

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Kasdi Merbah Ouargla



Faculté de sciences appliquées  
Département Génie Mécanique

## MEMOIRE

Pour obtenir le **Diplôme de Master**  
Option : Maintenance industrielle

Présenté par :  
BERDJI MOHAMED EL BACHIR  
GHERIBI NOUREDDINE

### Thème

Modélisation d'une structure en matériaux isotropes par la  
méthode des éléments finis

Soutenu publiquement le : 25/06/2019

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. Boukhatem.M	Université de Ouargla
Examineur :	Mr. Bennouna.M	Université de Ouargla
Encadreur:	Mr. Hecini.A	Université de Ouargla

Année Universitaire 2018/2019

**Résumé :** L'étude et la modélisation des structures ayant un comportement membranaire demeure un objet très important non seulement dans le domaine de la construction mécanique mais aussi dans les domaines de génie civile, aéronautique, biomécanique,... etc.

Pour bien comprendre la méthode des éléments finis. On exploite l'élément rectangulaire à quatre nœuds avec deux degrés de liberté par nœud pour le transformer en Q8 et implémenter cet élément bilinéaire dans le code RE\_FLEX. Notre programme nous permet de calculer les déplacements des nœuds et les résultats calculés sont comparés à ceux obtenus par les deux logiciels ABAQUS et RDM6.

**Mots clés :** modélisation, méthode éléments finis (MEF), champs de déplacement, isotrope, poutre, structure.

**Abstract :** The study and modelling of structures with membrane behavior remains is a very important object not only in the field of mechanical engineering but also in the fields of civil engineering, aeronautics, biomechanics,... etc.

To understand the finite element method, the rectangular four-knot element with two degrees of freedom per node is used to transform it to Q8 and to implement this bilinear element in the reflex code. Our program allows us to calculate the displacements of the nodes and the calculated results are compared with those obtained by the two software programs ABAQUS and RDM6.

**Keywords :** modelling, finite element method (FEM), displacement fields, isotropic, Beam, structure.

**المخلص :** إن دراسة ومحاكاة الهياكل ذات السلوك الغشائي كان ومازال موضوع ذو أهمية كبيرة ليس في مجال الهندسة الميكانيكية فقط ولكن في مجال الهندسة المدنية وعلوم الطيران و البيوميكانيك... الخ .

لكي نفهم طريقة العناصر المنتهية جيدا و بشكل عام. كان علينا دراسة العنصر الرباعي Q4 ذا الأربع عقد مع درجتي حرية لكل عقدة لأجل تحويله إلى عنصر Q8 وبمساعدة برنامج RE\_FLEX الذي يمكننا من حساب انتقالات العقد. إضافة إلى مقارنة النتائج المحسوبة مع تلك المتحصل عليها باستعمال البرامج ABAQUS و RDM6.

**الكلمات المفتاحية :** نمذجة , طريقة العناصر المنتهية (MEF) , الانتقالات , متجانس , عارضة , هيكل





## REMERCIEMENT

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à Monsieur **A. HACINI**, notre encadreur pour son assistance, sa disponibilité et son encouragement pendant l'accomplissement de ce travail .Nous lui en sommes profondément reconnaissants.

Nous remercions également Monsieur **M. BOUKHATEM**, maître de conférences à l'université de Ouargla, qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Nous tenons à lui exprimer nos plus profondes gratitude

Nous sommes également extrêmement reconnaissants envers Monsieur **M. BENNOUNA** qui nous a fait l'honneur de participer au jury et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à notre formation



## SOMMAIRE

Résumé	
Remerciement	
Notation	
Liste des tableaux	
Liste des figures	
<b>Introduction générale</b> .....	<b>02</b>

### CHAPITRE 01 GÉNÉRALITES SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

1-1 Introduction.....	05
1-1.1 Définition de la méthode des élément fini .....	05
1-1.2 Historique.....	06
1-1.3 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis ....	07
1-2 Etapes de la méthode des éléments finis .....	07
1-3 Caractéristiques d'un élément fini .....	08
1-3.1 Les nœuds géométriques.....	08
1-3.2 Attributs d'un éléments finis.....	08
1-3.3 Type des éléments finis .....	09
1-3.4 Choix des éléments finis.....	11
1-3.5 Qualité d'un élément fini.....	11
1-4 Principes de la MEF.....	12
1-5 Les différents types de modèles d'un element fini .....	13
1-5.1 Modèle déplacement.....	13
1-5.2 Modèle équilibre ou contrainte .....	13
1-5.3 Modèle mixte .....	13
1-5.4 Modèle hybride .....	14
1-5.5 Modèle en déformation.....	14
1-6 Concept de la MEF.....	14
1-7 Domaines d'application de la MEF.....	15
1-7.1 Utilisation d' un élément fini .....	15
1-8 Étapes logiques du calcul par éléments finis.....	16
1-9 Modélisation et discrétisation.....	16
1-9.1 Introduction.....	16
1-9.2 Modélisation.....	17
1-9.3 Discrétisation.....	18
1-10 Avantages du modèle en de formation.....	18
1-11 Conclusion.....	18

## CHAPITRE 02

### PRESENTATION DE L'OUTIL INFORMATIQUE

2-1	Introduction.....	20
2-2	Présentation du programme fortran.....	20
2-2.1	Historique.....	20
2-2.2	langage fortran 90.....	21
2-2.3	Conventions de base .....	21
2-2.4	Type de données .....	21
2-2.5	Organigramme global du programme .....	22
2-3	Présentation du code RE_FLEX.....	23
2-3.1	Introduction.....	23
2-3.2	Caractéristiques d' un logiciel d'éléments finis .....	23
2-3.2.1	Caractéristiques générales.....	23
2-3.2.2	Caractéristiques du logiciel RE_FLEX.....	24
2-3.3	Description du logiciel RE_FLEX .....	25
2-3.3.1	Organisation générale.....	25
2-3.3.2	Allocation des tables.....	27
2-3.3.3	Normes de programmation.....	27
2-3.3.4	Description des tables et variables des "Common".....	28
2-3.3.5	Description des différentes commandes.....	30
2-4	Présentation du code ABAQUS.....	31
2-4.1	Introduction.....	31
2-4.2	Définition de logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS....	32
2-4.3	Caractéristiques de logiciel ABAQUS .....	32
2-4.4	Les éléments utilisés par ABAQUS .....	33
2-4.5	Réalisation d'un simulation numérique .....	33
2-4.6	Les différents fichiers pour la simulation sous ABAQUS.....	34
2-4.6.1	Fichier d'entrée ( Input file).....	34
2-4.6.2	Fichier de résultats ( output file) .....	34
2-4.7	Autres fichiers créés par ABAQUS lors de la simulation.....	34
2-4.8	Organisation de l'interface ABAQUS CAE .....	35
2-4.9	Modélisation par ABAQUS .....	35
2-5	Conclusion.....	35

## CHAPITRE 03

### FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DE QUELQUES ELEMENTS FINIS

3-1 Introduction.....	37
3-2 Description de l'element membranaire.....	37
3-3 Formulation iso paramétrique.....	37
3-4 Evaluation des matrice et vecteurs élémentaires.....	38
3-5 Techniques de calculs au niveau élémentaire.....	38
3-3.1 Transformation géométrique.....	39
3-3.2 Transformation des dérivées .....	39
3-3.3 Transformation des intégrales.....	40
3-6 La formulation iso paramétrique de l'element Q4 .....	41
3-6.1 Déterminations des déplacements élémentaires .....	41
3-6.2 Calcul de la matrice de rigidité $[K_e]$ . .....	43
3-7 La formulation iso paramétrique de l'element Q8 .....	46
3-6.1 Déterminations des déplacements élémentaires .....	47
3-7.2 Evaluation des contraintes et des déformation .....	49
3-8 Conclusion.....	51

## CHAPITRE 04

### RESULTATS ET VALIDATION NUMERIQUE

4-1 Introduction.....	53
4-2 Flexion plane d'une poutre encastree.....	53
4-2.1 calcul analytique .....	54
4.3 Cas maillage régulier .....	54
4-3.1 Application numérique par <b>RE_FLEX</b> .....	55
4-3.2 Application numérique par <b>ABAQUS</b> .....	62
4-3.3 Application numérique par <b>RDM 6</b> .....	68
4- 4 Conclusions.....	70
<b>Conclusions générale</b> .....	72
<b>Références bibliographiques</b> .....	74



## Notation

<b>MEF</b>	: Méthode des élément finis.
<b>1D</b>	: Unidimensionnelle.
<b>2D</b>	: Bidimensionnelle.
<b>3D</b>	: Tridimensionnelle.
<b>E.F</b>	: Élément finis.
<b>DDL</b>	: Degré de liberté.
<b>{ }</b>	: Vecteur colonne.
<b>[ ]</b>	: Matrice.
<b>[ ]<sup>T</sup></b>	: Matrice transposée.
<b>[ ]<sup>-1</sup></b>	: Matrice inverse.
<b><math>\xi, \eta</math></b>	: Coordonnées paramétriques.
<b>N<sub>i</sub></b>	: Fonctions d'interpolations.
<b>[N]</b>	: Matrice des fonctions de formes.
<b>[J], J</b>	: Matrice jacobéenne des transformations, déterminant de [J].
<b>[j]</b>	: Matrice jacobéenne inverse.
<b>i, j</b>	: Base orthonormée cartésienne.
<b>x, y</b>	: Coordonnées cartésiennes locales.
<b>u<sub>i</sub>, v<sub>i</sub></b>	: Déplacement du point <i>i</i> suivant <i>x, y</i> .
<b>e</b>	: Epaisseur.
<b>V</b>	: Volume.
<b>dV, dA</b>	: Élément.
<b>Q4</b>	: Quadrilatéral 4 nœuds.
<b>Q8</b>	: Quadrilatéral 8 nœuds.
<b>E</b>	: Module d' Young.
<b>V</b>	: Coefficient de poisson.
<b>[B]</b>	: Matrice de déformation.
<b>[D]</b>	: Matrice d'élasticité.
<b>[Ke]</b>	: Matrice de rigidité élémentaire.
<b>{F}</b>	: Vecteur des forces.
<b>{u}</b>	: Vecteur des déplacements nodales.
<b>{ε}</b>	: Vecteur des déformations.
<b>{σ}</b>	: Vecteur des contraintes.
<b>W<sub>ij</sub></b>	: Le coefficient de pondération au point d'interpolations ( $\xi_i, \eta_j$ ).
<b>e<sub>ij</sub></b>	: L'épaisseur de l'élément à étudier.

## Liste des figures

<b>Figure 1.1 :</b>	Domaine V discrétisé par sous domaine $V^e$ .....	8
<b>Figure 1.2 :</b>	Principe d'analyse par la MEF .....	12
<b>Figure 1.3 :</b>	Maillage du domaine en triangles à trois nœuds.....	14
<b>Figure 1.4 :</b>	Étape de l'analyse d'un problème aux limites.....	16
<b>Figure 1.5 :</b>	Modélisations par éléments finis de structures.....	17
<b>Figure 2.1 :</b>	Organigramme global du programme .....	22
<b>Figure 2.2 :</b>	la base de donnée dans le code RE_FLEX.....	24
<b>Figure 2.3 :</b>	la différente commande de RE_FLEX.....	26
<b>Figure 2.4 :</b>	les opérations de calcul élémentaire. ....	29
<b>Figure 2.5 :</b>	schéma présente l'utilisation du langage de script python. ....	31
<b>Figure 2.6 :</b>	Quelques éléments parmi les plus utilisés. ....	33
<b>Figure 2.7 :</b>	Les modules de logiciel ABAQUS. ....	34
<b>Figure 3.1 :</b>	Le passage de l'élément physique à l'élément de référence .....	39
<b>Figure 3.2 :</b>	Transformation des surface .....	40
<b>Figure 3.3 :</b>	L'élément quadrilatère à 4 nœuds. ....	41
<b>Figure 3.4 :</b>	L'élément rectangulaire à quatre nœuds .....	41
<b>Figure 3.5 :</b>	L'élément quadrilatère . ....	49
<b>Figure 4.1 :</b>	Poutre flexion sous charge verticale. ....	53
<b>Figure 4.2 :</b>	maillage régulier (1élément) M1. ....	55
<b>Figure 4.3 :</b>	type de maillage régulier (2élément) M2 .....	56
<b>Figure 4.4 :</b>	Présentation d' un modèle de maillage régulier(3élément) M3 .....	57
<b>Figure 4.5 :</b>	présentation un modèle de maillage régulier M1 .....	58
<b>Figure 4.6 :</b>	présentation un modèle de maillage régulier M2 .....	59
<b>Figure 4.7 :</b>	présentation un modèle de maillage régulier M3 .....	60
<b>Figure 4.8 :</b>	présentation un modèle de maillage régulier Q42DM1 .....	62
<b>Figure 4.9 :</b>	présentation un modèle de maillage régulier Q42DM2 .....	63
<b>Figure 4.10:</b>	présentation un modèle de maillage régulier Q82DM1 .....	64
<b>Figure 4.11:</b>	Présentation d' un modèle de maillage régulier Q82DM2 .....	65
<b>Figure 4.12:</b>	présentation d' un modèle de maillage régulier Q83DM1 .....	66
<b>Figure 4.13:</b>	présentation d' un modèle de maillage régulier Q83DM2 .....	67
<b>Figure 4.14:</b>	Présentation d' un Poutre sous charge verticale par RDM6.....	70

---



---

## Liste des tableaux

<b>Tableau 1.1 :</b>	les types d'éléments finis .....	10
<b>Tableau 2.1:</b>	l'acquisition des données sur la méthode d'éléments finis.....	23
<b>Tableau 2.2:</b>	L' étape de calcule sur la méthode.....	23
<b>Tableau 2.3:</b>	visualisation sur la méthode. ....	24
<b>Tableau 2.4:</b>	tables globales ( réparties , totales , résidus) .....	25
<b>Tableau 2.5:</b>	table élémentaire dans logiciel .....	25
<b>Tableau 2.6:</b>	Sélectionner un élément fini(DDL ,les type d'élément) .....	28
<b>Tableau 2.7:</b>	les opérations de calcule en RE_FLEX_.....	30
<b>Tableau 3.1:</b>	Les fonctions de forme de l'élément Q4 .....	42
<b>Tableau 3.2:</b>	Composantes de la matrice $[B]$ . de l'élément Q4 .....	44
<b>Tableau 3.3 :</b>	Les fonction d'interpolation $[N]$ . et les dérivées par rapport $\xi, \eta, \dots$	49
<b>Tableau 4.1:</b>	Propriétés géométriques et mécaniques de la première plaque test.	53
<b>Tableau 4.2 :</b>	le tableau montre les déplacements et les différences entre les différents résultats	61
<b>Tableau 4.3 :</b>	caractéristiques de matériau .....	68
<b>Tableau 4.4 :</b>	cas de charge .....	69

# **INTRODUCTION GENERALE**

## Introduction générale

La méthode des éléments finis est largement utilisée depuis les dernières décennies, cette méthode numérique est basée essentiellement sur la résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques dans tous les domaines de l'ingénierie, l'intégralité de la méthode est non seulement parce qu'elle peut réduire considérablement le coût de la conception, mais aussi parce qu'elle peut établir les phénomènes physiques complexes. Elle est devenue un outil de travail, de calcul et de conception quotidienne, pour faciliter aux ingénieurs à mieux comprendre les processus de déformation et de contrôler la qualité de produits.

L'application de cette méthode dans une classe importante de problèmes exige des outils numériques appropriés et robustes pour une mise en œuvre souple et efficace. Dans ce cadre et afin de répondre à ces exigences, il est essentiel de choisir et de développer des éléments finis appropriés pour accélérer les processus de conception et de réduire les coûts de calcul pour ces problèmes.

Dans cette méthode, on cherche à effectuer une résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Celles-ci, peuvent, par exemple, représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, ... etc.).

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et employer pour représenter les formes les plus complexes. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique, problèmes linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une (1D), deux (2D) ou trois dimensions (3D). De plus, elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

Parmi certaines applications de la méthode des éléments finis, on retrouve la modélisation des plaques; leur géométrie, les conditions aux limites (appuyées ou encastrées), l'épaisseur (mince ou épaisse), le matériau utilisé (homogène ou isotrope), tous ces paramètres devraient être bien connus au préalable et leur prise en considération dans la conception du programme d'éléments finis est indispensable.

Ce mémoire est présenté en quatre chapitres :

**Le premier chapitre** est consacré à rappeler les généralités de la méthode des éléments finis, ainsi qu'une présentation de quelques aperçus sur les fondements et l' historique de cette méthode. Par ailleurs nous citons d'une part les avantages, les inconvénients et les caractéristiques de la méthode des élément fini, et d'autre part les différentes formulations, en particulier celles basées sur le modèle déplacement.

Dans **le deuxième chapitre**, nous présentons une conception détaillée des outils informatiques présentée par le logiciel de calcul par éléments finis le code **RE\_FLEXE** dans lequel on présente les principales caractéristiques ainsi l'organigramme générale. En second lieu, on présente le logiciel **ABAQUS** à travers l'interface générale et les principaux modules disponibles.

**Le troisième chapitre** présente la formulation d'un élément quadrilatère **Q4** et élément **Q8** , avec la présentation des étapes utilisées pour le calcul ( les fonction de forme , la matrice de jacobine, la matrice **[B]**, la matrice de rigidité élémentaire **[Ke]** de l'élément rectangulaire) , formulé à base du champ de déplacement , la déformation et l'intégration numérique de gauss.

**Le quatrième chapitre** "validation numérique" nous allons étudier le cas d'une poutre encastree en utilisant l'element **Q4** et **Q8** (notre élément) programmé sur **RE\_FLEX** , nous allons aussi modéliser notre poutre sur **ABAQUS** et **RDM6**.

**Chapitre 01:**  
**GÉNÉRALITES SUR LA MÉTHODE**  
**DES ÉLÉMENTS FINIS**

## **GÉNÉRALITES SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS**

### **1-1 Introduction :**

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries. Tout au début cette méthode était développée pour étudier les structures complexes [1].

#### **1-1.1 Définitions de la méthode des élément fini [2] :**

La des éléments finis est une procédure numérique pour analyser les structures et les milieux continue. Habituellement le problème adressé est compliqué a résoudre d'une manière satisfaisante par des méthodes analytiques classiques.

Le problème peut concerner des analyses des contraintes, la conduction de la chaleur, ou n'importe lequel de plusieurs autres secteurs.

Le procédé de la méthode des éléments finis produit beaucoup d'équations algébriques simultanées, qui sont produites et résolues sur un ordinateur numérique.

Les calculs des éléments finis sont exécutés sur l'ordinateur personnel. Cependant, les erreurs ont diminué en traitant plus d'équations. Et les résultats assez précis pour la technologie sont parcourables à un coût raisonnable

La méthode des éléments finis a commencé comme méthode d'analyse des contraintes. Aujourd'hui les éléments finis sont également employés pour analyser des problèmes du transfert thermique, champs de lubrification de flux de fluide, électriques et magnétiques et beaucoup d'autres.

Les problèmes qui étaient précédemment tout à fait insurmontables sont maintenant résolus par habitude. Les procédures des éléments finies sont employées dans la conception des bâtiments, des moteurs de chaleur de moteurs électriques, des fuselages des bateaux et du vaisseau spatial.



### **1-1.2 Historique :**

Les bases théoriques de la MEF repose d'une part sur la mécanique des structures de la formulation énergétique et d'autre part sur les méthodes d'approximations.

La MEF est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion) ; on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956)[3].

Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey) [4]. certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites par exemple celui de la torsion de Saint Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite.

L'expression élément finie a été inventée par Clough en 1960. Années 60, la MEF s'attaque à tous les domaines du calcul de structures. Des programmes on trouve, la MEF, principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures. Ont été conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs tels que : ABAQUS, SAP2000, CATIA, FORTRAN, etc.

La crédibilité des résultats obtenus va permettre l'utilisation de la méthode des éléments finis par des entreprises et des bureaux d'études de taille réduite.

C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse.

### **1-1.3 Avantages et inconvénients de la MEF [5], [3] :**

Toutes les méthodes permettant de résoudre des problèmes aux limites de manière approximative ( séries, différences finies,.....), la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée (parfois même exagérément ), sauf cas particuliers.

### 1-1.3.1 Les Avantages de la MEF :

- La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécanique ou bien physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque.
- La maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).
- La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

### 1-1.3.2 Les Inconvénients de la MEF :

- La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients. Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique. Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple.
- Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires;
- Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés.
- L'expérience et le bon sens de l'ingénieur sont indispensables à la définition d'un bon modèle.

## 1-2 Etapes de la méthode des éléments finis [6] :

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines. (figure 1.3)
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.

### 1-3 Caractéristiques d'un élément fini :

#### 1-3.1 Les nœuds géométriques :

Nous choisissons un ensemble de  $n$  points, sur le domaine  $V$ , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés **les nœuds géométriques**, Elle coïncider éventuellement avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine  $V$  par un ensemble de domaines  $V^e$  de formes relativement simples[7]. (voir figure 1.1)

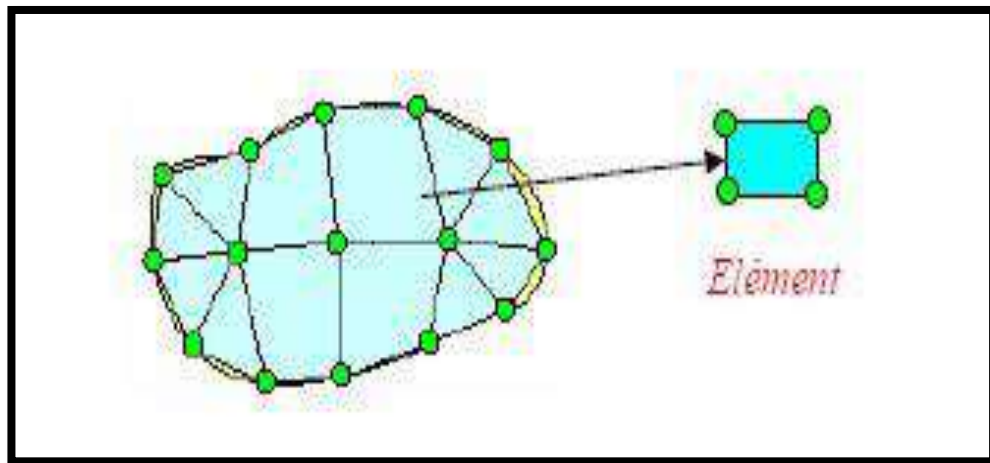


Figure 1.1 : domaine  $V$  discrétisé par sous domaine  $V^e$  [7].

#### 1-3.2 Attributs d'un élément fini :

éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristique L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.
- **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope...etc.).
- **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connectivité des éléments les uns aux autres, ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces, selon le type de l'élément et la théorie adaptée.
- **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (ex : le champ de déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs

qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

- **Forces nodales** : a travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées a l'élément (poids propre, charge uniforme, température....etc.).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force.

### 1-3.3 Type des éléments finis [8] :

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement. ils sont groupés en quatre classes :

- 1- les déplacements et les déformations planes.
- 2- la flexion des plaques.
- 3- les coques.
- 4- l'analyse des solides (3D).

Nous distinguons trois familles correspondantes à des différents type d'éléments finis à une, deux, trois dimension :

- **Les éléments unidimensionnels (1D)** : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile.
- **Les éléments bidimensionnels (2D)** : élasticité plane (déformation on contraint ) on plaque en flexion, coques courbes , de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- **Les éléments tridimensionnels (3D)** : éléments de volume ou coques épaisses
- **Les éléments axisymétriques** : qui constituent une classe bien particulière : toutes à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique ou méridienne courbe, (éléments de volume ou coques épaisses ).




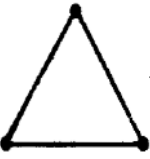
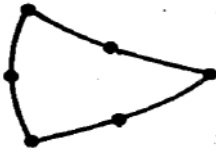

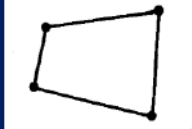
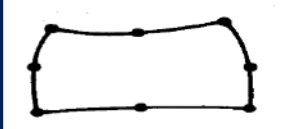

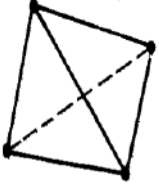
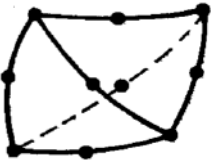
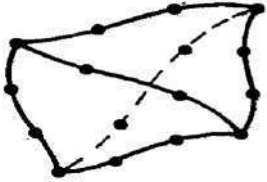
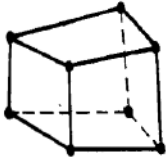
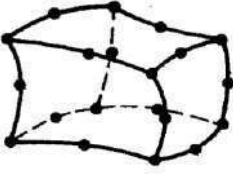
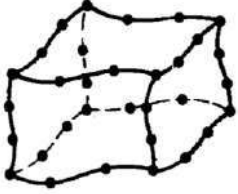



Elements	Linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
Unidimensionnels	 linéaire (2)	 quadratique (3)	 cubique (4)
Bidimensionnels Triangulaires	 linéaire (3)	 quadratique (6)	 cubique (9)
Bidimensionnels quadrilatéraux	 linéaire (4)	 quadratique (8)	 cubique (12)
Tridimensionnel Tétraédriques et hexaédriques	 linéaire (4)	 quadratique (10)	 cubique (16)
	 linéaire (8)	 quadratique (20)	 cubique (32)
autres types	 Masse	 Ressort	 Contact

Tableau 1.1 : les types d'éléments finis [6].

### 1-3.4 Choix des éléments finis [9] :

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles :

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte, ...)
- Convergence (critères et taux)
- Degré (des divers champs)
- Noeuds, et inconnues aux divers noeuds
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres
- Performances et limitations.

### 1-3.5 Qualité d'un élément fini :

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes :

- Aucun défaut de base (mécanisme...)
- Convergence rapide
- Bonne précision, déjà dans un maillage grossier
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable
- Vecteurs forces consistants
- souplesse d'emploi
- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles
- Dérivation théorique simple et claire
- Programmation efficace et limpide.

### 1-4 Principes de la MEF :

- La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (**discrétiser**) une forme complexe en un grand nombre de sous domaines élémentaires de forme géométrique simple (**éléments finis**) interconnectés en des points appelés **nœuds**.
- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.
- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébrique
- Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

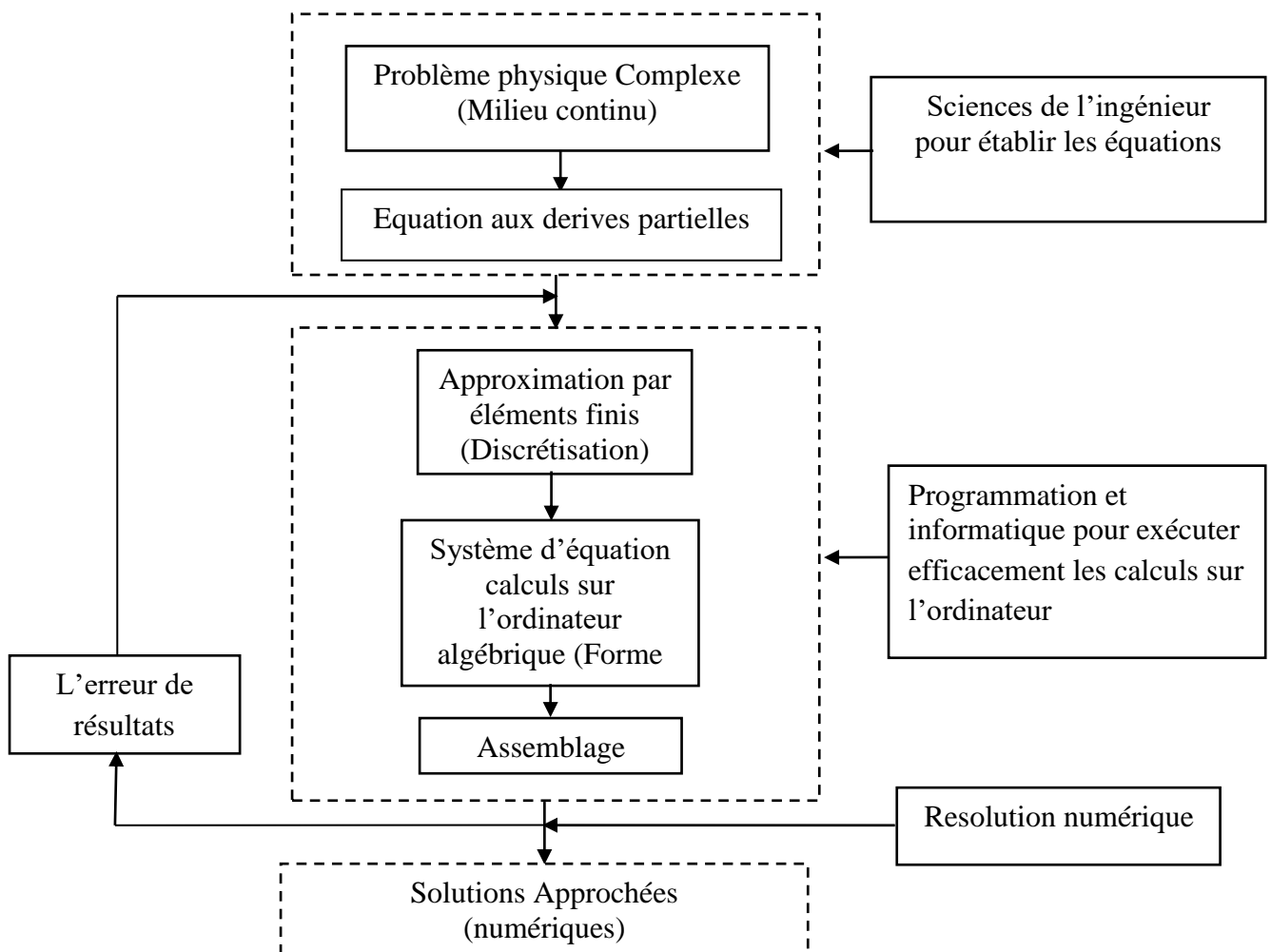


Figure 1.2 : principe d'analyse par la MEF [6].

## **1-5 Les différents types de modèles d' un EF [10] :**

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, à l'intérieur ou à la frontière. On peut créer divers types, dits « modèles » d'éléments finis selon la combinaison choisie comme :

### **1-5.1 Modèle déplacement :**

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans cette catégorie, les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendu à tout l'élément. Alors, les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières.

### **1-5.2 Modèle équilibre ou contrainte :**

Contrairement au précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements est par contre sommaires.

Ce modèle est rarement employé en pratique car, il conduit en général à qualité égale à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

### **1-5.3 Modèle mixte :**

Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes des divers champs inconnus (déplacements, déformations, contraintes), étendues à tout l'élément. En général, les paramètres inconnus des champs de ce modèle sont conservés comme degrés de liberté. La mise au point peut être longue et coûteuse, mais les éléments peuvent être d'excellente qualité.

Parfois le modèle mixte est utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement, par exemple pour améliorer la précision au niveau des contraintes on interpole certaines composantes internes de la déformation, les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation, de telle sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.



### 1-5.4 Modèle hybride :

Ce modèle est basé sur deux interpolations a priori indépendantes, l'une portant sur un champ à l'intérieur de l'élément, l'autre sur un champ touchant la seule frontière. Le critère variationnel utilisé est une variante de l'énergie potentielle complémentaire. Le modèle hybride fournit d'ordinaire de meilleurs résultats que le modèle déplacement, surtout au niveau des contraintes.

### 1-5.5 Modèle en déformation :

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

### 1-6 Concept de la MEF :

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments [11].

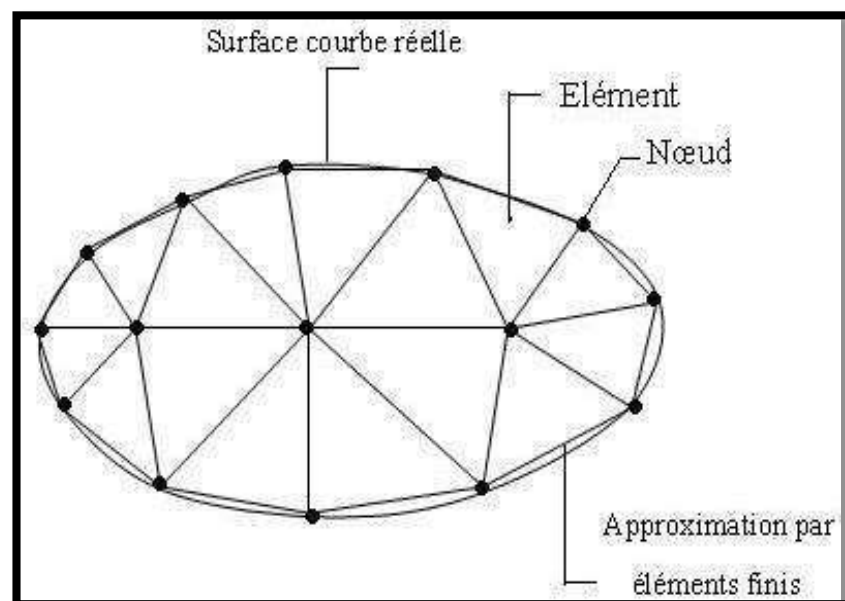


Figure 1.3 : Maillage du domaine en triangles à trois nœuds [11].

### **1-7 Domaines d'application de la MEF [12] :**

- Modélisation des structures.
- analyse linéaire (statique et dynamique).
- analyse non linéaire (grands déplacements et rotations, grandes déformations, contact et frottement, flambage, ...).
- mise en forme des matériaux thermique (en régime permanent et transitoire,...).
- mécanique des fluides.
- Electromagnétisme.
- dynamique rapide (choc, impact, crash).
- optimisation des structures.

#### **1-7.1 Utilisation d' un Logiciel élément fini [6] :**

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels: NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, FORTRAN , etc. ...

Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu.
- Analyse statique ou dynamique .
- Prise en compte de lois de comportement complexes.
- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement, etc. ...) pouvant être couplés .
- Problèmes d'optimisation .
- Ils ne cessent de se développer !

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimum, suivie d'applications pratiques sur des problèmes simples.

Voyons tout d'abord comment se déroule une étude basée sur l'utilisation d'un logiciel éléments finis.

### 1-8 Étapes logiques du calcul par éléments finis [12] :

Définir les nœuds et les propriétés des élément (Créer le maillage) :

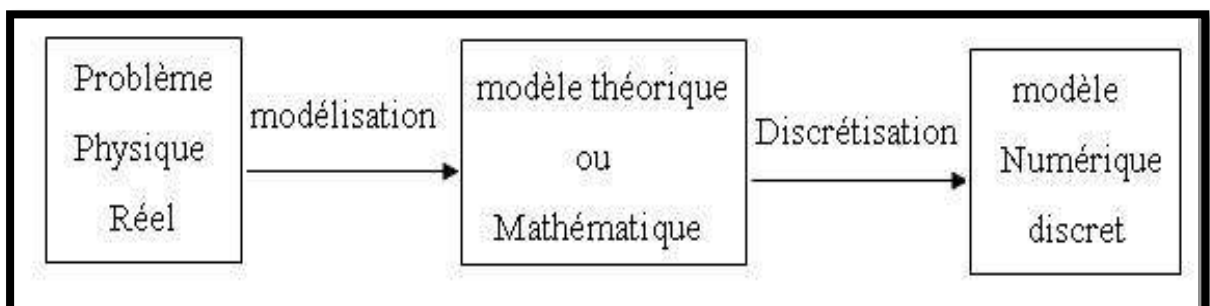
- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$
- reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux  $\{U\}$  et les forces  $\{F_e\}$  appliquées aux nœuds :  $[K_e] \{U_e\} = \{F_e\}$
- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global.  $[K] \{U\} = \{F\}$  de manière a satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux Limites.
- Résoudre le système  $[K] \{U\} = \{F\}$  et obtenir les déplacements  $\{U\}$  aux nœuds.
- Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont Imposées.

### 1-9 Modélisation et discrétisation [13] :

#### 1-9.1 Introduction :

Pour s'assurer qu'une analyse numérique simulera au mieux un problème réel donné, il faut effectuer deux opérations essentielles, **la modélisation** dans un premier temps et **la discrétisation** dans un deuxième temps (figure 1.4) ces opérations portant sur deux aspects principaux du problème pratique.

- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites et du milieu,
- choix des éléments finis et du maillage



**Figure 1.4 :** Étape de l'analyse d'un problème aux limites [13].

### 1-9.2 Modélisation :

La modélisation est l'étape clé de toute analyse, elle consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des solides, structures et matériaux qui est capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. Pratiquement la modélisation consiste :

En ce qui concerne la structure, à ramener cette dernière à une géométrie en choisissant des axes (barre, poutre câble...), des plans (parois, plaques coques), des volumes (solides) après avoir éliminé certains détails (gousset, petites excentricités .....), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie pour définir les conditions d'appuis et les charges. Choisir de façon réaliste les lois

constitutives des matériaux décrivant aussi bien les réponses mécaniques classiques, (linéaires anisotropes discontinuité) que les phénomènes physiques (teneur en eau, discontinuité, perméabilité), à déterminer les propriétés qui définissent ces lois et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales) [13].

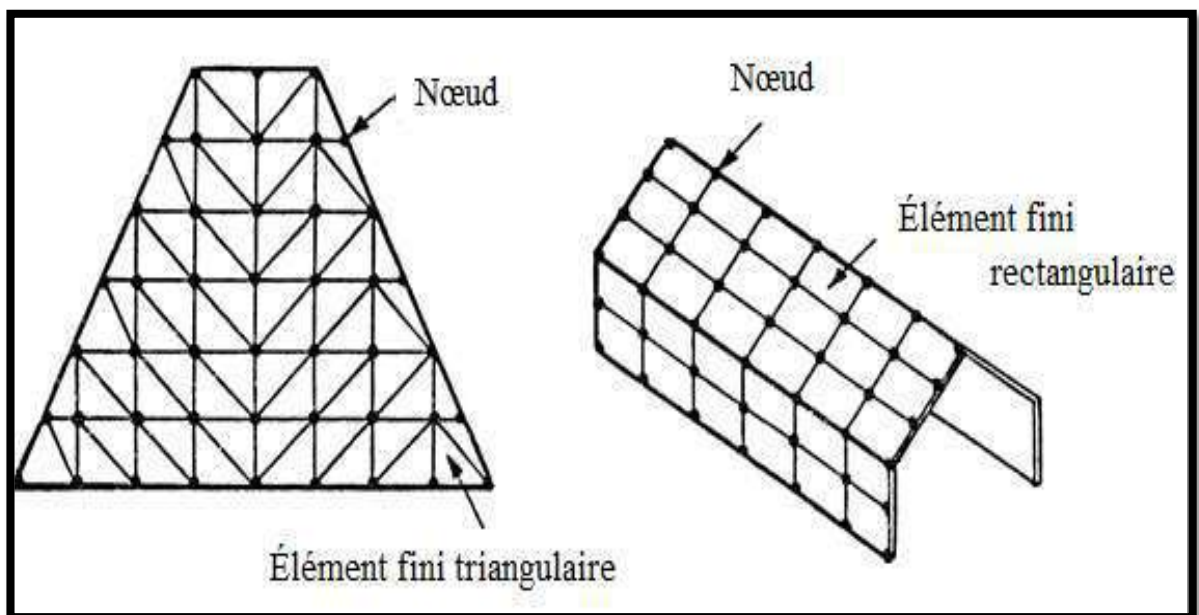


Figure 1.5 : Modélisations par éléments finis de structures [13].

### **1-9.3 Discrétisation :**

La discrétisation fournit un modèle numérique à partir du modèle mathématique, donc l'opération de discrétisation est aussi importante que celle de la modélisation. Pour discrétiser, on subdivise la structure en éléments dont les caractéristiques et la forme dépendent de la modélisation.

La principale difficulté de la méthode des éléments finis se situe au niveau de la formulation des éléments (forme de l'élément, nombre de nœuds et de degré d'interpolation)

### **1-10 Avantages du modèle en déformation :**

Cette approche permet la représentation du champ de déplacement par un ordre élevé des termes des polynômes sans avoir besoin d'introduire des degrés de liberté supplémentaire ni de nœuds intermédiaires. Les éléments produits conduisent à des résultats très encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de DDL.

### **1-11 Conclusion :**

la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base, la mécanique des structures, l'analyse numérique et programmation (**RE\_FLEXE** et **ABAQUS**). Dans ce chapitre un modèle d'élément fini a été choisi en utilisant des modèles de déplacements pour calculer la flexion maximum d'une poutre isotrope encastree.

**Chapitre 02 :**  
**PRESENTATION DE L'OUTIL**  
**INFORMATIQUE**

## PRESENTATION DE L'OUTIL INFORMATIQUE

### 2-1 Introduction :

La résolution d'un problème par la MEF nécessite la manipulation des matrices et des vecteurs de grandes tailles (matrice des raideurs, de rotation, vecteurs forces, etc.) ainsi que différentes techniques numériques (Assemblage, résolution...)[14].

Dans ce chapitre, on va présenter en bref les deux logiciels numériques **RE\_FLEX** et **ABAQUS** qui sont considérés comme des logiciels de calcul par éléments finis très puissants pour la résolution des problèmes statiques et dynamiques, linéaires ou non-linéaires des différentes structures, sous l'effet de différentes excitations.

### 2-2 Présentation du programme fortran :

#### 2-2.1 Historique [15] :

Le premier document faisant référence au langage **FORTRAN** date du 10 novembre 1954. **FORTRAN** vient, en fait, de **Th e IBM Mathematical Formula Translation System**. Il a été initialement conçu pour simplifier la programmation de calculs numériques sur les plateformes **IBM 704**.

La première version du **FORTRAN** n'est apparue qu'au début de l'année 1957 et même si les programmes obtenus à partir de code **FORTRAN** étaient plus lents que ceux obtenus à partir de codes en langage machine, le **FORTRAN** s'est imposé auprès de la communauté scientifique : il était bien plus simple à écrire. Très rapidement, il a été possible de réutiliser des codes **FORTRAN** sur d'autres plateformes que celles **d'IBM**.

Au début des années soixante, est apparue une myriade de compilateurs **FORTRAN** qui n'obéissaient pas exactement aux mêmes conventions de syntaxe. En 1966, il y eut une première tentative de normalisation du langage (travaux du Working Group X3.4.3 de l'American Standards Association) mais le groupe de travail n'a pas réussi à s'entendre sur un standard unique. C'est ainsi que sont nées deux normalisations distinctes : **FORTRAN** et **Basic FORTRAN**. En 1978, le même groupe de travail s'est de nouveau réuni et les spécifications du **FORTRAN 77** furent adoptées.

### 2-2.2 Langage fortran 90 :

Le **FORTRAN** est depuis longtemps, le langage le plus utilisé dans la programmation relative aux calculs de l'ingénieur. La dernière version appelée **FORTRAN 90** possède de nombreux avantages par rapport aux précédentes versions (Fortran 77) dont les principaux sont cités ci-après :

- Les programmes en Fortran 90 sont écrits en format libre.
- On peut mélanger les caractères majuscules sans restriction.
- Plusieurs rapports (instructions ) peuvent être placés dans une même ligne séparés par « ; »
- Les longues lignes peuvent être prolongés par le symbole « & » à la fin de la ligne  
L'instruction « **IMPLICIT NONE** » exige la déclaration de toutes les variables et constantes;
- Les déclarations sont signalées par double deux points « :: » ;
- On ne trouve pas d'étiquettes dans le programme Fortran 90 .

### 2-2.3 Conventions de base:

Comme tout langage, le **FORTRAN** utilise des règles pour fonctionner. Tout d'abord, nous verrons les règles de typage des données ainsi que des structures essentielles à l'implémentation d'algorithmes. Ensuite, nous verrons les conventions d'écriture d'un programme FORTRAN nécessaire à sa compilation et à son exécution.

### 2-2.4 Type de données:

Le FORTRAN possède trois types de données :

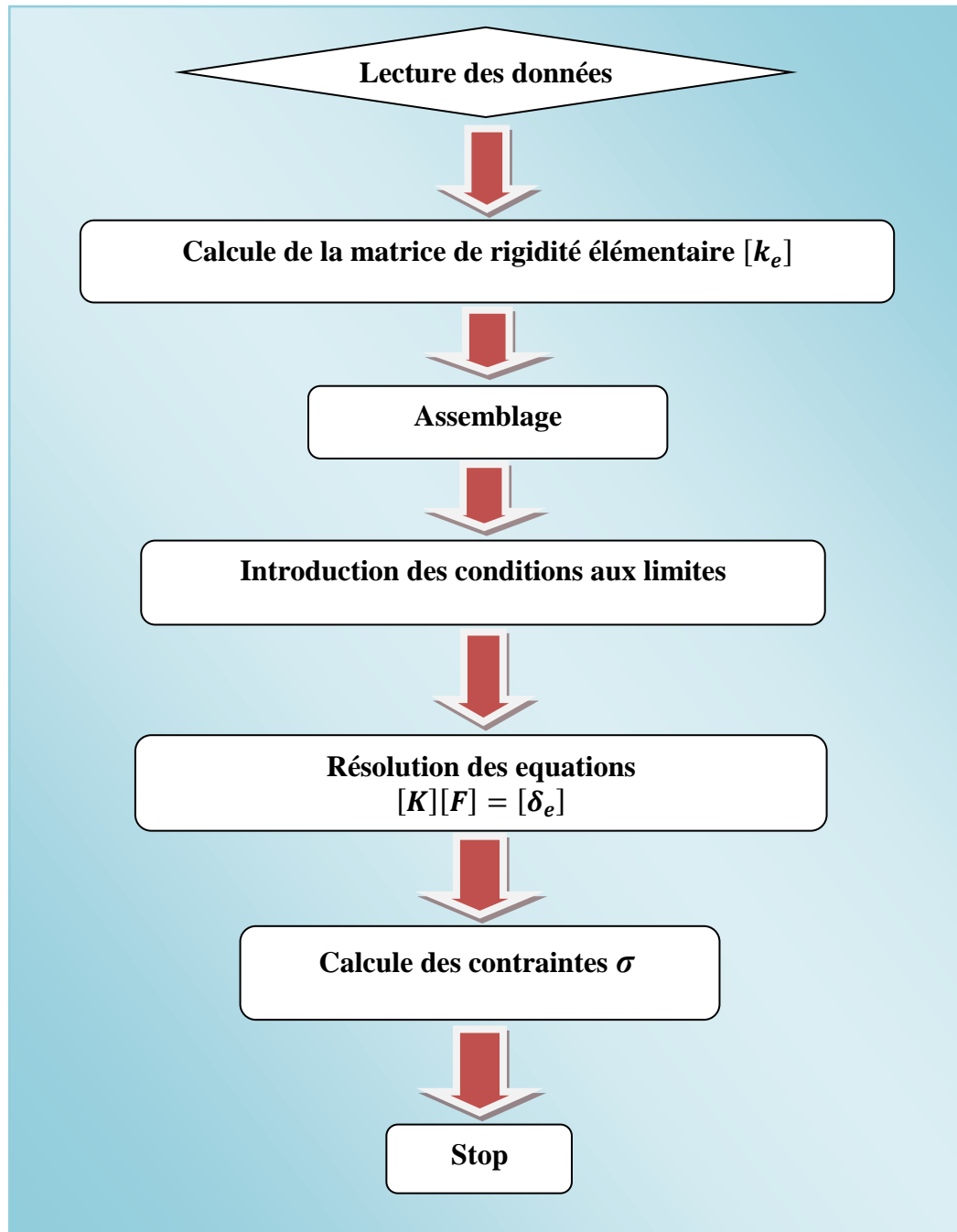
- numériques,
- alphanumériques,

et logiques. Chacune d'elles doit être utilisée avec discernement.



### 2-2.5 Organigramme global du programme :

L'organigramme suivant résume les séquences de calcul des flèches :



**Figure 2.1** : Organigramme global du programme [16].

## 2-3 Présentation du code RE\_FLEX :

### 2-3.1 Introduction :

Nous présentons dans ce chapitre un logiciel simple et modulaire destiné à l'enseignement de la méthode des éléments finis. Il peut également servir de base aux chercheurs qui pourront l'utiliser et le modifier facilement pour tester de nouveaux éléments ou de nouvelles méthodes de résolution. Ce logiciel appelé RE\_FLEX (Recherche et Enseignement en modélisation des structures Flexibles) est écrit en fortran [16].

### 2-3.2 Caractéristiques d' un logiciel d'élément fini :

#### 2-3.2.1 Caractéristiques générales :

En tout généralité, un logiciel d'éléments finis contient :

- Une structure représentation des données associées à la description d'un problème et à la résolution [16].

Trois tâches associées à la mise en œuvre de MEF peuvent être distinguées :

Tâche : acquisition des données	
Programme :	Organisation des données :
-représentation géométrique	- table, objets
(interface avec les outils de CAO/DAO)	-base de données
-mail lage automatique	
-manipulation et modification des Données du problème.	

**Tableau 2.1** : acquisition des données sur la méthode d'élément finis [16].

Tâche : Calculs par éléments finis	
Programme :	Organisation des données :
-opérations au niveau des éléments	- scalaires
-assemblage	- tables à une dimension
-résolution (linéaire, non linéaire In stationnaire.),	- tables à deux dimensions

**Tableau 2.2** : 1 étape de calcul sur la méthode [16].

<b>Tâche : Visualization</b>	
Programme :	Organisation des données :
-outils graphiques	- tables, objets
-animation	- base de données
-visualisation	

**Tableau 2.3** : visualisation sur la méthode [16].

### 2-3.2.2 Caractéristiques du logiciel RE\_FLEX :

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la tâche de calcul associée à la MEF. Notre expérience dans l'élaboration et l'utilisation des codes MEF et BBMEF a constitué le point de départ pour définir l'architecture du logiciel RE\_FLFX [17].

Citons quelques caractéristiques importantes du code :

Table des coordonnées globales	VCOR
Table des ddl nodaux	KDLNC
Table des propriétés nodales	VPRN
Table des types d'éléments	KTPEL
Table des propriétés élémentaires	VPREL
Table des conditions aux limites	VCLIM
Table d'indice de conditions aux limites sur chaque nœud	KCLIM
Table des sollicitations concentrées	VFCG

**Figure 2.2** : la base de donnée dans le code (RE\_FLEX) [16].

Les quantités générées par les modules de calcul d'éléments finis sur les deux tableaux suivants (globale, élémentaire) :

<b>Tables globales</b>	
Table des sollicitations réparties	VFRG
Table des sollicitations totales	VFG
Table des résidus (et réactions)	VRESG
Table de la solution	VSLOG, VDLG
Table de la matrice rigidité assemblée	VKG

**Tableau 2.4** : tables globales (réparties, totales, résidus) [16].

<b>Table elementariness</b>	
Table des coordonnées	VCORE
Table des dd de chaque nœuds	KDLE
Table de localisation des ddl dans la matrice globale	KLOCE
Table des propriétés	VPREE
Table des propriétés modales	VPRNE
Table de la solution	VDLE

**Tableau 2.5** : table élémentaire dans logiciel [16].

### 2-3.3 Description du logiciel RE\_FLEX :

Le logiciel RE\_FLEX, est écrit en FORTRAN 77, et constitue d'un ensemble de modules.

Chaque module, exécutable par une commande, représente un enchaînement des sous programmes pour effectuer différentes opérations [16].

#### 2-3.3.1 Organisation générale :

Le programme principal enchaîne l'exécution de l'ensemble des commandes sous le contrôle de l'utilisateur via la lecture des noms des commandes et des données associées [18].

Programme principal

**LECTURE** : lecture du nom d'une commande XXX Exécution des opération associées à cette commande par :

**CALL BLxxxx**

**SUBROUTINE BLxxxx**

Enchaînement automatique de plusieurs sous-programmes

**RETURN**

Retour à **LECTURE**

La liste non exhaustive des différentes commandes est :

<b>IMAG</b>	impression des données
<b>COMT</b>	lecture des commentaires
<b>DATA</b>	lecture données éléments finis (coordonnées, connectivites, ...)
<b>SOLR</b>	calcul des sollicitations réparties
<b>LINR</b>	résolution d'un problème statique Linéaire
<b>VALP</b>	calcul de valeurs et vecteurs propres par itération
	inverse avec orthogonalisation par Gram-Schmidt
<b>DYNA</b>	résolution d'un problème de dynamique des structurass
<b>STOP</b>	arrêt du programme

**Figure 2.3** : la différente commande de RE\_FLEX [16].

Les commandes représentent deux types d' operation :

- lecture et manipulation des données :IMAG, COMT, DATA
- opération de calcul :SOLR, LINR,VALP, DYNA

La structure d'enchaînement des différents sous-programmes de la commande LINR est très caractéristique d'une commande de calcul.

**LINR :**

résolution d'un problème statique linéaire.

Matrice **[K]** plein, non symétrique.

Triangule irisation par Gauss  $[K] = [L]*[D]*[S]$

(Tous les ddl sont conservée **NEQ=NDLT**).

Condition aux limites imposées par pénalisation diagonale. résolution de

$[F] = [K]*[U]$

calcul des contraintes et des réactions globales.

**2-3.3.2 Allocation des tables [16] :**

L'allocation d'espace est effectuée en choisissant des dimensions fixes pour toutes les tables. Différents paramètres globaux et tables sont définis dans les fichiers PARAM.INC, COMMON.INC qui sont communs à l'ensemble des sous-programmes.

Nous utilisons les instructions INCLUDE 'PARAM.INC' et INCLUDE 'COMMON.INC'

Dans les sous-programmes concernés.

On peut changer la taille des tables selon la classe des différents problèmes par l'édition des fichiers PARAM.INC et COMMON.INC. Il suffit ensuite de recompiler tous sous-programmes du logiciel.

**2-3.3.3 Normes de programmation [16] :**

Chaque commande xxx est définie par un maximum de 4 caractères. On associe à chaque commande (de calcul)

- Un sous-programme **BLxxxx**
- Un sous-programme **ELxxxx**
- Un sous programme **ASxxxx**

Les sous-programme ayant l'appellation **BExxxx**, **EXxxxx**, **ASxxxx** sont sans argument  
Toute la base de donnée est disponible via les 'COMMON INC' et 'PARAM.INC' pour l'ensemble de ces sous-programme.

Le nom de chaque sous-programme associé aux calculs des matrices et vecteurs élémentaires pour un type d'élément commence toujours par **ELEM**.

Les sous-programmes utilitaires effectuant différentes opérations de la méthode des éléments finis, regroupés dans **SP\_UTIL**, n'ont pas de **COMMON** et les informations sont transmises par les arguments.

### 2-3.3.4 Description des tables et variables des "COMMON" [16] :

On distingue :

- les tables pour le stockage d'information après lecture des données : **VCOR, KONEC, VCLIM**, etc.
- les tables de travail pour effectuer les calculs par éléments finis : **VFRG, VFG, VKG, VKE, VFE**, etc.

#### 2-3.3.4.1 Paramètres et tables d'éléments finis :

##### a. Quantités associées aux nœuds :

COMMON/PRNEUD / NDIM/.NNT/.NDLN/.NDLT/.NPRN

- ❖ nombre de dimensions du problème (1.2 ou 3).
- ❖ nombre total de nœuds.
- ❖ nombre de ddl par nœuds (maximum).
- ❖ nombre total de ddl du problème.
- ❖ nombre de propriétés par nœuds.

##### b. Quantités associées aux éléments [16] :

Nom	Description
NELT	nombre total d'éléments du problème
NNEL	nombre maximum de nœuds d'un élément
NDLE	nombre maximum de ddl d'un élément (maximum)
NGPREL	nombre de groupes de propriétés élémentaires
NPREL	nombre de propriétés dans chaque groupe
NYPEL	numéro du type d'élément (utile si tous les éléments sont du même type)

**Tableau 2.6** : Sélectionnez un élément fini ( degrés d' liberté ,les type d'élément ) [16].

**c . Quantité associées aux opérations de calcul globale :**

COMMON/PTASKG (NDLTX\*NDLTX)

COMMON/PTASMG/VMG (NDLTX\*NDLTX)

Nom	dimension	commande	description
VKG	NDLTX	Créant la table LINR rigidité	matrice globale de
VMG	*NDLTX NDLTX	VALP	(pleine) matrice globale de
masse	*NDLTX	DYNA	(pleine)

**d. Quantité associées aux opérations de calcul élémentaire [16] :**

On présenter les opérations de calcul a logiciel :

COMMON/PRAEL/IEL,ITYPE,INNEL,IPREE,IPRNE,IDLE,IKE, IH,IPG

<b>IEL</b>	numéro de l'élément actif
<b>ITYPE</b>	numéro du type de l'élément actif
<b>INNEL</b>	nombre de nœuds de l'élément actif
<b>IPREE</b>	nombre de propriété élémentaire de l'élément actif
<b>IPRNE</b>	nombre de propriétés nodales de l'élément actif
<b>IDLE</b>	nombre de DDL de l'élément actif
<b>IKE</b>	aille de la matrice VKE
<b>IH</b>	nombre de dimension de VH (matrice de comportement)
<b>IPG</b>	nombre de points d'intégration numérique.

**Figure 2.4 :** les opérations de calcul élémentaire [16].



**e. Quantités associées aux opérations de calcul global [16] :**

Common /PRVECG/NONSYL, NKG, NEQ NONSYM indice de non symétrie de VKG (=0systeme) :

- NKG taille maximum de VKG
- NEQ Nombre d'équations a résoudre.

COMMON/PTASEL/VCORE (NDIMX\*NNELX), KONE (NNELX)

KLOCE(NDLEX), KDLE (NDLEX), VPREE (NPRELX), VPRNE (NPRNX+1)

COMMON/PTASKE/VKE (NDLEX\*NDLEX), VME (NDLEX\*NDLEX),

Nom	Dimension	Commande	Description
<b>Créant la table</b>			
<b>VCORE</b>	NDIMX	DATA	coordonnées des nœuds
<b>KONE</b>	NNELX	DATA	numéros des nœuds
<b>VPREE</b>	NPRELX	DATA	propriétés élémentaires
<b>VPRNE</b>	NPRNX +1	DATA	propriétés nodales
<b>VKE</b>	NDLEX*NDLE	DATA	matrice élémentaires
<b>VME</b>	NDLEX*NDLE	DATA	matrice élémentaires
<b>VFE</b>	NDLEX	DATA	Vecteur élémentaires

**Tableau 2.7** : les opérations de calcul en RE\_FLEX [16].

**2-3.3.5 Description des différentes commandes [16] :**

Nous présentons l'enchaînement des différents sous-programmes des commandes du logiciel:

- Commande d'IMAG
- Command COMT
- Commande DATA
- Commande SOLR
- Commande LINR
- Commande VALP
- Commande DYNA
- Commande STOP

## 2-4 Présentation du code ABAQUS :

### 2-4.1 Introduction :

L'avenir est à l'outil numérique et à la réalité virtuelle; la simulation et l'analyse numérique se sont développées ces dernières années dans la recherche industrielle privée ou publique (constructeurs automobile, aéronautique, spatial,...etc.) améliorant ainsi la productivité des industriels et la vie de tous les consommateurs [19].

La solution d'analyse par éléments finis optimise le prototypage virtuel et la simulation numérique pour l'entreprise en utilisant les hypothèses de la mécanique de la rupture en élasticité et de la dynamique. Ainsi elle simule et améliore les performances.

D'un point de vue technique, les résultats obtenus grâce à **ABAQUS** sont le bilan des énergies, des forces nodales, des déformations, des déplacements, des contraintes, des vitesses, des accélérations et de toutes les grandeurs physiques nécessaires à la conception d'un modèle.

**ABAQUS** est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978. Il est avant tout un logiciel de modélisation de problèmes très variés en mécanique. Simuler la réponse physique des structures soumises à des chargements, des températures, des impacts ou autres conditions extérieures, Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants des problèmes linéaires et problèmes non linéaires [20].

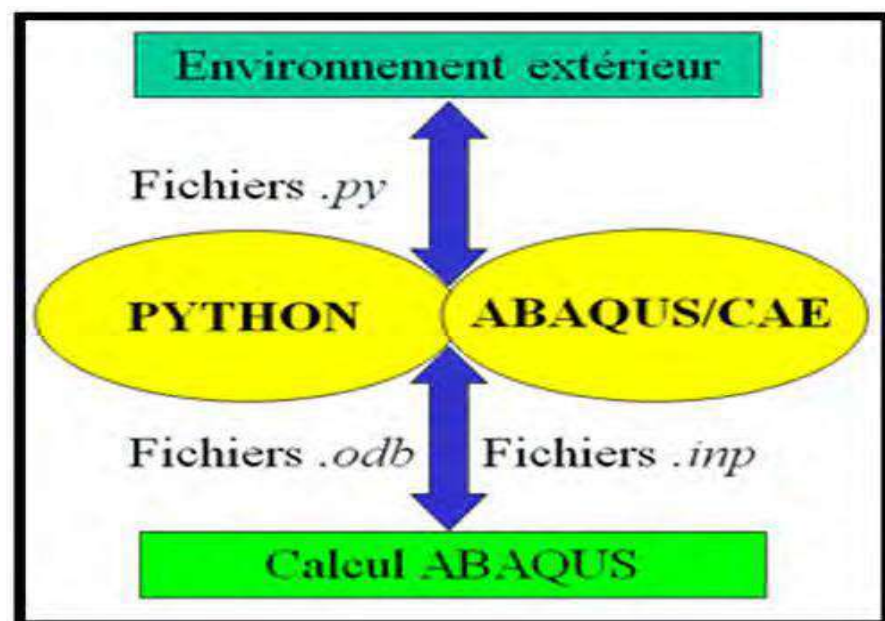


Figure 2.5 : schéma présente l'utilisation langage de script Python [21].

### 2-4.2 Définition de logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS :

L'ABAQUS est un code de calcul utilisant la méthode des éléments finis (MEF) . Selon la méthode de résolution, ABAQUS compose de trois produits :

- **ABAQUS/Standard** : résolution par un algorithme statique implicite.
- **ABAQUS/Explicit** : résolution par un algorithme dynamique explicite.
- **ABAQUS/CAE** : constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour les dits solvers.

### 2-4.3 Caractéristiques de logiciel ABAQUS :

Description succincte des possibilités d'ABAQUS.

- Analyses.
- Éléments.
- Linéarités.

#### 2-4.3.1 Type d'analyse :

Domaines physiques :

- Mécanique.
- Thermique.
- Electrique (Pièze et thermique).
- Problèmes couplés.
- Une bibliothèque de matériaux de pointe, y compris l'habituel élastique et solides plastique ,élastique ; modèles pour les mousses, le béton, les sols, les géosynthétiques.

Problèmes :

- Statique et dynamique.
- Linéaires et non linéaires.
- Dynamique des corps rigides.

### 2-4.4 Les éléments utilisés par ABAQUS [22] :

On distingue différentes grandes classes d'éléments :

- **Les éléments unidimensionnels (1D)** : barre; poutre ,rectiligne ou courbe
- **Les éléments bidimensionnels (2D)** : élasticité plane (contrainte ou déformation plane), plaques en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou rectangulaire.
- **les éléments tridimensionnels (3D)** : de forme tétraédrique, hexaédrique...etc.
- **les éléments axisymétriques** : (pour les pièces présentant une symétrie de révolution au niveau de la géométrie et du chargement).
- **les autres éléments** : ressorts , amortisseurs , rigides.

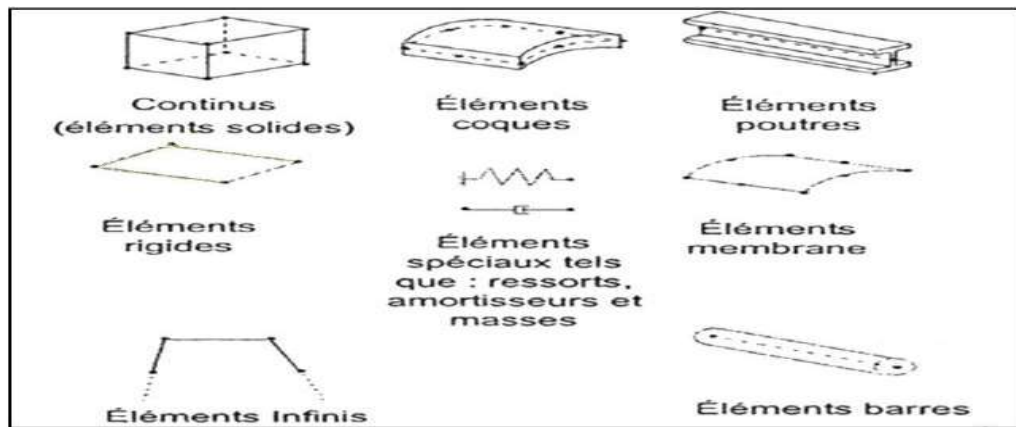


Figure 2.6 : Quelques éléments parmi les plus utilisés [22].

### 2-4.5 Réalisation d'une simulation numérique :

La réalisation complète d'un jeu de données s'effectue après un passage successif dans les Modules [23] :

- Part
- Property
- Assembly
- Step
- Interaction
- Load
- Mesh
- Job (pour lancer le calcul)

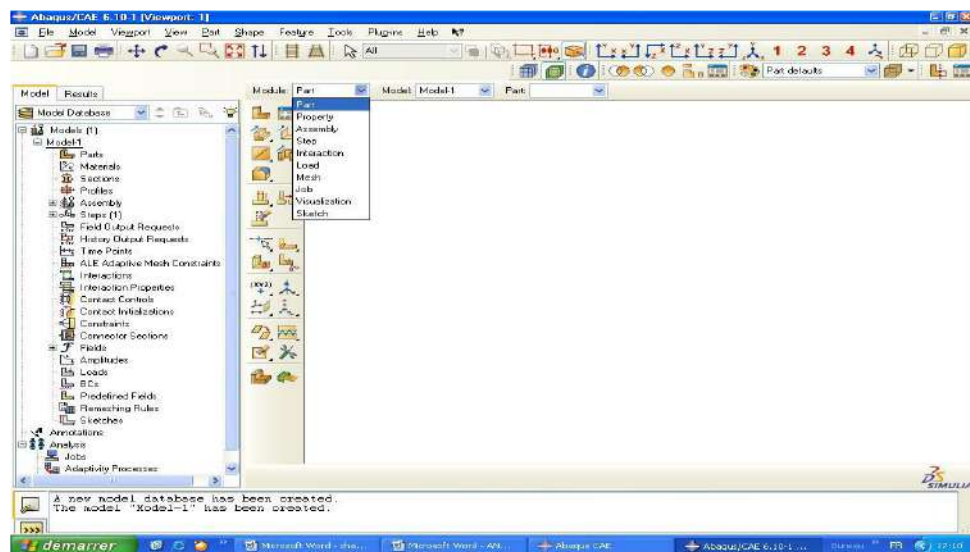


Figure 2.7 : Les modules de logiciel ABAQUS [23].

## 2-4.6 Les différents fichiers pour la simulation sous ABAQUS :

### 2-4.6.1 Fichier d'entrée (Input file) :

**Extension .inp** : contient des mots clés décrivant la géométrie, les matériaux, les conditions limites et les chargements de la structure étudiée.

#### ➤ Génération du fichier .inp :

- Avec un éditeur (fichier texte) ou programme en connaissant les divers mots clés de commande ABAQUS.
- Avec l'interface graphique ABAQUS/CAE.

### 2-4.6.2 Fichier de résultats (output file) :

**Extension .odb** : Contient les contours et courbes de résultats.

## 2-4.7 Autres fichiers créés par ABAQUS lors de la simulation :

- Fichier **.com** : exécutable de vos calculs.
- Fichier **.res** : fichier binaire de reprise.
- Fichier **.dat** : liste des résultats, résumé de votre modélisation.
- Fichier **.msg** : résumé du déroulement du calcul en cours, message d'erreur.
- Fichier **.fil** : fichier binaire des résultats.
- Fichier **.log** : fichier de procédure.
- Fichier **.sta** : Fichier statistique ... ets.

### **2-4.8 Organisation de l'interface ABAQUS/CAE :**

Il est important de savoir que le module CAE que vous allez utiliser pour créer votre jeu de données est relativement récent (quelques années) et qu'il est plutôt destiné à la mise en données de problèmes relativement classiques.

Donc pas toutes les commandes utilisables dans ABAQUS et fait souvent le choix de paramètres par défaut [24].

### **2-4.9 Modélisation par ABAQUS :**

Dans le but de modéliser correctement par la méthode des éléments finis une plaque stratifiée, il est nécessaire de bien définir les caractéristiques de la modélisation à réaliser. En effet, il est préférable d'assurer du choix de l'élément et du type d'analyse par éléments finis.

Tout d'abord, le manuel d'utilisation d'ABAQUS propose pour modéliser les plaques minces l'utilisation de l'élément S4R (élément coque de 4 noeuds avec intégration réduite), car sa validité pour modéliser les plaques isotrope ou composite minces est assurée [25].

### **2-5 Conclusion :**

La programmation efficace de la méthode des éléments finis requiert une bonne expérience tant dans le domaine des éléments finis que dans le domaine de l'informatique.

Dans le présent chapitre, deux logiciels majeur ont été bien détaillés L'ABAQUS et le RE\_FLEX , avec les pas de fonctionnement.

**Chapitre 03**  
**FORMULATION ISO PARAMETRIQUE**  
**DE QUELQUES ELEMENTS FINIS**

### 3-1 Introduction :

Selon les recherches bibliographiques nous constatons l'ampleur de la MEF grâce à l'invention de la nouvelle approche 'déformation' qu'elle a obéi à une croissance rapide comme une alternative aux autres modèles.

Dans ce chapitre on va présenter des éléments rectangulaires Q4 et Q8 qui sont basés sur des éléments membranaires .

### 3-2 Description de l'élément membranaire :

Les éléments membranaires sont parmi les éléments les plus simples à développer. Ces éléments sont employés pour analyser des structures soumises aux forces dans le plan. Supposant que la structure est dans le plan  $(x, y)$ , les déplacements d'un point quelconque de la structure sont :

$u$  : la translation suivant la direction  $x$ ,

$v$  : la translation suivant la direction  $y$ .

Les efforts internes sont des contraintes normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , et la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$ . Les éléments de membrane, sont employés pour modéliser le comportement des structures en deux dimensions 2D, le mur de cisaillement et l'action de membrane dans les coques.

### 3-3 Formulation iso paramétrique :

Pour une mise en œuvre pratique de l'isopérimètre, il faut passer par plusieurs étapes Spécifiques :

- La construction des fonctions de forme de l'élément formulé.
- Calculs des dérivées des fonctions de forme pour former la matrice de contrainte déplacement.
- L'intégration numérique sur l'élément(avec quadrature de Gauss).



### 3-4 Evaluation des matrices et vecteurs élémentaires :

Les termes des vecteurs et matrices élémentaire sont calculés par intégration sur la géométrie d'un élément . dans certaines cas les expressions à intégrer se présentent en forme polynomiale Simple, on utilise des techniques d'intégration numérique [B] La matrice [J] est fonction  $\xi, \eta$  .Un milieu élastique linéaire peut être modélisé d'une manière directe en utilisant la méthode des déplacements des éléments finis. La condition d'équilibre du déplacement pour une approximation par les éléments finis est donnée par :  $[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$

Où :

- $[\mathbf{K}]$  est la matrice de rigidité globale.
- $\{\mathbf{U}\}$  est le vecteur des déplacements des nœuds pour toute la structure, dans un système global de coordonnées.
- $\{\mathbf{F}\}$  est le vecteur des chargements sur la structure. Généralement, les chargements externes sont connus et la matrice de rigidité peut être formée une fois la géométrie les propriétés élastiques de la structure sont spécifiées.

**La formule de la matrice de rigidité  $[\mathbf{K}_e]$  :**

$$[k] = \int [B]^T [D][B]dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] t |J|d\xi d\eta \quad (3.1)$$

### 3-5 Techniques de calculs au niveau élémentaire :

Ce paragraphe plus technique présente quelques aspects du calcul numérique qui permet d'exprimer les formes intégrales présentées précédemment. Ces calculs sont basés sur l'intégration numérique (définie sur des éléments de référence) et l'utilisation de la transformation géométrique pour définir les éléments réels à partir d'éléments de référence. Les notions que nous présentons seront utiles pour analyser les modèles, elles sont cependant insuffisantes pour prétendre programmer vous même vos propres éléments.

### 3-5.1 Transformation géométrique :

La transformation géométrique définit les coordonnées (x, y) de tout point de l'élément réel à des coordonnées (ξ, η), la forme de l'élément réel à partir d'un certain nombre de points dans l'élément, appelés "points géométriques"

Les transformations géométriques sont tout simplement des fonctions d'interpolation de la géométrie ( figure 3.1).

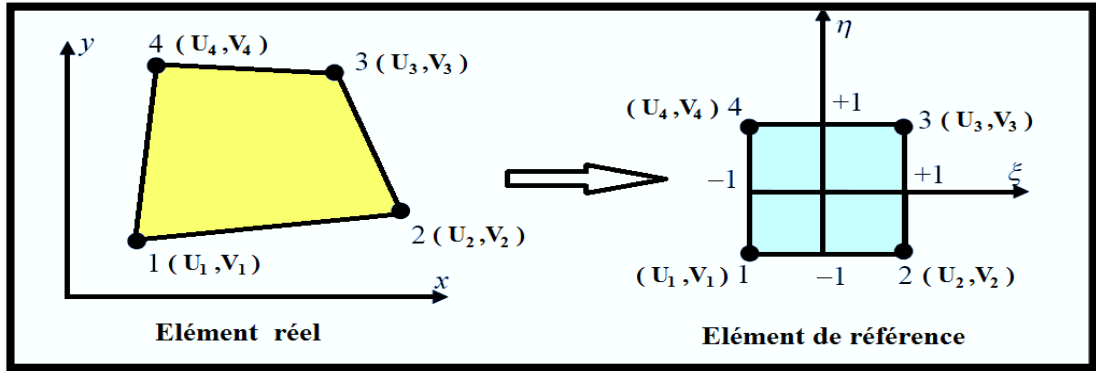


Figure 3.1 : Le passage de l'élément physique à l'élément de référence [10].

### 3-5.2 Transformation des dérivées :

Les dérivées d'une fonction N (x, y) par rapport à ξ et η sont :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} = [J] * \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

On en déduit l'expression des dérivées de N par rapport a ξ et η :

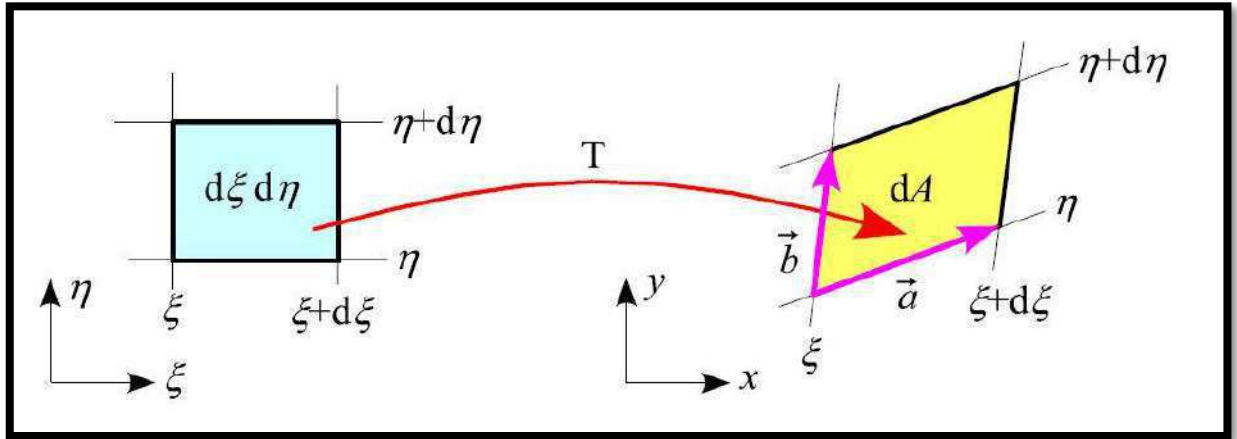
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Avec:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det [J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}, \det [J] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad (3.4)$$

### 3-5.3 Transformation des intégrales :

La surface infinitésimale  $d\xi d\eta$  au point  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence se transforme la surface  $dA$  au point  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  de l'élément réel [7].



**Figure 3.2 :** Transformation des surfaces [7].

On a la relation :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{k} dA \quad (3.5)$$

Soit

$$\{a\} \wedge \{b\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi \wedge \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta = \{k\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta = \{k\} dA \quad (3.6)$$

L'intégrale sur l'élément réel

$$\int_0^V f(x, y) dV \quad (3.7)$$

Deviens donc sur l'élément de référence

$$\int_0^A f(x, y) dA = \int_0^A t f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (3.8)$$

Ou  $t$  est l'épaisseur supposée constanté de l'élément.

### 3-6 La formulation iso paramétrique de l'élément Q4 :

L'élément Q4 est un quadrilatère (rectangulaire) à quatre nœuds. Deux degrés de liberté dans chaque nœud, les déplacements  $u_i$  et  $v_i$  au totale 8 DDL pour l'élément rectangulaire de plaque. Ces déplacements en un point à l'intérieur de l'élément sont donnés par :

$$U = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i \quad V = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (3.9)$$

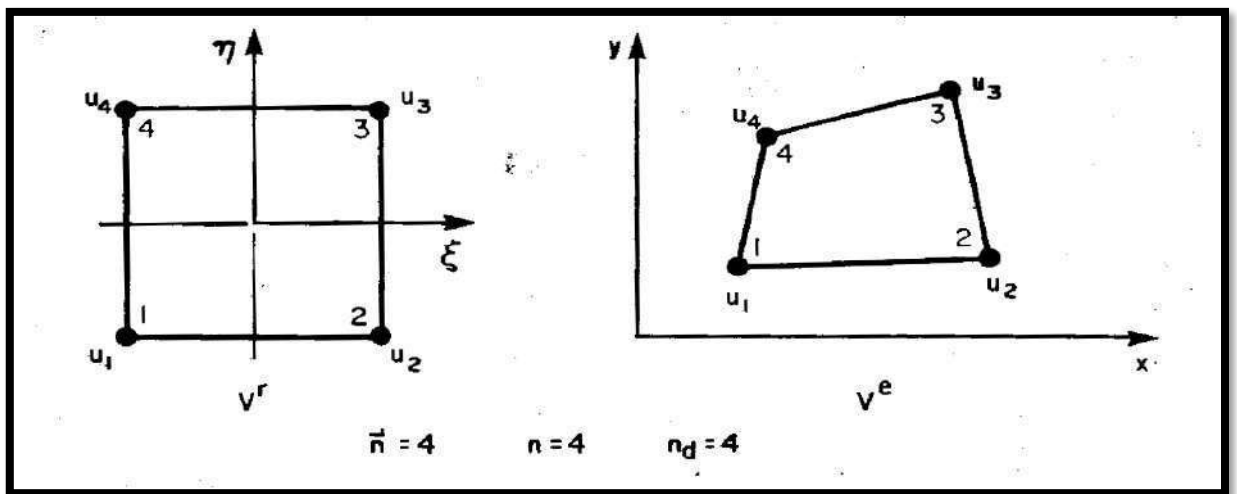


Figure 3.3 : L'élément quadrilatère à 4 nœuds [15].

#### 3-6.1 Déterminations des déplacements élémentaires :

En remplaçant les valeurs de  $(\xi, \eta)$  par les coordonnées naturelles représentées dans la (Figure 3.4)  $(\xi, \eta) = (-1, -1), (-1, +1), (1, 1), (1, -1)$ .

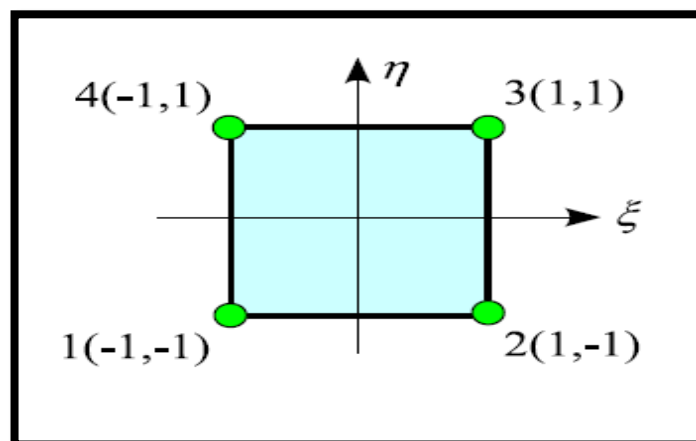


Figure 3.4 : L'élément rectangulaire à quatre nœuds [7].

Les approximations sont pour  $N_i (\xi, \eta)$   $i = 1,2,3,4$  (Figure 3.4) :  $\{U\} = [N]\{U_e\}$  (3.10)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

L'interpolation du champ de déplacements peut être écrite dans la formulation iso paramétrique comme suit :

$$u = \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^U (\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^U (\xi, \eta) v_i \quad (3.12)$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^V (\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^V (\xi, \eta) v_i \quad (3.13)$$

Où :  $N_i (\xi, \eta)$  sont identiques à celles définies pour les coordonnées, par conséquent la géométrie de l'élément et ses déplacements sont interpolés sous la même forme paramétrique c'est pourquoi cet élément est dit iso paramétrique.

Et les fonctions de forme données par l'équation (3.7) peuvent être écrites sous la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & N_2^u & 0 & N_3^u & 0 & N_4^u & 0 \\ 0 & N_1^v & 0 & N_2^v & 0 & N_3^v & 0 & N_4^v \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Les fonctions de forme obtenues de l'élément Q4 en coordonnées naturelles sont données dans le tableau (3.1), ainsi que les composantes de la matrice de déformation  $[B]$ . qui sont données dans le tableau (3.2).

Noeuds	$\{N_i\}$
1	$-1/4 (1-\xi) (1-\eta) (1+\zeta+\eta)$
2	$-1/4(1+\xi) (1-\eta) (1-\zeta+\eta)$
3	$-1/4 (1+\zeta) (1+\eta) (1-\zeta-\eta)$
4	$-1/4(1-\zeta) (1+\eta) (1+\zeta-\eta)$

**Tableau 3.1** : Les fonctions de forme de l'élément Q4 [27].

### 3-6.2 Calcul de la matrice de rigidité $[K_e]$ :

Le calcul de la matrice de rigidité  $[K_e]$  basé sur le calcul de la matrice  $[B]$ . Ces calculs sont au sein d'une boucle sur les éléments, car nous calculons ces matrices pour chaque élément.

De plus, la matrice  $[B]$  contient des termes qui, en états plans (de contraintes ou de déformations) sont des dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées  $x$  ou  $y$ . Or, les fonctions de forme sont maintenant exprimées en fonction des coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  de l'élément parent. On devra donc passer par le Jacobine de la transformation.

Pour calculer la matrice  $[B]$ , nous avons donc dû calculer les fonctions de forme ainsi que les dérivées des fonctions de forme [27].

Si le matériau est isotrope, il obéit à la loi de Hooke qui s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.15)$$

Les fonctions de déformations sont exprimées par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [B]\{U\} \text{ pour } i = 1,2,3,4 \quad (3.16)$$

Ou :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

$[B]$  : La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux noeuds.

d'où l'expression de la matrice  $[B]$  écrite en fonction de  $\xi$  et  $\eta$  :

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Sachant que  $[B]$  est une matrice  $3 \times 8$  :

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Les composants de la matrice  $[B]$  sont présentés dans le tableau suivant :

$B_{11} = N_{1,x}^u$	$0$	$B_{31} = N_{1,y}^u + N_{1,x}^v$
$0$	$B_{22} = N_{2,y}^v$	$B_{32} = N_{2,y}^u + N_{2,x}^v$
$B_{13} = N_{3,x}^u$	$0$	$B_{33} = N_{3,y}^u + N_{3,x}^v$
$0$	$B_{24} = N_{4,y}^v$	$B_{34} = N_{4,y}^u + N_{4,x}^v$
$B_{15} = N_{5,x}^u$	$0$	$B_{35} = N_{5,y}^u + N_{5,x}^v$
$0$	$B_{26} = N_{6,y}^v$	$B_{36} = N_{6,y}^u + N_{6,x}^v$
$B_{17} = N_{7,x}^u$	$0$	$B_{37} = N_{7,y}^u + N_{7,x}^v$
$0$	$B_{28} = N_{8,y}^v$	$B_{38} = N_{8,y}^u + N_{8,x}^v$

**Tableau 3.2 :** Composantes de la matrice  $[B]$  transposée de l'élément Q4 [27].

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

La transformation inverse est assurée par la matrice Jacobéenne inverse  $J^{-1}$  telle que :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

En passant en variables local nous aurons :

$$\iint dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det|J| d\xi d\eta \quad (3.22)$$

L'équation (3.22) est évaluée numériquement, en utilisant la quadrature de Gauss.

$[D]$  : est la matrice constitutive élastique du matériau, elle est symétrique à cause de la symétrie de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , pour un matériau homogène et isotrope caractérisé par le module de Young  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$ , on a :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$



On constate que les conditions de l'influence mutuelle et du mouvement de corps rigide sont satisfaisantes ( $\sum N_i(\xi, \eta) = 1$ ), le calcul des caractéristiques élémentaires de l'élément Q4 est effectué avec intégration numérique de la forme suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.24)$$

D'où la matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$  est calculée d'après l'équation :

$$[K_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [D][B(\xi, \eta)] e |dét[J(\xi, \eta)]| d\xi d\eta \quad (3.25)$$

La méthode d'intégration numérique choisie est celle de Gauss-Legendre à (2\*2) points d'intégrations.

Cette matrice de rigidité est alors calculée en utilisant la formule suivante :

$$[K_e] = \sum_{i,j} W_{ij} e_{ij} [B_{ij}]^T [D][B_{ij}] (dét[J])_{ij} \quad (3.26)$$

Avec :

$W_{ij}$  : Le coefficient de pondération au point d'interpolations  $(\xi_i, \eta_j)$ .

$e_{ij}$  : L'épaisseur de l'élément à étudier.

### 3-7 La formulation isoparamétrique de l'élément Q8 :

L'élément Q8 est un quadrilatère à huit nœuds . deux degrés de liberté en chaque nœud, les déplacements  $u_i$  et  $v_i$  soit au total 16 DDL. Cet élément basé sur le champ de déplacement dans les directions x et y, sont présentés dans la figure 3.4.

En termes de coordonnées généralisées  $\alpha_i$ , le champ de déplacement est donné par :

$$U = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \quad V = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (3.27)$$

de même la position d'un point au sein de l'élément en coordonnées globales est données par

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \quad Y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (3.28)$$

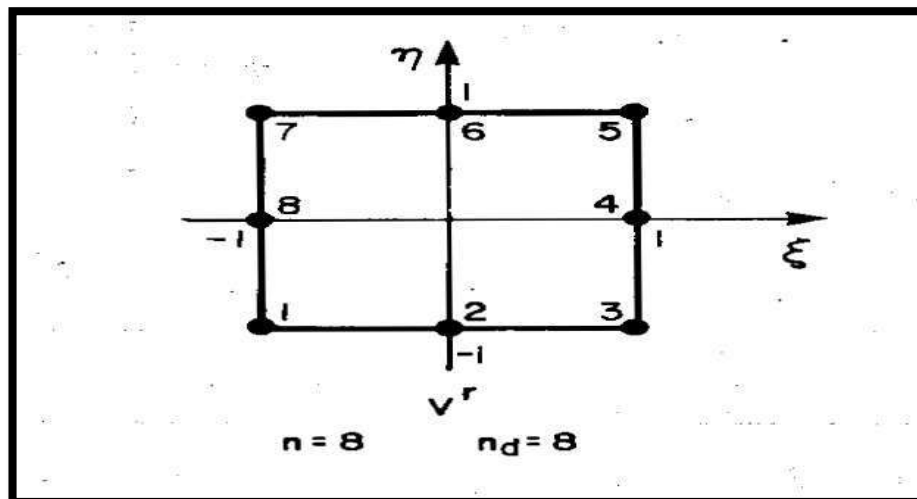


Figure 3.5 : L'élément quadrilatère Q8 [15].

#### 3-7.1 Détermination des déplacements élémentaires :

En remplaçant les valeurs de  $(\xi, \eta)$  par les coordonnées naturelles représentées dans la (Figure 3.5).  $(\xi, \eta) = (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1)$  Pour un problème d'élasticité plane l'élément à deux degrés de liberté en chaque nœud, chaque élément à seize degrés de liberté. On montre les seize déplacements inconnus. En utilisant la notation matricielle.

Avec la matrice de déformation Q donnée ainsi :

$$[Q(x, y)] = [L][\varphi(x, y)] \quad (3.29)$$

Qui permet d'exprimer le déplacement en tout point de l'élément en fonction du déplacement des noeuds l'interpolation de la déformation en tous points de l'élément est :

$$D'où : \{\delta_e(x, y)\}[\varphi(x, y)][\phi_e]^{-1} \{U\} \quad (3.30)$$

$$[N_e(\xi, \eta)] = [\varphi(\xi, \eta)][\phi_e]^{-1} ; \text{ Les fonctions de forme de l'élément Q8} \quad (3.31)$$

Ainsi la déformation assumée est donnée par :

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)]\{A\} \quad (3.32)$$

Avec la matrice de déformation Q qui est donnée par :

$$[Q(x, y)] = [L][\varphi(x, y)] \quad (3.33)$$

Où [L] est l'opérateur différentiel défini par :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Dans la formulation iso paramétrique l'interpolation du champ de déplacements peut être écrite comme suit :

$$u = \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^U(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^V(\xi, \eta) v_i \quad (3.35)$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^V(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^U(\xi, \eta) v_i \quad (3.36)$$

Et les fonctions de forme données par l'équation (3.31) peuvent être écrites sous la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Les fonctions de forme obtenues de l'élément Q8 en coordonnées naturelles sont données dans le tableau (3.3), ainsi que les composantes de la matrice de déformation  $[B]$  sont données dans l'équation (3.44)

Noeuds	{N}	{∂ N/∂ξ}	{∂ N/ ∂η}
1	$-1/4 (1-\zeta) (1-\eta) (1+\zeta+\eta)$	$1/4 (1-\eta) (2\zeta+\eta)$	$1/4 (1-\zeta) (\zeta+2\eta)$
2	$1/2 (1-\zeta^2) (1-\eta)$	$-(1-\eta)\zeta$	$-1/2 (1-\zeta^2)$
3	$-1/4(1+\zeta)(1-\eta) (1-\zeta+\eta)$	$1/4 (1-\eta) (2\zeta-\eta)$	$-1/4 (1+\zeta) (\zeta-2\eta)$
4	$1/2 (1+\zeta) (1-\eta^2)$	$1/2 (1-\eta^2)$	$-(1+\zeta) \eta$
5	$-1/4 (1+\zeta) (1+\eta) (1-\zeta-\eta)$	$1/4 (1+\eta) (2\zeta+\eta)$	$1/4 (1+\zeta) (\zeta+2\eta)$
6	$1/2 (1-\zeta^2) (1+\eta)$	$-(1+\eta)\zeta$	$1/2 (1-\zeta^2)$
7	$-1/4(1-\zeta) (1+\eta) (1+\zeta-\eta)$	$1/4 (1+\eta) (2\zeta-\eta)$	$-1/4 (1-\zeta) (\zeta-2\eta)$
8	$1/2 (1-\zeta) (1-\eta^2)$	$-1/2 (1-\eta^2)$	$-(1-\zeta) \eta$

**Tableau 3.3 :** Les fonction d'interpolation  $[N]$  et les dérivées par rapport  $(\xi, \eta)$  [27].

### 3-7.2 Evaluation des contraintes et des déformations :

Les déformations dans l'élément sont exprimées en termes des dérivées des Déplacement

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (3.38)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_x \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Avec  $u$  et  $v$  sont les composantes du déplacement dans le sens x et y. Le vecteur des déformations  $\{\varepsilon\}$  s'écrit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B]\{U\} \tag{3.40}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} [N(\xi, \eta)]\{q_e\} \tag{3.41}$$

Pour  $i=1,2,3,4,\dots,8$  (est  $B$  une matrice  $3*16$ ).

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

$\{\varepsilon\} = [B(\xi, \eta)]\{U\}$  Le champ de déformation

Où  $[B]$ . est un opérateur différentiel, tel que :

$$[B]. = [B_1, B_2, \dots, B_8].$$

Alors la matrice  $[B]$ . est : ( $i=1.8$ )

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

d'où l'expression de la matrice  $B$  écrite en fonction de  $\xi$  et  $\eta$  :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_7}{\partial y} & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$[B]$ . représente la matrice d'interpolation des déformations, elle est donnée par l'expression précédente.

$[D]$ . est la matrice d'élasticité du matériau, telle que :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

### La matrice de rigidité :

La matrice de rigidité élémentaire prend la forme habituelle de :

$$[K] = \int_{\nu}^{\nu} [B]^T [D] [B] dV \quad (3.46)$$

La méthode d'intégration numérique choisie est celle de Gauss-Legendre à (3\*3) points d'intégrations. Cette matrice de rigidité est alors calculée en utilisant la formule suivante :

$$[k^e] = \sum_{ij} W_{ij} e_{ij} [B_{ij}^T] [D] [B_{ij}] \det[J]_{ij} \quad (3.47)$$

### 3-8 CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons pu faire la formulation iso paramétrique des éléments Q4 et Q8 qui sont basés sur le modèle en déplacement. Ces formulations nous permet de palier à plusieurs problèmes pour lesquels la modélisation des bords courbes et la distorsion.

**Chapitre 04 :**  
**RESULTATS ET VALIDATION**  
**NUMERIQUE**

## RESULTATS ET VALIDATION NUMERIQUE

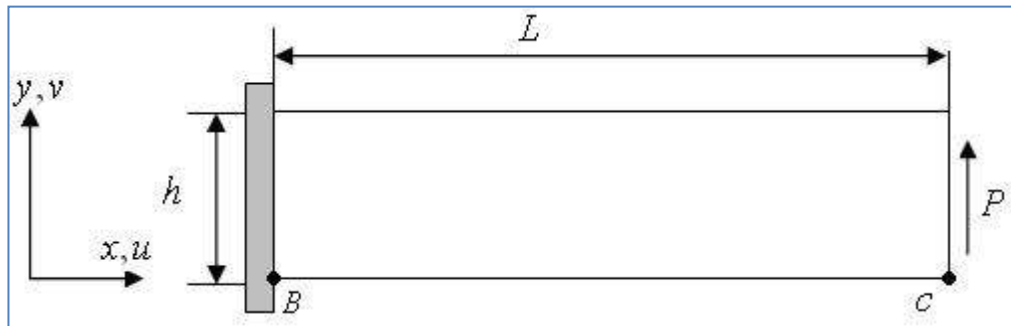
### 4-1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à la résolution d'un problème d'élasticité. Pour comparer nos résultats ,nous allons utiliser trois logiciels de calcul par éléments finis.

- **RE-FLXE** qui est utilisé pour implémenter l' élément Q8 en changeant l' élément Q4.
- **ABAQUS** et **RDM6** pour comparer nos résultats.

### 4-2 Flexion d'une poutre encastree [15] :

Considérons la poutre cantilever d'élancement  $L/b=100$ , encastree à une extrémité et soumise à une charge distribuée uniformément suivant  $y$  à l'autre extrémité,(de résultante).



**Figure 4.1** : Poutre flexion sous charge verticale

$E(MPA)$	$U$	$P (N)$	$L(mm)$	$h(mm)$	$e(mm)$
<b>10e7</b>	<b>0.3</b>	<b>10e4</b>	<b>100</b>	<b>10</b>	<b>1</b>

**Tableau 4.1** : Propriétés géométriques.



### 4-2.1. Calcul analytique :

Le déplacement  $v$  à l'extrémité est, selon la théorie des poutres :

$$U = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 4 + 0.03 = 4.03 \text{ mm} \quad (4.1)$$

**U**: déplacement maximale a l'extrémité de la poutre (point **C**).

**L** : longueur de l'élément.

**E** : le module d' Young .

**G** : module d'élasticité de cisaillement.

**A** : la section de l'élément.

**P** : la charge appliqué

**I** : le moment quadratique de la section par rapport a l'axe (G,Y) .  $\frac{h.b^3}{12}$

### 4-3 Cas maillage réguliers :

Dans cet exemple, nous faisons le travail suivant :

- Calculer la relation théorique et donner des résultats analytiques.
- Calculer le même exemple via les programmes.
- Comparaison des résultats enregistrés (analytiquement et numériquement).

### 4-3.1 Application numérique par RE\_FLEX :

#### 4-3.1.1 Application numérique :

Soient les résultats numériques obtenus par RE\_FLEX.

##### 1 Element :

-----SOLUTION-----

NOEUDS	X	Y	Z	DEGRES DE LIBERTE (* = COND.LIM.)	
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
2	.100E+03	.000E+00	.000E+00	<b>.75833E-02</b>	<b>.10183E+00</b>
3	.100E+03	.100E+02	.000E+00	<b>-.75833E-02</b>	<b>.10183E+00</b>
4	.000E+00	.100E+02	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*

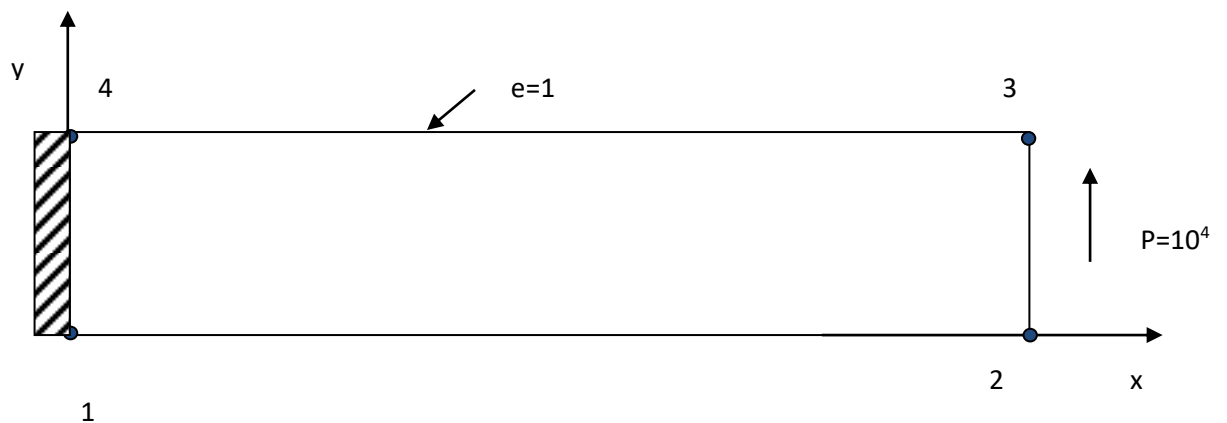
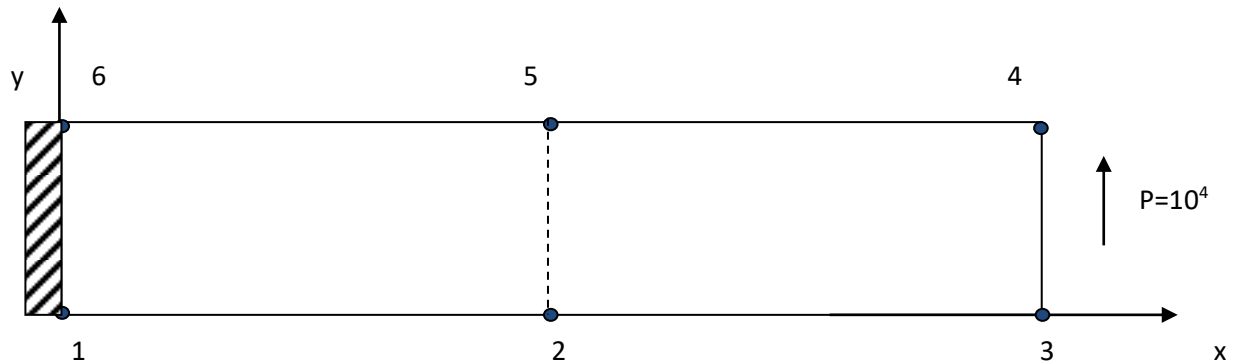


Figure 4.2: maillage régulier (1élément) M1.

**2 Elements :**

-----SOLUTION -----

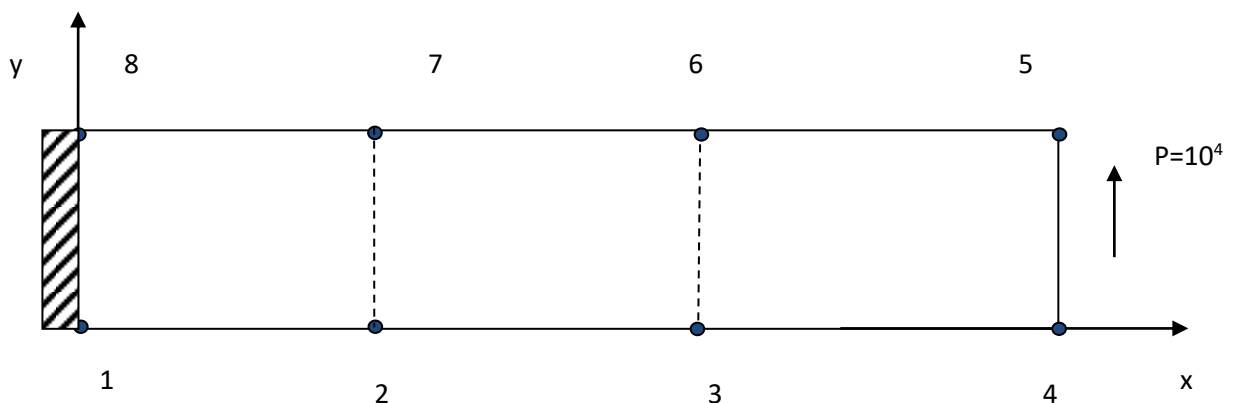
NOEUDS	X	Y	Z	DEGRES DE LIBERTE (* = COND.LIM.)	
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
2	.500E+02	.000E+00	.000E+00	.21000E-01	.11800E+00
3	.100E+03	.000E+00	.000E+00	<b>.28000E-01</b>	<b>.37600E+00</b>
4	.100E+03	.100E+02	.000E+00	<b>-.28000E-01</b>	<b>.37600E+00</b>
5	.500E+02	.100E+02	.000E+00	-.21000E-01	.11800E+00
6	.000E+00	.100E+02	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*

**Figure 4.3 :** type de maillage régulier (2 éléments) M2.

**3 Elements :**

-----SOLUTION -----

NOEUDS	X	Y	Z	DEGRES DE LIBERTE (* = COND.LIM.)	
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
2	.333E+02	.000E+00	.000E+00	.31023E-01	.11208E+00
3	.667E+02	.000E+00	.000E+00	.49636E-01	.38961E+00
4	.100E+03	.000E+00	.000E+00	<b>.55841E-01</b>	<b>.74986E+00</b>
5	.100E+03	.100E+02	.000E+00	<b>-.55841E-01</b>	<b>.74986E+00</b>
6	.667E+02	.100E+02	.000E+00	-.49636E-01	.38961E+00
7	.333E+02	.100E+02	.000E+00	-.31023E-01	.11208E+00
8	.000E+00	.100E+02	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*

**Figure 4.4** : présentation d'un modèle de maillage régulier(3éléments) M3.

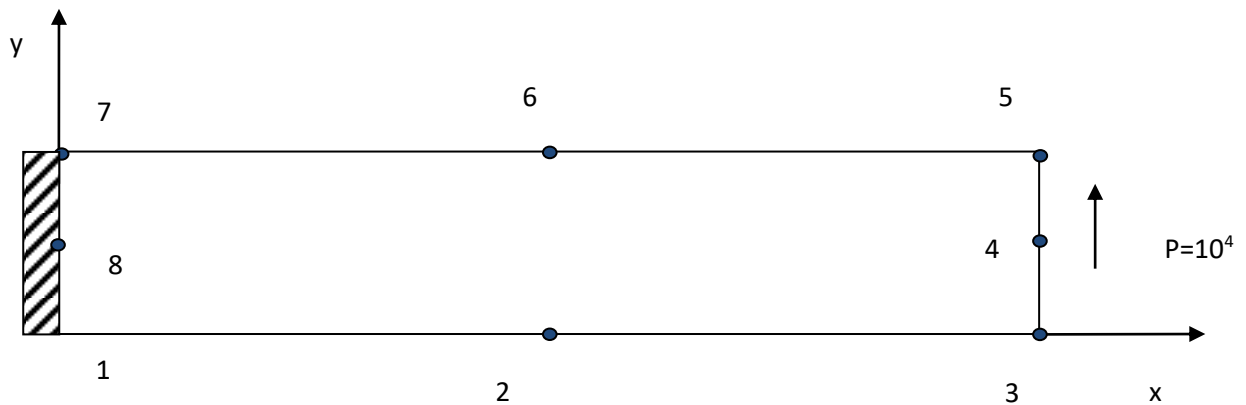
**Application numérique :**

en utilisant l'élément Q8 ; on a obtenu les résultats suivants

**1 Element :**

-----SOLUTION-----

NOEUDS	X	Y	Z	DEGRES DE LIBERTE (* = COND.LIM.)	
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
2	.500E+02	.000E+00	.000E+00	-.49185E-02	.34016E-01
3	.100E+03	.000E+00	.000E+00	<b>-.95529E-02</b>	<b>.67995E-01</b>
4	.100E+02	.500E+01	.000E+00	<b>-.27773E-05</b>	<b>.69518E-02</b>
5	.100E+03	.100E+02	.000E+00	<b>.95857E-02</b>	<b>.68073E-01</b>
6	.505E+02	.100E+02	.000E+00	.49781E-02	.34405E-01
7	.000E+00	.100E+02	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
8	.000E+00	.500E+01	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*

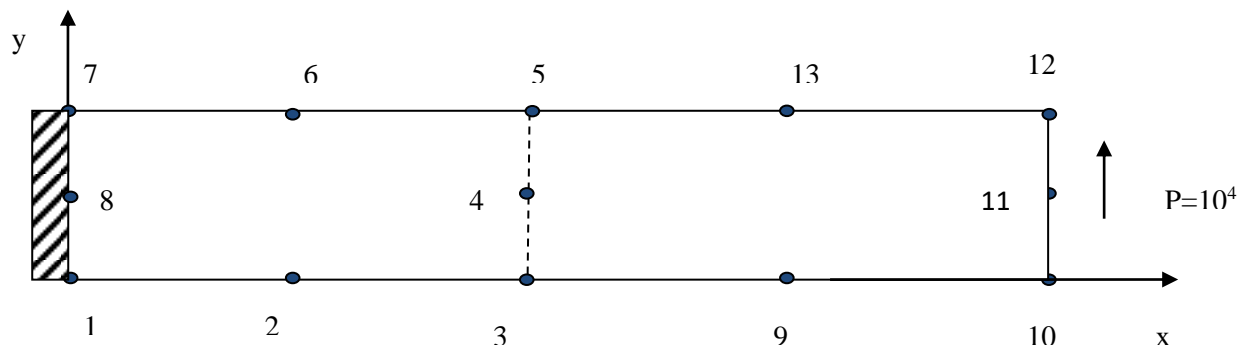


**Figure 4.5 :** présentation d'un modèle de maillage régulier M1.

**2 Element :**

-----SOLUTION -----

NOEUDS	X	Y	Z	DEGRES DE LIBERTE (* = COND.LIM.)	
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
2	.000E+00	.250E+02	.000E+00	.21060E-03	.24386E-02
3	.000E+00	.500E+02	.000E+00	.26606E-04	.48972E-02
4	.500E+01	.500E+02	.000E+00	.96052E-15	.48916E-02
5	.100E+02	.500E+02	.000E+00	-.26606E-04	.48972E-02
6	.100E+02	.250E+02	.000E+00	-.21060E-03	.24386E-02
7	.100E+02	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
8	.500E+01	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
9	.000E+00	.750E+02	.000E+00	.20456E-03	.73349E-02
10	.000E+00	.100E+03	.000E+00	<b>.30591E-04</b>	<b>.97755E-02</b>
11	.500E+01	.100E+03	.000E+00	<b>.29812E-14</b>	<b>.97976E-02</b>
12	.100E+02	.100E+03	.000E+00	<b>-.30591E-04</b>	<b>.97755E-02</b>
13	.100E+02	.750E+02	.000E+00	-.20456E-03	.73349E-02

**Figure 4.6** : présentation d'un modèle de maillage régulier M2

## 3 Element :

-----SOLUTION-----

NOEUDS	X	Y	Z	DEGRES DE LIBERTE (* = COND.LIM.)	
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
2	.167E+02	.000E+00	.000E+00	.82991E-01	.14626E+00
3	.333E+02	.000E+00	.000E+00	.15577E+00	.55645E+00
4	.333E+02	.500E+01	.000E+00	-.28456E-03	.54846E+00
5	.333E+02	.100E+02	.000E+00	-.15463E+00	.54871E+00
6	.160E+02	.100E+02	.000E+00	-.79929E-01	.13733E+00
7	.000E+00	.100E+02	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
8	.000E+00	.500E+01	.000E+00	.00000E+00*	.00000E+00*
9	.500E+02	.000E+00	.000E+00	.21460E+00	.11748E+01
10	.667E+02	.000E+00	.000E+00	.25492E+00	.19681E+01
11	.667E+02	.500E+01	.000E+00	.44961E-03	.19644E+01
12	.667E+02	.100E+02	.000E+00	-.25485E+00	.19630E+01
13	.500E+02	.100E+02	.000E+00	-.21335E+00	.11776E+01
14	.831E+02	.000E+00	.000E+00	.27928E+00	.28515E+01
15	.100E+03	.000E+00	.000E+00	<b>.28811E+00</b>	<b>.38184E+01</b>
16	.100E+03	.500E+01	.000E+00	<b>.14982E-03</b>	<b>.38158E+01</b>
17	.100E+03	.100E+02	.000E+00	<b>-.28634E+00</b>	<b>.38136E+01</b>
18	.831E+02	.100E+02	.000E+00	-.27827E+00	.28539E+01

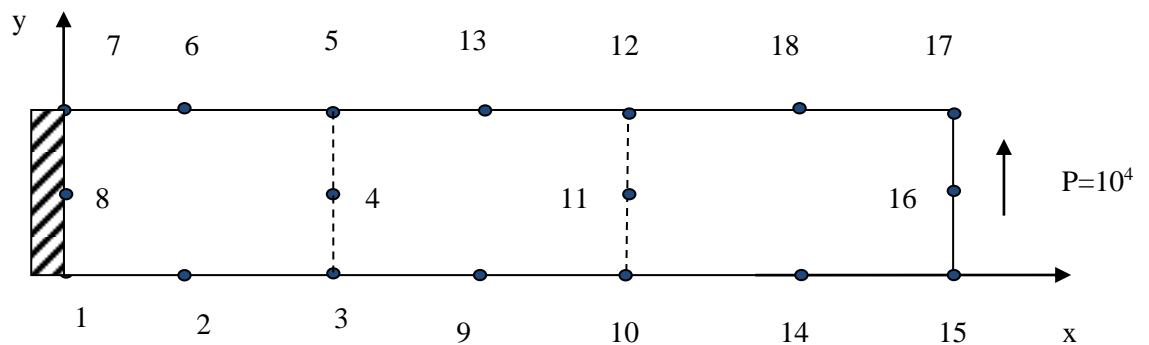


Figure 4.7 : présentation d'un modèle de maillage régulier M3

### 4-3.1.2 Discussion des résultats :

le tableau (4.2), montre que les résultats obtenus par l'élément Q8 pour un maillage de 3 éléments sont plus proche aux résultats analytiques que ceux obtenus par l'élément Q4 pour le même maillage. ou le rapport des résultats obtenues pour de l'élément Q8 est égale à 94%.

<b>Elément</b>	<b>Q4</b>	<b>Q8</b>
<b>3 éléments</b>	0.74	3.81
<b><math>W_e / W_a</math></b>	0.18	0.94
<b>Résultat analytique</b>	4.03	

**Tableau 4.2** . les déplacements et les différences entre les résultats analytiques et ceux obtenues par RE\_FLEX pour Q4 et Q8.

### 4-3.2 APPLICATION NUMERIQUE PAR ABAQUS :

Dans cette partie en présente au premier lieu les résultats de simulation obtenue par ABAQUS pour les Q4 et Q8 en deux dimensions (2D ) avec un maillage de 1 puis un maillage de 2, et en second lieu en présente seulement le Q8 pour le trois dimensions (3D) avec un maillage de 1 puis un maillage de 2 .



**4-3.2.1 Application numérique :**

**Element Q42DM1 :**

ODB: C:/temp/E1.odb

Step: Step-1

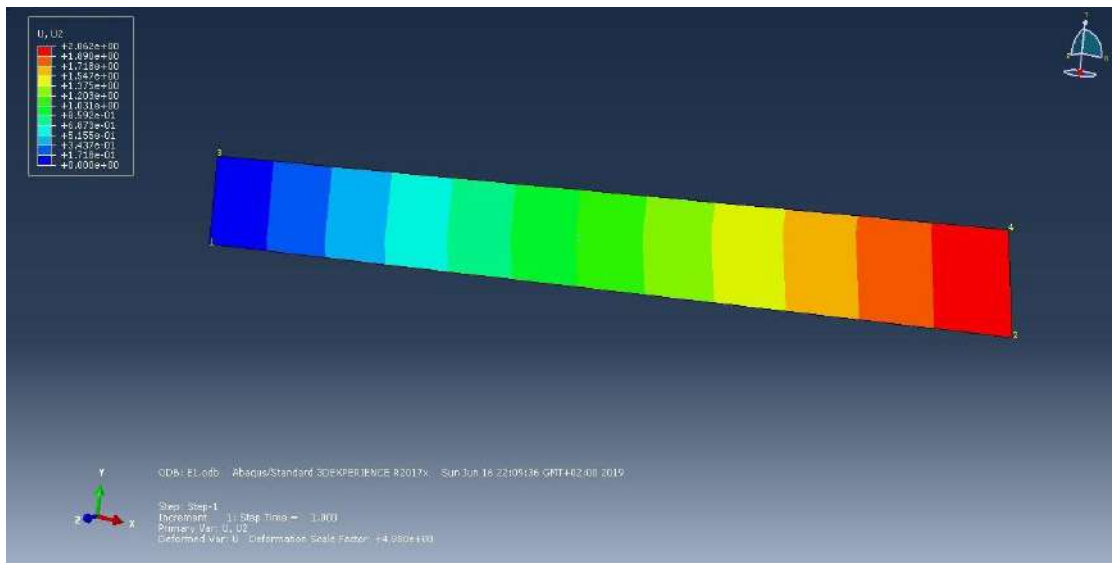
Frame: Increment 1: Step Time = 1.000

Variable: U, U2

Probe values reported at nodes

Part Instance	Node ID	Orig. Coords			Def. Coords		
		X	Y	Z	X	Y	Z
PART-1-1	2	100.	0.	0.	100.206	2.06201	0.
PART-1-1	4	100.	10.	0.	99.7941	12.062	0.

Part Instance	Node ID	Attached elements	U, U2
PART-1-1	2	1	2.06201
PART-1-1	4	1	2.06201



**Figure 4.8 :** présentation d'un modèle de maillage régulier Q42DM1

**Element Q42DM2 :**

Source

ODB: C:/temp/E2.odb

Step: Step-1

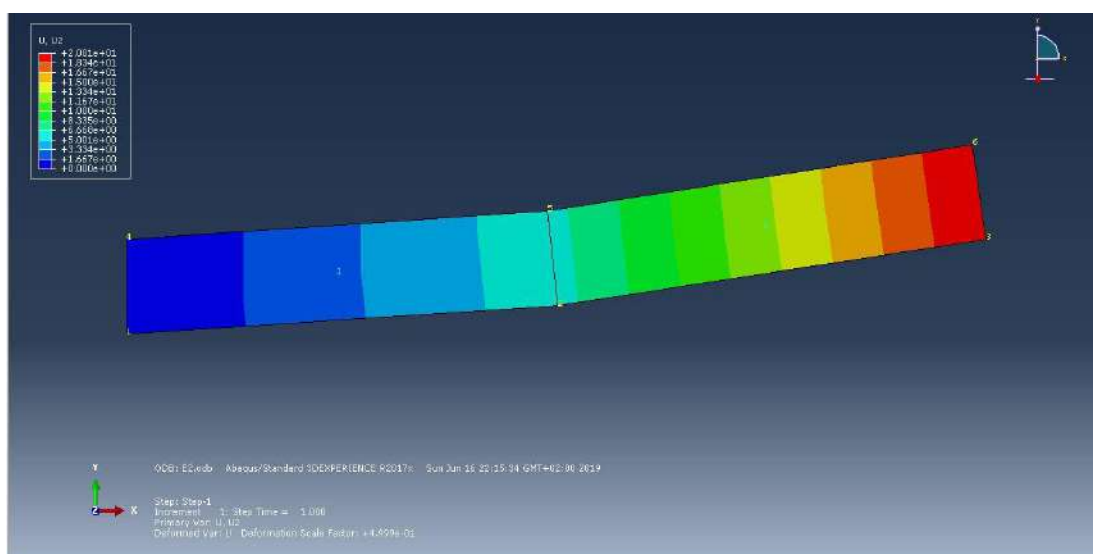
Frame: Increment 1: Step Time = 1.000

Variable: U, U2

Probe values reported at nodes

Part Instance	Node ID	Orig. Coords			Def. Coords		
		X	Y	Z	X	Y	Z
PART-1-1	3	100.	0.	0.	101.6	20.0052	0.
PART-1-1	6	100.	10.	0.	98.4	30.0052	0.

Part Instance	Node ID	Attached elements	U, U2
PART-1-1	3	2	20.0052
PART-1-1	6	2	20.0052



**Figure 4.9 :** présentation d'un modèle de maillage régulier Q42DM2 .

**ElementQ82DM1 :**

ODB: C:/temp/k3.odb

Step: Step-1

Frame: Increment 1: Step Time = 1.000

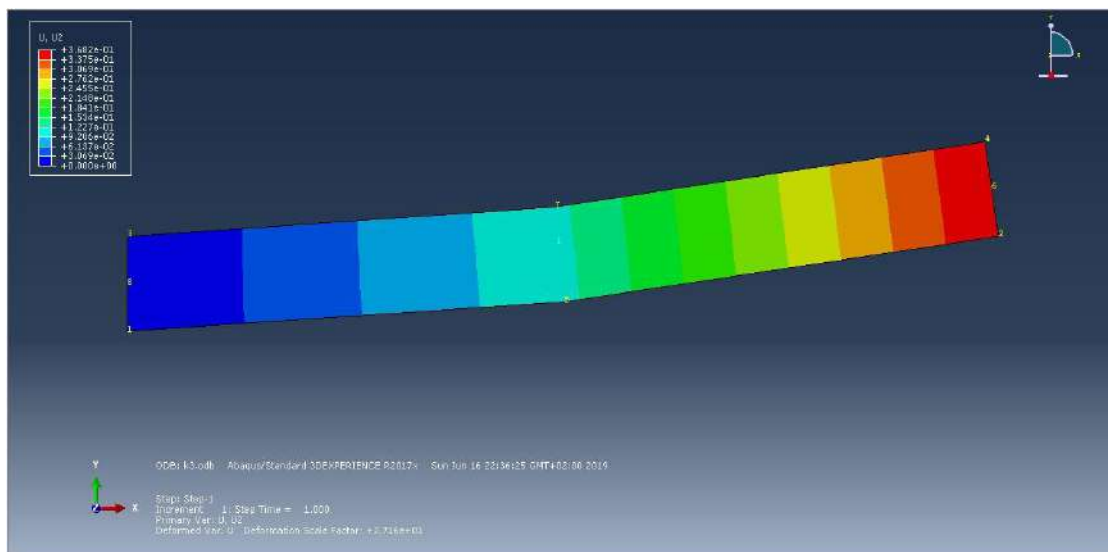
Variable: U, U2

Probe values reported at nodes

Part Instance	Node ID	Orig. Coords			Def. Coords		
		X	Y	Z	X	Y	Z
PART-1-1	2	100.	0.	0.	100.028	368.233E-03	0.
PART-1-1	4	100.	10.	0.	99.9719	10.3682	0.
PART-1-1	6	100.	5.	0.	100.	5.36801	0.

Part Instance	Node ID	Attached elements	U, U2
PART-1-1	2	1	368.233E-03
PART-1-1	4	1	368.233E-03
PART-1-1	6	1	368.013E-03



**Figure 4.10 :** présentation d'un modèle de maillage régulier Q82DM1.

**ElementQ82DM2 :**

Source

ODB: C:/temp/k4.odb

Step: Step-1

Frame: Increment 1: Step Time = 1.000

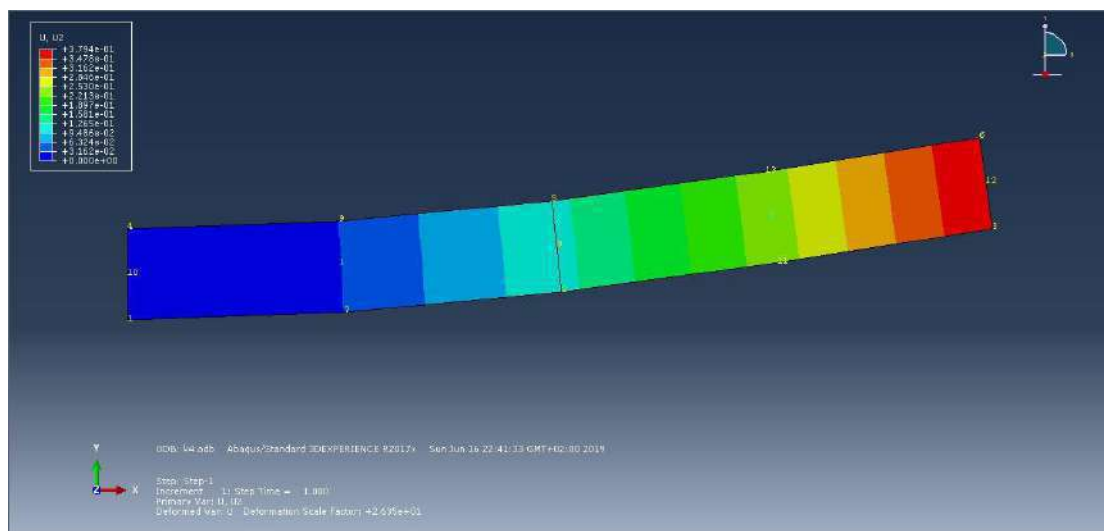
Variable: U, U2

Probe values reported at nodes

Part Instance	Node ID	Orig. Coords			Def. Coords		
		X	Y	Z	X	Y	Z
PART-1-1	3	100.	0.	0.	100.029	379.386E-03	0.
PART-1-1	6	100.	10.	0.	99.9714	10.3794	0.
PART-1-1	12	100.	5.	0.	100.	5.37945	0.

Part Instance	Node ID	Attached elements	U, U2
PART-1-1	3	2	379.386E-03
PART-1-1	6	2	379.386E-03
PART-1-1	12	2	379.449E-03



**Figure 4.11 :** présentation d'un modèle de maillage régulier Q82DM2

**ElementQ83DM1 :**

ODB: C:/temp/k5.odb

Step: Step-1

Frame: Increment 1: Step Time = 1.000

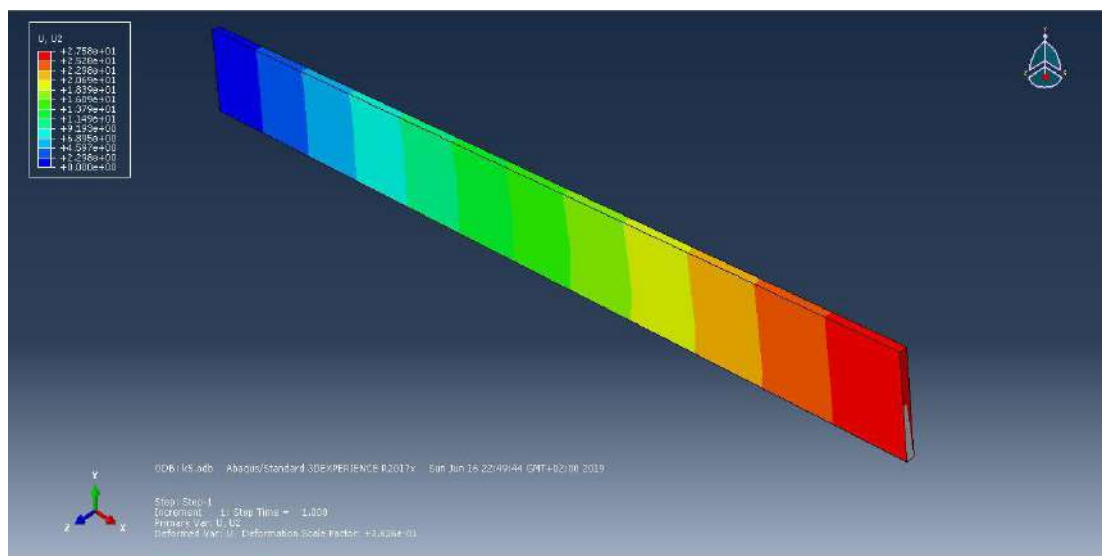
Variable: U, U2

Probe values reported at nodes

Part Instance	Node ID	Orig. Coords			Def. Coords		
		X	Y	Z	X	Y	Z
PART-1-1	1	100.	10.	1.	97.2423	37.58	1.
PART-1-1	2	100.	0.	1.	102.758	27.58	1.
PART-1-1	3	100.	10.	0.	97.2423	37.58	-299.825E-09
PART-1-1	4	100.	0.	0.	102.758	27.58	-299.825E-09

Part Instance	Node ID	Attached elements	U, U2
PART-1-1	1	1	27.58
PART-1-1	2	1	27.58
PART-1-1	3	1	27.58
PART-1-1	4	1	27.58



**Figure 4.12 :** présentation d'un modèle de maillage régulier Q83DM1

**ElementQ83DM2 :**

ODB: C:/temp/k6.odb

Step: Step-1

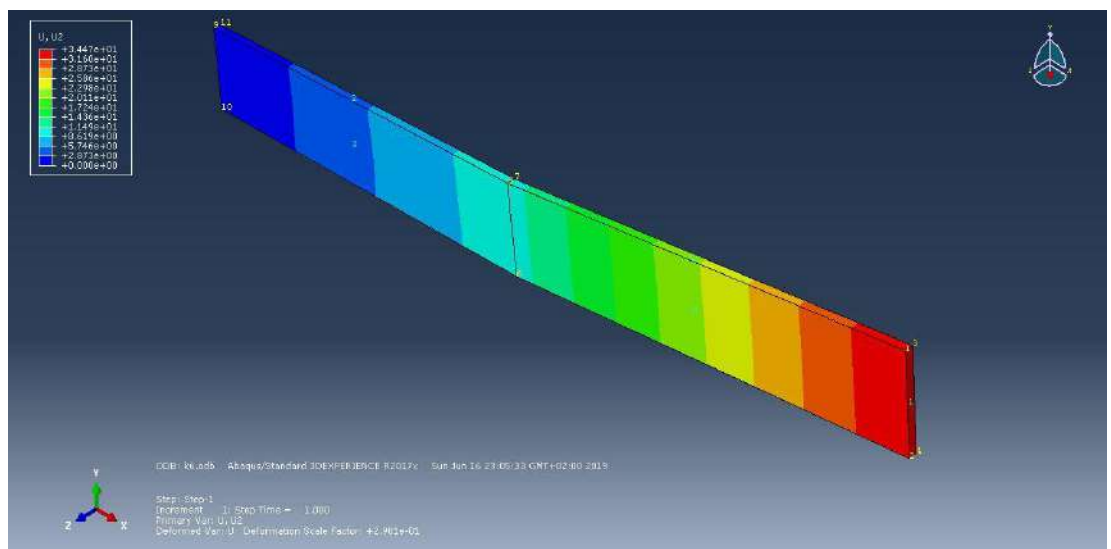
Frame: Increment 1: Step Time = 1.000

Variable: U, U2

Probe values reported at nodes

Part Instance	Node ID	Orig. Coords			Def. Coords		
		X	Y	Z	X	Y	Z
PART-1-1	1	100.	10.	1.	97.2423	44.4744	1.
PART-1-1	2	100.	0.	1.	102.758	34.4744	1.
PART-1-1	3	100.	10.	0.	97.2423	44.4744	656.128E-09
PART-1-1	4	100.	0.	0.	102.758	34.4744	656.128E-09

Part Instance	Node ID	Attached elements	U, U2
PART-1-1	1	1	34.4744
PART-1-1	2	1	34.4744
PART-1-1	3	1	34.4744
PART-1-1	4	1	34.4744



**Figure 4.13 :** présentation d'un modale de maillage régulier Q83DM2

### 4-3.2.2 Discussion des résultats :

Après la simulation de notre structure en ABAQUS en utilisant l'élément carré (2D) pour Q4 et Q8 avec 1 et 2 maillages successivement. le résultats obtenues sont au tours de 2 mm pour un maillage 1 en Q4, cette résultat représente le plus faible erreur par rapport au résultat analytique. Par contre, les résultats de simulation de notre structure en ABAQUS en utilisant l'élément Brick (3D) pour Q8 seulement avec 1 et 2 maillage montrent des résultats au tours de 27 mm pour un maillage 1. le maillage 2 présente des résultats très éloignes au tour de 34 mm. Donc on peut conclure que l'élément carré (2D) nous donne des structurations mieux que celles obtenues quand on utilise des éléments Brick (3D).

### 4-3.3 Application numérique par RDM6 :

#### 4-3.3.1 Données du problème :

**Matériau :**

Nom du matériau	Module de Young	Masse volumique	Limite élastique
Acier	100000000 MPa	8000 kg/m <sup>3</sup>	250 MPa

**Tableau 4.4 :** caractéristique de matériau

**Noeuds [ mm ] :**

Noeud 1 :  $x = 0.000$

Noeud 2 :  $x = 100.000$

**Section(s) droite(s) :**

Rectangle plein :  $LY = 10.0$   $LZ = 1.0$  (mm)

Aire = 0.10 cm<sup>2</sup>

Moment quadratique :  $Iz = 0.01$  cm<sup>4</sup>

Fibre supérieure :  $vy = 5.00$  mm  $Wel.z = 0.02$  cm<sup>3</sup>

Fibre inférieure :  $vy = 5.00$  mm  $Wel.z = 0.02$  cm<sup>3</sup>

Poids de la structure = 0.08 N ( $g = 10.00$  m/s<sup>2</sup>)

**Liaison(s) nodale(s) :**

**Nœud 1 : Encastrement**

**Cas de charge(s) :**

Charge nodale	Fy	Mz
Noeud = 2	100000.00 N	0.00 N.mm

**Tableau 4.5 : cas de charge**

### 4-3.3.2 Résultats :

**Déplacements nodaux [ mm , rad ].**

Noeud Flèche Pente

1 0.000000 0.000000

**2 4.000000 0.060000**

Dy maximal = 4.00000E+00 mm à x = 100.000 mm

Dy minimal = 0.00000E+00 mm à x = 0.000 mm

**Efforts intérieurs [ N N.mm MPa ]. :**

Ty = Effort tranchant Mfz = Moment fléchissant Sxx = Contrainte normale

Noeud Ty Mfz Sxx

1 100000.00 10000000.00 600000.00

2 100000.00 0.00 0.0

Moment fléchissant maximal = 10000000.00 N.mm à 0.000 mm

Moment fléchissant minimal = -0.00 N.mm à 100.000 mm

Contrainte normale maximale = 600000.00 MPa à 0.000 mm

Contrainte normale minimale = -600000.00 MPa à 0.000 mm

**Action(s) de liaison [ N N.mm ] :**

Nœud 1 Fy = -100000.00 Mz = -10000000.00



**Informations sur le calcul :**

Pivot minimal = 8.33333333333334E+0004



**Figure 4.14:** Poutre en flexion sous charge verticale par RDM6.

**4-4 Conclusion :**

Les études faites dans ce chapitre montrent que les résultats obtenus via le **RE\_FLEX** par l'élément Q8 sont mieux que ceux obtenus par l'élément Q4. Le rapport des résultats de l'élément Q8 est presque 94%.

La modélisation de notre structure en **ABAQUS** en utilisant l'élément carré (2D) nous donne des structurations mieux que celles obtenues quand on utilise des éléments Brick (3D).

# **CONCLUSION GENERALE**

## Conclusion générale

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base, la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Notre objet est de représenter par des fonctions définies sur chaque élément, qui ont l'avantage d'être plus simples que celles que l'on pourrait éventuellement utiliser pour représenter la totalité de l'objet.

Dans notre travail c'est le modèle en déplacement qui donne la possibilité de modéliser les structures poutre. Alors, nous avons présenté les éléments quadrilatères aux champs de déplacement.

Deux logiciels numériques **RE\_FLEX** et l'**ABAQUS** sont utilisés dans ce mémoire, car ils sont considérés comme des logiciels de calcul par éléments finis très puissants pour la résolution des problèmes statiques et dynamiques, linéaires ou non-linéaires des différentes structures, sous l'effet de différentes excitations.

La formulation iso paramétrique des éléments Q4 et Q8 qui sont basés sur le modèle en déplacement sont bien montrés dans ce travail. Ces formulations nous permettent de palier à plusieurs problèmes pour lesquels la modélisation des bords courbes et la distorsion.

Les résultats obtenus via le **RE\_FLEX** et l'**ABAQUS** montrent que:

- 1- l'élément Q8 donne des résultats mieux que ceux obtenus par l'élément Q4 .
- 2- Le rapport des résultats de l'élément Q8 est presque 94% si on le compare avec le résultat analytique.
- 3- La modélisation en **ABAQUS** en utilisant l'élément carré (2D) nous donne des structurations mieux que celles obtenues quand on utilise des éléments Brick (3D).

## **REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE**

## Références bibliographiques

- [1]. MARTIN LEVESQUE, « Cours d'éléments Finis en Mécanique des Solides » Ecole Polytechnique de Montréal, 1986.
- [2]. ROBERT D. COOK, DAVID S. Malkus and Michael E. plesha , « Concepts and applications of finit element analyses » . University of Wisconsin-Madison, john wiley & sons 1988.
- [3]. TURNER G. ET DHATT G, « Une présentation de la méthode des éléments finis », Eds.P.U.L.Q., France, 1981.
- [4]. ARGYRIS J.H. AND KELSEY S, « Energy theorems and Structural Analysis ». Butterworh, London, 1960.
- [5]. MEZIANI NEDJMA, « Mémoire de magister ère Contribution De L'approche En Déformation Dans La Modélisation Des Structures A Contour Circulaire ». Université de M<sup>ed</sup> Khider Biskra 2006.
- [6]. « La Méthode Des Eléments Finis Cours 1 Notions Introductives ».
- [7]. Yves Debard « Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle », mémoire Master Université du Maine.
- [8]. BATOZ J.L. ET DHATT G, « Modélisation des structures par éléments finis. Poutres et Plaques ». Vol. 2 : élastiques, Eds Hermès, Paris, 1990.
- [9]. FRE F. ET JIROUSK J, « Analyse des structures et milieux contenus, Méthode des éléments finis » .Vol.6 Eds P.P.U.R., 1ère Edition, Lausanne, 2001.
- [10]. ANTOINE LEGAY. « Calcul des structures par éléments finis » CNAM-Paris, Édition (2012).
- [11]. ZIENKIEWCZ O.C ET TAYLOR R.L, « The Finite element Method », McGrawHill, London 1991.
- [12]. BATHE K.J. « Finite Element Procedures » . Prentice Hall, 1996.
- [13]. LAKHDAR BESSAIS. « Analyse des structures par la M.E.F basée sur l'approche en déformation ». chapitre 01 Mémoire mestre université Biskra 2012.
- [14]. LAHLOUHI AISSA. « Contribution de l'approche en déformation dans l' analyse des structures d'element plane » Mémoire mestre Université Biskra 2007.

- [15]. SAYAD YUCEF, « Modélisations des plaques de formes géométriques irrégulières par la méthode des éléments finis » Chapitre 04, université de Biskra. 2012.
- [16]. BATOZ J.L. et DHATT G. « Modélisation des structures par éléments finis », vol.1 : solide élastique , Edition Hermès, Paris 1990.
- [17]. GOURI. DHATT , GILBERT TOUZOT.« Une présentation de la méthode des éléments finis ». 2éme Edition.Maloione S.A Editeur,1984.
- [18]. J.F. IMBERT, « Analyse des structures par la Méthodes des éléments finis ». Deuxième édition1984.
- [19]. DENIS ABRY. « Présentation général d’Abaqus ». Formation des masters; école central de paris. 2008.
- [20]. PATRICKH ROZICHI. « Formation ABAQUS » Université de Nantes, France, 2007.
- [21]. M. ABBAS, « Introduction au logiciel ABAQUS », 2012.
- [22]. M. SARTOR, « Eléments finis » Notes de cours ,Chapitre 01
- [23]. MEFTEH KAMEL, « Cours : Introduction général au logiciel Abaqus » université de Biskra, 2013.
- [24]. MEFTEH KAMEL, « Présentation ABAQUS. Formation des masters», université de Biskra, 2014.
- [25]. ABAQUS, ABAQUS Theory Manual, ABAQUS/CAE user’s manual, vol. I Exemple problems Manual, version 6.10.
- [26]. GOURI. DHATT, GILBERT TOUZOT. « Une présentation de la méthode des éléments Finis ». Presse de l’université de Laval Canada 1979.
- [27]. G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANCOIS, « Méthode des éléments Finis », Hermues, 2005.
- [28]. MICHAEL F. ASHBY, DAVID R. H. JONES, « Matériaux. Propriétés et applications », éd. Dunod, Chap. 3 : Les constantes d'élasticité.

**Résumé :** L'étude et la modélisation des structures ayant un comportement membranaire demeure un objet très important non seulement dans le domaine de la construction mécanique mais aussi dans les domaines de génie civile, aéronautique, biomécanique,... etc.

Pour bien comprendre la méthode des éléments finis. On exploite l'élément rectangulaire à quatre nœuds avec deux degrés de liberté par nœud pour le transformer en Q8 et implémenter cet élément bilinéaire dans le code RE\_FLEX. Notre programme nous permet de calculer les déplacements des nœuds et les résultats calculés sont comparés à ceux obtenus par les deux logiciels ABAQUS et RDM6.

**Mots clés :** modélisation, méthode éléments finis (MEF), champs de déplacement, isotrope, poutre, structure.

**Abstract :** The study and modelling of structures with membrane behavior remains is a very important object not only in the field of mechanical engineering but also in the fields of civil engineering, aeronautics, biomechanics,... etc.

To understand the finite element method, the rectangular four-knot element with two degrees of freedom per node is used to transform it to Q8 and to implement this bilinear element in the reflex code. Our program allows us to calculate the displacements of the nodes and the calculated results are compared with those obtained by the two software programs ABAQUS and RDM6.

**Keywords :** modelling, finite element method (FEM), displacement fields, isotropic, Beam, structure.

**المخلص :** إن دراسة ومحاكاة الهياكل ذات السلوك الغشائي كان ومازال موضوع ذو أهمية كبيرة ليس في مجال الهندسة الميكانيكية فقط ولكن في مجال الهندسة المدنية وعلوم الطيران و البيوميكانيك... الخ .

لكي نفهم طريقة العناصر المنتهية جيدا و بشكل عام. كان علينا دراسة العنصر الرباعي Q4 ذا الأربع عقد مع درجتي حرية لكل عقدة لأجل تحويله إلى عنصر Q8 وبمساعدة برنامج RE\_FLEX الذي يمكننا من حساب انتقالات العقد. إضافة إلى مقارنة النتائج المحسوبة مع تلك المتحصل عليها باستعمال البرامج ABAQUS و RDM6.

**الكلمات المفتاحية :** نمذجة , طريقة العناصر المنتهية (MEF) , الانتقالات , متجانس , عارضة , هيكل