 3.4 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré symétrique (i pair).....	53
Figure 3.5 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (i pair).....	53
Figure 3.6 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) symétrique (i impair).....	54
Figure 3.7 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) antisymétrique (i impair).....	54
la figure 3.8 : variation de la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couche n pour une plaque carrée (R=1)croisée symétrique (AAAA)et(EEEE)	57

Liste des figures

la figure 3.9 : variation de la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couche n pour une plaque rectangulaire croisée symétrique (AAAA)et(EEEE)	58
La figure 3.10: variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'angle d'orientation de fibre d'une plaque équilibrée carrée et rectangulaire en appuis simple	60
la figure 3.11 : variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'angle d'orientation de fibre d'une plaque équilibrée encastree sur ses bords.	61
la figure 3.12 : variation de la fréquence fondamentale en fonction de rapport R d »un stratifiée croisé antisymétrique en appuis simple.....	63
Le figure 3.13 : Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques Simplyment appuyé (AAAA) et encastre (EEEE).	64
Le figure 3.14 : Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques Ortho 01 Simplyment appuyé (AAAA) et encastre (EEEE).	66
Le figure 3.15 : Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques Ortho 02 Simplyment appuyé (AAAA) et encastre (EEEE).	67
Figure 3.16 :Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 1	67
Figure 3.17 : Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 1.5 ..	68
Figure 3.18 : Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 0.5 ...	68
La figure3.19: les déférents (AAAA) et (EEEE) dans le rapport du orthotrope 01.....	70
La figure 3.20 : les déférents (AAAA) et (EEEE) dans le rapport du orthotrope 02.....	71

Liste des Tableau

Tableau 1.1 : la davantage et inconvenients la matrices thermoplastiques.....	4
Tableau.1.2 : le comparatif entre les résines thermodurcissables.	6
Tableau 1.3 : Différents types de Fibres de verre.....	9
Tableau 1.4 : Propriétés de quelques éléments renforts	12
Tableau 3.1 : le Fréquence et modes propres	48
Tableau 3.2:Caractéristiques Mécaniques des plaques stratifiées à phase orthotrope ($N_p=4$).....	52
Tableau 3.3 : Propriétés géométriques du model des plaques stratifiées orthotropes ($N_p=4$).....	53
Tableau 3.4: coefficients des fréquences fondamentales pour différents stratifiés croisés	65
Tableau (3.5) : Caractéristiques Mécaniques des plaques stratifiées.....	69

Symboles

a	Longueur de la plaque et stratifié
a_{mn}	Amplitude des vibrations forcées
A	Amplitude des vibrations Libres
b	Largeur de la plaque
D	Rigidité en flexion de la plaque
E	Module d'Young du matériau
E	Energie totale
E_C	Energie cinétique
f	Fréquence
F	Résultantes des forces extérieures appliquées
F_R	Force de rappel du ressort
F_V	Force d'amortissement
H	Epaisseur de la plaque
i	Vecteur unité dans la direction des x positifs
k	Raideur du ressort
L	Lagrangien
m	Masse
M	Masse totale d'un système de points matériels
M_x, M_y	Moments de flexion par rapport aux axes x,y
M_{xy}	Moment de torsion
n	Nombre de degrés de liberté
q	Charge transversale
q_i	Coordonnée généralisée
\dot{q}_i	Vitesse généralisée
Q_c	Forces généralisées d'une structure conservative
Q_i	Forces généralisées agissant sur le i^e point matériel d'un système

Symboles spéciaux et notation

Q_s	Forces généralisées ne dérivant pas d'un potentiel
t	Temps
T	Période
U_d	Energie potentielle
U_i	Déplacement du i^{e} point matériel d'un système
U	Energie potentielle totale
W	Déplacement transversal d'une plaque vibrante
W_f	Travail des forces extérieures
X	Allongement du ressort
X_n	solution homogène
X_p	Solution particulière
\dot{X}	Vitesse d'un point matériel
\ddot{X}	Accélération d'un point matériel
a	Longueur du stratifié
[A]	Matrice de rigidité en membrane du stratifié
b	Largeur du stratifié
[B]	Matrice de rigidité de couplage du stratifié
[C]	Matrice de rigidité du matériau
C_{ijkl}	Coefficients de la matrice de rigidité
[D]	Matrice de rigidité en flexion du stratifié
E	Module d'Young

Symboles spéciaux et notation

G	Module de rigidité en cisaillement du matériau
h	Epaisseur totale du stratifié
h_k	Epaisseur de la couche k
$\{k\}$	Vecteur courbure du plan moyen du stratifié
$\{M\}$	Vecteur des moments résultants
n	Nombre total des plis du stratifié
$\{N\}$	Vecteur des efforts résultants
p	Nombre de la moitié des plis
$[Q]$	Matrice de rigidité réduite du pli
$[Q']$	Matrice de rigidité réduite transformées du pli
$[S]$	Matrice des souplesses du matériau
$[S']$	Matrice des souplesses transformées du matériau
$[T_\sigma]$	Matrice des changements de repère relative aux contraintes
$[T_\varepsilon]$	Matrice de changements de repère relative aux déformations
U_0, v_0, w_0	Déplacement du plan moyen par rapport aux axes x, y, z
U, v, w	Déplacement d'un point quelconque de l'épaisseur du stratifié par rapport aux axes x, y, z
Z_k, Z_{k-1}	Côtes des couches k et $k-1$ par rapport à la surface moyenne
\bar{z}_k	Côte du milieu de la k^e couche par rapport à la surface moyenne
A_{11}	coefficient de la flèche pour le premier mode

Symboles spéciaux et notation

A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}

Amplitudes des vibrations libres

$A(t)_{mn}, B(t)_{mn}, C(t)_{mn}$

Amplitudes des vibrations forcées

A'_{mn}, B'_{mn}

Coefficients dépendants des conditions initiales

q

Charge extérieure

q_0

Coefficients de la charge

R

Rapport longueur sur largeur de la plaque stratifiée

$R_{mn}(t)$

Force généralisée

W_0

Déplacement transversal

$W_0 \max$

Déplacement transversal maximal

$X(x)$

fonction hyperbolique satisfait les conditions aux frontières le long de l'axe x

$Y(y)$

fonction hyperbolique satisfait les conditions aux frontières le long de l'axe y

Symboles grecs

β

Coefficient de frottement

γ

Constante d'amortissement

γ_{xy}

Distorsion angulaire dans le plan x - y

δ

Variation

$\{\varepsilon\}$

Tenseur des déformations globales

$\{\varepsilon^0\}$

Tenseur des déformations du plan moyen

Angle que forme les directions principales d'orthotrope avec le système d'axes de référence du stratifié

θ

Symboles spéciaux et notation

θ_x, θ_y	Rotation de la fibre normale par rapport aux axes x, y
ν	Coefficient de poisson
η	Coordonnées du point d'application de la charge suivant la direction x
ξ	Coordonnées du point d'application de la charge suivant la direction y
ρ	Densité de la plaque
ρ_s	Masse surfacique de la plaque stratifiée
$\{\sigma\}$	Tenseur des contraintes
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement appliquée dans le plan $x-y$
σ_{zz}	Contrainte normale
$\bar{\Gamma}$	Accélération d'un point matériel d'un système
$\phi(x, y)$	Flèche initiale de la plaque stratifiée
ϕ	Angle de phase
Ω	Pulsation de la charge extérieure
ϕ_{mn}	Déformée de la plaque associée au mode (m, n)
ϕ_m	Mode normal suivant la direction x
ϕ_n	Mode normal suivant la direction y
Ψ	Coefficient de la fréquence fondamentale
ω	Pulsation propre
ω_{mn}	Pulsation propre du mode (m, n)
$\Psi(x, y)$	Vitesse initiale de la plaque stratifiée

Notations

$\phi(x, y)$	Scalaire fonction de x,y
$A \cdot B$	Produit scalaire de A et B
$\dot{A} \cdot \ddot{A}$	Dérivées de A par rapport au temps, soit $\frac{\partial A}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$
A^{-1}	Matrice inverse de A
$\int_a^b A(u)du$	Intégrale définie de A(u)
\int_s	Intégrale sur toute la surface s
grad A	Gradient de A
$W_{,xx}$	Dérivée seconde de w par rapport à x , soit $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Sommaire

RMERCIEMENTS

RESUME

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

Introduction Générale	1
Chapitre 1 Généralité sur les matériaux composites	
1-1-Introduction.....	2
1-2- Eléments composites.....	3
1-2-1 Les matrice	3
1-2-2 Charges et additifs	6
1-2-2-1 Charges renforçant	6
1 1-2-2-2 Charges non renforçant	7
1-2-2-3 Charges conductrices et antistatiques	8
1-2-2-4 Additifs.....	8
1-2 -3 Les renforts.....	9
a / fibre de verre	9
b / Fibre de carbone	10
c / Fibres aramides.....	11
d / Fibres céramiques.....	12
e / Autres types de fibres	12
1-2-3-1 Différentes natures de renfort.....	13
1-2-4 Interface	13
1-3 Les matériaux composites structuraux.....	14
1-3-1 Matériaux Monocouches.....	14
1-3-2 Matériaux Stratifiés	15
1-3-2-1 Désignation des structures stratifiées.....	15
1-3-3 Matériaux sandwichs	16
1-4- Caractéristiques des matériaux composites.....	17
5-1 Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	18

1-5-1	Avantage des matériaux composites.....	18
1-5-2	Inconvénients des matériaux composites.....	18
6-1	Applications des matériaux composites.....	18
1-6-1	Industrie aérospatiale	19
1-6-2	Industrie des transports terrestres et maritime.....	20
1-6-3	Industrie des articles de sport et de loisir	21

Chapitre 2 vibrations de la plaque stratifiées

2-1	Induration.....	22
2-2	Relation contraintes-déformations	22
2-2-1	Matériau anisotrope	23
2-2-2	Matériau orthotrop.....	25
2-2-3	Matériau isotrope transverse	26
2-2-4	Matériau isotrope.....	27
2-3	Théorie simplifié des stratifiées	28
2-3-1	Comportement en membrane.....	28
2-3-2	Description des effort.....	31
2-3-3	Relation entre les éléments de réduction et les déformations.....	31
2-3-4	Rigidité d'une couche isotrope.....	33
2-3-5	Rigidité d'une couche orthotrope.....	34
2-3-6	Rigidité d'une couche généralement orthotrop.....	34
2-4	Expressions des Conditions aux limites	35
2-4-1	Appui simple.....	36
2-4-2	Bord fixé.....	36
2-4-3	Bord libre.....	37
2-5	Vibrations de flexion des plaques minces symétriques	37
2-5-1	Equation du mouvement.....	37
2-5-2	Fréquences et déformées propres des plaques rectangulaires.....	39
2-6	Analyse et modélisation des plaques composites par éléments fini.....	42
2-7	Modélisation des plaques composites par ANSYS	43

chapitre 03 calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

3-1 Introduction.....	44
3-2 Compétence des stratifiés symétriques orthotropes	46
3-2-1 Influence de l'anisotropie	46
3-2-2 Model des plaques stratifie.....	52
3-2-3 Influence de l'empilement des couches.....	53
3-2-3-1 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré symétrique(i pair).....	53
3-2-3-2 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (i pair)	53
3-2-3-3 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) symétrique (i impair)	54
3-2-3-4 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) antisymétrique (i impair)	54
3-2-4 Influence du nombre de couches	55
3-2-5 Influence de la séquence d'empilement des couches	58
3-3 Comportement des stratifiés antisymétriques.....	61
3.3.1 Stratifié croisé antisymétrique $[0^\circ/90^\circ]_p$	61
a) Influence du rapport longure/largeur ($R=a/b$).....	62
b) Influence du rapport des modules (E_L/ E_T).....	64
c)- Comparaison entre un stratifié croisé symétrique et antisymétrique	65
3.4 Effet de rapport de dimension a/b.....	66
3.5 Effet de conditions aux limites	67
3-6 Les différents des plaque (AAAA) et (EEEE) dans le rapport du orthotrope 01et orthotrope 02.....	69

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

Introduction Générale

Le lancement de grands programmes Industrielle (Médecine, nucléaire, Spatiale, Sportifs ...etc.)

Le comportement dynamique est un paramètre important dont il faut tenir compte Lors de la conception des structures.

Le caractère modulable des propriétés des composites composite stratifiées permet D'envisager de larges possibilités d'optimisation des performances d'une structure en Agissant directement sur les fréquences et déformées propres de celle-ci sans modifier sa géométrie usés dimensions.

L'objectif fondamental de ce travail est de résoudre le problème en vibration des Plaques stratifiées (multicouches) afin d'obtenir les fréquences et les modes propres, en utilisant La méthode des éléments finis par code de calcule Ansys fin d'obtenir Les fréquences et le mode propre.

Le travail réalisé est organisé en quatre chapitres.

- **Le chapitre 1** est une présentation générale des composites stratifiés du point de vue définition, classification, principaux constituants, modes d'obtentions et Désignation.

- **Le chapitre 2** est consacré à la formulation théorique du comportement dynamique des stratifiés.

Il expose dans un premier temps les étapes d'homogénéisations permettant de Déterminer les propriétés élastiques à l'échelle d'une couche (modules d'élasticités), et à l'échelle du stratifié (équation constitutive). Ensuite, les équations du mouvement des stratifiés sont dérivées à partir des relations d'équilibre des plaques dans un schéma du premier degré.

Les expressions des conditions aux limites standards sur la frontière d'une plaque sont données en termes de déplacements, efforts et moments. Finalement la formulation énergétique du problème est développée pour introduire les méthodes de résolution approchées.

- **Le chapitre 3** est une analyse modale des plaques de stratification

Distinctes dans les six (06) configurations choisis (AAAA, EEEE, EAEE, AEAE, AAEE, AAEA).et comparaison chaque plaque pour plusieurs influence :

- 1-Influence de géométrie de plaque.
- 2-Influence de l'empilement de couchent.
- 3-Influence de rapport de dimension a/b.
- 4-Influence de condition aux limites.

Chapitre 1

Généralité sur les matériaux composites

1-1 Introduction

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des Utilisateurs (constructeurs). Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus Performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. Les chercheurs sont le plus souvent amenés à optimiser les solutions déjà utilisées, mais dans certains cas ,ils doivent complètement repenser le problème et envisager de " nouveaux matériaux". En effet, on ne découvre plus de nouveaux matériaux, mais on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux. L'un des résultats de cette association est l'aboutissement à un matériau composite, qui fait le sujet de notre étude.

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux ou plusieurs Matériaux de natures différentes. Leur association est complémentaire et permet d'aboutir à un matériau dont les performances recherchées seront supérieures à celles des composants pris séparément. Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, appelée renfort ou matériau renforçant, est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue appelée matrice. [1]

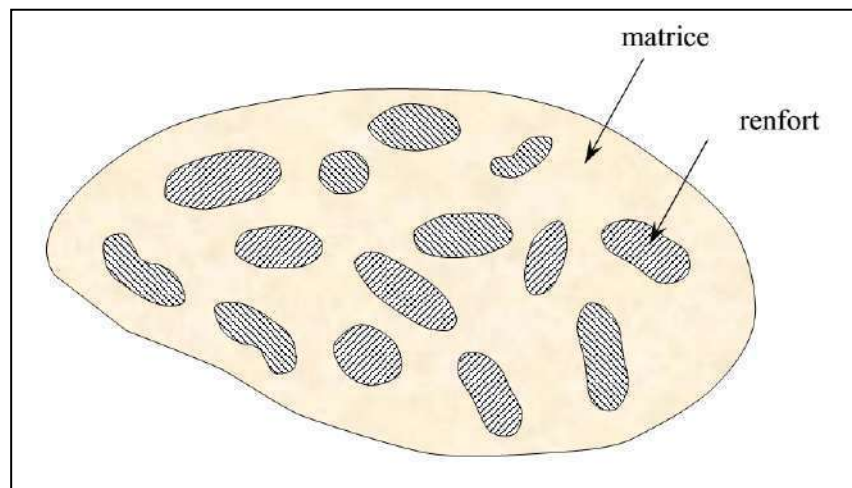


Figure1.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite

1-2- Eléments composites

Un matériau composite, comme il est représenté dans la Figure 1.2 est constitués essentiellement d'un matériau fibreux, jouant le rôle de renfort (armature, squelette...), et il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité), souvent de nature filamentaire (fibres organiques ou inorganiques) et, un matériau résineux, appelé matrice, qui lie les fibres renforts, répartit les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure une bonne protection chimique du matériau[1].

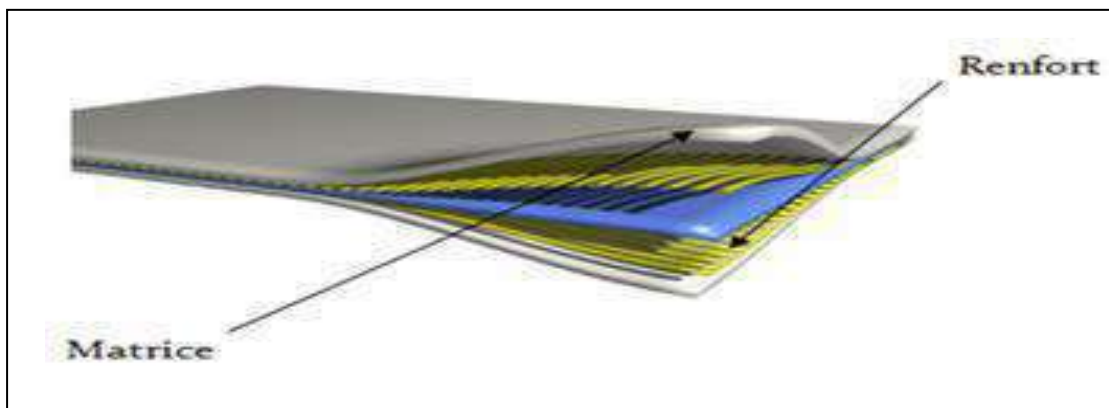


Figure 1.2 : Constitution d'un matériau composite

1-2-1 Les matrice

Les matrices ont essentiellement pour rôle de transférer les contraintes apportées sur le matériau aux fibres, de les protéger contre les agressions extérieures et donnent la forme du matériau. Elles doivent être en outre assez déformable et présenter une certaine compatibilité avec le renfort. Ainsi, pour pouvoir apporter aux matériaux composites des propriétés mécaniques élevées, les matrices classer deux grande familles : Organiques et Minérales[5].

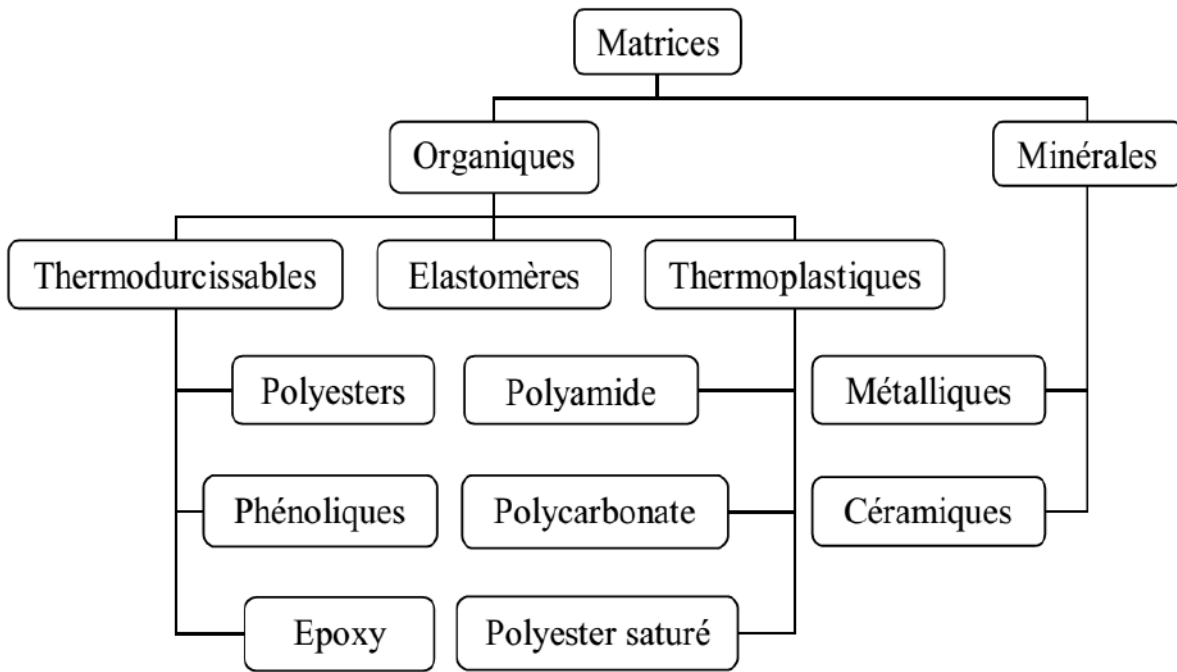


Fig. 1.3 : les différentes familles des matrices.

a) Les matrices thermoplastiques

Les matrices ou les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux.

Avantages	inconvénients
-Mise en œuvre rapide -Possibilité de retansformation -Meilleure ténacité	-Une faible tenue en température -Peu de résistance aux solvants

Tableau 1.1 : la davantage et inconvénients la matrices thermoplastiques.

b) Les matrices thermodurcissables

Ces résines possèdent la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à l'état solide; elles durcissent après un cycle de chauffage appelé «cycle de polymérisation » ou « cycle de réticulation ».

Les résines thermodurcissables principalement utilisées dans la fabrication des matériaux composites sont [7]:

- **Résine polyester:** présente un bon accrochage sur les fibres, un prix bas, mais un retrait important et une tenue réduite à la chaleur humide.
- **Résine phénolique :** ayant de moins bonnes propriétés mécaniques que les résines époxydes, elle n'est utilisée que lorsqu'il y a des exigences vis-à-vis de tenue au feu.
- **Résine polyamide:** d'un emploi relativement difficile et cher, elle a l'avantage de garder des bonnes caractéristiques sur une large plage de température (de -100 à +260°C).
- **Résine époxyde :** (c'est la résine utilisée dans notre étude) les résines époxydes se présentent sous la forme de plusieurs ingrédients à mélanger:
 - Une **résine principale** portant les terminaisons époxydes ;
C'est un liquide plus ou moins visqueux ou un solide qui est,
Dans certaines conditions, soluble ou fusible.
 - Un **diluant** réactif (avec des terminaisons époxydes, en général) ou non réactif (solvants organiques, en général) ; c'est un liquide très fluide, dont le rôle est d'abaisser la viscosité du système lorsque le mélange est effectué.
 - Un **flexibilisant** réactif (avec des terminaisons époxydes, en général) ou non réactif ; c'est un liquide plus ou moins visqueux, dont le rôle est de rendre la résine durcie plus flexible.
 - Un **durcisseur** portant les terminaisons chimiques qui réagissent sur les terminaisons époxydes des autres ingrédients pour constituer, en fin de cycle de polymérisation, un solide, c'est un liquide ou un solide (poudre, paillettes, blocs solubles ou fusibles).

La proportion de chaque produit entrant dans la composition du système de résine dépend des conditions de mise en œuvre à obtenir et des propriétés recherchées.

	Polyesters	Phénoliques	Epoxydes	Polyamides
<i>Caractéristiques Mécanique</i>	Moyennes	Faibles	Très bonnes	Excellentes
<i>Tenue aux chocs</i>	Très bonne	Très faible	Bonne	Très bonne
<i>Tenue en fatigue</i>	Faible	Faible	Moyenne	Bonne
<i>Pouvoir adhésif</i>	Moyen	Moyen	Très bon	Très bon
<i>Température Maxi d'utilisation</i>	140°C	130°C	190°C	260°C
<i>Tenue au feu</i>	Mauvaise	Bonne	Moyenne	Très bonne
<i>Retrait</i>	Important	Faible	Très faible	Très faible
<i>Durée de polymérisation</i>	Courte	Courte	longue	Moyenne
<i>Mise en œuvre</i>	Très facile	Difficile	Facile	Difficile

Tableau.1.2 : le comparatif entre les résines thermodurcissables.

1-2-2 Charges et additifs

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût. La quantité des produits ajoutés peut varier de quelques dizaines de pourcentage dans le cas de charges, et moins dans le cas d'additifs. L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre. En ce qui suit des exemples de charges et d'additifs[10].

1-2-2-1 Charges renforçant

L'objet de l'incorporation de charges renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en : charges sphériques et charges non sphériques.

1-2-2-1-1 Charges sphériques

L'intérêt essentiel de ces charges réside dans leur forme sphérique qui évite les concentrations de contraintes et par conséquent diminue la susceptibilité à la fissuration de la matrice par rapport à des charges non sphériques. Les charges sphériques se présentent sous forme de sphères, appelées généralement microbilles ou microsphères. Ces sphères pleines ou creuses ont un diamètre généralement compris entre 10 et 150 μm . Elles peuvent être en verre, en carbone ou en matière organique (époxyde, phénolique, polystyrène, etc.). Les microbilles de verre creuses représentent plus de 99 % des charges sphériques utilisées[6].

1-2-2-1-2 Charges non sphériques

Parmi les charges renforçant non sphériques, le mica qui est le matériau le plus utilisé. Il est alors incorporé sous forme d'écaillés de dimensions de 100 à 500 μm , et d'épaisseur de 1 à 20 μm . Le mica est ajouté à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables, pour des applications électriques ou électroniques.

1-2-2-2 Charges non renforçant

Les charges non renforçant ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

1-2-2-2-1 Charges de faible coût

Ces charges sont extraites de roches ou de minerais, d'où leur faible coût. Généralement, l'incorporation de ces charges conduit à[16] :

- **Une augmentation de** : la masse volumique de la matrice, module d'élasticité, la dureté, la viscosité, la stabilité dimensionnelle.
- **Une diminution de** : prix, la résistance à la traction et à la flexion.

Les principales charges sont :

- **les carbonates** : craies ou calcites (Caco). Ce sont les charges les plus 3 utilisées,
- **Lessilicates**: talc, kaolin, feldspath, wollastonite,
- **les silices**, obtenues par broyage et tamisage de sable de quartz.

1-2-2-2 Charges ignifugeantes

Ces charges ajoutées aux résines ont pour rôle de réduire ou d'empêcher les phénomènes de combustion.

Parmi les charges solides utilisées dans les résines thermodurcissables, nous citons :

- l'hydrate d'alumine, produit le plus utilisé dans les résines thermodurcissables
- l'oxyde d'antimoine.

1-2-2-3 Charges conductrices et antistatiques

Les résines organiques sont des isolants thermiques et électriques.

Pour certaines applications, il est donc nécessaire d'ajouter un élément conducteur. Les principales charges utilisées sont :

- des poudres ou paillettes métalliques :

Cuivre, fer, aluminium, etc.,

- des microbilles de verre métallisées (cuivre, argent),
- des particules de carbone (noir de carbone),
- des filaments métalliques

1-2-2-4 Additifs

Des produits peuvent être incorporés aux résines, tels que des colorants ou des agents de démoulage qui sont utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites.

1-2-3 Les renforts

Le renfort est le squelette supportant les efforts mécaniques. Le but des renforts dans les matériaux composites est essentiellement d'accroître leurs propriétés mécaniques (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.) et d'améliorer des propriétés physiques, tels que les comportements au feu, la tenue en température (conservation des caractéristiques mécaniques à haute température) ou les propriétés électriques. Outre les propriétés mécaniques élevées qu'ils procurent, les caractéristiques recherchées dans les renforts sont une masse volumique faible.

Une compatibilité avec les matrices et une facilité de mise en œuvre. Les renforts peuvent provenir d'origines diverses (animale, végétale, synthétique, etc.). Il peut se présenter sous de nombreuses formes : fibres courtes ou particules (mat) ou fibres continues (unidirectionnel, tissus ou textures multidirectionnelles). Chacune d'entre elles s'impose dans une application particulière en raison de ses propriétés spécifiques et de son prix. Il existe plusieurs types de renforts fibreux[1] :

a / fibre de verre

Actuellement, la fibre de verre est le renfort le plus utilisé dans les matériaux composites en raison du rapport performance mécanique/prix. Les caractéristiques majeures de ces fibres de verre sont répertoriées dans le Tableau 1.3.

type	Caractéristiques générales
A	Haute teneur en alcali
C	Bonne résistance chimique
D	Hauts propriétés diélectriques
E	A usage général ; bonne propriétés électriques
R, S	Haute résistance mécanique

Tableau 1.3 : Différents types de Fibres de verre

Suivant leur composition, on distingue généralement différents types de verre, notamment le verre E qui rassemble presque l'ensemble de la production ($\cong 98\%$) ; le reste étant réparti entre les verres A, C, D, R et S qui sont utilisés pour des applications spécifiques. Ces fibres sont composées principalement d'oxydes, généralement de silice (SiO_2), d'alumine (Al_2O_3), de magnésie (MgO), de chaux (CaO) et d'oxyde de bore (B_2O_3). On y retrouve aussi d'autres oxydes (Fe_2O_3 , K_2O , TiO_2 , etc.) et du fluor en très faibles proportions. Les propriétés mécaniques des fibres de verres sont assez intéressantes. Par exemple, leur module d'élasticité

Avoisine les 100 GPa et leur contrainte à la rupture est de l'ordre de 3 à 4 GPa. Leur problème majeur réside cependant dans leur recyclabilité[3].

b / Fibre de carbone

La mise en œuvre des fibres de carbone est motivée par les caractéristiques spécifiques remarquablement élevées que prévoit la théorie pour la structure cristalline hexagonale du graphite. Les fortes liaisons entre atomes voisins d'un même plan cristallographique donnent un module de Young de l'ordre de 1200 GPa et une contrainte à la rupture de 20000 MPa dans les directions parallèles aux plans cristallographiques, pour une masse volumique inférieure à 2000 kg/m^3 . Malgré les imperfections des cristaux obtenus par les procédés industriels, l'élaboration de fibres d'axes parallèles aux plans cristallographiques permet d'obtenir des fibres parmi les plus performantes (650 GPa pour le module de Young et 4000 MPa pour la contrainte à la rupture).

a) Elaboration des fibres de carbone

Les fibres de carbone sont élaborées par décomposition thermique sans fusion d'un polymère précurseur fibres ou fils. Trois opérations successives sont nécessaires : oxydation, carbonisation sous gaz inerte et graphitisation. Le précurseur peut être [19]:

✓ des fibres acryliques

Des mèches de filaments acryliques, obtenus à partir du polyacrylonitrile (PAN), sont traitées thermiquement. Après carbonisation les fibres de carbone obtenues ont une haute résistance (fibres HR). Une transformation supplémentaire par graphitisation permet d'obtenir des fibres à haut module de Young (HM) ou très haut module (THM).

Les deux types de fibres HR et HM, subissent un traitement de surface (ensimage) pour amélioration de la liaison fibre-résine.

✓ le brai

Le fil obtenu à partir du brai (résidu pâteux de la distillation du charbon ou du pétrole) donne après traitement un carbone de haut module, mais de caractéristiques légèrement plus faibles que celles des fibres (HM) obtenues par le procédé (PAN).

c / Fibres aramides

Les plus connues sont les fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar". Le comportement des fibres aramides est semblable à celui des métaux car sous faible charge elles sont élastiques et deviennent plastiques quand elles sont soumises à de fortes contraintes. Elles constituent un bon compromis entre les fibres de carbone et celles à base de verre. Les fibres aramides ont une bonne tenue au feu. Par contre, lors de leur renforcement des composites, on observe une faible résistance à la compression et à la flexion, du fait d'une mauvaise adhérence avec les résines. C'est pourquoi de nouvelles fibres hybrides, en l'occurrence des fibres verre-kevlar et carbone-kevlar, sont élaborées pour améliorer leur adhérence.

Les fibres aramides sont exploitées industriellement en vertu de leur résistance au choc et de leur légèreté. Elles entrent dans la composition des produits de protection (blindages, gilets pare-balle, casques, gants, etc.) mais aussi des articles de sport (raquettes de tennis, les pièces de skis), et dans nombreux autres produits de l'industrie aéronautique[20].

d / Fibres céramiques

Les renforts céramiques sont des fibres de type carbure, borure et nitrure. Elles sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication. Elles sont utilisées dans des applications très spécifiques travaillant à haute température et sous atmosphère oxydante (spatial et nucléaire). Les plus couramment produites sont : les fibres de bore, les fibres carbure de silicium, les fibres de bore-carbure de bore (B₄C) et les fibres de bore-carbure de silicium : (BorSiC). Ces fibres possèdent des caractéristiques mécaniques assez bonnes et se conservent à des températures pouvant aller de 500°C à 1000°C. Les fibres céramiques sont souvent associées à des résines thermodurcissables de type époxyde à cause de leur bonne adhérence avec ces dernières.

Elles peuvent également être mélangées avec des thermoplastiques. Dans cette catégorie de renfort une nouvelle génération de fibres est développée par un procédé similaire à celui des fibres de carbone. Ces nouvelles fibres possèdent, en plus des caractéristiques des fibres usuelles de la famille, une tenue en température plus élevée (1200°C à 1600°C). C'est le cas des fibres en carbotitanate de silicium (SiCTi) appelées tyranno.

e / Autres types de fibres

Cette partie rassemble toutes les fibres qui ne se retrouvent pas dans les autres groupes. Généralement ces fibres sont utilisées pour des applications spécifiques (papiers spéciaux, pour une bonne conductivité électrique). Ces fibres possèdent des modules d'élasticité très faibles comparés aux autres fibres. Les fibres concernées sont [11]:

- ✓ les fibres d'origine végétale (cellulose, lin, chanvre,... etc.).
- ✓ les fibres d'origine minérale (amiante, silice).
- ✓ les fibres synthétiques (tergal, dacron, etc.) issus des polyesters, de polypropylène ou de polyéthylène.
- ✓ les fibres métalliques (acier, cuivre, aluminium) qui sont utilisées souvent avec des matrices métalliques. Ces fibres sont appréciées pour diverses raisons par exemple :
 - leur prix de revient assez bas.
 - leur haute capacité d'isolation thermique.
 - leur bonne conductivité thermique et électrique.
 - leur propriété d'isolation acoustique.

Matériau	Module d'Young (GPa)	Résistance en traction (MPa)	Masse volumique (kg/m ³)	Température d'utilisation max (°C)	Allongement à rupture (%)
Verre R	80	2500	2500	650	3
Kevlar 49	130	3600	1450	200	2
Carbone HM	400	2000	1900	2500	
Bore	400	3500	2650	700	0,8
SiC (fibre)	480	2300	3200	900	0,5
SiC (trichite)	840	21000	3200	1600	2,5

Tableau 1.4 : Propriétés de quelques éléments renforts.

1-2-3-1 Différentes natures de renfort

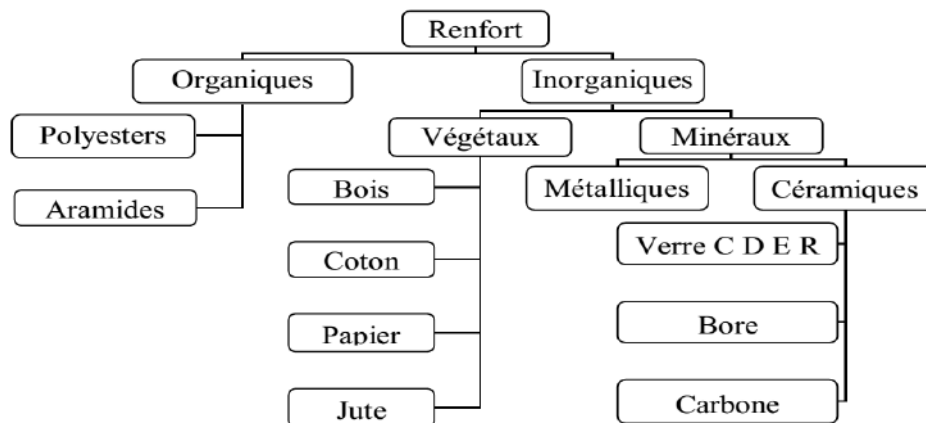


Fig. 1.4 : Différentes familles du renfort.

1-2-4 Interface

L'interface renfort-matrice est souvent considérée comme une surface de contact, mais ce n'est pas une surface au sens géométrique du terme. Elle assure la compatibilité renfort-matrice et l'adhésion, en transmettant les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif (interface). A cause de sa structure, l'interface peut être considérée d'un point de vue mécanique, comme un point faible du composite[1].

Dans le transfert d'effort orienté dans le sens de l'axe de la fibre, l'interface est considérée comme une couche de cisaillement. Lorsqu'il n'y a pas de décohésion interfaciale, le comportement est élastique : le cisaillement interfaciale est linéairement proportionnel à la différence de déplacement entre la matrice et la fibre au niveau de leurs parois.

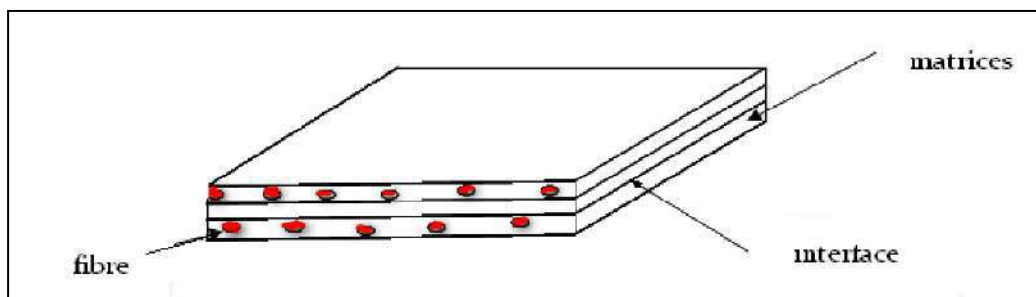


Figure 1.5 : Présentation de l'interface, matrice et fibre.

1-3 Les matériaux composites structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature et leur séquence d'empilement. Ils sont généralement sous forme de [1]:

1-3-1 Matériaux Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement) à fibres tissées à fibres courtes[1].

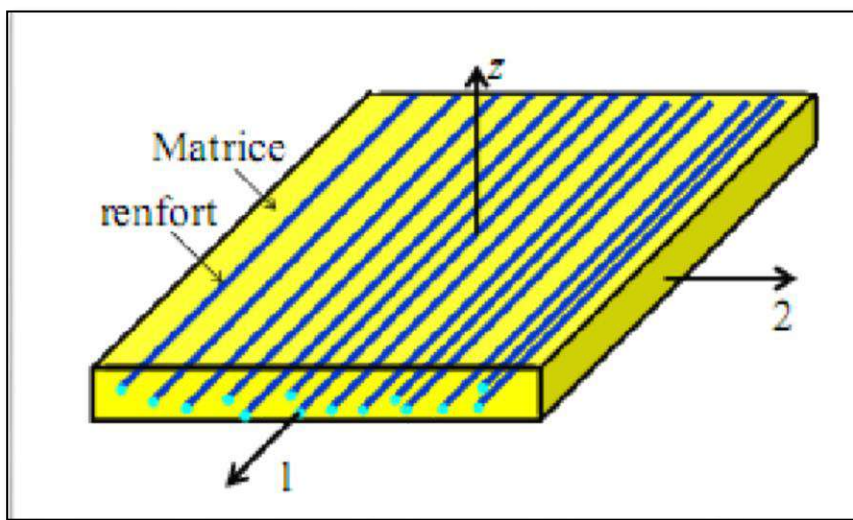


Figure.1.6 : Constitution d'un Monocouche.

1-3-2 Matériaux Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

On pourra avoir des stratifiés du type :

1. **Equilibré** : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. **Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

3. **Antisymétrique** : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. **Croisé** : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. **Hybride** : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride[1].

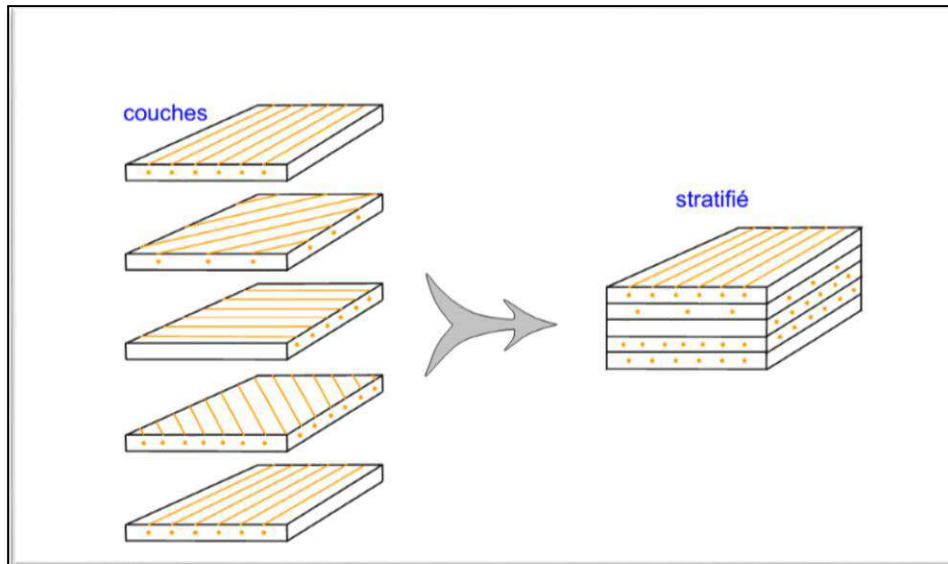


Figure1.7 : Constitution d'un stratifié.

1-3-2-1 Désignation des structures stratifiées

Les structures stratifiées à base de tissus unidirectionnels sont constituées d'un nombre de couches ou plis. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un matériau Carbone Epoxy de type Aéronautique et 0,3 mm pour ceux qui sont utilisés dans l'Industrie Nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale. La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence[21].

Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x. Sur les Figures 1.7(a) et 1.7 (b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;

- Les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la Figure 1.7 (a) : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$
- Les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la Figure 1.7 (b) : $[0/452/90/-452/0]$;
- En cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;
- En cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole s indique la symétrie : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ devient $[-45/45/-45]_s$ et $[0/45/45/90/-45/-45/0]$ devient $[0/452/90/-452/0]$.

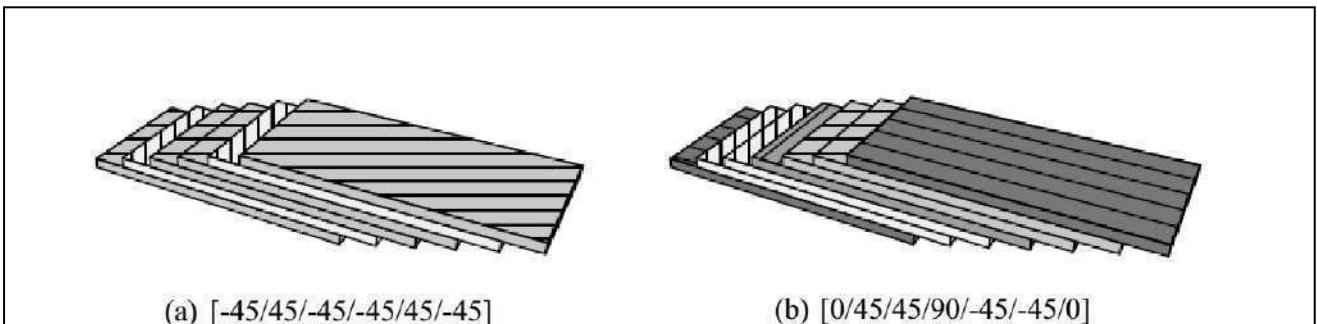


Figure 1.8 :. Désignations des stratifiées

1-3-3 Matériaux sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (coupeaux) de grande rigidité et de épaisseur enveloppant une âme (ou cour) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique[6].

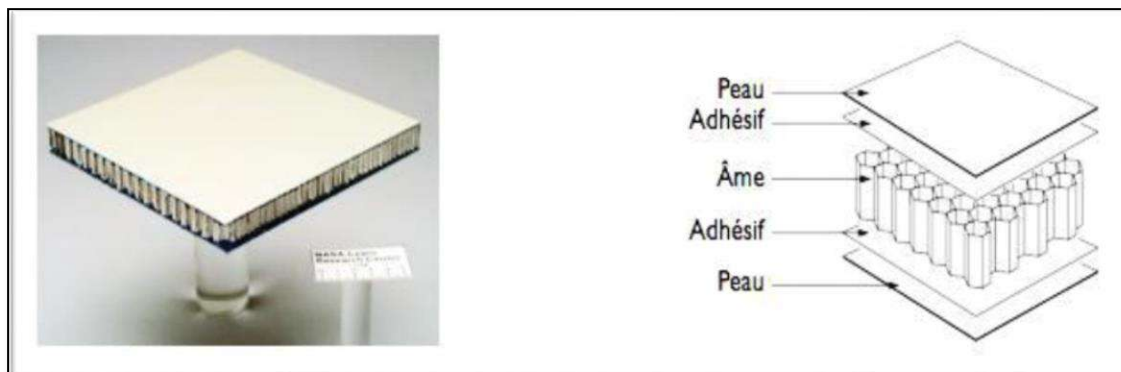


Figure.1.9 :Constitution d'un sandwich.

1-4 Caractéristiques des matériaux composites

Les propriétés des matériaux composites dépendent de beaucoup de facteurs et sont différentes selon les divers types de matériaux composites.

Ces propriétés résultent :

- des propriétés, de la nature et de la quantité des matériaux constitutifs.
- des constituants, de la géométrie et de la distribution du renfort
- de leurs interactions, de la nature de l'interface matrice-renfort, etc.

Les principales caractéristiques des pièces fabriquées en matériaux composites sont :

- le gain de masse,
- la bonne tenue en fatigue (durée de vie augmentée),
- l'absence de corrosion,
- l'absence de plasticité (leur limite élastique correspond à la limite de rupture)
- le vieillissement sous l'action de l'humidité et de la chaleur,
- l'insensibilité à certains produits chimiques courants (solvants, peinture, huiles, pétroles,...).
- tenue aux impacts et aux chocs très moyenne,
- très forte anisotropie.

1-5 Avantages et inconvénients des matériaux composites

1-5-1 Avantage des matériaux composites

Les composites sont préférés à d'autres matériaux parce qu'ils offrent des atouts liés à :

- Leur légèreté.
- Leur résistance à la corrosion et aussi à la fatigue.
- Leur insensibilité aux produits comme les graisses, les liquides hydrauliques, les peintures et les solvants.
- Leur possibilité de prendre plusieurs formes, d'intégrer des accessoires et permettre la réduction de bruit[5].

1-5-2 Inconvénients des matériaux composites

Cependant certains inconvénients freinent leur diffusion

- les coûts des matières premières et des procédés de fabrication.
- la gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte.

1-6 Applications des matériaux composites

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes[8].

Les matériaux composites offrent aux industriels des possibilités nouvelles d'associer fonction, forme et matériaux, au sein de réalisations des matériaux et systèmes de plus en plus performants et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement.

1-6-1 Industrie aérospatiale

En aéronautique, les matériaux composites ont connus des applications courantes surtout dans la construction des pièces de structure primaires, les gouvernes et l'habillage extérieur ainsi de l'intérieur de l'aéronef. L'utilisation de matériaux composites dans les constructions aéronautiques entraîne un gain de poids substantiel dont les gains de masse varient de 10 à 20%. Le poids de l'avion moyen-courrier BOEING 767 a été réduit, par l'emploi des composites, de 921 Kg par rapport à la solution métallique conventionnelle. De tels gains de poids sont déterminants pour optimiser la consommation de carburant d'appareils soumis à des cycles quotidiens élevés de décollages et d'atterrissages. Un gain de masse d'1Kg, sur la structure de l'avion AIRBUS A-310, entraîne la diminution de la consommation en carburant d'environ 120 litres/ année d'exploitation et une augmentation du rayon d'action de l'appareil d'un mile nautique ainsi que sa vitesse de croisière.

Par l'introduction des matériaux composites dans la construction du gros porteur TRISTAR la société LOCKHEED a effectuée une réduction importante du nombre d'éléments assemblés par rivets de 175 éléments assemblés par 40000 rivets pour une masse de totale au décollage de 363 tonnes à 18 éléments assemblés par 5000 rivets pour une masse de 245 tonnes au décollage et obtenir par conséquent des surfaces lisses entraînant de meilleures performances. Les matériaux composites sont aussi utilisés dans la construction spatiale (lanceurs ; navettes et satellites) à cause de leurs propriétés remarquables dont la haute résistance à l'élévation de température. Surtout ceux à fibres de carbone (dilatation nulle jusqu'à 600°C) et l'allègement. Les preuves sont les coûts minimisés de 30000 \$ pour chaque Kg gagné dans la réalisation du lanceur de la fusée européenne ARIANE E S A. De plus Les matériaux composites sont essentiellement utilisés dans la réalisation de propulseur de poudre des lanceurs de satellites et de leurs tuyères d'éjection des gaz de propulsion[13].

1-6-2 Industrie des transports terrestres et maritime

L'intégration des matériaux composites dans l'industrie de l'automobile et des transports terrestres a pu réduire substantiellement la consommation de carburant au moyen de l'économie du poids obtenu. Les applications sont très nombreuses dans les domaines des transports. Même ferroviaires avec la fabrication de nombreux éléments de carrosserie et des boucliers amortisseurs de choc placés à l'avant des motrices des T.G.V et qui présentent des performances supérieures en matière d'absorption d'énergie. La société LOHEAC de transports routiers a pu réduire substantiellement sa consommation de carburant grâce à l'économie du poids obtenue en remplaçant les cabines conventionnelles de ses tracteurs par de nouveaux éléments moulés en une seule pièce. Cette innovation a permis de réduire le poids de la cabine de 875 Kg équipée en acier, à 455Kg seulement et de présenter une plus grande solidité et une meilleure résistance aux dégâts.

Le saut technologique, réalisé grâce à l'introduction des matériaux composites dans la construction navale, a consacré une évolution fondamentale par rapport aux techniques de construction traditionnelle en bois.

L'adoption de tels matériaux dans la construction des coques des bateaux a permis de procurer à la structure une haute résistance à l'usure et aux chocs répétés dans les vagues et aux collisions encaissées avec les corps flottants. L'introduction de matériaux composites, tels que ceux renforcés par la fibre aramide Kevlar 49 associée à la fibre de verre-E conduisant à des propriétés mécaniques supérieures, a permis de diminuer le poids des structures de bateaux rapides (patrouilleurs, bateaux d'intervention ou de service) tout en ayant une résistance suffisante afin d'avoir pour résultat soit une augmentation de la vitesse pour une puissance donnée, soit une meilleure rentabilité pour la même vitesse ou soit l'utilisation d'une motorisation moins puissante [5].

1-6-3 Industrie des articles de sport et de loisir

De par, leur légèreté, leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique et leur stabilité dimensionnelle, les composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication et la conception de très nombreux d'articles de sport et de loisirs, tels que les skis et les bâtons, les raquettes de tennis, les cannes à pêche et de hockey, les planches à voiles et leurs mats, les voiliers de plaisance, les arcs, les cadres de vélos, des instruments de musique, au lieu du bois qui ne pouvait plus faire face à la demande créée par la civilisation des loisirs, ou l'aluminium qui ne correspondait plus aux critères modernes de performance et d'endurance.

De nombreux résultats d'études confirment le haut degré d'amortissement des vibrations des skis sur neige qui confère au skieur le confort tout en conservant au produit ses caractéristiques essentielles. De plus, les matériaux composites permettent de concevoir des raquettes légères, très rigides et excellentes en fatigue dynamique qui confèrent au joueur une moindre sollicitation des muscles du bras et de moindre fatigue et plus de confort[5].

Chapitre 2

vibrations des plaques stratifiées mince

2-1 Introduction

On considère une plaque mince, dont l'épaisseur h est faible devant la longueur a et la largeur b , et l'on supposera dans tout le projet que l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P : petits déplacements et petites déformations) est vérifiée. La plaque est située dans le plan (x, y) , et le déplacement transverse qui est l'inconnue du problème, est noté $w(x, y, t)$ [17].

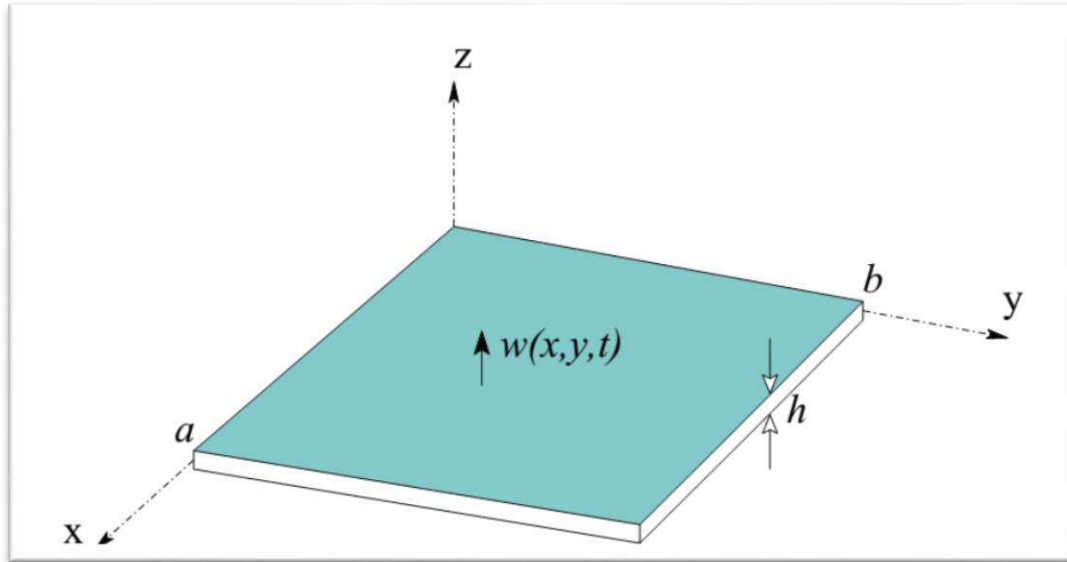


Figure .21: Plaque rectangulaire, de dimensions a , b et d'épaisseur h

2-2 Relation contraintes-déformations

Les fibres dans les matériaux composites peuvent être orientées d'une façon arbitraire, dans une seule direction (unidirectionnelle), dans deux dimensions (tissé), ou en trois dimensions (3D). Suite à cet arrangement de fibres, le matériau composite est caractérisé généralement par anisotrope, orthotrope, isotrope transverse ou isotrope [1].

L'expression des relations de l'élasticité linéaire, porte des tenseurs d'ordre deux et quatre

$$\delta_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Le développement de l'équation (2.1) donne neuf équations d'où un ensemble des coefficients de rigidité $Cijkl$ égale à 81. A cause des symétries des contraintes δ_{ij} et des déformations ϵ_{kl} , l'expression précédente portera alors des tenseurs d'ordre zéro pour δ_{ij} et ϵ_{kl} et d'ordre deux pour $Cijkl$

Et donc le nombre de coefficient sera réduit à 36 coefficients qui seront représentés par une matrice carrée de dimension 6 par 6 (pour $Cijkl$) les contraintes et déformations seront représentées par des vecteurs.

2-2-1 Matériau anisotrope

Un matériau est généralement anisotrope lorsque les fibres sont alignées dans les trois directions et qu'aucun plan ne représente un plan de symétrie. L'équation qui lie les contraintes avec les déformations est l'équation (2.1) écrite sous forme matricielle par [1]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{1121} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{2111} & C_{2111} & C_{2133} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

On sait que l'énergie élastique emmagasinée par unité de volume est donnée par :

$$dw = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.3)$$

D'après (2.1) on trouve que :

$$dw = C_{ijkl} \epsilon_{kl} d\epsilon_{ij} \quad (2.4)$$

D'où après intégration, on trouve que :

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{kl} d\epsilon_{ij} \quad (2.5)$$

En dérivant (2.5) successivement par rapport à ϵ_{kl} et ϵ_{ij} , on obtient :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = C_{ijkl} \quad (2.6)$$

On procède de la même manière pour les contraintes σ_{kl} , on trouve :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} \quad (2.7)$$

Donc d'après (2.6) et (2.7) on peut écrire :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.8)$$

De la même façon, on procède pour démontrer la symétrie de la matrice de souplesse qui est l'inverse de la matrice de rigidité C d'où :

$$S_{ijkl} = S_{klij} \quad (2.9)$$

La matrice de l'équation (2.2) se réécrit par l'utilisation de la notation indicielle de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Sous forme indicielle :

$$\sigma_j = C_{ij} \varepsilon_j \quad i ; j = 1 \dots 6 \quad (2.11)$$

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4$$

$$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6$$

$$\tau_{23} = \sigma_4$$

$$\tau_{13} = \sigma_5$$

$$\tau_{21} = \sigma_6 \quad (2.12)$$

γ_{23} , γ_{31} et γ_{12} Sont les distorsions angulaires.

τ_{23} , τ_{13} et τ_{21} Sont les contraintes de cisaillements.

On peut exprimer aussi les déformations en fonction des contraintes par l'inverse de la matrice

C on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

On peut conclure que la connaissance de la matrice de souplesse ou de rigidité nécessite la connaissance de 21 coefficients.

2-2-2 Matériau orthotrope

Si trois plans perpendiculaire, représente des plan de symétries pour un matériau, ce dernier est dit orthotrope. Cette symétrie réduit le nombre de coefficient de rigidité à 9, et la relation sous forme matricielle sera écrite comme[1].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

L'inverse de La relation (2.14) permet de définir la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Dont les valeurs de souplesses sont calculées à partir des essais mécaniques, c'est à dire :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad ; \quad S_{12} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} \quad ; \quad S_{13} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad ; \quad S_{23} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} \quad ; \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad ; \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad ; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{21}}$$

Avec cette nouvelle notation d'ingénieur, l'expression matricielle devient

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

On peut distinguer de la dernière équation que les contraintes normales n'ont aucun effet sur les distorsions angulaire, ni les contraintes de cisaillement sur les déplacements linéiques, et non plus les contraintes de cisaillement sur les distorsions angulaires des plans différents.

A partir de la symétrie, on peut conclure que :

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{31}}{E_3} &= \frac{\nu_{13}}{E_1} \\ \frac{\nu_{32}}{E_3} &= \frac{\nu_{23}}{E_1} \\ \frac{\nu_{21}}{E_3} &= \frac{\nu_{12}}{E_1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

2-2-3 Matériau isotrope transverse

C'est un matériau orthotrope qui possède un axe privilégié par exemple x1 de façon qu'il doit y avoir invariance par une rotation quelconque autour de cet axe. Ce matériau est donc isotrope dans le plan perpendiculaire à cet axe comme il est montré sur la Figure 2.2.[1]

A cause de l'isotropie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ E_2 &= E_3 \\ \nu_{12} &= \nu_{13} \end{aligned} \quad (2.18)$$

La relation entre les contraintes et les déformations sera exprimée comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

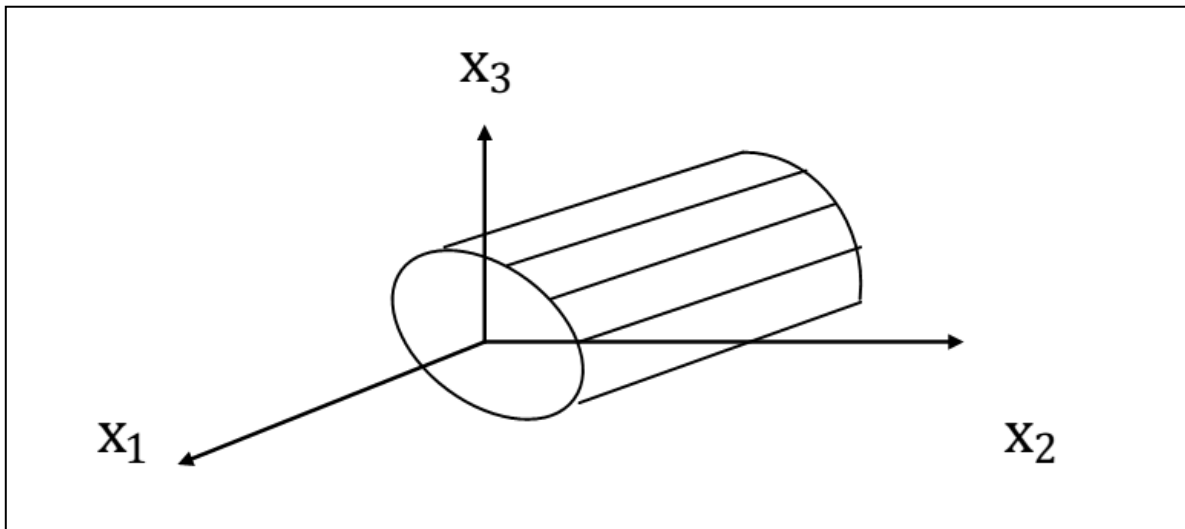


Figure 2.2 : Matériau isotrope transverse.

2-2-4 Matériau isotrope

Un matériau isotrope est un matériau dont tous les plans sont des plans de symétrie, et le système de coordonnées est pris arbitrairement. Donc les constantes d'ingénieurs deviennent :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E$$

$$G_{12} = G_{23} = G_{13} = G$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu \quad (2.20)$$

Et la relation entre les contraintes et les déformations sera :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Sachant que le module de cisaillement s'écrit de la façon suivante :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.22)$$

2-3 Théorie simplifié des stratifiés

On appelle stratifié ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli) de nappes unidirectionnelle ou de tissus avec des orientations propres à chaque pli[16].

2-3-1 Comportement en membrane

Soit un stratifié à symétrie miroir (les empilements des plis de part et d'autres du plan moyen sont identiques (± 0)).

Pour un état plan de contraintes les hypothèses des faibles déformations (hypothèses de Love Kirchhoff)[3].

- ✓ l'élément plaque est constitué par un nombre arbitraire de plis parfaitement liés les uns aux autres et dont les axes naturels ne coïncident pas obligatoirement avec les axes de références.
- ✓ L'épaisseur de l'élément est très faible par rapport aux deux autres dimensions (longueur et largeur)
- ✓ Les déplacements U.V.W. sont faibles par rapport à l'épaisseur de h de l'élément
- ✓ La déformation ε_x , ε_y et γ_{xy} sont faibles
- ✓ Les déformations de cisaillement γ_{xz} et γ_{yz} sont négligeable
- ✓ Les déplacements U et V sont des fonctions linaires de z
- ✓ La déformation ε_z est négligeable.
- ✓ Les relations σ - ε dans chacun des plis sont conformes à la loi de Hooke
- ✓ L'épaisseur h de l'élément est constante.
- ✓ Z_{xz} et Z_{yz} sont nulles à la surface de l'élément ($z = \pm h/2$)

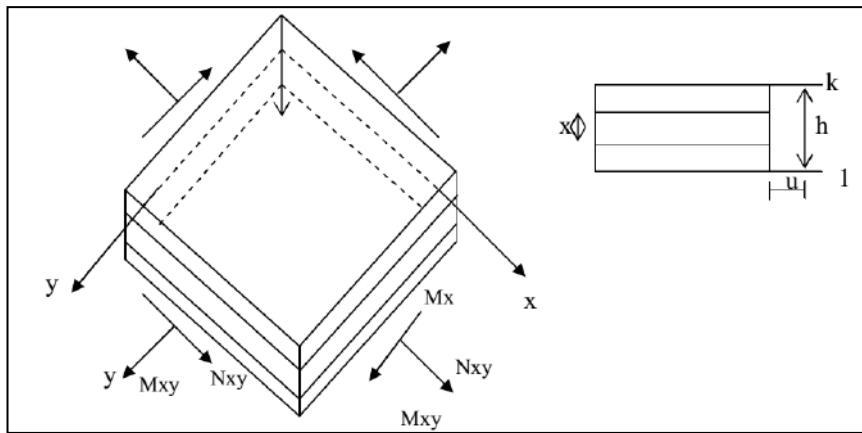


Figure 2.3 : Système de coordonnées et les éléments de réduction

U_0, V_0 : Composant du déplacement dans le plan moyen et k indice de chaque pli.

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} \quad (2.23)$$

On est en hypothèse des petites déformations on a alors une relation entre l'angle de rotation de la section et le déplacement suivant l'axe z notée w :

$$W = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Pour un point ne se trouvant pas dans le plan moyen on aura comme déformation :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.24a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \quad (2.24b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \text{Courbure de la plaque} \quad (2.24c)$$

La déformation de cisaillement va s'écrire

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 - 2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.25)$$

Que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Avec :

$$\bullet \quad k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

$$\bullet \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.28)$$

$$\bullet \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.29)$$

Ce qui permet d'écrire les contraintes dans un pli du composite stratifié sous la forme :

$$[\sigma] = [Q]_k [\varepsilon_0] + Z [Q_k] [k] \quad (2.30)$$

Un stratifié uniquement soumis à des sollicitations dans son plan par unité de longueur :

$$N_x, N_y, T_{xy} = T_{yx}$$

Ce sont des efforts de membrane (ou éléments de réduction pour des contraintes ou encore

flux d'efforts dans le stratifié) .

2-3-2 Description des efforts

N_x : Effort dans la direction x par unité de longueur suivant la direction y

N_y : effort résultant dans la direction y, par unité de largeur suivant la direction

$N_{xy} = n_{yx}$: Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \tag{2.31}$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \tag{2.32}$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \tag{2.33}$$

L'unité de mesure utilisée pour les N_{ij} est donc une force par unité de largeur N/mm ou Mpa–mm.

Les relations précédentes peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} N_x \\ xy \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \tag{2.34}$$

Les moments résultants de flexion ou de torsion on pour expression

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x Z. dz \tag{2.35}$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y Z. dz \tag{2.36}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} Z. dz \tag{2.37}$$

L'unité de mesure utilisée pour les M_{ij} est une force multipliée par unité de largeur :Nmm/mm = Nou Mpa – mm².

2-3-3 Relation entre les éléments de réduction et les déformations

Dans le K^e plan on a les relations suivantes :

$$\{\varepsilon_k\} = \{\varepsilon_k^0\} + Z\{K_k\} \tag{2.38}$$

Multipliant les deux membranes de l'équation (2.37) par $[Q'ij]_k$

$$[Q'ij]_k \{\varepsilon_k\} = [Q'ij]_k (\{\varepsilon_k^0\} + Z\{K_k\}) \tag{2.39}$$

L'état de contrainte dans le K^c plis s'écrit:

$$\{\sigma\}_k = [Q'ij]_k \{\varepsilon_k^0\} + Z[Q'ij]\{K_k\} \tag{2.40}$$

Les contraintes résultantes du stratifié peuvent être obtenues à l'aide des relations entre les contraintes dans un pli et les contraintes résultantes[6].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ xy \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'ij]_k \{\epsilon^0\} dz + \int_{-h/2}^{h/2} [Qij']_k \{k\} z dz \quad (2.41)$$

En considérant que :

$\{\epsilon_k^0\}$ Et $\{k\}$ du plan moyen géométrique sont indépendants de Z :

$$\int_{-h/2}^{h/2} [Q'ij]_k \{\epsilon^0\} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \{[Q']_k dz\} \{\epsilon^0\} dz \text{ et } \int_{-h/2}^{h/2} [Qij']_k \{k\} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \{[Q']_h z dz\} \{k\} \quad (2.42)$$

Les intégrales sont :

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} dz = z_k - z_{k-1} \quad (2.43a)$$

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz = 1/2(z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.43b)$$

On obtient:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n [Qij']_k (Z_k - Z_{k-1}) \{\epsilon^0\} + 1/2 \sum_{k=1}^n [Qij']_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{k\} \quad (2.44)$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'ij')_k (Z_k - Z_{k-1}) \quad (2.46)$$

$$B_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^n (Q'ij')_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.47)$$

[A] est la matrice en rigidité en membrane

[B] est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié les résultantes en membranes

(N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonction des déformations en membrane $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0)$.

(Comme dans le cas des plaques homogènes) mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion (k_x, k_y, k_{xy}) .

2-3-4 Rigidité d'une couche isotrope

Pour une seule couche $\bar{z}k = 0$; alors $B_{ij} = 0$,

par conséquent il n'existe pas de couplage membrane- flexion /torsion

Pour une couche isotrope on a : $[Q'_{ij}] = [Q_{ij}]$, $Q_{11} = Q_{22}$, $Q_{16} = Q_{26} = 0$

Et $Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$

La matrice de rigidité pour un stratifié constitué d'une seule couche isotrope s'écrit:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

2-3-5 Rigidité d'une couche orthotrope

Les axes principaux de la couche (axes d'orthotrope) sont confondus avec les axes d'référence du stratifié. les fibres sont orientées suivant la direction X

Dans ce cas : $[Q_{ij}] = (Q'_{ij})$ et $Q_{16} = Q_{26} = 0$ mais $Q_{66} \neq \frac{E}{2(1+\nu)}$

Et les coefficients de rigidité $B_{ij} = 0$, $A_{ij} = Q_{ij} h$, $D_{ij} = Q_{ij} \frac{h^3}{12}$

h : est l'épaisseur totale de stratifié

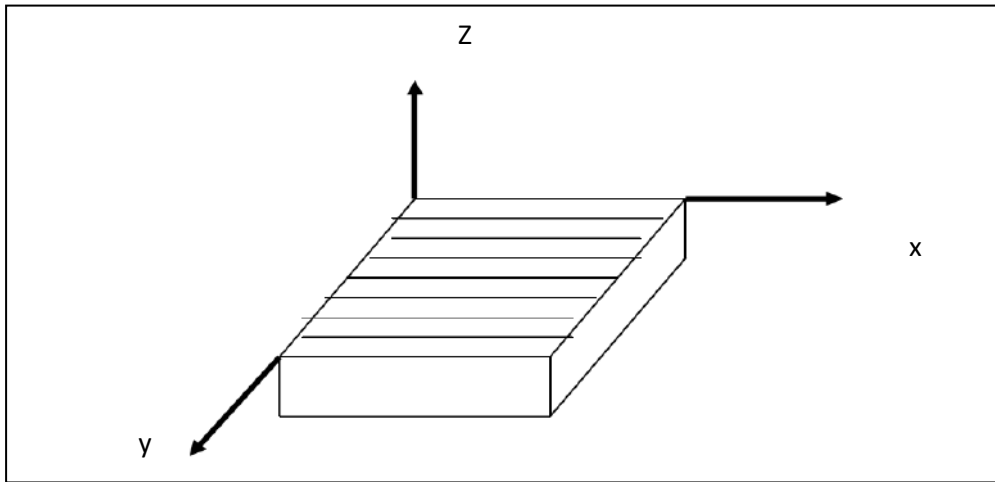


Figure 2. 4 : couche spécialement orthotrope

La matrice de rigidité s'écrit donc comme suit:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

2-3-6 Rigidité d'une couche généralement orthotrope

Dans le cas où les axes principaux de la couche ne coïncident pas avec les axes de référence du stratifié, les fibres sont orientées suivant un angle du rapport à l'axe x (figure 2.5).

pour ce type on a : $[Q_{ij}] \neq (Q'_{ij})$ et $Q_{16} = Q_{26} \neq 0$ mais $Q_{11} = Q_{22}$
 et $Q_{66} \neq \frac{E}{2(1+\nu)}$

D'où les coefficients de rigidité : $B_{ij} = 0$

$$A_{ij} = Q'_{ij} \frac{h^3}{12} \quad ij = 11,12,22,16,26,66$$

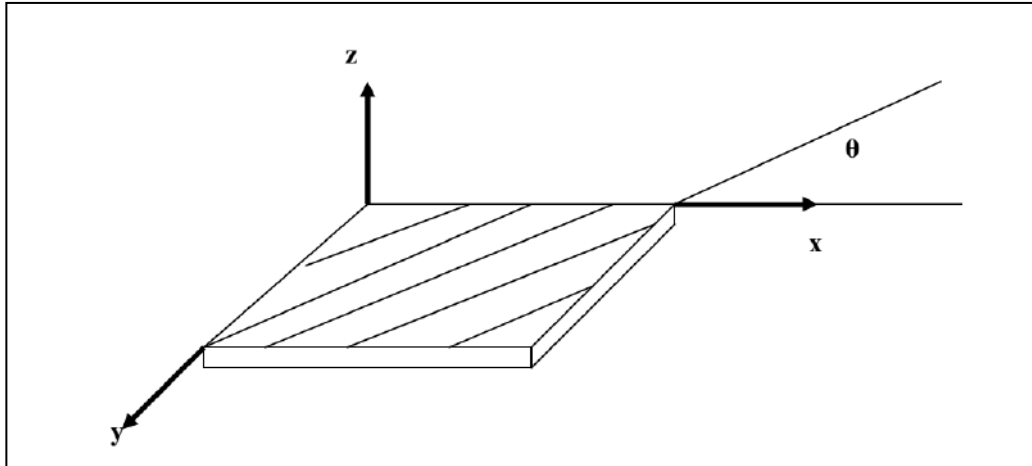


Figure 2.5 : couche généralement orthotrope.

La matrice de rigidité s'écrit donc

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2-4 Expressions des Conditions aux limites

Ces conditions sont matérialisées par le blocage de certaines composantes (degrés de liberté) du déplacement. Les ouvrages reposent généralement sur des appuis (ou liaison externes) par l'intermédiaire d'appareils qui permettent de bloquer certains degrés de liberté du déplacement ou de la rotation. Ces appareils, conçus pour travailler dans les directions privilégiées, autorisent sélectivement le développement des effets structuraux dus aux charges statiques ou dynamiques.

Considérons une plaque homogène de dimensions a, b et h et on suppose que ses cotés sont parallèles aux axes x et y.

Ces diverses conditions vont s'écrire sur les expressions des déplacements u, v et w, on aura ainsi d'abord pour la théorie classique de love – Kirchhoff [6].

2-4-1 Appui simple

Si le bord ($x=a$) de la plaque est simplement appuyé, la flèche w le long de celui-ci est nulle. Et en même temps, ce bord peut tourner librement autour de l'axe x , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de moments de flexion M_x le long de ce bord

$$(W)_{x=a} = 0, \tag{2.51}$$

$$(M_x)_{x=a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \tag{2.52}$$

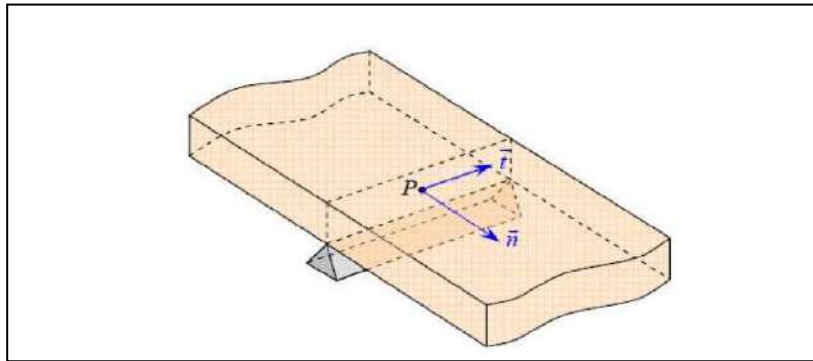


Figure 2.6 : Schématisation d'un appui simple.

2-4-2 Bord fixé

Si le bord $x=a$ de la plaque est encasté, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent au feuillet moyen fléchi, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. En conséquence le déplacement vertical et la rotation sont nuls.

$$(W)_{x=a} = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \tag{2.53}$$

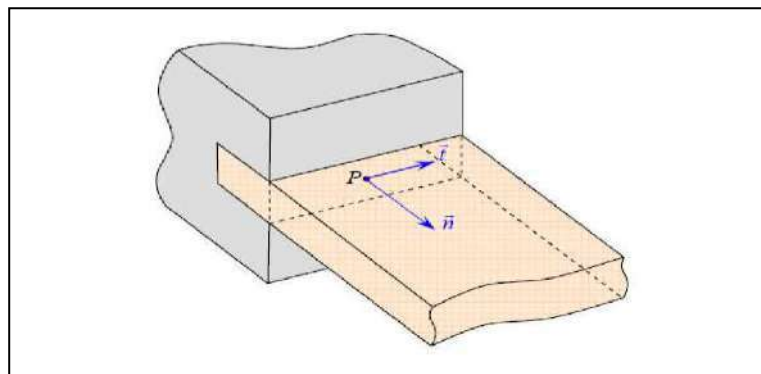


Figure 2.7 : Représentation d'un encastrement.

2-4-3 Bord libre

Si le côté d'une plaque $x = a$ est entièrement libre, il est naturel que le bord ne subit ni moments de torsion et de flexion, ni des forces de cisaillement vertical.

$$(M_X)_{x=a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 ; \quad (Q_X)_{x=a} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (2.54)$$

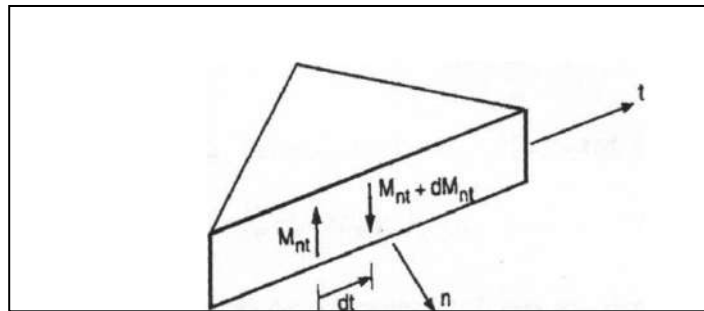


Figure 2.8 : Variation du moment de torsion le long d'un bord

2-5 Vibrations de flexion des plaques minces symétriques

2-5-1 Equation du mouvement

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, les déformations de cisaillement transverse sont négligées[6] :

$$\gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (2.56)$$

En reportant cette égalité dans les relations [1] nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pour un stratifié symétrique, et plaque orthotrope les termes de couplage membrane flexion-torsion ainsi que le terme intégral \mathbf{R} , sont nuls[1] :

$$B_{ij}=0 \quad \text{et} \quad R=0 \quad \text{et} \quad D_{12}=D_{26}=0 \quad (2.58)$$

Dans ces conditions, et d'après les équations du mouvement [1], les déplacements du stratifié dans le plan sont découplés du déplacement transversal. Les résultantes en cisaillement étant nulles par hypothèse (2.56), le déplacement transversal (ou de flexion) est complètement décrit par l'équation du mouvement [1] qui en considérant l'expression des moments (2.59a) et des courbures (2.59 b), prend la forme de l'expression (2.63).

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.59 a)$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y, t), \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y, t), \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y, t) \quad (2.59b)$$

Peut être écrire équation a inverse :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{-1} & D_{12}^{-1} & D_{16}^{-1} \\ D_{12}^{-1} & D_{22}^{-1} & D_{26}^{-1} \\ D_{16}^{-1} & D_{26}^{-1} & D_{66}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Ou D_{ij}^{-1} la matrice inverse de $[D_{ij}]$

$$\begin{aligned} D_{11}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{22}D_{66} - D_{26}^2), & D_{12}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}) \\ D_{16}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}), & D_{22}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{66} - D_{16}^2) \\ D_{26}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{16} - D_{26}D_{11}), & D_{66}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{22} - D_{12}^2) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Et Δ le déterminent de la matrice $[D]$

$$\Delta = D_{11}D_{22}D_{66} + 2D_{12}D_{16}D_{26} - D_{11}D_{26}^2 - D_{22}D_{16}^2 - D_{66}D_{12}^2 \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} + q \\ = I_{xy} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dans le cas où les termes de l'inertie rotatifs peuvent être négligés,

$I_{xy} = 0$ L'équation de la vibration est déduite comme:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} = 0 \quad (2.64)$$

2-5-2 Fréquences et déformées propres des plaques rectangulaires

Considérant l'équation du mouvement transversal libre du stratifié ($q = 0$). La solution vibratoire harmonique de cette équation est recherchée, par la méthode de séparation des variables d'espaces et du temps, sous la forme[6] :

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y)e^{i\omega t} \quad (2.65)$$

Ou

ω : est la pulsation ou fréquence circulaire du mouvement ;
 $w_0(x, y)$: est la solution spatiale ou déformée. En reportant cette forme dans l'équation du mouvement, nous aboutissons à l'équation aux fréquences :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \rho_s \omega^2 w_0 = 0 \quad (2.66)$$

La résolution du problème consiste à déterminer toutes les fonctions $w_0(x, y)$ satisfaisant les conditions aux limites (déformées propres) et d'en déduire les fréquences propres correspondantes. Dans le cas d'une plaque rectangulaire de longueur a et de largeur b (figure 2.9), les conditions aux limites standards s'écrivent, pour les bords parallèles à la direction y [1] :

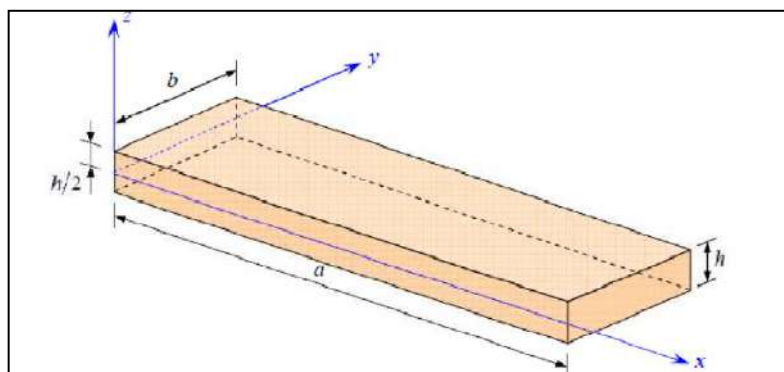


Figure 2.9 : Plaque rectangulaire

✚ En appui simple :

Pour $x=0$ et $x=a$

$$w_0 = 0, \quad M_x = 0 \tag{2.67}$$

Pour $y=0$ et $y=b$

$$w_0 = 0, \quad M_y = 0$$

✚ Encastré :

$$w_0 = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \tag{2.68}$$

✚ Libre :

$$M_x = 0 \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \tag{2.69}$$

Où la résultante de cisaillement transverse Q_x est reliée aux moments par la relation [1]. En tenant compte des différentes hypothèses retenues, la condition de bord libre devient :

$$M_x = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{2.70}$$

En remplaçant les moments et courbures par leurs expressions (2.59a) et (2.59b), les conditions aux limites s'expriment en fonction du déplacement :

➤ **Pour l'appui simple :**

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \tag{2.71}$$

➤ **Pour l'encastrement :**

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$(2.72)$$

➤ Pour le coté libre :

$$\begin{cases} D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \\ D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

De même pour les cotés parallèles à la direction x, nous obtenons :

➤ Pour l'appui simple :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.74)$$

➤ Pour l'encastrement :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

➤ Pour le coté libre :

$$\begin{cases} D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \\ 2D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 4D_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

La solution recherchée doit donc satisfaire simultanément l'équation du mouvement (2.65), et les conditions aux limites définies par une combinaison quelconque de quatre conditions parmi (2.74) à (2.75). Dans le cas d'une plaque orthotrope ($D_{12} = D_{26} = 0$), en appui simple sur ses quatre bords, la solution analytique exacte est donnée sous la forme (2.77) qui satisfait explicitement les conditions (2.71) et (2.72).

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad (2.77)$$

la déformée propre du mode (m , n) et sa fréquence propre sont donnée par [1]

$$w_{mn} = A_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad (2.78)$$

Et

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22}]} \quad (2.79)$$

2-6 Analyse et modélisation des plaques composites par éléments finis

La modélisation physique de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des Éléments Finis *MEF* est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

La *MEF* est devenue un important outil d'analyse dans les projets modernes d'ingénierie, surtout après le développement des microordinateurs modernes. Aujourd'hui, cette méthode est utilisée avec succès sur nombreuses applications, telles que dans les problèmes de mécanique des structures et solides, d'endommagement, de fracture, de transfert de chaleur, d'électromagnétisme, d'acoustique et mécanique des fluides. Plusieurs softwares d'éléments finis, tels que : Ansys, Nastran, Abaqus et Comsol Multiphysics sont largement employés pour la modélisation numérique des structures.[20]

2-7 Modélisation des plaques composites par ANSYS

Le programme ANSYS possède de nombreuses fonctionnalités d'analyse d'éléments finis, allant d'une analyse simple, linéaire, statique à une analyse dynamique complexe, non linéaire et transitoire. En ce qui suit les étapes typiques d'ANSYS[20] :

1. Ansys Utility Menu :
 - Fichier - effacer et démarrer nouveau - ne pas lire le fichier – ok.
 - Fichier - modifier le nom du travail - entrer le nouveau nom du travail - xxxx ok.
 - Fichier - modifier le titre - entrer un nouveau titre - aaa – ok.
2. Ansys Main Menu – Preferences : sélectionnez - STRUCTURAL – ok.
3. Preprocessor :
 - Type d'élément de maillage : sélectionnez le type d'élément dans la table et les options requises.
 - Constantes réelles : donnez les détails tels que l'épaisseur, les zones, le moment d'inertie,...etc requis en fonction de la nature du problème.
 - Propriétés du matériau : donner les détails tels que le module de Young, le coefficient de Poisson, etc, selon la nature du problème.
4. Modiling : créez la géométrie requise, comme les éléments des nœuds, la zone, le volume par utilisation des options appropriées.
5. Generate : éléments / nœuds utilisant l'outil Maillage si nécessaire (en 2D et en 3D)
6. Apply : conditions aux limites et les charges telles que les degrés de liberté, force et moments, pression etc.
7. Analysis type : choisir le type d'analyse « MODAL » puis le nombre de mode à calculer.
8. Solve : résoudre le problème.
9. General Post Processor : tracer / énumérer les résultats requis.
10. Plot Ctrl : animation des déformée.

Chapitre 03

Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différentes géométries et conditions aux frontières

3-1 Introduction

Les Considérations théoriques de base des plaques stratifiées avec les techniques de solution associées ont été discutées précédemment. Dans ce chapitre nous étudions l'effet de certains paramètres fondamentaux tels que les conditions aux frontières, le changement de séquence d'empilement, le nombre de plis constituants et la nature du matériau sur le comportement des plaques stratifiées du verre /polyesters et verre naturel et polystyrène en vibration de flexion.

Les méthodes de résolution utilise la méthode élément fins et utiliser code de calcul Ansys et caractériser le comportement des plaques composites stratifiées travaillant en flexion nous permettent de déterminer les fréquences propres et la flèche.

Afin d'analyser la vibration de la plaque composite stratifiée, deux cas ont été mis au point :

- Le premier concerne la variation des fréquences propres du premier mode en fonction de plusieurs paramètres pour différentes plaques composites
- Les secondes de traite temporelle de la flèche pour les plaques symétriques orthotropes

La connaissance des caractéristiques élastiques des couches constituantes est indispensable pour la prédiction du comportement mécanique global de la structure étudiée. Les couches sont orthotropes avec des axes d'orthotrope différents pour chaque couche.

En général, un matériau orthotrope travaillant dans le plan (2D), les quatre coefficients élastiques E_L , E_T , G_{LT} et V_{LT} et la géométrie des couches sont des données pour cette analyse.

Dans ce travail on a besoin des valeurs de base des grandeurs mécaniques qui caractérisent les éléments du modèle choisi: E_L/E_T , G_{LT}/E_T et V_{LT} . Dans notre cas, on remarque que le premier rapport égal à 10, le second à 0,5 et le coefficient de poisson à 0,3.

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

Dans la littérature l'analyse de différents matériaux Composites à renforcement unidirectionnel nécessite un rapport d'orthotrope E_L/E_T , variante de 1 à 50. Les paramètres G_{LT}/E_T et V_{LT} sont fixes vu leur faible influence sur la variation des fréquences propres à comparer avec Celle du rapport ($E_L/E_T = 10$) avec ceux pour d'autres matériaux composites et de cette façon on renforce mieux conclusions à obtenir.

La considération des structures stratifiées un empilement symétrique permet de découpler les effets de flexion et de traction / compression. En revanche, il existe un couplage pour les stratifiées antisymétriques (phénomène très important pour le comportement de certaines structures, car il peut influencer, particulièrement sur la fréquence propre). Pour ces raisons, nous allons déterminer l'effet des différents coefficients de couplage sur le comportement vibratoire.

L'analyse de la vibration de plaque stratifiées travaillant in flexion peut être donc projetée sur trois d'étude de l'influence de:

- 1- Nombre de couches constituantes.
2. L'influence séquence d'empilement (angle d'orthotrope).
3. Différents coefficients de couplage (en particulier B_{ij} , A_{16} et A_{26})
4. Nature of matériel of renfort
5. Conditions aux frontières (appuis simples et encastrement).

Les différentes étapes du calcul des caractéristiques dynamiques d'une plaque travaillant en flexion et la recherche de l'influence de tous ces derniers paramètres sur la fréquence propre de différents stratifiées sont illustrés par un programme informatique écrit en logiciel ANSYS, Les résultats obtenus seront des courbes de comportement plus explicites.

3-2 Compétence des stratifiés symétriques orthotropes

3-2-1 Influence de l'anisotropie

Les matériaux composites stratifiés traditionnels par leur anisotropie (comportement différent selon la direction des fibres envisagée et la séquence d'empilements des stratifiés considérés).

De manière à apprécier l'influence de l'anisotrope, nous comparons le comportement d'une plaque orthotrope à une plaque isotrope. Nous considérons une monocouche orthotrope rapportée à ses axes principaux (les axes d'orthotropes coïncident avec les axes de symétrie de la plaque).

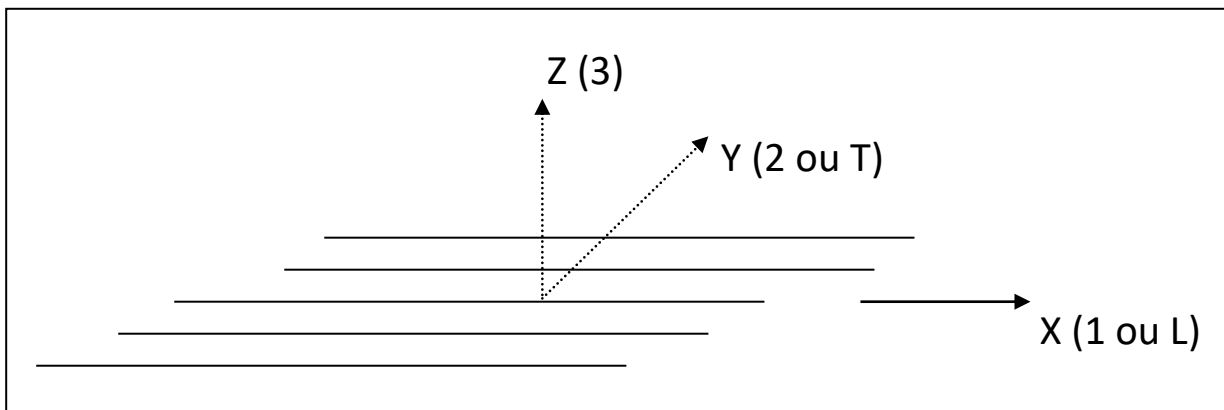


Fig. 3.1 : Axes d'orthotrope d'une couche composite symétrique orthotrope

La matrice de rigidité de la plaque est:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

La plaque a donc, un comportement d'un stratifié symétrique orthotrope, et l'équation des fréquences propres si l'on considère que la plaque est simplement appuyée, est déterminée d'après la relation

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

Par :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2 n^2 R^2 + D_{22}n^4 R^4]} \quad (3.1)$$

Nous considérons le cas d'une plaque carrée (R=1) constituée d'une seule couche de caractéristiques mécaniques:

$$D_{11} = 10D_{22} \quad D_{12} + 2D_{66} = D_{22} \quad (3.2)$$

En reportant ces valeurs dans (3.1), les fréquences propres s'écrivent :

$$\omega_{mn} = K_{mn} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{D_{22}/\rho^2} \quad (3.3)$$

Et

$$K_{mn} = 10m^4 + 2m^2 n^2 + n^4 \quad (3.4)$$

Les valeurs des fréquences et des modes de vibration correspondants sont rapportés dans le tableau 3.1, pour une plaque carrée orthotrope en appuis simples.

Dans le cas d'une plaque isotrope carrée (R=1), les caractéristiques sont :

$$D_{11} = D_{22} = (D_{12} + 2D_{66}) = D \quad (3.5)$$

L'équation (3.1) de fréquences propres réduit alors à:

$$\omega_{mn} = K_{mn} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{D/\rho} \quad (3.6)$$

Et

$$K_{mn} = m^2 + n^2 \quad (3.7)$$

D est le module de flexion de la plaque détermine par:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$$

E: module d'Young, ν : coefficient de Poisson, h: épaisseur de plaque

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à déferents géométries et conditions aux frontières

Les valeurs des fréquences et des modules de vibration correspondants aux deux cas sont reportées dans le tableau 3.1. La plaque est carrée et est en appuis simples.

Les résultants obtenus montrent qu'il n'y a pas de direction préférentielle le dans le cas d'une plaque isotrope : mêmes fréquences propres $m=1, n=2$ (avec $K_{mn} = 5$) et $m=2, n=1$ (avec $K_{mn} = 5$); pour $m=1, n=3$ et $m=3, n=1$; ect.....

Par contre, dans les cas d'une plaque orthotrope. Le 2^{ème} mode correspond à $m=1; n=2$ (avec $K_{mn} = 5.83$), alors que $m=2, n=1$ correspond au 4^{ème} mode (avec $K_{mn} = 13.0$); etc

Les formes correspondantes des modes sont montrées par la figure 3.3, ou' les lignes nodales (lignes pour lesquelles la déflexion est nulle Durant la vibration) sont indiquées par le tableau 3.1 Fréquence et modes propres suivant :

Modes	Plaque orthotrope			plaque isotrope		
	m	n	K_{mn}	m	n	K_{mn}
1 ^{ème}	1	1	3.605	1	1	2
2 ^{ème}	1	2	5.830	1	2	5
3 ^{ème}	1	3	10.440	2	1	5
4 ^{ème}	2	1	13	2	2	8

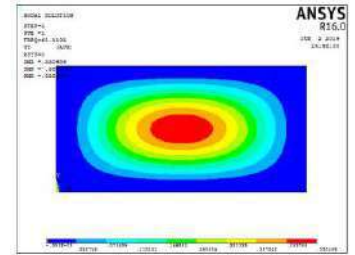
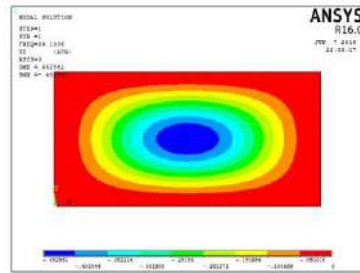
Tableau 3.1 : le Fréquence et modes propres.

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

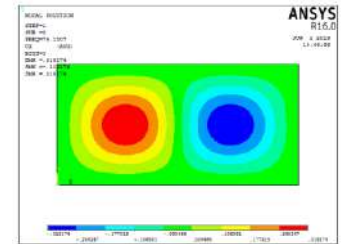
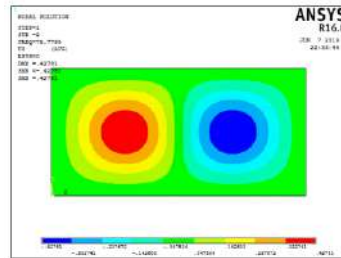
Orthotrope

isotrope

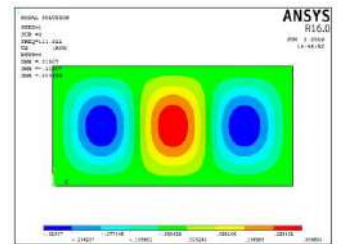
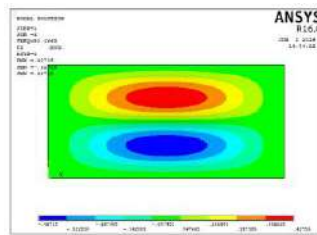
Mode 1^{émé}



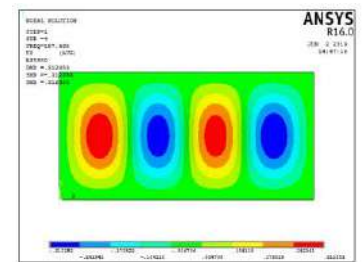
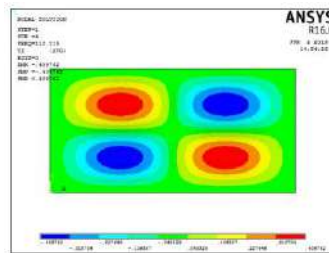
Mode 2^{émé}



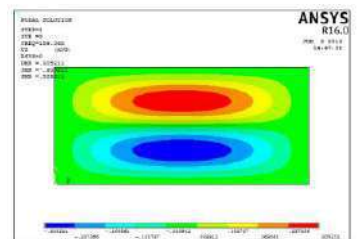
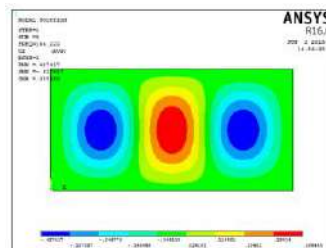
Mode 3^{émé}



Mode 4^{émé}

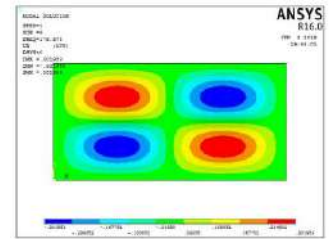
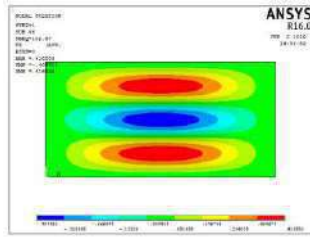


Mode 5^{émé}

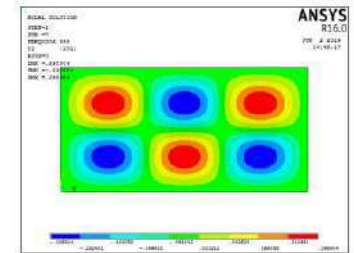
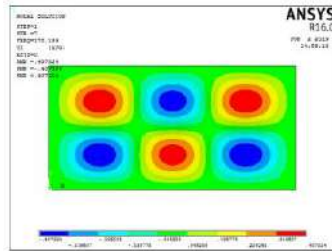


Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

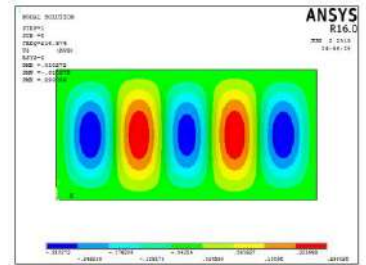
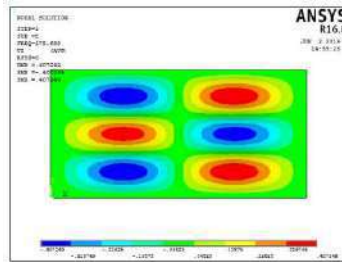
Mode 6^{émé}



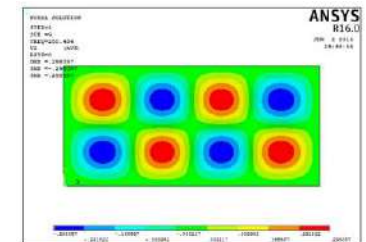
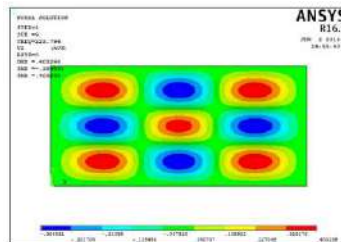
Mode 7^{émé}



Mode 8^{émé}



Mode 9^{émé}



Mode 10^{émé}

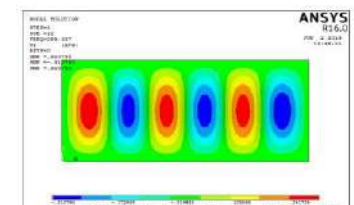
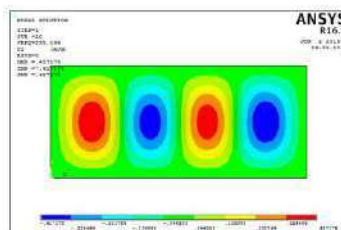


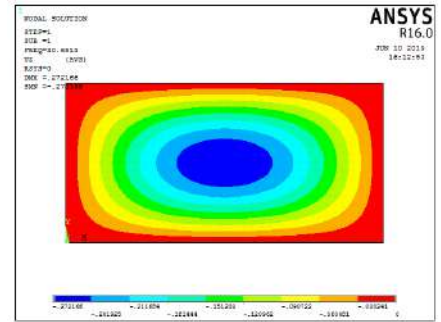
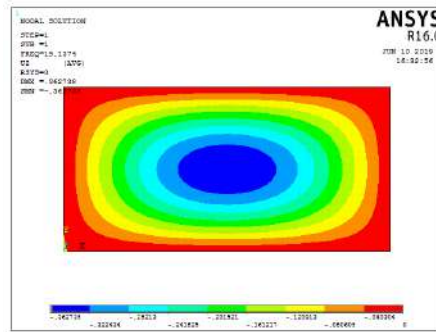
Fig. 3.2: lignes modale d'une plaque rectangulaire orthotrope et isotrope en EEEE (effet d'orthotropie)

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

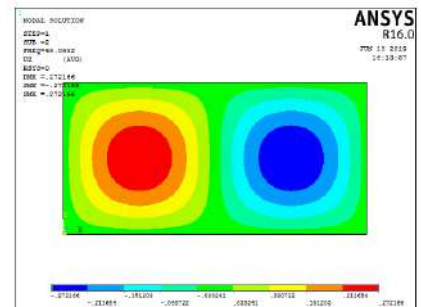
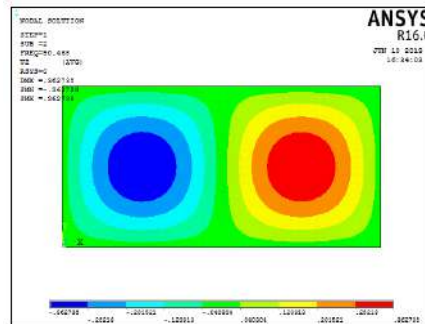
Orthotrope

isotrope

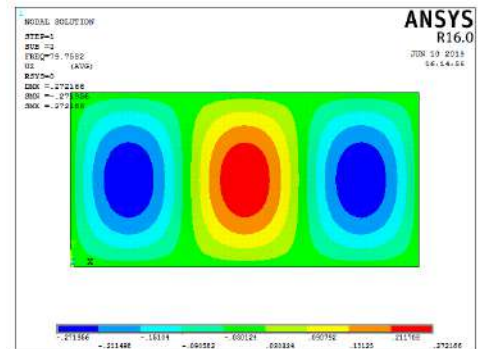
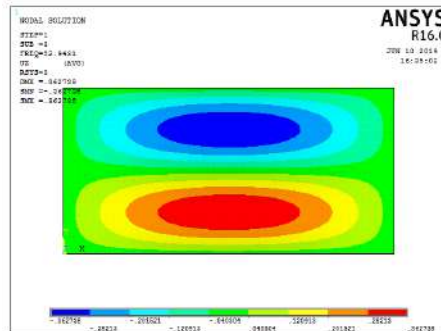
Mode 1^{émé}



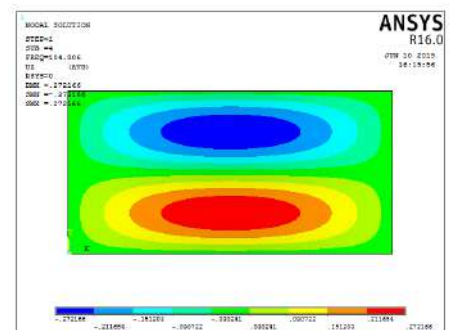
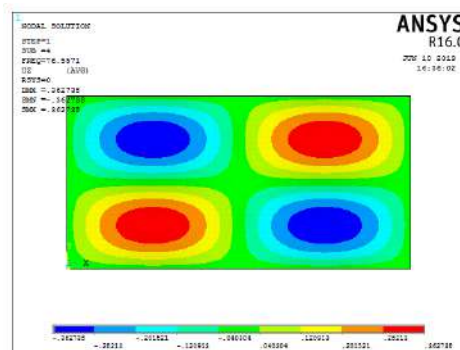
Mode 2^{émé}



Mode 3^{émé}

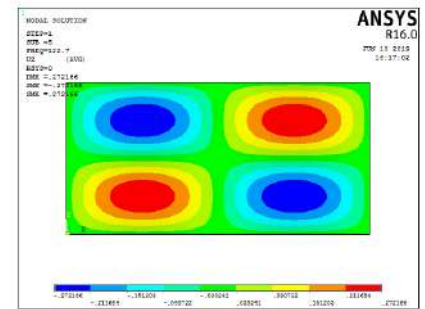
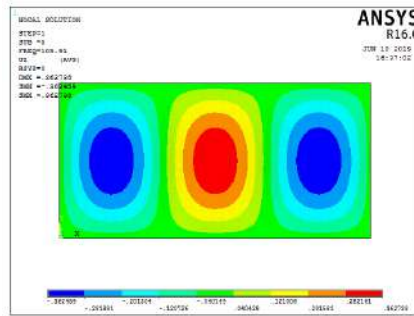


Mode 4^{émé}



Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

Mode 5^{ème}



Mode 6^{ème}

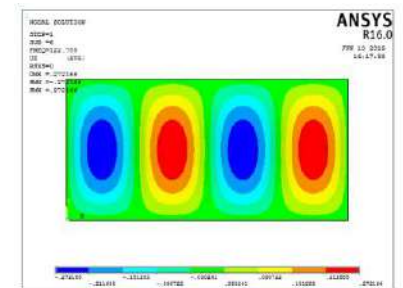
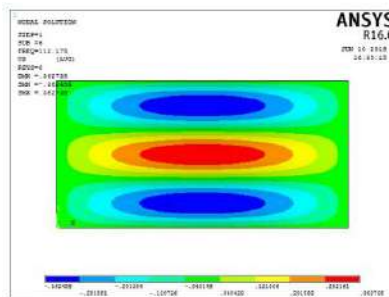


Figure 3.3 : lignes modale d'une plaque rectangulaire orthotrope et isotrope en AAAA(effet d'orthotropie)

3-2-2 Model des plaques stratifié

Les plaques étudiées présentent 4 couches orthotropes de mêmes épaisseurs réparties en modèle symétrie miroir et antisymétrie. Afin de cerner les réponses dynamiques pour différentes catégories de plaque ($R=0.5$, $R=1$, $R=1.5$) Les Tableaux (3.3) et (34) qui suivent présentes respectivement, les propriétés mécaniques et géométriques de les plaques

Tableau (3.2) : Caractéristiques Mécaniques des plaques stratifiées à phase orthotrope ($N_p=4$).

Modèle de plaque	Matériaux	E_1 (Gpa)	E_2 (Gpa)	G_{12} (Gpa)	ν_{12}	ρ (kg/m ³)
Ortho 01	AS4 (3501/6)	148	10.50	5.61	0.30	1520
Ortho 02	AS/3501	138	9.00	6.90	0.30	1600
Ortho 03	T300/5208	132	10.8	5.65	0.24	1540
Ortho 04	Kevlar/époxy	76.8	5.5	2.07	0.34	1380
Ortho 05	Boron/Al	227	139	57.6	0.24	2650
Ortho 06	SCS-6/TI-15-3	221	145	53.2	0.27	3860
Ortho 07	S-2 glass/epoxy	43.5	11.5	3.45	0.27	2000

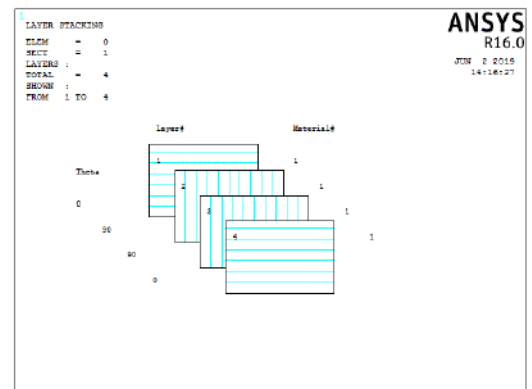
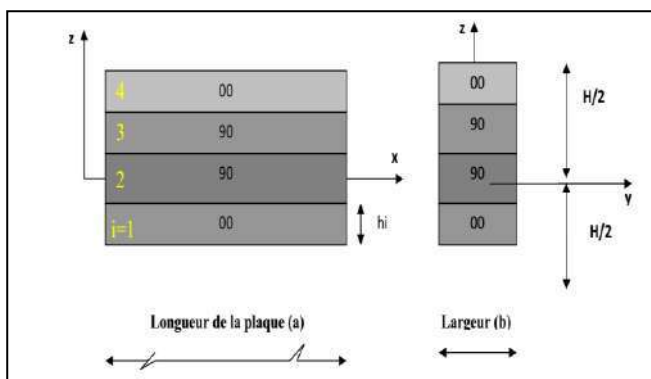
Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

Tableau (3.3) : Propriétés géométriques du model des plaques stratifiées orthotropes ($N_p=4$).

Types de plaque	Longueur a (m)	Largeur b (m)	Rapport $R=a/b$ (longueur/largeur)	Hauteur totale H (mm)	Epaisseur de pli h (mm)
Modèle 01	1	2	0.5	2	0.5
Modèle 02	1	1	1	2	0.5
Modèle 03	3	2	1.5	2	0.5

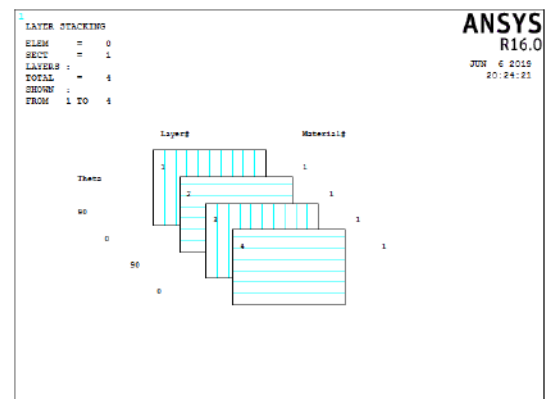
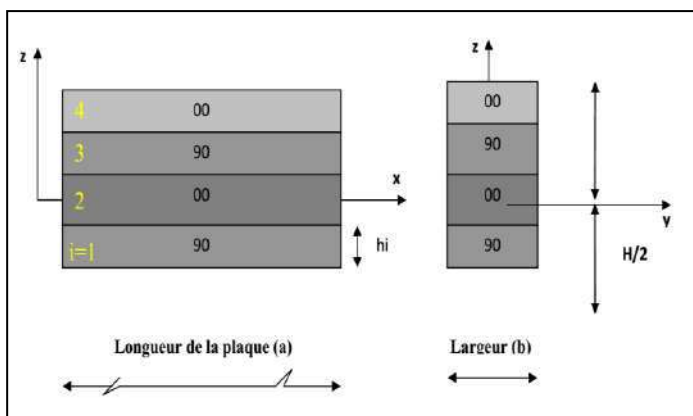
3-2-3 Influence de l'empilement des couches

3-2-3-1 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré symétrique (i pair)



La figure 3.4 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré symétrique (i pair)

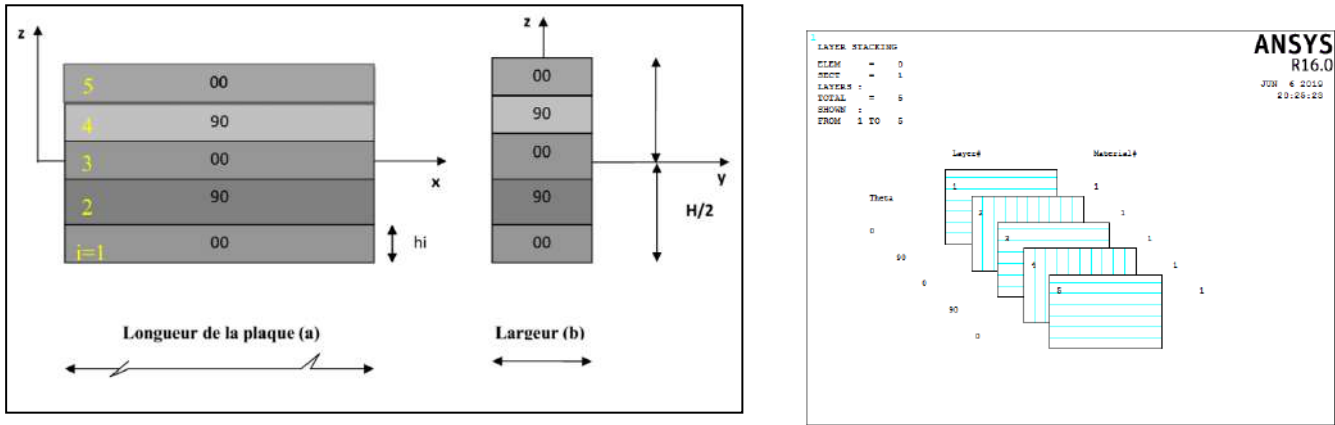
3-2-3-2 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (i pair)



La figure 3.5 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (i pair)

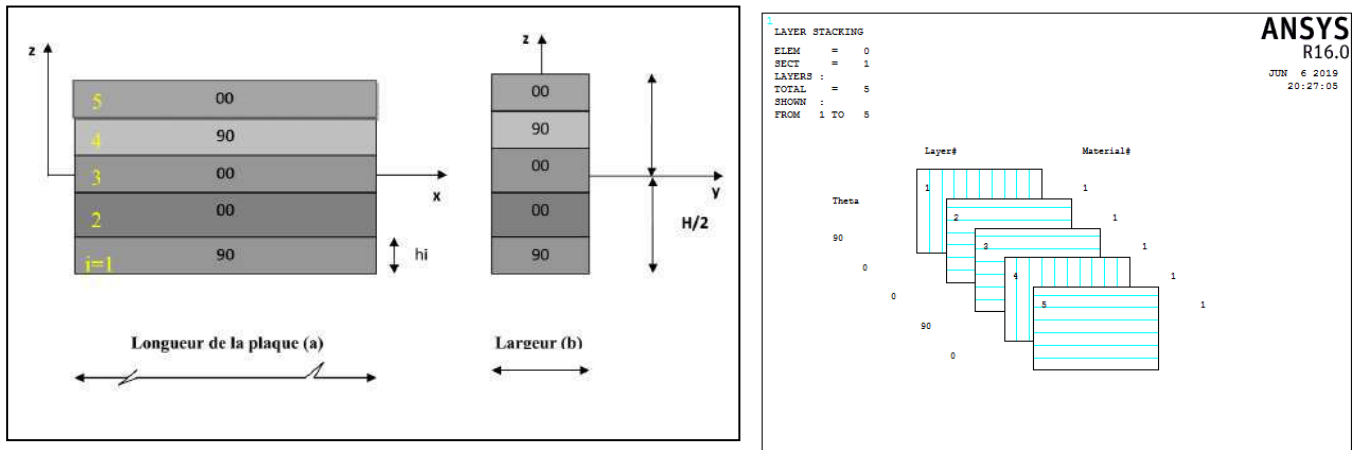
Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

3-2-3-3 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) symétrique (i impair)



La figure 3.6 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) symétrique (i impair)

3-2-3-4 Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) antisymétrique (i impair)



La figure 3.7 : Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) antisymétrique (i impair)

3-2-4 Influence du nombre de couches

Dans une première étape, on considère le cas des fréquences propres associées à une plaque rectangulaire ($a * b$) constituée de n couches croisées identiques $[0^\circ/90^\circ]_n$, disposées symétriquement par rapport au plan moyen de la plaque (n est un nombre impair).

L'expression de la fréquence propre (équ.3.1) est reformulée à faire apparaître les expressions des coefficients de rigidité des fonctions du nombre de couches n qui sont :

$$A_{11} = A_{22}$$

$$A_{11} = 1/2(1 + \frac{E_T}{E_L}) Q_{11}h, A_{12} = Q_{12}h, A_{16} = A_{26} = 0, A_{66} = Q_{66}h$$

$$B_{ij}$$

$$D_{11} = D_{22}$$

$$D_{11} = [(\frac{E_T}{E_L} - 1)\alpha + 1] \frac{Q_{11}h^3}{12}, D_{16} = D_{26} = 0, D_{12} = \frac{Q_{12}h^3}{12}, D_{66} = \frac{Q_{66}h^3}{12}$$

Où' le terme α est dépendant du nombre de couches. définit comme suit :

$$\alpha = \frac{1}{8} \left[\frac{1 + (3n - 1) - n - 1}{n^2 - 1} \right]$$

n = Nombre de couches

Les coefficients de rigidité réduites : Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} et Q_{66} sont données par l'expression (chap.2).

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

Nous considérons deux types d'appuis :

➤ Cas d'appuis simples :

L'expression des fréquences propres est déterminée d'après l'équation (3.1):

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2 n^2 R^2 + D_{22}n^4 R^4]}$$

En introduisant les coefficients (3.7) dans cette équation, on obtient réexpression des fréquence propres suivante :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho_s}} \times \Psi$$

Ou'

$$D_0 = \frac{Q_{11}h^3}{12}$$

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1-\nu^2 L T} \frac{E_T}{E_L}$$

h; est l'épaisseur totale de la plaque.

Et ψ est le coefficient des fréquences (non dimensionnel) exprime suit :

$$\Psi = \sqrt{((RQ - 1)\alpha + 1) (m^4 + R^4 n^2) 2RQ (\nu L T + 2\alpha\beta) m^2 n^2 R^2}$$

En posant :

$$RQ = E_L/E_T, \alpha' = G_{LT}/E_T, \text{ et } \beta = 1 - \nu^2 L T R Q$$

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

➤ Cas d'encastrement :

Similairement, pour une plaque encadrée sur ses bords, l'expression des fréquences propres est déterminée d'après l'équation et en introduisant les coefficients (3.7) on obtient l'expression de fréquences propres suivante :

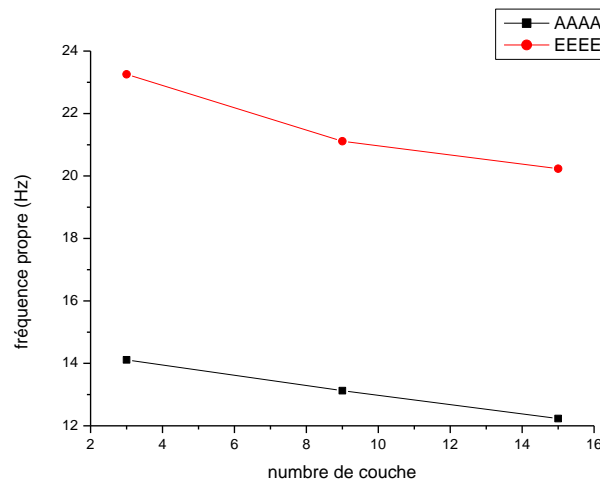
$$\omega_{m n} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho_s}} \times \psi$$

Et les coefficients des fréquences ψ :

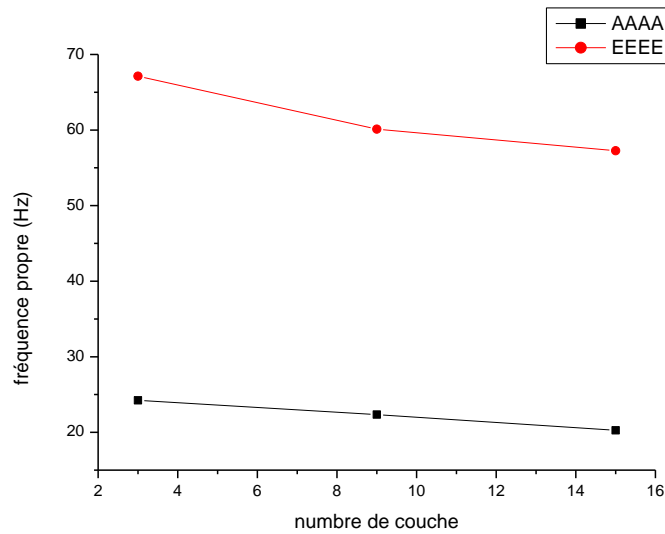
$$\psi = \frac{4}{3} \sqrt{3((R Q - 1)\alpha + 1(m^4 + R^4 n^4 + 2R Q(v L T + 2\alpha' \beta)m^2 n^2 R^2))}$$

Sur les figures 3.8 et 3.9, on représente respectivement la variation des fréquences propres fondamentales ($m=n=1$) en fonction du nombre de couches et la nature des appuis (simple et encastrement), d'une plaque rectangulaire ($a=2b$) et carrée ($R=1$).

Les résultats obtenus montrent que la fréquence fondamentale dépend du nombre de couches empilées, l'augmentation de leur nombre diminue la valeur des fréquences propres et les stabilise au fur et à mesure que quel que soit les conditions aux limites.



la figure 3.8 : variation de la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couches n pour une plaque carrée ($R=1$) croisée symétrique (AAAA) et (EEEE)



la figure 3.9 : variation de la fréquence fondamentale en fonction du nombre de couche n pour une plaque rectangulaire croisée symétrique (AAAA)et(EEEE)

3-2-5 Influence de la séquence d'empilement des couches

Nous considérons une plaque rectangulaire ($a \times b$), se présentant sous forme d'un stratifié symétrique équilibré $[\mp\theta]$ (Les couches en nombre pair ($n=2p$) sont orientées alternativement suivant les directions $+\theta$ et $-\theta$ relativement aux axes de référence du stratifié). Il ne présente pas donc de couplage flexion-torsion ($D_{16}=D_{26}=0$).

Nous déterminons la variation de la fréquence propre pour le premier mode correspondant à ($m=n=1$) en fonction de l'angle d'orientation des fibres de chaque couche composant la plaque.

Elle est rectangulaire de géométrie ($a=2b$), et est carrée ($R=1$) en appuis simples et encastrement.

Pour ce type de stratifié nous avons les coefficients de rigidité suivants :

$$D_{ij} = \frac{h^3}{12} Q'_{ij} \quad \text{si} \quad ij=11,12,22,66$$

$$\text{Avec : } D_{16} = D_{26} = 0$$

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à déformations géométriques et conditions aux frontières

Où les paramètres Q'_{ij} sont exprimés [1]

En introduisant les paramètres : RQ , α' et β (equ. 3.11) .les fréquences propres

Données par les équations [1] peuvent s'écrire sous les formes réduites suivantes :

- **cas d'appuis simples :**

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho_s}} \times \Psi$$

$$D_0 = \frac{Q_{11} h^3}{12}$$

h: épaisseur totale de la plaque .

D'où le coefficient de la fréquence propre Ψ

$$\Psi = (c^4 + RQs^4 + 2(vLT + 2\alpha'\beta)RQs^2c^2) + R^4(s^4 + 2(vLT + 2\alpha'\beta)RQs^2c^2 + RQ2R^2\{(1 + RQ - 4RQ\alpha'\beta)s^2c^2 + vLTRQ(c^4 + s^4) + 2(1 + RQ - 2RQ(vLT + \alpha'\beta)s^2c^2 + \alpha'\beta RQ(s^4 + c^4))\}$$

Avec: $c = \cos\theta$ $s = \sin\theta$

- **cas d'encastrement:**

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho_s}} \times \Psi$$

Et le coefficient des fréquences propres Ψ

$$\Psi = \frac{4}{3} [3(c^4 + RQs^4 + 2(vLT + 2\alpha'\beta)RQs^2c^2) + 3(s^4 + 2(vLT + 2\alpha'\beta)R^4Qs^2c^2 + RQ + 2R^2\{(1 + RQ - 4RQ\alpha'\beta)s^2c^2 + vLTRQ(c^4 + s^4) + 2(1 + RQ - 2RQ(vLT + \alpha'\beta)s^2c^2 + \alpha'\beta RQ(s^4 + c^4))\}]$$

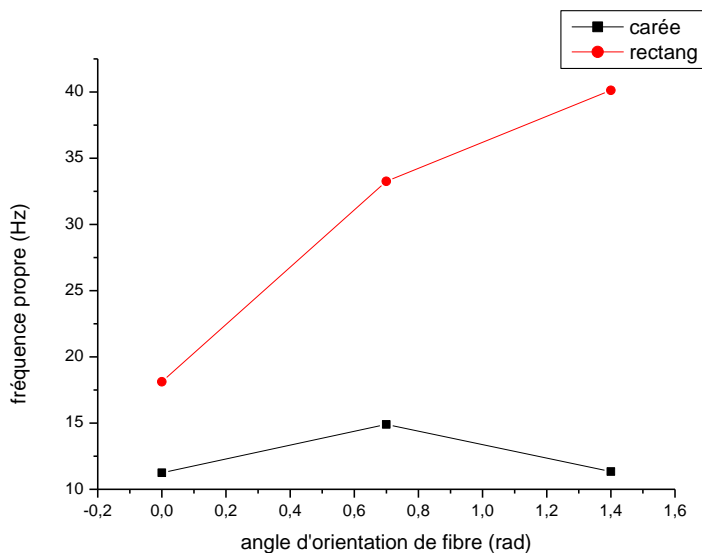
La figure 3.10 et 3.11 représentent respectivement l'évolution des fréquences fondamentales en fonctions de l'angle d'orthotrope de couches θ d'une plaque composite carrée ($R=1$) et d'une plaque composite rectangulaire ($a=2b$). Pour comparaison, les deux types d'appuis, simples et encastrement sont considérés.

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

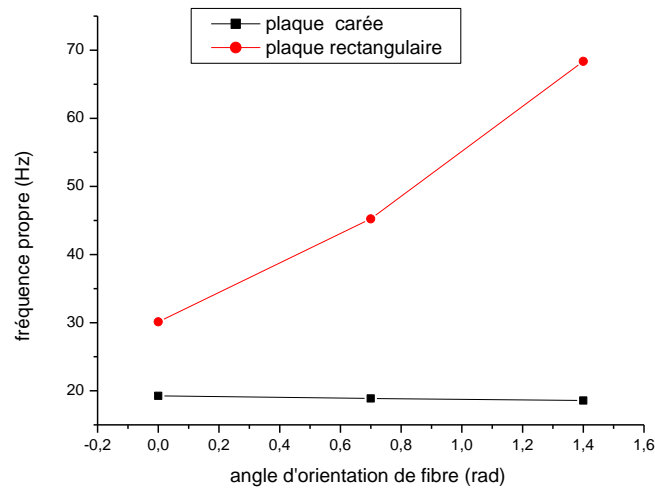
Le matériau utilisé dans ce cas est le composite à matrice du type polyesters associée à des fibres de verre.

Nous observons une influence plus grande de l'orientation des axes principaux sur la fréquence fondamentale dans le cas d'une plaque rectangulaire que dans le cas d'une plaque carrée. De plus on a remarqué que chaque fois qu'on s'approche de l'orientation 90° , la fréquence propre de plaque rectangulaire augmente. Sa pente d'accroissement est supérieure à celle de plaque carrée.

La figure 3.11 montre que l'encastrement de la plaque carrée influe sur l'évolution des fréquences propres en fonction de l'orientation θ et permet que de petites variations. En revanche, la forme rectangulaire présente une allure que celle en appuis simples mais de fréquences propres plus importantes.



La figure 3.10: variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'angle d'orientation de fibre d'une plaque équilibrée carrée et rectangulaire en appuis simple



la figure 3.11 : variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'angle d'orientation de fibre d'une plaque équilibrée encadrée sur ses bords.

3-3 Comportement des stratifiés antisymétriques

Les stratifiés symétriques sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion. Par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation de stratifiés non symétriques. Par exemple, le couplage membrane-flexion est nécessaire dans la conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche.

3.3.1 Stratifié croisé antisymétrique $[0^\circ/90^\circ]_p$

Dans le cas où toutes les couches orientées à 0° et 90° sont de mêmes épaisseurs, les coefficients de rigidité seront déterminés par les relations suivantes :

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_T}{E_L} \right) Q_{11} h \quad A_{11} = A_{12}, \quad A_{12} = Q_{12} h, \quad A_{66} = Q_{66} h$$

$$B_{11} = \frac{\frac{E_T}{E_L} - 1}{8p} Q_{11} h^2$$

$$D_{11} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_T}{E_L} \right) \frac{Q_{11} h^3}{12} \quad D_{11} = D_{12}, \quad D_{12} = \frac{Q_{12} h^3}{12}, \quad D_{66} = \frac{Q_{66} h^3}{12}$$

P: nombre de la moitié des couches.

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

Les paramètres (Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66}) exprimés en fonctions des modules de l'ingénieur E_L , E_T , G_{LT} , ν_{LT} sont déterminés par la relation [1].

Pour stratifié croisé antisymétrique en appuis simples, l'épaisseur des fréquences propres est déterminée par :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left\{ [D_{11}(m^4 + R^2n^2) + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2n^2] - \frac{B_{11}^2}{\Delta_1} (\Delta_3m^4 + \Delta_2R^2n^2) \right\}}$$

a) Influence du rapport longueur/largeur ($R=a/b$)

La relation (3.19) montre que la fréquence propre qui s'exprime en rad/s, est fonction du coefficient de couplage membrane /flexion B_{11} (3.18b).

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} [D_{11}(m^4 + R^2n^2) + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2n^2]}$$

Qui est l'expression des fréquences propres de vibration en flexion des stratifiés symétriques orthotropes en appuis simples pour lesquelles $D_{22} = D_{11}$ (équ.3.1)

Nous considérons un stratifié croisé antisymétrique de géométrie ($a \times b$). La plaque est rectangulaire dont le rapport $R = a/b$ peut varier afin d'avoir différentes valeurs de fréquence rectangulaire dont le rapport R propres. Les couches sont supposées d'épaisseurs identiques.

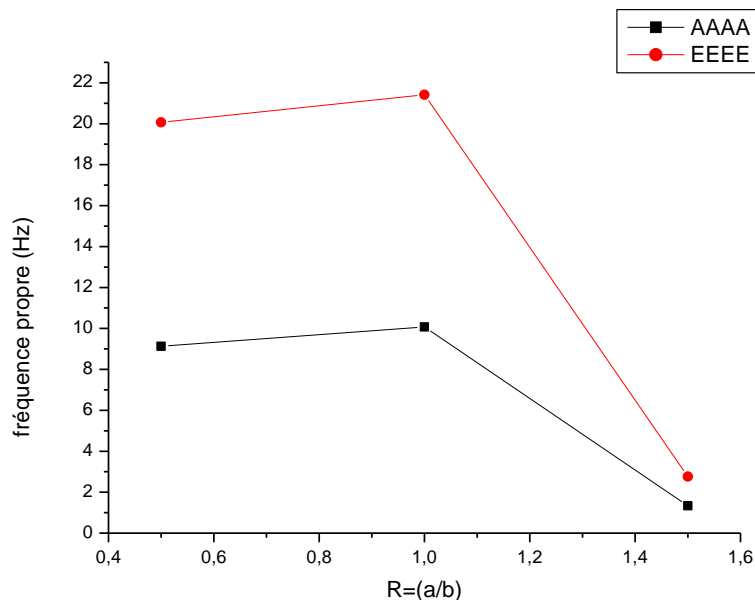
Dans le cas d'un stratifié symétrique orthotrope, l'expression (3.19) montre que la fréquence fondamentale correspond à $m = n = 1$, il n'en est pas de même dans le cas où il existe un coefficient de couplage B_{11} (équ.5.18). Le numéro du mode correspondant alors à la fréquence fondamentale ne peut pas être déduit dans le cas général de l'expression (3.18). Il dépend alors de la nature (caractéristiques mécaniques) de couches constituant le stratifié.

La plaque est supposée simplement appuyée le long de son contour. La figure 3.12 montre l'évolution de la fréquence fondamentale en fonction du rapport longueur sur largeur (a/b) de la plaque dans le cas des stratifiés croisés $[0^\circ/90^\circ]_2$ et $[0^\circ/90^\circ]_3$ et d'un stratifié symétrique orthotrope où le couplage membrane flexion est nul ($B_{11} = 0$). Les fréquences fondamentales correspondent dans tous les cas à $m = n = 1$. Ces courbes montrent l'importance du coefficient de couplage membrane flexion et son influence sur le comportement en vibrations de les plaques croisées antisymétriques.

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

Les résultats obtenus montrent que le couplage membrane-flexion réduit la valeur de la fréquence fondamentale et qu'elle tend rapidement vers la solution des stratifiés symétriques orthotropes quand le nombre de couches augmente. Cette variation est due au coefficient du couplage B_{11} qui diminue rapidement au fur et à mesure que le nombre de couches augmente indépendamment du rapport a/b de la plaque. Ce résultat est bien en accord avec celui obtenu par Jones.

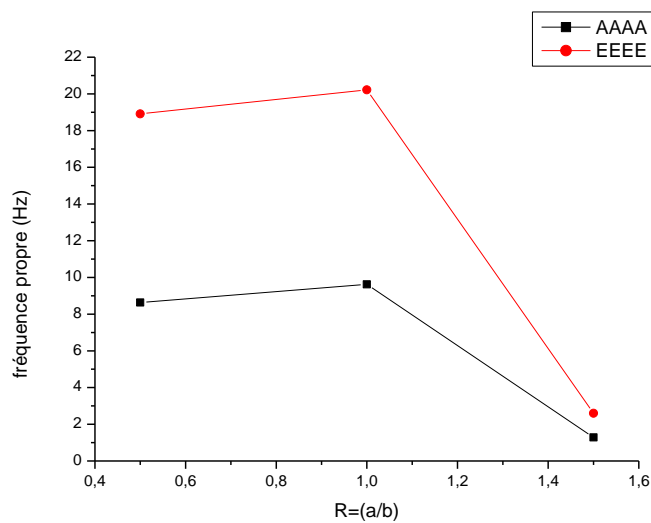
De même, si on considère une plaque carrée ($R = 1$) sa fréquence fondamentale sera réduite de 40 % par rapport à la fréquence d'une plaque constituée d'un symétrique orthotrope du même matériau pour un nombre de couches égale à 2 ($[0^\circ/90^\circ]$). Par contre pour un nombre de couches égale à 6 ($[0^\circ/90^\circ]_3$) ce pourcentage se réduit à 5 %



la figure 3.12 : variation de la fréquence fondamentale en fonction de rapport R d »un stratifiée croisé antisymétrique en appuis simple

b) Influence du rapport des modules (E_L/E_T)

Nous considérons un stratifié croisé antisymétrique de même caractéristiques mécaniques et de forme géométrique carrée ($R=1$). La variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'orthotrope E_L/E_T est tracée sur la figure 3.9 l'expression de fréquences (3.18) est utilisée pour un stratifié croisé antisymétrique dont le nombre de couches est égale à 2.4



Le figure 3.13 : Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques Simplement appuyé (AAAA) et encastre (EEEE).

Les résultats obtenus montrent que la solution du stratifié symétrique orthotrope ($B_{11}=0$) est rapidement atteinte et que le couplage membrane-flexion réduit la valeur des fréquences propres, à l'exception celles qui sont proches du rapport $E_L/E_T = 1$. Ce résultat est en accord avec celui obtenu par Jones [20].

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à déformations géométriques et conditions aux frontières

Dans le cas d'un stratifié constitué de 2 couches de matériau fibre de verre /polyesters et fibre naturelle et polystyrène ($E_L/E_T=10$), on remarque que la différence entre la fréquence fondamentale de ce stratifié celle d'un stratifié symétrique orthotrope du même matériau est de 27% par contre cette différence est de 59% pour un matériau fibre de verre /polyesters et fibre naturelle et polystyrène ($E_L/E_T=40$). ce résultat est logique du fait que le couplage B_{11} croît avec le rapport E_L/E_T (équ 3.18).

c- Comparaison entre un stratifié croisé symétrique et antisymétrique

Les couches constituant les stratifiés croisés considérés ont les caractéristiques mécaniques suivantes: $G_{LT}/E_T=0.5, \nu_{lt}=0.3$. Les fréquences fondamentales (paramètres non dimensionnels) pour E_L/E_T égale à 10, 20, 30 et 40 sont présentées dans le tableau pour différents nombre de couche (2 couches dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique et 3 couche pour le stratifié croisé. Les plaques sont de géométrie rectangulaire ($R=2$))

Tableau 3.4: coefficients des fréquences fondamentales pour différents stratifiés croisés

Nombre de Couches	E_L/E_T			
	10	20	30	40
2 0°/90°	9.21	8.76	8.61	8.53
3 0°/90°/0°	39.65	39.04	38.83	38.72

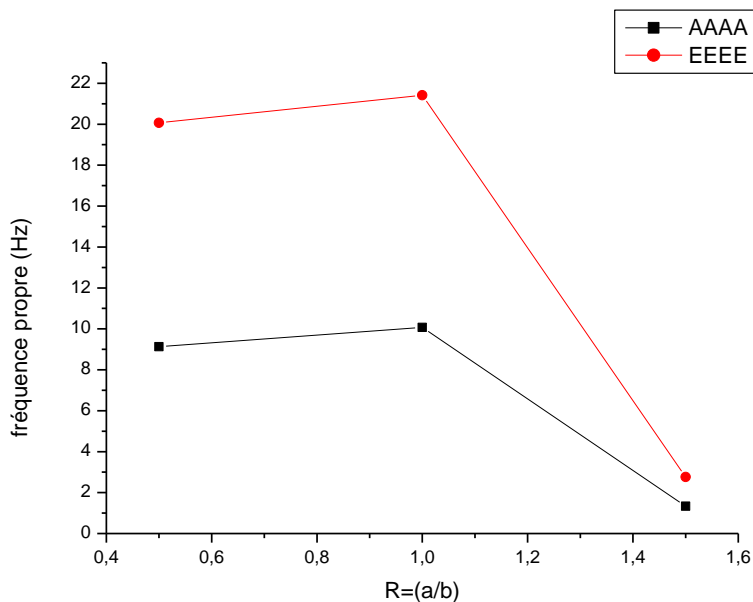
Nous constatons que la fréquence fondamentale dans un stratifié antisymétrique est inférieure à celle d'un stratifié symétrique et que la différence diminue avec l'augmentation du rapport E_L/E_T . C'est la rigidité en flexion élevée du stratifié symétrique à 3 couches qui est responsable de cette différence.

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

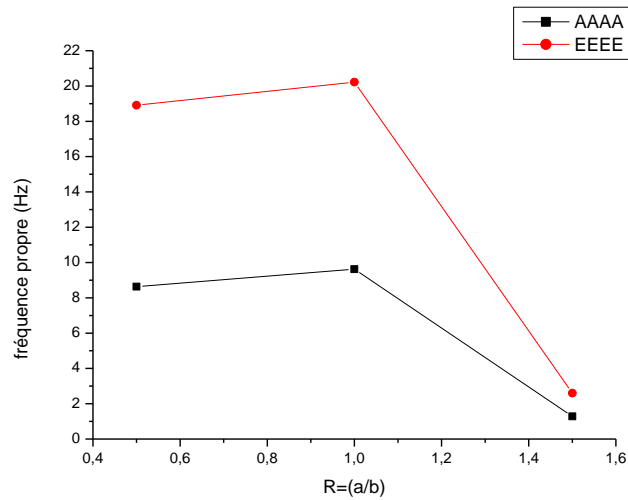
Les deux couches des faces externes ce dernier et d'orient 0° sont équilibrées dans la rigidité et peuvent ainsi donner un stratifié de rigidité élevée ;par contre pour un stratifié antisymétrique la séquence d'empilements des deux couches 0° et 90° entraîne une diminution du mode de renforcements de la structure .

3.4 Effet de rapport de dimension a/b

Parmi les facteurs majeurs qui influent sur le comportement vibratoire de la plaque orthotrope à fibres unidirectionnelles, le rapport longueur-sur-largeur (a/b). Le tableau et la figure suivants représentent la variation des fréquences propres en fonction de trois rapports R de la plaque sollicitée ayant les deux conditions aux limites.



Le figure 3.14 : Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques Ortho 01 Simplement appuyé (AAAA) et encastre (EEEE).



Le figure 3.15 : Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques Ortho 02 Simplement appuyé (AAAA) et encastre (EEEE).

3.5 Effet de conditions aux limites

En vue d'examiner le comportement des plaques orthotropes à fibres unidirectionnels vis-à-vis les six conditions aux limites telles qu'il est illustré précédemment on étudie la variation de fréquences propres en fonction des modes propres des plaques ayant les rapports de dimension $R = 0.5, 1, 1.5$.

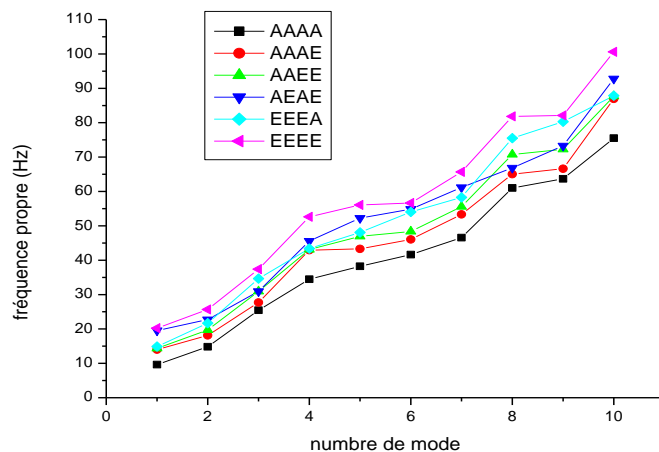


Figure 3.16 :Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec $R= 1$

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

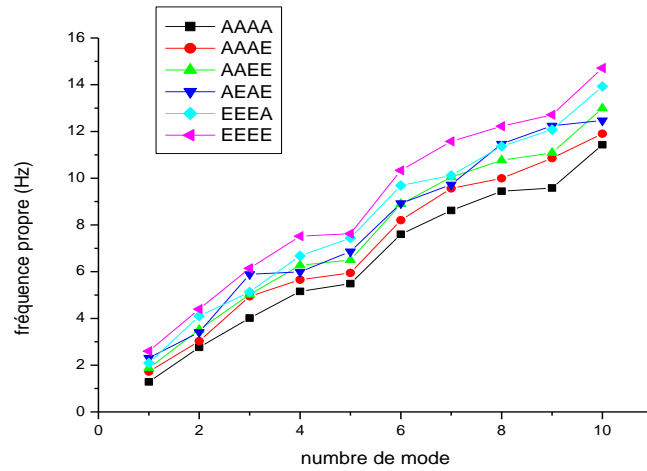


Figure 3.17 : Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec $R= 1.5$

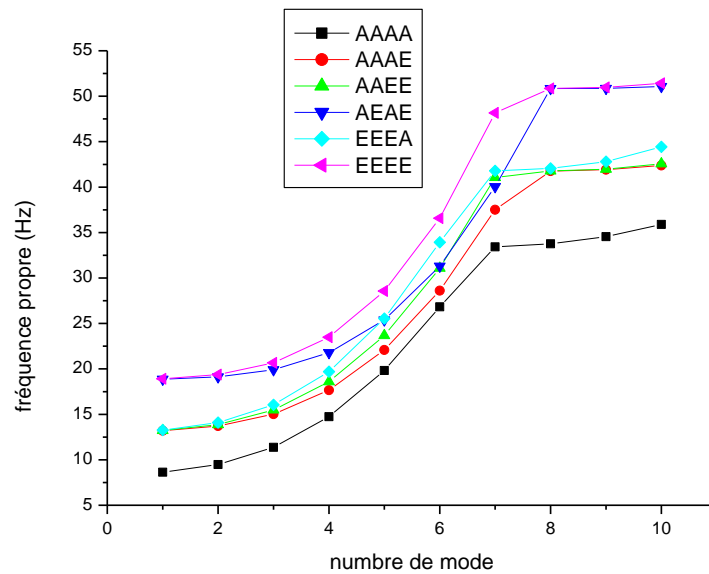


Figure 3.18 : Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec $R= 0.5$

Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à différents géométries et conditions aux frontières

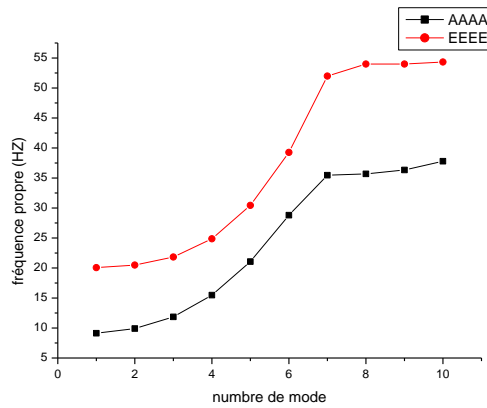
3-6 Les déformés des plaque (AAAA) et (EEEE) dans le rapport du orthotrope 01 et orthotrope 02.

Tableau (3.5) : Caractéristiques Mécaniques des plaques stratifiées.

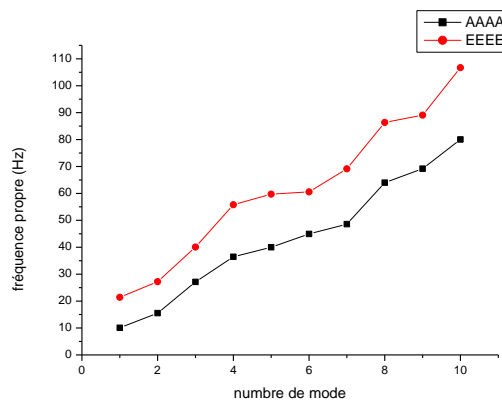
Modèle de plaque	Matériaux	E_1 (Gpa)	E_2 (Gpa)	G_{12} (Gpa)	ν_{12}	ρ (kg/m ³)
Ortho 01	AS4 (3501/6)	148	10.50	5.61	0.30	1520
Ortho 02	AS/3501	138	9.00	6.90	0.30	1600

ORTHO 01

R=0.5

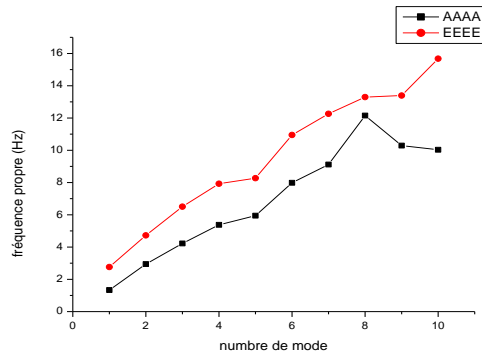


R=1



Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à déferents géométries et conditions aux frontières

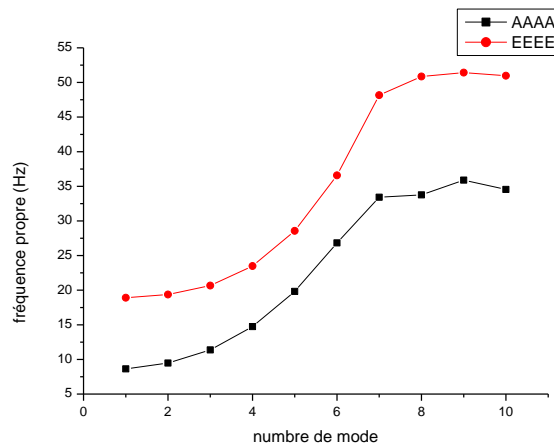
R=1.5



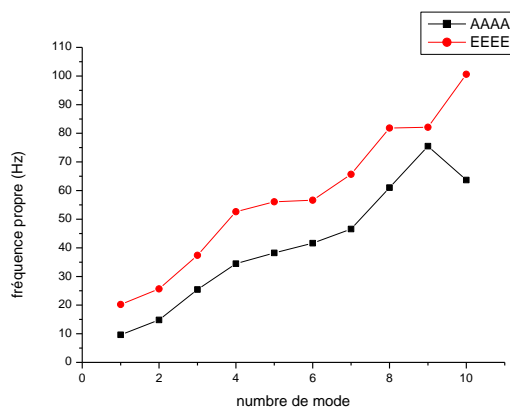
La figure 3.19: les déferents (AAAA) et (EEEE) dans le rapport du orthotrope 01.

ORTHO 02

R =0.5

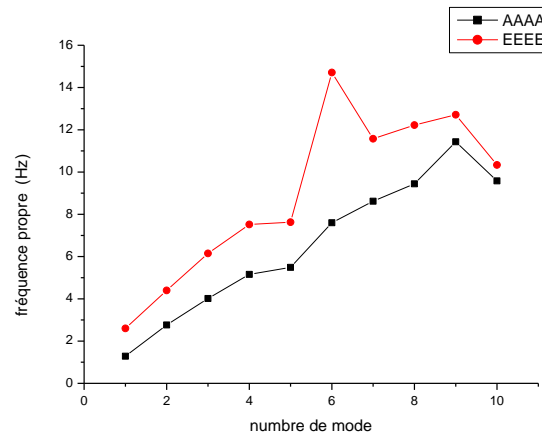


R=1



Chapitre 03 : Calcul vibratoire des plaques stratifiées à déferents géométries et conditions aux frontières

R=1.5



La figure 3.20 : les déferents (AAAA) et (EEEE) dans le rapport du orthotrope 02.

En analysant les courbes précédentes on peut tirer les conclusions suivantes :

- Pour les trois rapports R , la plaque AAAA est la plus souple, tandis que la plaque EEEE est la plus rigide.
- La rigidité des plaques examinées devient plus en plus moins avec l'augmentation de rapport (R).

Conclusion générale

Cette étude consiste à décrire le comportement vibratoire de plaques composites stratifiées à différentes séquences d'empilement (symétriques et antisymétriques).

Afin d'aboutir à notre objectif, on a supposé que la flèche (déformée) peut être approchée par une double série trigonométrique orthonormée qui doit satisfaire aux conditions aux frontières. En connaissant la force perturbatrice, l'équation de Lagrange permet de définir le mouvement de la plaque, la fréquence propre qui caractérise les modes de vibrations dépendent des matrices de rigidité du stratifié.

Les équations de mouvement ne prennent pas en compte les forces volumiques, les contraintes de cisaillement sur les faces du stratifié, et négligent les effets d'inertie en rotation. Elles constituent les équations fondamentales de la théorie classique du stratifié. Ces équations associées aux conditions imposées sur les frontières de la structure, permettent de trouver les déplacements $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$ et $w_0(x, y, t)$, solution du problème de l'élasticité. La résolution de ces équations est toutefois complexe, et ne peut être menée de manière analytique que dans quelques cas particuliers.

Une simplification importante apparaît lorsque tous les termes de la matrices de couplage sont nuls (stratifiés symétriques). Dans ce cas, les équations de mouvement sont partiellement découplées (le comportement en membrane (u_0, v_0) est découplé du comportement en flexion w_0). En revanche, dans tous les autres cas, il est nécessaire de résoudre des équations couplées.

Les stratifiés sont constitués des couches successives, leur empilement conditionne la structure de la rigidité. Le matériau considéré dans cette étude est le bore/époxyde à renforcement unidirectionnel. Divers couplages peuvent être observés et mis en évidence.

Généralement, le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite en l'adoptant au mieux au champ des contraintes imposé.

La comparaison des résultats obtenus pour des stratifiés symétriques, croisés et équilibrés antisymétriques, permet de constater que dans le premier cas, la fréquence de vibration de chaque mode varie en raison inverse avec le carré des dimensions linéaires à condition que l'épaisseur reste invariable. Si toutes les

dimensions de la plaque y compris l'épaisseur, s'accroissent dans la même proportion la fréquence diminue avec les dimensions linéaires.

De plus, la fréquence varie en raison directe de la racine carrée du module d'élasticité et en raison inverse de la racine carré de la mase volumique.

L'énergie potentielle d'une plaque symétrique multicouche exprimée dans le repère global permet d'obtenir un comportement identique de stratifiés équilibrés (les fibres sont orientées à $+0$ et -0).

De tels stratifiés possèdent le même comportement qu'une monocouche de même épaisseur et orientée à 0 .

Dans le cas des stratifiés antisymétriques. On constate que le couplage membrane-flexion s'avère à réduire la rigidité (par conséquent la fréquence propre) d'un croisé constitué de deux couches. Mais au fur et à mesure que le nombre de couches augmente ce couplage devient négligeable. Le couplage membrane-flexion /torsion réduit la fréquence propre d'un stratifié équilibré antisymétrique. Ce couplage diminue rapidement lorsque le nombre de couches augmente. La solution d'un stratifié symétrique orthotrope est la solution limite dans tous les cas (croisé et équilibré antisymétrique).

Enfin, d'après les résultats obtenus, nous constatons que les fréquences de vibration sont influencées par les dimensions de la structure, par le type de matériau utilisé et par la condition aux limites (effet directe sur la rigidité qui induit un changement de fréquence propre).

Le déplacement maximum peut diminuer en augmentant la fréquence naturelle, donc la rigidité ou en diminuant la masse de la structure.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Berthelot J.M., "Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures ", Septembre 2013.
- [2] Laurent Gornet, " Généralités sur les matériaux composites ", Engineering school, ceI- 00470296v1 (2008).
- [3] Kirchhoff. G. "Vorlesungen uber Mathematics he Physik", Vol.1 B.G. Teubner Leipzig, Germany (1876).
- [4] Lord Rayleigh, "The theory of sound", The Macmillan Company (1877).
- [5] S.Timoshenko "On the Transverse Vibration of Bars of Uniform. Cross Section" Philosophical Magazine, 43 series (6) 125-131 (1922).
- [6] Abd Elyamine MEBARKI, "Analyse dynamique libre des plaques composites multicouches", Université Mentouri Constantine (2009).
- [7] A.E.H. Love, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity ", Dover, New York. Randern, Annalen der physik 28 737-736 (1944).
- [8] Reissner E. "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates". J. of appl. Mech., (12) A69-A77 (1945).
- [9] Uflyand Y.S "The Propagation of Waves in the Transverse Vibrations of Bars and Plates" Akad.Nauk.SSSR, Prikl. Mat. Mech., 12 287-300 (1948).
- [10] R.D. Mindlin. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Journal of applied mechanics, 18 31-38 (1951).
- [11] Hearmon, R.F.S. "The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or simply supported edges". J. Applied Mech. 26, 537-540 (1959).
- [12] Reddy, J.N. "A simple higher-order theory for laminated composite plates". J. Applied Mech. 51, 745-752 (1984).
- [13] Numayr, K.S., Haddad, R.H. & Haddad, "Free vibration of composite plates using the finite difference method". Thin-walled Struct. 42, 399-414, M.A (2004).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [14] Bahi Eddine LAHOUEL, "Vibration des plaques composites trouées", Université El- Hadj Lakhdar Batna (2015).
- [15] Y. Reissner and E. Stavsky, "Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous aelotropic elastic Plate", Journal of Applied Mechanics, no. 28, pp. 402-408, (1961).
- [16] P. C. Yang, C. H. Norris, and Y. Stavsky, "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plate", Intenational Journal of Solid Structure, vol. 2, pp. 665-684, (1966).
- [17] G. Kirchhoff, "Uber das Gleichgewitch und die Bewegung einer Elastishen Scheibe", Journal fur reine und angewandte Mathematic, no. 40, pp. 51-88, (1850).
- [18] Jones , Robert M. : " Buckling and vibration of Rectangular Unsymmetrically Laminated Cross-Plates " AIAA,pp;1625-1632,
- [19] S.Timoshenko" On the Correction of Transverse Shear Deformation of the Differential Equations for Transverse Vibration of Prismatic Bars» Philosophical Magazine, 41 (series 6) 744 -746 (1921).
- [20] KERBOUCHE Hacene LOUAFI Mahdi, " DETERMINATION DES PARAMETRES MODAUX DES PLAQUES COMPOSITES ORTHOTROPES EN VIBRATION PAR ANSYS", Université Kasdi Merbah Ouargla (2017).