جامعة قاصدي مرباح–ورقلة

كلية الرياضيات–علوم المادة
قسم الفيزياء

مذكرة

لإستكمال متطلبات الحصول على
شهادة الماستر

تقديم:
عبد الحكيم بن كران و محمد العربي قاجة

الموضوع

الهندسة غير التبديلية وتطبيقها في إنتاج جسيمات ذات سبين $1/2$ في نظرية QED وفي الفضاء المنحني

الميدان: علوم المادة

الشعبة: الفيزياء

التخصص: الفيزياء النظرية

نوقشت يوم: 2019/06/30

أمام اللجنة:

الرئيس:	بلغيثار الحاج بالشراير	أستاذ مساعد أ	جامعة ورقلة
المشرف:	خوجة الأمين	أستاذ محاضر أ	جامعة ورقلة
المُناقش:	قريشي زينب	أستاذ مساعد ب	المدرسة العليا للأساتذة

السنة الجامعية 2019/2018

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على اشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

نهدي هذا العمل

الى روح استاذنا المحترم محمد عبد الوهاب بن بيتور

الى عائلتينا الكريمتين قاجة و بن كران

الى كل من ساهم في إنجاح هذا العمل من قريب او بعيد

الى جميع الاصدقاء والاخوة

محمد العربي قاجة عبد الحليم بن كران

شكر وعرفان

أولا نحمد الله سبحانه وتعالى أن وفقنا لإتمام هذا العمل .

وكلمة الشكر موجهة الى :

من ساعدنا في تمام هذا العمل وما فتئ يقدم لنا نصحنا وارشاداً ا

الاستاذ المحترم خوجة لمين

كما نتوجه بالشكر الجزيل إلى الأساتذة أعضاء لجنة المناقشة كل باسمه وصفته على مابذلوه من جهد في قراءة وتقييم هذا العمل

الى اساتذة تخصص فيزياء النظرية مفتاح الطيب و بن الزاير هجيرة

الى كل اساتذة قسم الفيزياء

والى كل الذين لا يسعنا الكلام لذكرهم

نتقدم لهم بخالص الشكر والعرفان ، والدعوة بالمثوبة والاجر من المنان .

❖

محمد العربي قاجة عبد الحليم بن بكران

الفهرس

مُقدمة عامة

أحد أهم الانجازات في البداية القرن العشرين كان إكتشاف الصياغة الرياضية لميكانيك الكم من قِبل هايزنبارغ عام 1925 [1] . من وجهة النظر الرياضية ، الانتقال من الميكانيك الكلاسيكي إلى الميكانيك الكمومي يرفع من الجبر التبديلي للملاحظة الكلاسيكية (الطاقة ، كمية الحركة ، الموضع ..) إلى الجبر غير التبديلي للملاحظة الكمومية .نُذكّر أن أي ملاحظة كلاسيكية في صياغة هاملتون هي دالة للثنائية (x_i, p_i) وهذه الثنائية تُشكل فضاء يُسمى فضاء الاطوار (أي أن الملاحظة هي دالة على فضاء الاطوار) . بعد عمل هايزنبارغ اوضحت الابحاث الصادرة عن ديراك [2] و بورن–هايزنبارغ–جوردن (M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan) [3] أن الملاحظة في الميكانيك الكمومي هي عبارة عن مؤثرات هرميتية على فضاء هيلبرت . بعبارة اخرى نقوم بتكميم فضاء الاطوار برفع الثنائية (x_i, p_i) من مجرد متغيرات إلى مؤثرات هرميتية $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$ تُحقق علاقة التبديل $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$.ويُصبح فضاء الاطوار مغمور في الفضاء المكمم ونستبدل فكرة النقطة بخلية بلانك ، وفي النهاية الكلاسيكية $\hbar \to 0$ نسترجع فضاء الاطوار المعتاد . كان فون نيومان أول من وصف الفضاء الكمومي بدقة ووصف هذه الدراسة بأنها هندسة لا نقطية مشيراً إلى فكرة أن النقطة في فضاء الطور الكمومي لا معنى لها بسبب مبدا عدم التعيين لهايزنبارغ . وهذا ادى إلى نظريات فون نيومان التي هي اساس ولادة الهندسة غير التبديلية .

بعد اكثر من خمسين سنة من هذه التطورات ادرك Alain Connes [4] أنه يمكن تطبيق إجراء مشابه في مجالات الرياضيات ، حيث تفقد المفاهيم الكلاسيكية للفضاء قابليتها للتطبيق ونستبدلها بافكار جديدة للفضاء يمثلها الجبر غير التبديلي .

نظرية Alain Connes ، والتي تُعرف بالهندسة غير التبديلية ، هي مجال جديد في الرياضيات ويتطور بسرعة نظرا لتطبيقه في العديد من التخصصات الرياضية والفيزيائية . من الامثلة على هذه المجالات نذكر الطبولوجيا الجبرية والتفاضلية ، نظرية الاعداد ، النموذج المعياري للجسيمات الاولية ، تأثير هال الكمومي ، إعادة التنظيم في نظرية الحقول الكمومية ، نظرية الاوتار [5].

في السنوات الاخيرة إزداد اهتمام الفيزيائيون بالهندسة غير التبديلية وتطبيقاتها في الفيزياء الكمومية وخاصة في نظرية الحقول الكمومية والتي أعطت مفاهيم رياضياتية ونتائج فيزيائية جديدة .

هذه النظرية (الهندسة غير التبديلية) يرى فيها بعض الفيزيائيون أنها هي الطريق لبناء النظرية الكمومية للجاذبية ، وهذا ما قد يمكننا من توحيد القوى الاربعة الاساسية في الطبيعة . هذا هو السبب الذي دفعنا لدراسة هذا الموضوع ،

بحيث تتركز هذه المذكرة على النقاط التالية:

- **الفصل الاول** : في هذا الفصل نحاول تقديم مفهوم الهندسة غير التبديلية وكيفية بناءها .
- **الفصل الثاني** : في هذا الفصل نحاول تقديم عرض مُختصر عن كيفية إيجاد كثافة احتمال وكثافة عدد إنتاج الجسيمات باستعمال طريقة معاملات Bogoliubov والتي سنستعملها في الفصلين الثالث والرابع .
- **الفصل الثالث** : في هذا الفصل نحاول تطبيق الهندسة غير التبديلية على حقل ديراك في وجود الحقل الكهرومغناطيسي ثابت ونحاول إيجاد مُعدل إنتاج الجسيمات (كثافة عدد الجسيمات المنتجة) باستعمال طريقة Bogoliubov المقدّمة في الفصل الثاني .
- **الفصل الرابع** : في هذا الفصل نطبق مفاهيم الفصلين الاول والثاني على حقل ديراك في فضاء Bianchi I في وجود حقل كهربائي ثابت .

ونختم هذه المذكرة بخلاصة عامة .

الفصل I

صياغة الهندسة غير التبديلية

1.I مقدمة

كما في تكميم فضاء الاطوار الكلاسيكي ، فإنه من أجل الحصول على فضاء–زمن غير تبديلي نستبدل احداثيات الفضاء–زمن x^μ بمولدات هرميتية $\hat{x}^\mu$ للجبر– C^* غير التبديلي لدوال الفضاء–زمن التي تُحقق علاقات التبديل

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \tag{I.1}$$

ابسط حالة لـ (I.1) هي لما تكون $\Theta^{\mu\nu}$ مصفوفة 4×4 ضد متناظرة ذات عناصر ثابتة (حيث 4 هو بُعد الفضاء–زمن) . لأن الاحداثيات لا تتبادل لا يمكن أن تكون قطرية في نفس الوقت وبالتالي الفضاء–زمن العادي يُصبح بلا معنى . بعبارة اخرى ، نستبدل الفضاء–زمن بفضاء هيلبرت للحالات .

في هذا الفصل سنقوم بالتعرف على مختلف الادوات الرياضياتية التي من خلالها نقوم ببناء النظريات الفيزيائية في الهندسة غير التبديلية .

2.I مؤثرات Weyl

كما ذكرنا سابقا ، العديد من الافكار العامة للهندسة غير التبديلية مستوحاة من أسس الميكانيك الكمومي . في اطار التكميم القانوني ، لربط مؤثر ميكانيك الكم بدالة لمتغيرات فضاء الاطوار قدم Weyl طريقة جديدة . هذه التقنية توفر طريقة منهجية لوصف الفضاءات غير التبديلية في العموم . في هذا القسم سنقدم الصيغ العامة التي تلعب دورا مركزيا في معظم تحليلاتنا القادمة .

لنعتبر الجبر التبديلي لدوال على الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^4$ ذو 4 أبعاد ، مزود بجداء مُعرف بالتركيب الاعتيادي للدوال . سنفترض أن كل الحقول المعرفة على $\mathbb{R}^4$ تعيش في فضاء Schwartz مناسب للدوال التي تنعدم بسرعة عند المالانهاية

[6] . أي ، تلك الدوال التي مشتقاتها من أجل أي رتبة كيفية تنعدم في اللانهاية في كل من فضاء الموضع وفضاء كمية الحركة . شرط Schwartz يعني أيضا أن أي دالة $f(x)$ يمكن كتابة تحويل Fourier خاص بها على الشكل :

$$\tilde{f}(k) = \int \mathrm{d}^4 x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) \tag{I.2}$$

من أجل $f(x)$ حقيقة القيمة أي $f(x)^* = f(x)$ لدينا :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k)^* &= \Big(\int \mathrm{d}^4 x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) \Big)^* \\ &= \int \mathrm{d}^4 x e^{+ik_\mu x^\mu} f(x)^* \\ &= \int \mathrm{d}^4 x e^{+ik_\mu x^\mu} f(x) \qquad [\text{اعتبرنا أن } f(x)^* = f(x)] \\ &= \int \mathrm{d}^4 x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) \qquad [k \to -k] \\ &= \tilde{f}(-k) \end{aligned} \tag{I.3}$$

الآن نُعرّف الفضاء غير التبديلي كما وصفنا في القسم السابق باستبدال الاحداثيات المحلية x^μ على $\mathbb{R}^4$ بمؤثرات هرميتية $\hat{x}^\mu$ تُحقق علاقة التبديل (I.1) . المؤثرات $\hat{x}^\mu$ تولد جبر غير تبديلي للمؤثرات على الفضاء غير التبديلي . يوفر تكميم Weyl توافق تقابلي (واحد–إلى–واحد) بين جبر الحقول على $\mathbb{R}^4$ وهذه المؤثرات . لنعتبر الدالة $f(x)$ و تحويل Fourier الخاص بها (I.2) . مؤثر Weyl الموافق لها يُعطى بـ :

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tag{I.4}$$

حيث اخترنا مؤثر Weyl متناظر . يمكننا البرهان بسهولة أن مؤثر Weyl هرميتي من أجل $f(x)$ حقيقية ، حيث :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}^\dagger[f] &= \Big[\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \Big]^\dagger \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}^*(k) e^{-ik^\mu \hat{x}_\mu^\dagger} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(-k) e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu} \qquad [f \text{ حقيقية القيمة و } \hat{x} \text{ هرميتي}] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \qquad [k \to -k] \\ \hookrightarrow \ \hat{\mathcal{W}}^\dagger[f] &= \hat{\mathcal{W}}[f] \end{aligned} \tag{I.5}$$

يمكننا اعادة كتابة المعادلة (I.4) بتقديم المؤثر $\hat{\Delta}(x)$ بين المؤثرات والحقول على الشكل :

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \mathrm{d}^4x f(x)\hat{\Delta}(x) \tag{I.6}$$

حيث :

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\nu\hat{x}^\nu} e^{-ik_\mu x^\mu} \tag{I.7}$$

من الواضح أن المؤثر (I.7) هرميتي أي $\hat{\Delta}(x)^\dagger = \hat{\Delta}(x)$. ويمثل تداخل المؤثرات والحقول على الفضاء–زمن . نلاحظ أنه في الحالة $\Theta^{\mu\nu} = 0$ المؤثر (I.7) يُختزل إلى الدالة دالتا ديراك $\delta^4(\hat{x} - x)$ وبالتالي مؤثر Weyl يُعطى $\hat{\mathcal{W}}[f] = f(\hat{x})$. لكن في العموم من أجل $\Theta^{\mu\nu} \neq 0$ نتعامل معه بصيغة Baker-Campbell-Hausdorff ، ويكون مؤثر الحقل غير بديهي للغاية .

نُقدم مشتقات المؤثرات بتعريف المشتق الخطي ضد هرميتي $\hat{\partial}_\mu$ الذي يُحقق علاقات التبديل التالية :

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}_\nu] = \delta_{\mu\nu} \quad , \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0 \tag{I.8}$$

نحسب المبدل الاشتقاق مع المؤثر $\hat{\Delta}(x)$ حيث

$$\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}] &= [\hat{\partial}_\mu, \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\nu\hat{x}^\nu} e^{-ik_\nu x^\nu}] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} [\hat{\partial}_\mu, \underbrace{e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}}_{\sum_n \frac{(ik_\nu\hat{x}^\nu)^n}{n!}}] e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \sum_n \frac{(ik_\nu)^n}{n!} [\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^n] e^{-ik_\nu x^\nu}
\end{aligned}$$

الآن نحسب المبدل $[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^n]$ حيث :

$$\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^n] &= [\hat{\partial}_\mu, x^\nu(\hat{x}^\nu)^{n-1}] = \underbrace{[\hat{\partial}_\mu, x^\nu]}_{\delta_\mu^\nu}(\hat{x}^\nu)^{n-1} + x^\nu[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-1}] \\
&= \delta_\mu^\nu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + x^\nu[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-1}] \\
&= \delta_\mu^\nu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + x^\nu\Big([\hat{\partial}_\mu, x^\nu](\hat{x}^\nu)^{n-2} + \hat{x}^\nu[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-2}]\Big) \\
&= \delta_\mu^\nu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + \hat{x}^\nu\delta_\mu^\nu(\hat{x}^\nu)^{n-2} + (\hat{x}^\nu)^2[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-2}]
\end{aligned}$$

$$= 2\delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + (\hat{x}^\nu)^2[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-2}]$$
$$= \cdots$$
$$= n\delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-1}$$

دالتا كرونكر ستغير الجمع من القرينة ν إلى القرينة μ فنكتب :

$$\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}] &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \sum_n \frac{(ik_\mu)^n}{n!} n(\hat{x}^\mu)^{n-1} e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} ik_\mu \sum_n \frac{(ik_\mu)^{n-1}}{(n-1)!} (\hat{x}^\mu)^{n-1} e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} ik_\mu \underbrace{\sum_n \frac{(ik_\mu \hat{x}^\mu)^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}} e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \underbrace{ik_\mu e^{-ik_\nu x^\nu}}_{-\partial_\mu e^{ik_\nu x^\nu}} \\
&= -\partial_\mu \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik_\nu x^\nu}
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}] = -\partial_\mu \hat{\Delta}(x) \tag{I.9}$$

الآن لنحسب مُبدل مؤثر الاشتقاق مع مؤثر Weyl

$$\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] &= [\hat{\partial}_\mu, \int \mathrm{d}^4x f(x)\hat{\Delta}(x)] \\
&= \int \mathrm{d}^4x f(x)[\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}(x)] \\
&= -\int \mathrm{d}^4x f(x)\partial_\mu\hat{\Delta}(x) \qquad [\text{نُكامل بالتجزئة}] \\
&= -[-\int \mathrm{d}^4x \partial_\mu f(x)\hat{\Delta}(x)] \qquad [\text{الحقل معدوم عند حدود التكامل}]
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \int \mathrm{d}^4x \partial_\mu f(x)\hat{\Delta}(x) = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f] \tag{I.10}$$

النتيجة (I.9) تعني أيضا أنه يمكن تقديم مولدات الانسحاب بمؤثرات وحدوية $e^{v^\mu\hat{\partial}_\mu}$ حيث يمكننا البرهان بسهولة أن :

$$e^{v^\mu\hat{\partial}_\mu}\hat{\Delta}(x)e^{-v^\mu\hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+v) \tag{I.11}$$

الخاصية (I.11) تبين أن أي اثر دوري Tr مُعرف على جبر مؤثرات Weyl له خاصية أن $\mathrm{Tr}\hat{\Delta}(x)$ مستقل عن $x \in \mathbb{R}^4$. من (I.6) تعني أن الاثر Tr هو وحيد ويُعطى بالمكاملة على الفضاء–زمن :

$$\mathrm{Tr}\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \mathrm{d}^4 x f(x) \tag{I.12}$$

حيث اخترنا التنظيم $\mathrm{Tr}\hat{\Delta}(x) = 1$. في هذه الحالة ، اثر المؤثر Tr هو مكافئ للمكاملة على الاحداثيات غير المتبادلة $\hat{x}_\mu$. لاحظ أن $\hat{\Delta}(x)$ هو ليس عنصر من الجبر على الحقول و اثره ليس مُعرف بـ (I.12) ، بالتالي يجب أن يُنظر اليه ببساطة على أنه كائن التداخل بين الحقول على الفضاء–زمن و مؤثرات Weyl ، والذي يتم تثبيت اثره بالتنظيم المعطى .

ضرب المؤثرات $\hat{\Delta}(x)$ عند نقاط متقطعة يمكن حسابه باستخدام صيغة Baker-Campbell-Hausdorff كالاتي

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} = e^{-\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} \tag{I.13}$$

مع (I.7) يمكن ببساطة اشتقاق

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) &= \iint \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4 k'}{(2\pi)^4} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu} \\ &= \iint \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4 k'}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 z e^{i(k+k')_\mu z^\mu}\hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu}\end{aligned} \tag{I.14}$$

اذا كانت Θ مصفوفة قابلة للعكس (هذا يتطلب بالضرورة أن بعد الفضاء زمن يكون زوجي) ، فإنه يمكننا بشكل صريح إجراء التكاملات الغاوصية على العزوم k و k' في (I.14) فنتحصل على

$$\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^4 |\det\Theta|}\int \mathrm{d}^4 z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\Theta^{-1})_{\mu\nu}(x-z)^\mu (y-z)^\nu} \tag{I.15}$$

في الخصوص ، اذا استخدمنا تنظيم الاثر و ضد تناظرية Θ^{-1} ، فإن (I.15) تعني أن المؤثرات $\hat{\Delta}(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}^4$ تُشكل مجموعة متعامدة منظمة

$$\mathrm{Tr}\Big(\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)\Big) = \delta^4(x-y) \tag{I.16}$$

هذه العلاقة مع (I.6) تعطينا

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\Big(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)\Big) &= \mathrm{Tr}\Big(\int \mathrm{d}^4y f(y)\hat{\Delta}(y)\hat{\Delta}(x)\Big) \\
&= \int \mathrm{d}^4y f(y)\mathrm{Tr}\Big(\hat{\Delta}(y)\hat{\Delta}(x)\Big) \\
&= \int \mathrm{d}^4y f(y)\delta^4(x-y) \\
\Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\Big(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)\Big) &= f(x) \qquad \text{(I.17)}
\end{aligned}$$

هذه النتيجة تعني أن التحويل $\hat{\mathcal{W}}[f] \xrightarrow{\hat{\Delta}(x)} f(x)$ قابل للعكس وأن معكوسه يُعطى بالعلاقة (I.17) .

الدالة $f(x)$ يتم الحصول عليها بهذه الطريقة من مؤثر ميكانيك الكم وتسمى عادة دالة توزيع Wigner [7] . بالتالي التطبيق $\hat{\Delta}(x)$ يُوفر توافق واحد–إلى–واحد بين حقول Wigner ومؤثرات Weyl . سنشير لهذا على أنه توافقات Weyl-Wigner. من أجل صياغة صريحة لـ (I.7) بدلالة مؤثرات التزاوج أنظر [8].

3.I الجداء نجمة (جداء Moyal)

لنعتبر دالتين f و g على الفضاء $\mathcal{M}$. من أجل الحصول على فضاء $\mathcal{M}$ غير تبديلي نُعرف الجداء نجمة للدالتين ونرمز له بـ $f \star g$ الذي يُعطى بالشكل :

$$f \star g = \sum_{n}^{\infty} \lambda^n C_n(f,g) \qquad \text{(I.18)}$$

حيث λ هو وسيط التشويه .التعبيرات $C_n(f,g)$ تُشير إلى دوال تتشكل من مشتقات الدالتين f و g ، وهي تُحقق الخواص التالية [9] :

1. $\sum_{j+k=n} C_j(C_k(f,g),h) = \sum_{j+k=n} C_j(f,C_k(g,h))$
2. $C_0 = fg$
3. $C_1(f,g) - C_1(g,f) = [f,g]_{PB}$

حيث $[..]_{PB}$ هو مُبدل بواسون . الخاصية (1) تُبين أن الجداء نجمة تجميعي : $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$. الخاصية (2) تُوضح أن الجداء نجمة في النهاية $\lambda \to 0$ يُختزل إلى الجداء fg . الخاصية (3) لها دلالتان . رياضياتية ، تعني أن

الجداء الجديد يُعطي بنية متشعب بواسون [1] . فيزيائية ، يوفر اتصال بين السلوك الكلاسيكي والسلوك الكمومي للنظام الديناميكي . الآن نُعرف المبدل باستخدام الجداء نجمة على الشكل

$$[f, g]_\star = f \star g - g \star f \tag{I.19}$$

بالتعويض من المعادلة (I.18) نجد أن:

$$\begin{aligned} [f, g]_\star &= fg + \lambda C_1(f, g) - gf - \lambda C_1(g, f) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \lambda\Big(C_1(f, g) - C_1(g, f)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \lambda[f, g]_{PB} + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \tag{I.20}$$

هذه النتيجة تعطينا العلاقة بين الجبر غير التبديلي المعرفة بجداء Moyal والجبر التبديلي التالي :

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}[f, g]_\star = [f, g]_{PB} \tag{I.21}$$

وهذه المعادلة هي الشكل الصحيح لمبدأ التوافق الذي يربط بين الميكانيك الكم والميكانيك الكلاسيكي .

من أجل متشعب بواسون معطى لا يمكننا التأكد هل اذا كان الجداء نجمة للدوال الناعمة موجود على المتشعب او لا ، أي أنه من الممكن إيجاد المعاملات C_n تُحقق الخواص السابقة ، ولكن من غير الواضح أن المتسلسلة التي يُعرفونها من خلال المعادلة (I.18) تُعطينا دالة ناعمة [2] . لقد عمل الرياضياتيون بجد للاجابة على هذا السؤال في العموم منذ وقت طويل . من أجل فضاء اقليدي $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ الجداء نجمة معروف منذ فترة طويلة ، في هذه الحالة مركبات تنسور بواسون $\Theta^{\mu\nu}$ تكون ثابتة وضد متناظرة وبالتالي :

$$C_1(f, g) = \frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) = \frac{1}{2}[f, g]_{PB} \tag{I.22}$$

استخدمنا الخاصية (3) . المعاملات ذات الرتب الاعلى نتحصل عليها باخذ أُسية المعامل C_1 . بهذا الإجراء نتحصل على الجداء–نجمة– Moyal

$$f \star_M g = f(x) \exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu}\Theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_\nu}\right) g(x) \tag{I.23}$$

يُلاحظ أن الجداء نجمة يتعلق بالمتغيرات الكلاسيكية x_μ و يُعرف دالة ناعمة على الفضاء الكلاسيكي .

[1] بالانجليزية تُكتب poisson manifold structure انظر التعريف في الملحق 1

[2] بالانجليزية تُكتب Smooth function انظر التعريف في الملحق 1 .

I.3.1 جداء نجمة ومؤثرات Weyl

لتكن f و g دالتين من الجبر− C^* على $\mathcal{M}$. السؤال هو كيفية إيجاد الدالة h من الجبر− C^* على $\mathcal{M}$ التي تُحقق $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]=\hat{\mathcal{W}}[h]$. بعبارة اخرى نبحث عن تعبير لـ h بدلالة g و f . بالتعريف الجزء الأيسر من الشرط هو

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] &= \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\tilde{g}(q)e^{iq_\mu\hat{x}^\mu}\\ &= \iint\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}e^{iq_\mu\hat{x}^\mu} \end{aligned}\tag{I.24}$$

نستخدم صيغة Baker-Campbell-Hausdorff العلاقة (I.13) لتبسيط هذه العبارة فنجد

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] &= \iint\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{i(k_\mu+q_\mu)\hat{x}^\mu}e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu q_\nu}\\ &= \iint\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{ik'_\mu\hat{x}^\mu}e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}(k_\mu k'_\nu-k_\mu k_\nu)} \end{aligned}\tag{I.25}$$

حيث وضعنا $k+q=k'$. باستخدام التناظر $k_\mu k_\nu=k_\nu k_\mu$ نجد أن :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] &= \iint\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{ik'_\mu\hat{x}^\mu}e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}(\widetilde{f\star_M g})(k')e^{ik'_\mu\hat{x}^\mu} \end{aligned}\tag{I.26}$$

حيث $(\widetilde{f\star_M g})(k')$ شبه الجداء نجمة وهو مُعرف بـ :

$$(\widetilde{f\star_M g})(k')=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu}\tag{I.27}$$

الجداء نجمة هو تحويل Fourier العكسي لـ (I.27) :

$$\begin{aligned}(f\star_M g)(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}(\widetilde{f\star_M g})(k')e^{ik'_\mu x^\mu}\\ &= f(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu}\Theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_\nu}\right)g(x)\\ &= f(x)g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\Theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\Theta^{\mu_n\nu_n}\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_n}f(x)\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_n}g(x) \end{aligned}\tag{I.28}$$

بالتالي فإن :

$$\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star_M g] \tag{I.29}$$

فيما يلي نقدم بعض الملاحظات عن الجداء نجمة :

1. بالنسبة لجداء نجمة ، $\hat{\mathcal{W}}$ هو تشاكل للجبريات [3] :

$$\hat{\mathcal{W}} : (C^*(\mathcal{M}), \star_M) \to (C^*(\mathcal{M}), \cdot) \quad , \; \hat{\mathcal{W}}[f \star_M g] = \hat{\mathcal{W}}[f] \cdot \hat{\mathcal{W}}[g] \tag{I.30}$$

2. يمكن تفسير مُبدل Moyal كقوس Lie على فضاء مؤثرات Weyl .

3. لأن $\hat{\mathcal{W}}[\cdot]$ مؤثر خطي فإن $\left[\hat{\mathcal{W}}[f], \hat{\mathcal{W}}[g]\right] = \hat{\mathcal{W}}\left[[f,g]_\star\right]$

4.I تطبيقات Seiberg-Witten

برهن Seiberg-Witten في [10] أنه يمكن الحصول على النظرية المعيارية [4] غير التبديلية من النظرية المعيارية التبديلية . بعبارة اخرى يوجد هناك تطبيق يربط الحقول والوسائط المعيارية غير التبديلية بالحقول والوسائط المعيارية التبديلية الذي يتلائم مع البنية المعيارية للنظرية .

نظرية Yang-Milles غير التبديلية نتحصل عليها باستبدال الجداء العادي بالجداء نجمة (I.23) . اذن فعل يانغ ميلز غير التبديلي نكتبه [5]

$$\hat{S} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^4x \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^4x \hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} \tag{I.31}$$

مع

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star \tag{I.32}$$

هو تنسور شدة الحقل غير التبديلي للحقل المعياري غير التبديلي $\hat{A}$. الفعل (I.31) لا تغايري تحت التحويلات المعيارية

[3] بالانجليزية تُكتب Algebras Homomorphism وهو عموما يعني تطبيق يُحافظ على الخصائص الجبرية بين الفضائين اي ان اي خاصية جبرية في الفضاء الاول تُقابل خاصية جبرية في الفضاء الثاني عند الانتقال بهذا التطبيق .

[4] بالانجليزية تُكتب Gauge theory وهي النظريات التي تُبنى على التناظر المحلي تحت تحويلات الزمر المعيارية مثل الزمرة $U(1)$.

[5] الجداء نجمة يمكن استبداله بالجداء العادي تحت التكامل لأنه يمكن كتابته كاشتقاق تام [11].

غير التبديلية

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}\hat{A}_{\mu} = \partial_{\mu}\hat{\Lambda} - i[\hat{A}_{\mu}, \hat{\Lambda}]_{\star} \equiv \hat{D}_{\mu}\hat{\Lambda} \quad , \quad \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}\hat{F}_{\mu\nu} = i[\hat{\Lambda}, \hat{F}_{\mu\nu}]_{\star} \tag{I.33}$$

حيث $\hat{\Lambda}$ الوسيط المعياري غير التبديلي . $\hat{\delta}$ التغاير غير التبديلي .

من الممكن تعريف تطبيق Seiberg-Witten بين مركبات الحقول غير التبديلية والعادية كعلاقة تكافؤ معيارية [10]:

$$\hat{A}_{\mu}(A;\Theta) + \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}(A;\Theta) = \hat{A}_{\mu}(A+\delta_{\alpha};\Theta) \tag{I.34}$$

حيث A و α هي الحقل المعياري والوسيط المعياري العادي(التبديلي) على الترتيب . و δ_{α} هي التحويلات المعيارية العادية

$$\delta_{\alpha}A_{\mu} = \partial_{\mu}\alpha - i[A_{\mu}, \alpha] = D_{\mu}\alpha \tag{I.35}$$

المعادلة (I.34) يمكن كتابتها على الشكل

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}(A;\Theta) = \hat{A}_{\mu}(A+\delta_{\alpha};\Theta) - \hat{A}_{\mu}(A;\Theta) = \delta_{\alpha}\hat{A}_{\mu}(A;\Theta) \tag{I.36}$$

التحويل المعياري العادي δ في الجهة اليمنى من المعادلة (I.36) يؤثر على مركبات $\hat{A}$ عندما ننشرها كسلسلة قوى في Θ .

لاحظ أن الحقل المعياري غير التبديلي $\hat{A}$ والوسيط المعياري غير التبديلي $\hat{\Lambda}$ لهما التعلقات الدالية التالية [10] :

$$\hat{A}_{\mu} = \hat{A}_{\mu}(A;\Theta) \quad , \quad \hat{F}_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu}(A;\Theta) \quad , \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\alpha, A;\Theta) \tag{I.37}$$

لهذا علينا حل المعادلة (I.34) بالتزامن من أجل $\hat{A}_{\mu}$ و $\hat{\Lambda}$ ومن الواضح أن هذا صعب اذا اردنا الحل من أجل رتب عليا في Θ .

يمكن ادراك هذه الصعوبة من خلال تعميم شرط التناسق المعياري

$$\delta_{\alpha}\delta_{\beta} - \delta_{\beta}\delta_{\alpha} = \delta_{-i[\alpha,\beta]} \tag{I.38}$$

إلى الحالة غير التبديلية [12]:

$$i\delta_{\alpha}\hat{\Lambda}_{\beta} - i\delta_{\beta}\hat{\Lambda}_{\alpha} - [\hat{\Lambda}_{\alpha}, \hat{\Lambda}_{\beta}]_{\star} = i\hat{\Lambda}_{-i[\alpha,\beta]} \tag{I.39}$$

من الواضح أن المعادلة (I.39) هي معادلة للوسيط المعياري $\hat{\Lambda}_\alpha$ فقط . وحلولها يمكن إيجادها رتبة برتبة .

من أجل إيجاد تطبيقات Seiberg-Witten للوسيط المعياري غير التبديلي $\hat{\Lambda}_\alpha$ والحقل المعياري غير التبديلي $\hat{A}_\mu$ يمكننا حل شرط التناسق المعياري غير التبديلي (I.39) وشرط التكافؤ المعياري (I.34) على التوالي ، رتبة برتبة لـ Θ [12] . من أجل هذا ننشر $\hat{\Lambda}_\alpha$ و $\hat{A}_\mu$ كسلسلة قوى في Θ :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\alpha &= \alpha + \Lambda^1_\alpha + \cdots + \Lambda^n_\alpha + \cdots \\ \hat{A}_\mu &= A_\mu + A^1_\mu + \cdots + A^n_\mu + \cdots \end{aligned} \tag{I.40}$$

الحل من أجل الرتبة الاولى مُعطى في الورقة الاصلية [10]:

$$\Lambda^1_\alpha = -\frac{1}{4}\Theta^{\kappa\lambda}\{A_\kappa, \partial_\lambda \alpha\} \quad , \quad A^1_\rho = -\frac{1}{4}\Theta^{\kappa\sigma}\{A_\kappa, \partial_\sigma A_\rho + F_{\sigma\rho}\} \tag{I.41}$$

يمكن إيجاد تنسور شدة الحقل من التعريف (I.32)

$$F^1_{\rho\lambda} = -\frac{1}{4}\Theta^{\kappa\sigma}\Big(\{A_\kappa, \partial_\sigma F_{\rho\lambda} + D_\sigma F_{\rho\lambda}\} - 2\{F_{\rho\kappa}, F_{\lambda\sigma}\}\Big) \tag{I.42}$$

الحلول من أجل رتب عليا موجودة في [13] .

5.I إزاحة بوب (Bopp-shift)

في فضاء الاطوار بجبر ميكانيك الكم الاعتيادية الاحداثيات وكميات الحركة تُحقق علاقات التبديل التالية

$$[x_i, x_j] = 0 \quad , \quad [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{I.43}$$

يُلاحظ هنا أن الفضاء–فضاء و كمية الحركة –كمية حركة تتبادل وفقط فضاء–كمية حركة لا تتبادل . لنعتبر جبر غير تبديلي على فضاء الاطوار حيث ليس فقط فضاء–كمية حركة لا يتبادل بل حتى الفضاء–فضاء وكمية حركة –كمية حركة لا تتبادل أيضا ونرمز لمؤثرات الاحداثيات والكميات الحركة على فضاء الاطوار بالجبر غير التبديلي بـ $\hat{x}_i$ و $\hat{p}_i$ على التوالي . ويحققون علاقات التبديل التالية

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\Theta_{ij} \quad , \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\bar{\Theta}_{ij} \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \tag{I.44}$$

حيث Θ_{ij} و $\bar{\Theta}_{ij}$ هي مصفوفات ضد متناظرة وتشير للخاصية غير التبديلية للاحداثيات وكميات الحركة على التوالي . لإيجاد المؤثرات $\hat{x}_i$ و $\hat{p}_i$ على الجبر غير التبديلي بدلالة المؤثرات الاعتيادية x_i و p_i ، بعبارة اخرى نقوم بنقل المسائل من الجبر غير التبديلي لفضاء الاطوار إلى الجبر الاعتيادي في ميكانيك الكم التي نعرف كيف نتعامل معها ، نستخدم التحويل [14] :

$$\hat{x}_i = \alpha x_i - \frac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j \tag{I.45}$$

$$\hat{p}_i = \alpha p_i + \frac{1}{2\alpha}\bar{\Theta}_{ij}x_j \tag{I.46}$$

عندما يكون $\bar{\Theta}_{ij} = 0$ فإن $\alpha = 1$ [14] التي هي حالة حيث الفضاء لا يتبادل وكمية الحركة تتبادل . نعتبر هنا $\bar{\Theta}_{ij} = 0$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\Theta^{i_1 j_1}\cdots\Theta^{i_n j_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}f(x)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_n}g(x) \\ &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}f(x)\tilde{p}^{i_1}\cdots\tilde{p}^{i_n}g(x) \end{aligned} \tag{I.47}$$

حيث استخدمنا العلاقات التالية:

$$\partial_i = ip_i \qquad ,\tilde{p}^i = \Theta^{ij}p_j \tag{I.48}$$

لدينا $f(x)$ مُعرفة بتحويل Fourier:

$$f(x) = \int \mathrm{d}k\tilde{f}(k)e^{ikx} \;\Rightarrow\; \partial_i f(x) = \int \mathrm{d}k\tilde{f}(k)(ik_i)e^{ikx} \tag{I.49}$$

بالتالي:

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\int \mathrm{d}k\tilde{f}(k)(ik_{i_1})\cdots(ik_{i_n})\tilde{p}^{i_1}\cdots p^{i_n}g(x)e^{ikx} \\ &= f(x)g(x) + \int \mathrm{d}k\tilde{f}(k)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}(ik\tilde{p})^n g(x)e^{ikx} \\ &= f(x)g(x) + \int \mathrm{d}k\tilde{f}(k)e^{ik(x-\frac{\tilde{p}}{2})}g(x)e^{ikx} - \int dk\tilde{f}(k)e^{ikx}g(x) \\ &= \int \mathrm{d}k\tilde{f}(k)e^{ik(x-\frac{\tilde{p}}{2})}g(x)e^{ikx} \end{aligned}$$

$$= f(x - \tilde{p}/2)g(x) \tag{I.50}$$

حيث $\tilde{p}$ و x يتبادلان .

6.I الخلاصة

في هذا الفصل برهنا أنه من أجل الحصول على فضاء–زمن غير تبادلي هناك طريقتان ، الاولى باستخدام مؤثرات Weyl على الفضاء زمن مع الجداء العادي او باستخدام الدوال العادية على الفضاء زمن مع استبدال الجداء العادي بالجداء نجمة حيث أن مؤثر Weyl هو تشاكل بين جبر الدوال مع الجداء العادي وجبر الدوال مع الجداء نجمة على الفضاء–زمن . ورأينا انه من اجل المحافظة على التناظر في النظريات المعيارية يجب علينا استخدام تطبيق Seiberg-Witten الذي يربط الحقول المعيارية في الفضاء غير التبديلي بالحقول المعيارية في الفضاء التبديلي . اما في ميكانيك الكم العادي عند اضافة لاتبادل فضاء–فضاء او كمية حركة–كمية حركة بالاضافة إلى تبادل فضاء–كمية حركة فإننا نتحصل على المؤثرات في الفضاء غير التبديلي باستخدام إزاحة بوب .

الفصل II

إنتاج الأزواج ومعاملات Bogoliubov

1.II مقدمة

قام كلاين بدراسة حركة الالكترونات واردة إلى حاجز كموني V_0 في بُعد واحد [15] ؛ حيث في المنطقة $x < 0$ الكمون معدوم ، بينما في المنطقة $x > 0$ الكمون مساوي لـ V_0 . عندما قام بحساب معامل الانعكاس في الحالة $V_0 > E + m$ وجد أنه أكبر من الواحد ، وهذا يعني أن عدد الجسيمات المنعكسة أكبر من عدد الجسيمات الواردة وهذا ما يُسمى "بمتناقضة كلاين" .

فسّر ديراك الظاهرة بنظرية الثقب . باختصار ، إعتبر ديراك أن الفراغ عبارة عن بحر من الالكترونات ذات الطاقة سالبة وعندما يخرج الكترون من الفراغ (أي يُصبح الالكترون قابل للرصد فيزيائيا) فإنه سيتشكل ثقب في بحر ديراك، ووفقا لمبدأ انحفاظ الشحنة فإن الثقب سيكون موجب الشحنة . عند اصطدام الالكترونات الواردة بالحاجز ستؤدي إلى إضطراب في الفراغ وهذا الإضطراب بدوره يؤدي إلى خروج الالكترونات من بحر ديراك وبالتالي ستنشأ الثقوب. الالكترونات التي تخرج من البحر سترتد مع الالكترونات الوارد وبالتالي فإن عدد الالكترونات المنعكسة أكبر من عدد الالكترونات الواردة . الفراغ الأن اصبحت به ثقوب وبالتالي لم تعد شُحنته معدومة والفراغ يجب أن تكون شحنته معدومة ، اذن هذه الثقوب تخرج من الفراغ وعند دراسة طبيعة هذه الجسيمات فإن سلوكها مُشابه لسلوك الالكترونات إلا أنها تختلف معها في إشارة الشحنة . تفسير ديراك لهذه الظاهر جاء بفكرة ثورية حول مفهوم الفراغ بحيث لا يمكن تصوره بالمفهوم التقليدي الذي هو مجرد عدم وانما هو عبارة عن كم هائل من الجسيم–الجسيم المضاد (هذا ما أكدته نظرية الحقول الكمومية) التي لا يمكن رصدها فيزيائيا وتخرج هذه الجسيمات من الفراغ أي تُصبح قابلة للرصد إذا تم إحداث إضطراب في هذا الفراغ بفعل كمونات او حقول خارجية .

تمت دراسة تأثير إنتاج الجسيمات اول مرة من قِبل Schwinger [16] . برهن أنه يمكن التعبير عن سعة الانتقال فراغ–فراغ بدلالة الفعل الفعال S_{eff} واحتمال إنتاج الجسيمات من الفراغ يمكن استخراجه من الجزء التخيلي للفعل الفعال $\text{Im}S_{\text{eff}}$ بينما الجزء الحقيقي $\text{Re}S_{\text{eff}}$ يُعبر عن إستقطاب الفراغ . وتمت مناقشة مسائل في نفس السياق بعد ذالك من قبل

عدة مؤلفين أنظر على سبيل المثال [17, 18, 19] . على الرغم من مرور قرن على اعمال Schwinger إلا أن موضوع إنتاج الأزواج لايزال يُناقش في نطاق واسع في نظرية الاوتار والثقوب السوداء . في الوقت الحاضر اصبح من المعروف جيدا أن الحقول الكهربائية يمكنها إنتاج الأزواج من الفراغ ، واحتمال إنتاج االأزواج بواسطة الحقل كهربائي ثابت الشدة E يُعطى بالعبارة [16] :

$$\mathcal{P}_{\text{Creat}} = \frac{e^2E^2}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\Big(-n\pi\frac{m^2}{eE}\Big) \tag{II.1}$$

في حالة وجود حقل مغناطيسي H موازي للحقل الكهربائي فإن احتمال إنتاج الأزواج (II.1) يُصبح [18] :

$$\mathcal{P}_{\text{creat}} = \frac{e^2EH}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\coth\Big(n\pi\frac{H}{E}\Big)\exp\Big(-n\pi\frac{m^2}{eE}\Big) \tag{II.2}$$

من المعادلة (II.2) يمكننا ملاحظة أنه من أجل حقل كهربائي معدوم $E=0$ وحقل مغناطيسي غير معدوم $H\neq 0$ فإن احتمال إنتاج الأزواج معدوم ، هذا يعني أن الحقل المغناطيسي النقي لا يمكنه إنتاج الأزواج لكنه يؤثر على احتمال إنتاج الأزواج في حالة وجوده مع الحقل الكهربائي .

2.II الحقول الكمومية الحرة

نبدأ أولا مع دراسة الحقول الكمومية الحرة ثم ندرس بعد ذلك الحقول الكمومية المتفاعلة . نقوم بدراسة حقل كلاين غوردن لأنه ابسط مثال على الحقول الكمومية الحرة . حقل كلاين غوردن سلمي مركب موصوف باللاغرونجية [20] :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \tag{II.3}$$

يمكننا أن نتحصل على معادلة الحركة باستخدام معادلة اولر–لاغرونج :

$$(\Box - m^2)\phi(\vec{x},t) = 0 \tag{II.4}$$

حيث $\Box$ هو مؤثر دالمبارت ويُعطى بـ $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$. الحلان المستقلان للمعادلة (II.4) هما $f_k(\vec{x},t)$ و $f_k^*(\vec{x},t)$ مع $f_k(\vec{x},t) = Ne^{i(k_0t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ حيث N ثابت التنظيم نتحصل عليه من الشرط :

$$f_k(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial t}f_k^*(\vec{x},t) - f_k^*((\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial t}f_k(\vec{x},t) = 2i \tag{II.5}$$

هذا الشرط يُعبر عن التيار المحفوظ . بالتعويض في المعادلة (II.4) نجد الشرط $k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$. الحل العام لمعادلة كلاين غوردن هو عبارة عن تركيب الحلين المستقلين:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \Big(A_k f_k(\vec{x}, t) + B_k^* f_k^*(\vec{x}, t) \Big) \tag{II.6}$$

$$\phi^*(\vec{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \Big(B_k f_k(\vec{x}, t) + A_k^* f_k^*(\vec{x}, t) \Big) \tag{II.7}$$

من أجل اجراء التكميم القانوني نحن بحاجة إلى حساب العزمين المرافقين :

$$\pi_\phi(x) = i \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} k_0 \Big(A_k f_k(x) - B_k^* f_k^*(x) \Big) \tag{II.8}$$

$$\pi_{\phi^*}(x) = i \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} k_0 \Big(B_k f(x) - A_k^* f_k^*(x) \Big) \tag{II.9}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $\partial_0 e^{\pm ikx} = \pm i k_0 e^{\pm ikx}$ حيث $x = (t, \vec{x})$ و $k = (k_0, \vec{k})$. إجراء التكميم هو رفع الحقول إلى مؤثرات تُحقق علاقات التبديل التالية [21]:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')]_{t=t'} = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{II.10}$$

و

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]_{t=t'} = [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x')]_{t=t'} = 0 \tag{II.11}$$

في هذه الحالة المعاملات B_k, A_k^*, A_k و B_k^* تُصبح مؤثرات والحقلين $\phi(x)$ و $\phi^\dagger(x)$ نكتبهما على الشكل

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \Big(\hat{a}_k f(x) + \hat{b}_k^\dagger f^*(x) \Big) \tag{II.12}$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \Big(\hat{b}_k f(x) + \hat{a}_k^\dagger f^*(x) \Big) \tag{II.13}$$

من علاقات التبديل الخاصة بالحقول (II.10) و (II.11) يمكننا البرهان أن المؤثرات $\hat{b}_k, \hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$ و $\hat{b}_k^\dagger$ تُحقق علاقات التبديل التالية [22] :

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger]_{k_0 = k_0'} = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger]_{k_0 = k_0'} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{II.14}$$

و

$$[\hat{a}_k^\dagger, \hat{b}_{k'}^\dagger]_{k_0=k_0'} = [\hat{a}_k, \hat{b}_{k'}]_{k_0=k_0'} = 0 \tag{II.15}$$

الآن نقوم بحساب هاملتوني النظام . بالتعريف هاملتوني النظام يُعطى بـ [21] :

$$H = \int \mathrm{d}^3x(\psi_\phi \dot{\phi} + \pi_{\phi^*}\dot{\phi}^* - \mathcal{L}) \tag{II.16}$$

بحساب مباشر (أنظر في [20]) نجد أن الهاملتوني بدلالة المؤثرات $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger, \hat{b}_k$ و $\hat{b}_k^\dagger$ يأخذ الشكل التالي :

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} k_0(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k) \tag{II.17}$$

في اللاغرونجية (II.3) يوجد هناك تناظر تحت التحويلات المعيارية الشاملة [1] للزمرة $U(1)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{ie\alpha}\phi(x) \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi'^*(x) = \phi^* e^{-ie\alpha} \end{aligned} \tag{II.18}$$

وهذا التناظر حسب نظرية نوثير [2] يُقابله تيار نوثير محفوظ J^μ بحيث يُحقق معادلة الانحفاظ $\partial_\mu J^\mu = 0$ وترافق هذا التيار شحنة نوثير محفوظة بحيث ترتبط هذه الشحنة بالتيار بالعلاقة :

$$Q = \int \mathrm{d}^3x J^0 \tag{II.19}$$

هنا في تحويلات الزمرة $U(1)$ شحنة نوثير (II.19) هي بالضبط مؤثر الشحنة الكهربائية ، وبحساب صريح (أنظر [20]) يمكننا البرهان أنها تُعطى بـ

$$Q_e = e\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k) \tag{II.20}$$

نلاحظ أن الهاملتوني في المعادلة (II.17) ومؤثر الشحنة في المعادلة (II.20) هما قطريان ، وهذا يسمح لنا بتفسير المؤثرين $\hat{a}_k^\dagger$ و $\hat{a}_k$ كمؤثري نشأة وزوال للجسيمات . بينما المؤثرين $\hat{b}_k^\dagger$ و $\hat{b}_k$ كمؤثري نشأة وزوال للجسيمات المضادة . المؤثرين

[1] أي التحويلات لا تتعلق بإحداثيات الفضاء−زمن Global gauge transformations

[2] بالانجليزية تكتب Noether's theorem وهي نظرية جاءت بها الرياضية الالمانية ايمي نوثير تربط كل تناظر موجود في النظام بكمية محفوظة على سبيل المثال اذا كان النظام متناظر تحت الانسحاب في الزمن فان هناك انحفاظ في الطاقة .

$N_a = \frac{1}{(2\pi)^2}\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k$ و $N_b = \frac{1}{(2\pi)^3}\hat{b}^\dagger_k\hat{b}_k$ يُعبران عن عدد الجسيمات وعدد الجسيمات المضادة على الترتيب ، والحالة التي تُحقق $N_a|0\rangle = N_b|0\rangle$ تُسمى حالة الفراغ .

3.II الحقول الكمومية في وجود الحقل الكهرومغناطيسي

نتحصل على اللاغرونجية التي تصف حقل كلاين غوردن سلمي مركب في وجود حقل كهرومغناطيسي من خلال " الاقتران الاصغري " [20] $\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$ حيث e هو معامل الاقتران ، فنتحصل على اللاغرونجية التالية :

$$\mathcal{L} = \Big[(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi\Big]^*\Big[(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi\Big] - m^2\phi^*\phi \tag{II.21}$$

ومعادلة الحركة من أجل الحقل ϕ نتحصل عليها من خلال معادلات اولر–لاغرونج

$$\Big[(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 + m^2\Big]\phi(x) = 0 \tag{II.22}$$

من أجل تبسيط المسألة نعتبر أن الحقل لا يتعلق الا بالزمن أي $A_\mu = A_\mu(t)$ و في الاتجاه oz بحيث:

$$A_\mu = (0, 0, 0, A(t)) \tag{II.23}$$

هذا يعني أن المعادلة (II.22) تُصبح على الشكل:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2_\perp - \Big(\frac{\partial}{\partial z} + ieA(t)\Big)^2 + m^2\Big]\phi(x) = 0 \tag{II.24}$$

حيث $\nabla_\perp$ هو التدرج في المستوي oxy . لاحظ أن هذه المعادلة لا تتعلق مباشرة بـ z, y, x بالتالي يمكننا كتابة الحل $\phi(x)$ على الشكل:

$$\phi(x) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\chi_{\vec{k}}(t) \tag{II.25}$$

حيث $\chi_{\vec{k}}(t)$ يتعلق فقط بـ t ويُحقق المعادلة :

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2_\perp + \Big(k_z - eA(t)\Big)^2 + m^2\Big]\chi_{\vec{k}}(t) = 0 \tag{II.26}$$

حيث $k^2_\perp = k^2_x + k^2_y$. من خلال اخذ المرافق المركب للمعادلة (II.26) يمكننا رؤية أنه إذا كان $\chi_{\vec{k}}(t)$ حل للمعادلة (II.26) فإن $\chi^*_{\vec{k}}(t)$ حل لنفس المعادلة . وباخذ المرافق المركب للمعادلة (II.24) يمكننا رؤية أنه إذا كان $\phi(x)$ حل

للمعادلة (II.24) بالشحنة e فإن $\phi^*(x)$ هو أيضا حل لنفس المعادلة بالشحنة $(-e)$. بالتالي الحل العام نكتبه كتركيب خطي للحلين

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\Big[A_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\chi_{\vec{k}}(t) + B_k^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\chi_{\vec{k}}^*(t)\Big] \tag{II.27}$$

من أجل اجراء التكميم نقوم برفع ϕ من مجرد حقل إلى مؤثر يُحقق نفس علاقات التبديل كما في الحقل الحر ونكتبه على الشكل (نستخدم الترميز $(\chi_{\vec{k}}^+(t), \chi_{\vec{k}}^-(t)$ بدلا من $(\chi_{\vec{k}}(t), \chi_{\vec{k}}^*(t))$:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\Big[\hat{a}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\chi_{\vec{k}}^+(t) + \hat{b}_k^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\chi_{\vec{k}}^-(t)\Big] \tag{II.28}$$

مع الشرط :

$$\chi_{\vec{k}}^+\dot{\chi}_{\vec{k}}^- - \dot{\chi}_{\vec{k}}^+\chi_{\vec{k}}^- = 2i \tag{II.29}$$

1.3.II التفسير بدلالة الجسيمات

الآن نبحث عن تفسير المؤثرات $\hat{b}_k, \hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$ و $\hat{b}_k^\dagger$ ، ومن المؤكد أن تفسيرها يرتبط بحالة الفراغ كما رأينا في حالة الحقول الحرة . اولا نبدأ من كتابة المعادلة (II.26) على الشكل:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2(t)\Big)\chi_{\vec{k}}(t) = 0 \tag{II.30}$$

حيث $\omega^2(t) = k_\perp^2 + \Big(k_z - eA(t)\Big)^2 + m^2$. لاحظ أن المعادلة (II.30) هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية وهذا يعني أنها تقبل عدة مجموعات $\{\chi_{\vec{k}}^+(t), \chi_{\vec{k}}^-(t)\}$ من الحلول المستقلة خطيا . وهذا يعني أن التركيب (II.28) ليس وحيد . من أجل الحصول على تركيب يمكننا من تفسير المؤثرات $\hat{b}_k, \hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$ و $\hat{b}_k^\dagger$ نقوم بحساب الهاملتوني في هذه النظرية . بالتعريف الهاملتوني يُعطى بـ :

$$H = \int \mathrm{d}^3x(\psi_\phi\dot{\phi} + \pi_{\phi^*}\dot{\phi}^* - \mathcal{L}) \tag{II.31}$$

باستعمال بعض الجبر يمكننا البرهان أن الهاملتوني في هذه النظرية يُعطى بـ :

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\Big(E_k(t)(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k) + F_k^*(t)\hat{b}_k\hat{a}_k + F_k(t)\hat{a}_k^\dagger\hat{b}_k^\dagger\Big) \tag{II.32}$$

من الواضح أن الهاملتوني ليس قطري لأنه يحتوي على الحدود المتخلطة $\hat{b}_k\hat{a}_k$ و $\hat{a}_k^\dagger\hat{b}_k^\dagger$. وهذا يعني أن الفراغ لا يمكن تحديده جيدا . مع ذالك ، في نظرية التفاعل عموما هناك حالتين مثيرتين للاهتمام [22] :

- عند الماضي البعيد $t \to -\infty$.
- في المستقبل البعيد $t \to +\infty$.

في هذين الحالتين الحقول تتصرف كأنها حرة وهذا يعني أن الهاملتوني يكون قطري وبالتالي حالة الفراغ تكون مُحددة جيدا . نبدأ مع التصرف عند $t \to -\infty$ بحيث نكتب الحلول على الشكل :

$$(\chi^+_{\vec{k},\text{in}}(t), \chi^-_{\vec{k},\text{in}}(t)) = (e^{-i\omega_{\text{in}}t}, e^{i\omega_{\text{in}}t}) \tag{II.33}$$

حيث $\omega_{\text{in}} = \lim\limits_{t\to-\infty} \omega(t)$. يمكننا أن نرى أن

$$E_k(t \to -\infty) = 2\omega_{\text{in}}^2 \quad , \quad F_k(t \to -\infty) = 0 \tag{II.34}$$

بالتالي الهاملتوني يُكتب على الشكل:

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\text{in}}\left(\hat{a}^\dagger_{k,\text{in}}\hat{a}_{k,\text{in}} + \hat{b}^\dagger_{k,\text{in}}\hat{b}_{k,\text{in}}\right) \tag{II.35}$$

عند $t \to +\infty$ نكتب الحلول على الشكل :

$$(\chi^+_{\vec{k},\text{out}}(t), \chi^-_{\vec{k},\text{out}}(t)) = (e^{-i\omega_{\text{out}}t}, e^{i\omega_{\text{out}}t}) \tag{II.36}$$

حيث $\omega_{\text{out}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)$. يمكننا أن نرى أن :

$$E_k(t \to +\infty) = 2\omega_{\text{out}}^2 \quad , \quad F_k(t \to +\infty) = 0 \tag{II.37}$$

بالتالي الهاملتوني يُكتب على الشكل :

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\text{out}}\left(\hat{a}^\dagger_{k,\text{out}}\hat{a}_{k,\text{out}} + \hat{b}^\dagger_{k,\text{out}}\hat{b}_{k,\text{out}}\right) \tag{II.38}$$

هذا يعني أن H قطري من أجل حالتي الفراغ $|0_{\text{in}}\rangle$ و $|0_{\text{out}}\rangle$ حيث $\hat{a}_{k,\text{in}}|0_{\text{in}}\rangle = \hat{b}_{k,\text{in}}|0_{\text{in}}\rangle = 0$ و $\hat{a}_{k,\text{out}}|0_{\text{out}}\rangle = \hat{b}_{k,\text{out}}|0_{\text{out}}\rangle = 0$. نستنتج أن التفسير بدلالة الجسيمات من أجل حقل كمومي يتفاعل مع حقل كهرومغناطيسي

ممكن فقط عند ازمنة خاصة التي يكون فيها الهاملتوني قطري . هذا يُبرهن أن حركة الجسيم في نظرية الحقول الكمومية في وجود حقل كهرومغناطيسي ليست واضحة كليا عند كل الازمنة t .

2.3.II احتمال وعدد إنتاج الأزواج بدلالة معاملات Bogoliubov

حلول المعادلة (II.30) تُشكل فضاء ذو بُعدين والمجموعة $\{\chi^+_{\vec{k},\text{out}}(t), \chi^-_{\vec{k},\text{out}}(t)\}$ متعامدة ومستقلة خطيا بالتالي تُشكل اساس لهذا الفضاء ، هذا يعني أنه يمكننا كتابة المجموعة $\{\chi^+_{\vec{k},\text{in}}(t), \chi^-_{\vec{k},\text{in}}(t)\}$ في هذا الاساس على الشكل:

$$\chi^+_{\vec{k},\text{in}}(t) = \alpha_{\vec{k}}\chi^+_{\vec{k},\text{out}}(t) + \beta_{\vec{k}}\chi^-_{\vec{k},\text{out}}(t) \tag{II.39}$$

$$\chi^-_{\vec{k},\text{in}}(t) = \alpha^*_{\vec{k}}\chi^-_{\vec{k},\text{out}}(t) + \beta^*_{\vec{k}}\chi^+_{\vec{k},\text{out}}(t) \tag{II.40}$$

هذه التحويلات تُسمى تحويلات Bogoliubov والمعاملات $\alpha_{\vec{k}}$ و $\beta_{\vec{k}}$ التي تُسمى معاملات Bogoliubov من أجل البوزونات تُحقق الشرط :

$$|\alpha_{\vec{k}}|^2 - |\beta_{\vec{k}}|^2 = 1 \tag{II.41}$$

يمكننا كتابة هذا التحويل بدلالة المؤثرات $\hat{a}_{k,\text{in}}, \hat{a}^\dagger_{k,\text{in}}, \hat{b}_{k,\text{out}}, \hat{b}^\dagger_{k,\text{out}}$ بحيث:

$$\hat{a}_{k,\text{out}} = \alpha_{\vec{k}}\hat{a}_{k,\text{in}} + \beta_{\vec{k}}\hat{b}^\dagger_{k,\text{in}} \tag{II.42}$$

$$\hat{b}^\dagger_{k,\text{out}} = \beta^*_{\vec{k}}\hat{a}_{k,\text{in}} + \alpha^*_{\vec{k}}\hat{b}^\dagger_{k,\text{in}} \tag{II.43}$$

الآن نقوم بالبحث عن عدد الجسيمات " الخارجة" (out) في حالة الفراغ $|0_{\text{in}}\rangle$. لدينا عدد الجسيمات الخارجة معرف بالمؤثر $N_a = \hat{a}^\dagger_{k,\text{out}}\hat{a}_{k,\text{out}}$ او $N_b = \hat{b}^\dagger_{k,\text{out}}\hat{b}_{k,\text{out}}$ بالتالي عدد الجسيمات الخارجة في الحالة $|0_{\text{in}}\rangle$ يُعطى بـ :

$$\begin{aligned}
\langle 0_{\text{in}}|\hat{a}^\dagger_{k,\text{out}}\hat{a}_{k,\text{out}}|0_{\text{in}}\rangle &= \langle 0_{\text{in}}|(\alpha^*_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{k,\text{in}} + \beta^*_{\vec{k}}\hat{b}_{k,\text{in}})(\alpha_{\vec{k}}\hat{a}_{k,\text{in}} + \beta_{\vec{k}}\hat{b}^\dagger_{k,\text{in}})|0_{\text{in}}\rangle \\
&= |\alpha|^2\langle 0_{\text{in}}|\hat{a}^\dagger_{k,\text{in}}\hat{a}_{k,\text{in}}|0_{\text{in}}\rangle + \alpha^*_{\vec{k}}\beta_{\vec{k}}\langle 0_{\text{in}}|\hat{a}^\dagger_{k,\text{in}}\hat{b}^\dagger_{k,\text{in}}|0_{\text{in}}\rangle \\
&+ \beta^*_{\vec{k}}\langle 0_{\text{in}}|\hat{b}_{k,\text{in}}\hat{a}_{k,\text{in}}|0_{\text{in}}\rangle + |\beta|^2\langle 0_{\text{in}}|\hat{b}_{k,\text{in}}\hat{b}^\dagger_{k,\text{in}}|0_{\text{in}}\rangle \\
\Rightarrow \quad \mathcal{N}_a(k) &= |\beta_{\vec{k}}|^2
\end{aligned} \tag{II.44}$$

بنفس الطريقة نجد أن $\mathcal{N}_b(k) = \langle 0_{\text{in}}|\hat{b}^\dagger_{k,\text{out}}\hat{b}_{k,\text{out}}|0_{\text{in}}\rangle = |\beta_{\vec{k}}|^2$ وهذا يعني أن عدد الجسيمات الخارج في الفراغ $|0_{\text{in}}\rangle$ ليس معدوم . هذا ما يُفسر أن إضطراب الفراغ $|0_{\text{in}}\rangle$ بتأثير الحقل الخارجي يؤدي إلى إنتاج زوج من الجسيمات . الحالة التي تصف زوج من الجسيمات الخارجة تُعطى بـ $\hat{b}^\dagger_{k,\text{out}}\hat{a}^\dagger_{k,\text{out}}|0_{\text{out}}\rangle$ ووفقا لمبادئ نظرية الحقول الكمومية فإن سعة الانتقال

من الحالة $|0_{\rm in}\rangle$ إلى الحالة $\hat{b}^\dagger_{k,\rm out}\hat{a}^\dagger_{k,\rm out}|0_{\rm out}\rangle$ يُعطى بـ [23, 24]:

$$\mathcal{A} = \langle 0_{\rm out}|\hat{b}_{k,\rm out}\hat{a}_{k,\rm out}\rangle|0_{\rm in}\rangle \tag{II.45}$$

من المعادلتين (II.42) و (II.43) يمكننا كتابة $\hat{a}_{k,\rm out}$ بدلالة $\hat{b}^\dagger_{k,\rm out}$ و $\hat{a}_{k,\rm in}$ على الشكل :

$$\hat{a}_{k,\rm out} = \frac{1}{\alpha^*_{\vec{k}}}\hat{a}_{k,\rm in} + \frac{\beta_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}}\hat{b}^\dagger_{k,\rm out} \tag{II.46}$$

نُعوض هذه النتيجة في عبارة سعة الاحتمال:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \langle 0_{\rm out}|\hat{b}_{k,\rm out}\Big(\frac{1}{\alpha^*_{\vec{k}}}\hat{a}_{k,\rm in} + \frac{\beta_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}}\hat{b}^\dagger_{k,\rm out}\Big)|0_{\rm in}\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha^*_{\vec{k}}}\langle 0_{\rm out}|\hat{b}_{k,\rm out}\hat{a}_{k,\rm in}|0_{\rm in}\rangle + \frac{\beta_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}}\langle 0_{\rm out}|\hat{b}_{k,\rm out}\hat{b}^\dagger_{k,\rm out}|0_{\rm in}\rangle \\
&= \frac{\beta_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}}\langle 0_{\rm out}|0_{\rm in}\rangle
\end{aligned} \tag{II.47}$$

واحتمال إنتاج زوج من الجسيمات بكمية حركة $\vec{k}$ يُعطى بـ :

$$\mathcal{P}_{\vec{k}} = \left|\frac{\beta_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}}\right|^2 \tag{II.48}$$

4.II الخلاصة

في هذا الفصل رأينا كيفية ايجاد كثافة احتمال إنتاج الجسيمات وكثافة عدد الجسيمات المنتجة باستعمال طريقة مُعاملات Bogoliubov والتي سنستخدمها في الفصلين اللاحقين .

الفصل III

إنتاج الأزواج في QED غير التبديلية

1.III مقدمة

الالكتروديناميك الكمومية QED هي نظرية الحقول الكمومية الخاصة بالكهرومغناطيسية . تقنيا نقوم ببناء النظرية بتحقيق التناظر المحلي للنظام تحت التحويلات المعيارية للزمرة $U(1)$ [22] . نعتبر لاغرونجية حقل ديراك حر [20]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{III.1}$$

حيث $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$. يمكننا التحقق بسهولة أن هذه اللاغرونجية هي متناظرة تحت التحويلات المعيارية الشاملة للزمرة $U(1)$. من أجل تحويلات معيارية محلية أي أن التحويل يتعلق باحداثيات الفضاء–زمن هذه اللاغرونجية ليست متناظرة بسبب الحد الحركي . إذا اعتبرنا $g(x)$ تحويل معياري محلي من الزمرة $U(1)$ بالتالي يمكننا كتابته على الشكل $g(x) = \exp(ie\alpha(x))$. الحقول تتحول على الشكل :

$$\begin{aligned} \psi &\to \psi' = g(x)\psi \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}' = \bar{\psi} g^\dagger(x) \end{aligned} \tag{III.2}$$

من أجل هذا التحويل اللاغرونجية (III.1) غير متناظرة أي $\delta\mathcal{L} \neq 0$ ، يمكننا رؤية هذا من خلال حساب الحد الحركي فقط:

$$i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' = i\bar{\psi}g^\dagger(x)\gamma^\mu\partial_\mu g(x)\psi \tag{III.3}$$

$$= i\bar{\psi}g^\dagger(x)\gamma^\mu(\partial_\mu g(x))\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{III.4}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $U(1)$ هي زمرة التحويلات الوحدوية أي $g^\dagger(x)g(x) = 1$. من أجل تحقيق التناظر المحلي في هذا النظام علينا ادخال حقل معياري ، تقنيا نقوم بهذا عن طريق استبدال الاشتقاق العادي بالاشتقاق التغايري $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ ، حيث A_μ حقل معياري ، من أجل QED هو بالضبط الحقل الكهرومغناطيسي ، بالتالي اللاغرونجية (III.1) تُصبح على الشكل :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \end{aligned} \tag{III.5}$$

من الواضح أن هذه اللاغرونجية متناظرة تحت التحويل المعياري المحلي (III.2) يمكننا رؤية هذا من خلال حساب الحد الحركي فقط . في اللاغرونجية (III.5) يظهر هناك حد يصف حقل ديراك (حقل فرميوني) حر وهناك حد يصف التفاعل بين حقل ديراك والحقل المعياري ، من أجل الحصول على لاغرونجية تصف نظام متكامل يجب اضافة حد يصف الحقل المعياري الحر ، ونكتب:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{III.6}$$

حيث $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ هو تنسور الشدة الكهرومغناطيسية . الحد الذي يصف الحقل المعياري الحر هو أيضا متناظر تحت التحويل المعياري المحلي الذي يُعطى بـ [22]:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \tag{III.7}$$

في هذا الفصل سنقوم ببناء الالكتروديناميك في الفضاء غير التبديلي ثم إيجاد احتمال إنتاج الازواج باستعمال معاملات Bogoliubov .

2.III الالكتروديناميك الكمومي غير التبديلية

كما رأينا في الفصل الأول من أجل الحصول على أي نظرية في الفضاء غير التبديلي نقوم باستبدال الجداء العادي بين الحقول بالجداء نجمة في اللاغرونجية التي تصف تلك النظرية . هذا يعني من أجل الحصول على نظرية QED في الفضاء غير التبديلي نقوم باستبدال الجداء العادي بالجداء نجمة في اللاغرونجية (III.6)

$$\mathcal{L}_{\text{NCQED}} = \hat{\bar{\psi}} \star (i\not{\partial} - m)\hat{\psi} - e\hat{\bar{\psi}} \star \gamma^\mu \hat{A}_\mu \star \hat{\psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \tag{III.8}$$

برهنا سابقا أن الجداء نجمة بين الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ يُعطى بـ :

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \Theta^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta\right) g(x) \tag{III.9}$$

حيث $\Theta^{\alpha\beta}$ مصفوفة 4×4 ضد متناظرة . من أجل الرتبة الأولى في Θ الجداء نجمة يُعطى بـ:

$$f(x) \star g(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha f(x))(\partial_\beta g(x)) \tag{III.10}$$

الآن نقوم بحساب حدود اللاغرونجية (III.8) من أجل الرتبة الأولى في Θ بحيث:

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{\psi}} \star (i\partial\!\!\!/ - m)\hat{\psi} &= \hat{\bar{\psi}}(i\partial\!\!\!/ - m)\hat{\psi} + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \hat{\bar{\psi}})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\partial_\beta\hat{\psi}) \\
e\hat{\bar{\psi}} \star \gamma^\mu \hat{A}_\mu \star \hat{\psi} &= e\hat{\bar{\psi}} \star \gamma^\mu \left(\hat{A}_\mu\hat{\psi} + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{A}_\mu)(\partial_\beta\hat{\psi})\right) \\
&= e\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{A}_\mu\hat{\psi} + \frac{ie}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{\bar{\psi}})\gamma^\mu\partial_\beta(\hat{A}_\mu\hat{\psi}) + \frac{ie}{2}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{A}_\mu)(\partial_\beta\hat{\psi}) \\
\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\hat{a}F_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} + \frac{i}{8}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{F}_{\mu\nu})(\partial_\beta\hat{F}^{\mu\nu})
\end{aligned}$$

بالتعويض في اللاغرونجية (III.8) نتحصل على لاغرونجية QED في الفضاء غير التبديلي:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NCQED}} = \hat{\bar{\psi}}(i\partial\!\!\!/ - m)\hat{\psi} + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{\bar{\psi}})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\partial_\beta\hat{\psi}) - e\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{A}_\mu\hat{\psi} - \frac{ie}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{\bar{\psi}})\gamma^\mu\partial_\beta(\hat{A}_\mu\hat{\psi}) \\
- \frac{ie}{2}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{A}_\mu)(\partial_\beta\hat{\psi}) - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} - \frac{i}{8}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{F}_{\mu\nu})(\partial_\beta\hat{F}^{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{III.11}$$

من أجل الحصول على معادلة الحركة نستخدم معادلة اولر–لاغرونج .إذا كانت اللاغرونيجة تتعلق أيضا بالمشتقات العليا للحقول (أي اكبر من المشتق الأول) فإن معادلة اولر–لاغرونج تُعطى بـ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Xi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Xi)} + \partial_\mu\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\Xi)} + \cdots = 0 \tag{III.12}$$

حيث Ξ هو الحقل . لاحظ أن اللاغرونجية (III.11) تتعلق فقط بالحقل $\hat{\bar{\psi}}$ ومشتقه الأول $\partial_\mu\hat{\bar{\psi}}$ ، بالتالي فإن معادلة اولر–لاغرونج تُعطى بـ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\hat{\bar{\psi}}} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\hat{\bar{\psi}})} = 0 \tag{III.13}$$

بعد القيام بالاشتقاق والتبسيط نكتب معادلة الحركة على الشكل :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\hat{\psi} - e\gamma^\mu\hat{A}_\mu\hat{\psi} + \frac{ie}{2}\gamma^\mu\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{A}_\mu)(\partial_\beta\hat{\psi}) = 0 \tag{III.14}$$

1.2.III تطبيق Seiberg-Witten وحل معادلة الحركة

تطبيق Seiberg-Witten للحقل $\hat{A}_\mu$ من أجل الرتبة الأولى يُعطى بـ :

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + A_\mu^{(1)} \tag{III.15}$$

حيث A_μ هو الحقل الكهرومغناطيسي في الفضاء التبديلي ونختاره على الشكل: [25]

$$A_\mu = (0, 0, Bx_1, -Et) \tag{III.16}$$

و $A_\mu^{(1)}$ هو التصحيح من الرتبة الأولى ويُعطى بـ :

$$\begin{aligned} A_\mu^{(1)} &= -\frac{1}{4}\Theta^{\rho\sigma}\{A_\rho, \partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}\} \\ &= -\frac{1}{2}\Theta^{\rho\sigma}A_\rho(\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}) \end{aligned} \tag{III.17}$$

مع

$$F_{12} = -F_{21} = B \quad , \quad F_{30} = -F_{03} = E \tag{III.18}$$

فنتحصل على الحقل $\hat{A}_\mu$ في الفضاء غير التبديلي :

$$\hat{A}_\mu = (-\frac{e}{2}\Theta^{23}BEx_1, -\frac{e}{2}\Theta^{23}BEt, Bx_1 + e\Theta^{12}B^2x_1 - e\Theta^{13}BEt, -Et) \tag{III.19}$$

الآن نعود إلى معادلة الحركة (المعادلة (III.14)) ، من أجل فضاء–فضاء غير تبديلي (أي أن $\Theta^{i0} = 0$ من أجل $i = 1, 2, 3$) لدينا :

$$i\gamma_\mu\partial_\mu - m = i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m \tag{III.20}$$

$$\begin{aligned}-e\gamma^\mu A_\mu &= -e\gamma^0 A_0 - e\gamma^1 A_1 - i\gamma^2 A_2 - e\gamma^3 A_3\\ &= \frac{e^2}{2}\gamma^0\Theta^{23}BEx_1 + \frac{e^2}{2}\gamma^1\Theta^{23}BEt - e\gamma^2(Bx_1 + e\Theta^{12}B^2x_1 - e\Theta^{13}BEt) + e\gamma^3 Et\end{aligned} \tag{III.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{ie}{2}\Theta^{\sigma\beta}\gamma^\mu(\partial_\sigma\hat{A}_\mu)\partial_\beta &= \frac{ie}{2}\Theta^{1\beta}\gamma^\mu(\partial_1\hat{A}_\mu)\partial_\beta = \frac{ie}{2}\Theta^{1\beta}\gamma^2 B\partial_\beta\\ &= \frac{ie}{2}\Theta^{1j}\gamma^2 B\partial_j\end{aligned} \tag{III.22}$$

بالتالي معادلة الحركة نكتبها على الشكل :

$$\begin{aligned}&\Big\{\gamma^0\Big(i\partial_0 + \frac{e^2}{2}\Theta^{23}BEx_1\Big) + \gamma^1\Big(i\partial_1 + \frac{e^2}{2}\Theta^{23}BEt\Big)\\ &\quad + \gamma^2\Big(i\Big[1 + \frac{e}{2}\Theta^{12}B\Big]\partial_2 + \frac{e}{2}\Theta^{12}B\partial_3 - e(Bx_1 + e\Theta^{12}B^2x_1 - e\Theta^{13}BEt)\Big)\\ &\quad + \gamma^3\Big(i\partial_3 + eEt\Big) - m\Big\}\psi = 0\end{aligned} \tag{III.23}$$

من أجل التبسيط نختار $\Theta^{23} = \Theta^{13} = 0$ و $\Theta^{12} = \Theta$ ، بالتالي المعادلة (III.23) تُصبح على الشكل :

$$\Big\{i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + \gamma^2\Big(i\Big[1 + \frac{e}{2}\Theta B\Big]\partial_2 + \frac{e}{2}\Theta B\partial_3 - eB(1 + e\Theta B)x_1\Big) + \gamma^3\Big(i\partial_3 + eEt\Big) - m\Big\}\psi = 0 \tag{III.24}$$

من أجل الرتبة الأولى في Θ يمكننا كتابة $1 + \frac{e}{2}\Theta B = e^{e\Theta B/2}$ و $1 + e\Theta B = e^{e\Theta B}$ ، اذن :

$$\Big\{i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + \gamma^2\Big(ie^{e\Theta B/2}\partial_2 + \frac{e}{2}\Theta B\partial_3 - eBe^{e\Theta B}x_1\Big) + \gamma^3\Big(i\partial_3 + eEt\Big) - m\Big\}\psi = 0 \tag{III.25}$$

يمكننا كتابة هذه المعادلة على الشكل:

$$\Big(\gamma^\mu\Pi_\mu - m\Big)\psi = 0 \tag{III.26}$$

حيث

$$\begin{cases}\Pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu & , \quad \mu \neq 2\\ \Pi_2 = ie^{e\Theta B/2}\partial_2 + \frac{e}{2}\Theta B\partial_3 - eBe^{e\Theta B}x_1\end{cases} \tag{III.27}$$

من أجل حل المعادلة (III.26) نضع $\psi = (\gamma^\mu \Pi_\mu + m)\Psi$ فنجد :

$$
\begin{aligned}
(\gamma^\mu \Pi_\mu - m)(\gamma^\nu \Pi_\mu + m)\Psi &= 0 \\
(\gamma^\mu \gamma^\nu \Pi_\mu \Pi_\nu + \gamma^\mu \Pi_\mu m - m\gamma^\nu \Pi_\nu - m^2)\Psi &= 0 \\
(2g^{\mu\nu} \Pi_\mu \Pi_\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu \Pi_\mu \Pi_\nu - m^2)\Psi &= 0
\end{aligned} \tag{III.28}
$$

في الخطوة الاخيرة استخدمنا حقيقة أن المصفوفات غاما تُحقق جبرية كليفورد $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. لدينا :

$$
\begin{aligned}
\gamma^\nu \gamma^\mu \Pi_\mu \Pi_\nu &= \frac{1}{2}\Big(\gamma^\nu \gamma^\mu \Pi_\mu \Pi_\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu \Pi_\nu \Pi_\mu\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\gamma^\nu \gamma^\mu \Pi_\mu \Pi_\nu + (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu)\Pi_\nu \Pi_\mu\Big) \\
&= g^{\mu\nu} \Pi_\nu \Pi_\mu + \frac{1}{2}\gamma^\nu \gamma^\mu [\Pi_\mu, \Pi_\nu]
\end{aligned} \tag{III.29}
$$

بالتعويض في المعادلة (III.28) نتحصل على :

$$
(\Pi^2 - \frac{1}{2}\gamma^\nu \gamma^\mu [\Pi_\mu, \Pi_\nu] - m^2)\Psi = 0 \tag{III.30}
$$

يمكننا البرهان عن طريق الحساب المباشر أن :

$$
[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = ieF^{(d)}_{\mu\nu} \tag{III.31}
$$

حيث $F^{(d)}_{\mu\nu}$ هو تنسور الشدة الكهرومغناطيسية المعدل ، مركباته غير المعدومة هي $F^{(d)}_{12} = -F^{(d)}_{21} = Be^{eB\Theta}$ و $F^{(d)}_{30} = -F^{(d)}_{03} = E$. الآن نُعرف المؤثر:

$$
S^{(d)} = -\frac{ie}{2}\gamma^\nu \gamma^\mu F^{(d)}_{\mu\nu} \tag{III.32}
$$

ونكتب المعادلة (III.30) على الشكل :

$$
(\Pi^2 + S^{(d)} - m^2)\Psi = 0 \tag{III.33}
$$

من أجل حل هذه المعادلة علينا أولا إيجاد الاشعة والقيم الذاتية للمؤثر $S^{(d)}$. معادلة القيم الذاتية للمؤثر $S^{(d)}$ نكتبها على الشكل :

$$S^{(d)}\Gamma_i^{(d)} = s_i^{(d)}\Gamma_i^{(d)} \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{III.34}$$

حيث $\Gamma_i^{(d)}$ و $s_i^{(d)}$ هي الاشعة الذاتية والقيم الذاتية على الترتيب . من التعريف (III.32) للمؤثر $S^{(d)}$ يمكن كتابته على الشكل المصفوفي:

$$\begin{aligned} S^{(d)} &= -ie\gamma^1\gamma^2F_{12} + ie\gamma^3\gamma^0F_{30} \\ &= -ieBe^{eB\Theta}\gamma^1\gamma^2 - ieE\gamma^3\gamma^0 \end{aligned} \tag{III.35}$$

نختار الاصطلاح التالي للمصفوفات gamma :

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{III.36}$$

حيث σ^i هي مصفوفات باولي . بالتالي فإن المؤثر $S^{(d)}$ يُكتب على الشكل

$$S^{(d)} = ieBe^{eB\Theta}\begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} + ieE\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{III.37}$$

من أجل اهدافنا ، يكفي أن نأخذ قيمتين ذاتيتين فقط $i = 1,2$ وسنرمز لهما بـ $+$ و $-$ [25] :

$$s_\pm = \pm eBe^{eB\Theta} - ieE \tag{III.38}$$

مع الاشعة الذاتية :

$$\Gamma_+ = (1,0,1,0) \quad , \quad \Gamma_- = (0,1,0,-1) \tag{III.39}$$

اذن Ψ يمكن تفكيكها إلى جزء مصفوفي يتناسب مع $\Gamma_\pm$ وجزء دالي :

$$\Psi_\pm = G_\pm(x)\Gamma_\pm \tag{III.40}$$

الجزء الدالي $G_{\pm}(x)$ يُحقق المعادلة:

$$(-\partial_0^2+\partial_1^2-(ie^{e\Theta B/2}\partial_2+\frac{e}{2}\Theta B\partial_3-eBe^{e\Theta B}x_1)^2-(i\partial_3+eEt)^2+s_{\pm}-m^2)G_{\pm}(x)=0 \quad \text{(III.41)}$$

لاحظ أن x_2, x_3 لا تظهران في المعادلة (III.41) بشكل صريح وبالتالي يمكن كتابة الحل على الشكل:

$$G_{\pm}(t,x_1,x_2,x_3)=N\exp\Big(ip_2x_2+ip_3x_3\Big)F_{\pm}(x_1,t) \quad \text{(III.42)}$$

بالتعويض في المعادلة (III.41) نتحصل على المعادلة التي تُحققها $F_{\pm}(x_1,t)$:

$$(-\partial_0^2+\partial_1^2-(e^{e\Theta B/2}p_2-i\frac{e}{2}\Theta Bp_3+eBe^{e\Theta B}x_1)^2-(p_3-eEt)^2+s_{\pm}-m^2)F_{\pm}(x_1,t)=0 \quad \text{(III.43)}$$

من أجل تبسيط هذه المعادلة نقوم بتغير المتغير حيث نضع :

$$P_2=e^{e\Theta B/2}p_2-i\frac{e}{2}\Theta Bp_3 \quad \text{(III.44)}$$

$$eE\tau^2=(p_3-eEt)^2 \quad \text{(III.45)}$$

$$eBe^{eB\Theta}\rho^2=(P_2+eBe^{eB\Theta}x_1)^2 \quad \text{(III.46)}$$

باستعمال قانون السلسلة يمكننا حساب المشتقات في المتغيرات الجديدة بحيث :

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}=-\sqrt{eE}\frac{\partial}{\partial\tau}\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial t^2}=eE\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \quad \text{(III.47)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\rho}=\sqrt{eBe^{eB\Theta}}\frac{\partial}{\partial\rho}\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}=eBe^{eB\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \quad \text{(III.48)}$$

بالتالي فإن:

$$\Big(-eE\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+eBe^{eB\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-eE\tau^2-eBe^{eB\Theta}\rho^2-m^2\pm eBe^{eB\Theta}-ieE\Big)F_{\pm}(\rho,\tau)=0 \quad \text{(III.49)}$$

يمكننا فصل متغيرات هذه المعادلة بحيث نكتبها على الشكل:

$$eE\Big(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\tau^2+i+\frac{m^2}{eE}\Big)F_{\pm}(\rho,\tau)=eBe^{eB\Theta}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\rho^2\pm1\Big)F_{\pm}(\rho,\tau) \quad \text{(III.50)}$$

اذن يمكننا كتابة الحل على شكل جداء دالتين كل دالة تتعلق بمتغير بحيث:

$$F_{\pm}(\rho,\tau) = \chi_{\pm}(\rho)\Phi_{\pm}(\tau) \tag{III.51}$$

بالتعويض في المعادلة (III.50) نتحصل على الجملة التالية:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \tau^2 + i + \lambda_{\pm}\Big)\Phi_{\pm}(\tau) = 0 \tag{III.52}$$

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \rho^2 \pm 1\Big)\chi_{\pm}(\rho) = K_{\pm}\chi_{\pm}(\rho) \tag{III.53}$$

حيث

$$\lambda_{\pm} = \frac{m^2 - eBe^{eB\Theta}K_{\pm}}{eE} \tag{III.54}$$

من الواضح أن المعادلة (III.53) هي معادلة شرودنغر للهزاز التوافقي ، بالتالي :

$$K_{+} = -2(n+1) \quad , \quad K_{-} = -2n \qquad , \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{III.55}$$

و الحل $\chi_{\pm}$ نكتبه بدلالة كثير حدود هيرميت : $\chi_{\pm} = e^{-\rho^2/2}H_n(\rho)$. في المعادلة (III.52) نقوم بتغير المتغير بحيث نضع $\tau = -i2^{-1/2}x$ و نضع $\kappa = (i+\lambda_{\pm})/2$ أنظر [26] في القسم 2.8 ، بالتالي تُصبح المعادلة (III.52) على الشكل :

$$\frac{\partial^2\Phi_{\pm}}{\partial x^2} + \Big(\frac{1}{4}x^2 - \kappa\Big)\Phi_{\pm} = 0 \tag{III.56}$$

نقوم بتغير المتغير مرة اخرى بحيث نضع $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}x$ ونضع $\nu = i\kappa - 1/2$ فنتحصل على :

$$\frac{\partial^2\Phi_{\pm}}{\partial z^2} + \Big(-\frac{1}{4}z^2 + \nu + \frac{1}{2}\Big)\Phi_{\pm} = 0 \tag{III.57}$$

هذه المعادلة تُسمى المعادلة التفاضلية للمكافئ–الاسطواني (Parabolic cylinder equation) [27] ، حلول هذه المعادلة تُعطى بالدوال المكافئ–الاسطواني [28, 26]:

$$\begin{cases} \Phi_{1+} = D_{\nu}(z) \\ \Phi_{2+} = D_{-\nu-1}(-iz) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \Phi_{1-} = D_{-\nu-1}(iz) \\ \Phi_{2-} = D_{\nu}(-z) \end{cases} \tag{III.58}$$

حيث

$$\nu = -1 + i\frac{\lambda_\pm}{2} \quad , \quad z = (i-1)\tau \tag{III.59}$$

3.III مُعدل إنتاج الأزواج

الحلول (III.58) تُشكل مجموعتين مستقلتين خطيا .من التعبيرات المقاربة لـ D_ν [29] نلاحظ أن الدوال Φ_{i+} تؤدي إلى حالات مُحددة جيدا عند $t \to \pm\infty$. فعليا ، Φ_{i+} هي الحلول ذات الترددات الموجبة و Φ_{i-} هي الحلول ذات الترددات السالبة ، عند $t \to \infty$. الحلول ترتبط بالعلاقة [25] :

$$\Phi_{1+} = \beta\Phi_{2-} + \alpha\Phi_{2+} \tag{III.60}$$

$$\Phi_{2+} = -\beta^*\Phi_{1-} + \alpha^*\Phi_{1+} \tag{III.61}$$

مع $|\beta|^2 + |\alpha|^2 = 1$. من تعبيرات الدوال D_ν يمكننا البرهان أنها ترتبط بالعلاقات التالية [26] :

$$D_\nu(z) = e^{\nu\pi i}D_\nu(-z) + \frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(-\nu)}e^{(\nu-1)\pi i/2}D_{-\nu-1}(-iz) \tag{III.62}$$

وهذا يعني أن $\beta = e^{i\pi\nu}$. عدد إنتاج الازواج يُعطى بـ $|\beta|^2 = e^{-\pi\lambda}$. لأن الفرميونات التي لدينا مُميزة بالاعداد الكمية n, p_3, P_2 والاشارة $\pm$ التي توافق حالتي السبين . وبالتالي لإيجاد المعدل الكلي يجب علينا الجمع على كل الحالات الكمومية . من أجل تعديل الحساب نضع النظام داخل صندق ابعاده L ، بالتالي متوسط عدد إنتاج الازواج:

$$\bar{N} = \int \mathrm{d}P_2\mathrm{d}p_3 \sum_n \left(|\beta_+|^2 + |\beta_-|^2\right)\frac{L^2}{(2\pi)^2} \tag{III.63}$$

أولا نقوم بحساب المجموع :

$$\sum_n \left(|\beta_+|^2 + |\beta_-|^2\right) = \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right)\left(\exp\left(-2\frac{Be^{B\Theta}}{eE}\right) + 1\right)\sum_n \exp\left(-2n\frac{Be^{B\Theta}}{eE}\right) \tag{III.64}$$

حيث المجموع يُشكل متسلسلة هندسية ، بالتالي نكتب المجموع على الشكل :

$$\sum_n \left(|\beta_+|^2 + |\beta_-|^2\right) = \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right)\left(\exp\left(-2\pi\frac{Be^{eB\Theta}}{E}\right) + 1\right)\frac{1}{1 - \exp\left(-2\pi\frac{Be^{eB\Theta}}{E}\right)}$$

$$= \exp\Big(-\frac{\pi m^2}{eE}\Big)\coth\Big(-\frac{\pi B e^{eB\Theta}}{E}\Big) \tag{III.65}$$

لأن المجموع لا يتعلق صراحة بـ P_2, p_3 يمكننا استبدال التكاملين عليهما بـ [30, 31]:

$$\int \mathrm{d}P_2 \;\rightarrow\; eBL \quad , \quad \int \mathrm{d}p_3 \;\rightarrow\; eET \tag{III.66}$$

بالتالي معدل إنتاج الازواج الذي يُعبر عن عدد إنتاج الازواج في وحدة الحجم في وحدة الزمن :

$$I = \frac{\bar{N}}{L^3 T} = \frac{e^2 EB}{(2\pi)^2}\exp\Big(-\frac{\pi m^2}{eE}\Big)\coth\Big(-\frac{\pi B e^{eB\Theta}}{E}\Big) \tag{III.67}$$

III.4 الخلاصة

في هذا الفصل قمنا بكتابة معادلة ديراك المشوهة في وجود الحقل الكهرومغناطيسي مع الاخذ بعين الاعتبار تطبيق Seiberg-Witten ، ثم بعد ذالك قمنا بحل هذه المعادلة في حالة حقل كهرومغناطيسي ثابت $(B = \mathrm{cte}, E = \mathrm{cte})$ وباستعمال معاملات Bogoliubov تحصلنا على كثافة عدد الجسيمات المنتجة ومن ثمة مُعدل انتاج الجسيمات .

على عكس المقال المنشور [25] والذي تحصل على حلول لا تتعلق بمعامل التشوه Θ والذي ينجم عنه مُعدل انتاج الجسيمات كلاسيكي ، وهذا بسبب اهمال المؤلفين لتطبيقات Seiberg-Witten للحقول ، فإن الحلول المتحصل عليها (وهذا بأخذ تطبيقات Seiberg-Witten بعين الاعتبار) تُعطينا معدل إنتاج الازواج من الجسيمات يتعلق بمعامل التشوه Θ (III.67) وهذا مُتوقع حسب اعمال سابقة ، حيث ان معامل التشوه Θ يمكنه ان يلعب دور حقل كهرومغناطيسي أو دور الكمون الكيميائي .

الفصل IV

إنتاج الأزواج في QED في الفضاء المنحني غير التبديلي

1.IV مقدمة

موضوع نظرية الحقول الكمومية في الفضاء–زمن المنحني هو دراسة سلوك الحقول الكمومية التي تنتشر في مجال الحقل الجاذبي بالمفهوم الكلاسيكي . يتم استخدامه لتحليل الظواهر التي تكون فيها الطبيعة الكمومية والتأثيرات الجاذبية مهمة على حد سواء . ولكن مع افتراض أن الطبيعة الكمومية للجاذبية التي يتم دراستها بالجاذبية الكمومية لا تلعب دورا حاسما ، بحيث يمكن وصف الجاذبية بالفضاء–زمن المنحني كما هو الحال في اطار النسبية العامة . فكرة المفهوم الكلاسيكي للجاذبية في اطار النسبية العامة هي في استبدال الفضاء المسطح (فضاء Minkowski) بالفضاء المنحني [32] .

الآن لنعتبر حالة عامة لنظام فيزيائي موصوف بالفعل التالي في فضاء Minkowski :

$$S[\phi(x)] = \int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{IV.1}$$

من أجل الحصول على فعل هذا النظام في الفضاء المنحني ، أولا نكتب الفعل في معلم عطالي محلي ، ووفقا لمبدأ التكافؤ لاينشتاين فإن فعل هذا النظام له الشكل (IV.1) . شكل الفعل في نظام احداثيات كيفي نتحصل عليه بتحويل الاحداثيات . كنتيجة ، الفعل في وجود الحقل الجاذبي نتحصل عليه من فعل النسبية الخاصة باستخدام القوانين التالية :

1. إستبدال مترية منكوفسكي بالمترية المنحنية $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$.

2. استبدال الاشتقاق العادي بالاشتقاق التغايري $\partial_\mu \to D_\mu$

3. استبدال الحجم العنصري : $\mathrm{d}^4x \to \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$ حيث $g = \det(g_{\mu\nu})$. الحجم العنصري $\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$ هو حقيقة لا تغايري .

بالتالي ، فعل النظام في وجود الحقل الجاذبي موصوف بتنسور المترية $g_{\mu\nu}$ يُعطى بـ :

$$S[\phi(x)] = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}(\phi(x), D_\mu\phi(x)) \tag{IV.2}$$

هذا يُسمى التفاعل الادنى . من أجل حقل ديراك الفعل الذي يصف النظام في النسبية الخاصة يُعطى بـ:

$$S_{\mathrm{Dirac}} = \int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a - m)\psi \tag{IV.3}$$

في الفضاء-زمن المنحني يُعطى الفعل بـ :

$$S_{\mathrm{Dirac}} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\bar{\psi}(\gamma^a\nabla_a - m)\psi \tag{IV.4}$$

مع $\nabla_a = a^\mu_a(\partial_\mu - \Gamma_\mu)$ حيث a^μ_a تُسمى vierbein أو tetrad يمكن اعتبارها مجموعة من 4 تنسورات تغايرية مُرقمة بالقرينة a (أنظر الملحق 2) ، و Γ_μ يُسمى الاتصال السبيني (spin connection) ويُعطى بـ [33]:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8}g_{\lambda\alpha}\Big[\Big(\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^\mu}\Big)a^\alpha_a - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\Big][\tilde{\gamma}^\lambda, \tilde{\gamma}^\nu] \tag{IV.5}$$

حيث $\Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ هي رموز Christoffel ، و $\tilde{\gamma}^\mu$ هي المصفوفات غاما لديراك في الفضاء-زمن المنحني . يمكننا اعادة كتابة فعل ديراك في الفضاء-زمن المنحني (IV.2) على الشكل التالي :

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\bar{\psi}(\tilde{\gamma}^\mu D_\mu - m)\psi \tag{IV.6}$$

حيث $D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$. و مصفوفات غاما ديراك في الفضاء-زمن المنحني تُعطى بـ :

$$\tilde{\gamma}^\mu = a^\mu_a\gamma^a \tag{IV.7}$$

2.IV QED في الفضاء المنحني غير التبديلي

من الفعل (IV.6) يمكننا كتابة اللاغرونجية التي تصف الالكتروديناميك الكمومية في الفضاء-زمن المنحني على الشكل التالي :

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\bar{\psi}(\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iqA_\mu) - m)\psi \tag{IV.8}$$

حيث A_μ هو الحقل الكهرومغناطيسي و q هو ثابت الاقتران في الالكترودیناميك الكمومي . من أجل الحصول على النظام في الفضاء–زمن غير التبديلي نقوم باستبدال الجداء العادي بالجداء نجمة بين الحقول في اللاغرونجية :

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \star \bar{\psi} \star \tilde{\gamma}^\mu \star (\partial_\mu - \Gamma_\mu - iqA_\mu) \star \psi - m\sqrt{-g} \star \bar{\psi} \star \psi \tag{IV.9}$$

الجداء نجمة من أجل الرتبة الأولى في Θ يُعطى بـ :

$$\phi \star \varphi = \phi\varphi + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\varphi \tag{IV.10}$$

بالتالي من أجل الرتبة الأولى في Θ اللاغرونجية (IV.9) تُصبح على الشكل :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\sqrt{-g}\hat{\bar{\psi}}\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iq\hat{A}_\mu)\hat{\psi} + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sqrt{-g}\partial_\beta(\hat{\bar{\psi}}\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iq\hat{A}_\mu)\hat{\psi}) \\
&+ \frac{i}{2}\sqrt{-g}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\hat{\bar{\psi}}\partial_\beta(\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iq\hat{A}_\mu)\hat{\psi}) + \frac{i}{2}\sqrt{-g}\hat{\bar{\psi}}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\tilde{\gamma}^\mu\partial_\beta((\partial_\mu - \Gamma_\mu - iq\hat{A}_\mu)\hat{\psi}) \\
&- \frac{i}{2}\sqrt{-g}\hat{\bar{\psi}}\tilde{\gamma}^\mu\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\Gamma_\mu - iqA_\mu)\partial_\beta\hat{\psi} - im\sqrt{-g}\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} - \frac{im}{2}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sqrt{-g}\partial_\beta(\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}) \\
&\qquad - \frac{im}{2}\sqrt{-g}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\hat{\bar{\psi}}\partial_\beta\hat{\psi}
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

باستخدام معادلة اولر–لاغرونج من أجل الحقل $\hat{\bar{\psi}}$ نجد أن معادلة ديراك غير التبديلية في الفضاء–زمن المنحني تُعطى بـ :

$$\begin{aligned}
(\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iq\hat{A}_\mu) - m)\hat{\psi} + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}\Big[(\partial_\alpha\tilde{\gamma}^\mu)\partial_\beta\partial_\mu\hat{\psi} - \partial_\alpha(\tilde{\gamma}^\mu(\Gamma_\mu + iq\hat{A}_\mu))\partial_\beta\hat{\psi}\Big] \\
- \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \ln\sqrt{-g}\partial_\beta\Big[\Big(\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iq\hat{A}_\mu) - m\Big)\hat{\psi}\Big] = 0
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

1.2.IV حل المعادلة من أجل فضاء–زمن كوْن Bianchi I

فضاء–زمن كوْن Bianchi I غير متماثل المناحي يُعطى بالمترية [33, 34]

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + \mathrm{d}z^2 \tag{IV.13}$$

وبالتالي تنسور المترية $g_{\mu\nu}$ يُعطى بـ :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad g = \det(g_{\mu\nu}) = -t^4 \tag{IV.14}$$

و

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{IV.15}$$

في صياغة tetrad العلاقة بين مترية الفضاء–زمن المنحني $g_{\mu\nu}$ و ومترية الفضاء–زمن المماسي عند كل نقطة من الفضاء–زمن المنحني (الذي هو فضاء مُسطح ويُعطى بفضاء منكوفسكي) η_{ab} هي :

$$g_{\mu\nu} = b^a_\mu b^b_\nu \eta_{ab} \tag{IV.16}$$

حيث η_{ab} هي مترية الفضاء المسطح وتُعطى بـ $\text{diag}(-,+,+,+)$. يمكن اختيار تنسورات الاساس على الشكل التالي:

$$b^0_\nu = (1,0,0,0) \quad , \quad b^1_\nu = (0,t,0,0) \quad , \quad b^2_\nu = (0,0,t,0) \quad , \quad b^3_\nu = (0,0,0,1) \tag{IV.17}$$

و المجموعة $\{a^\mu_a\}$ ترتبط بالمجموعة $\{b^a_\mu\}$ وفق العلاقة التالية :

$$a^\mu_a = \eta_{ab} g^{\mu\nu} b^b_\nu \tag{IV.18}$$

وبالتالي يمكننا إيجاد أن المجموعة $\{a^\mu_a\}$ تأخذ الشكل :

$$a^\mu_0 = (1,0,0,0) \quad , \quad a^\mu_1 = (0,t^{-1},0,0) \quad , \quad a^\mu_2 = (0,0,t^{-1},0) \quad , \quad a^\mu_3 = (0,0,0,1) \quad , \tag{IV.19}$$

من العلاقة بين مصفوفات غاما ديراك في الفضاء–زمن المنحني والفضاء–زمن المسطح (المعادلة (IV.7)) يمكننا الحصول على شكل مصفوفات غاما ديراك في الفضاء–زمن المنحني:

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 \quad , \quad \tilde{\gamma}^1 = t^{-1}\gamma^1 \quad , \quad \tilde{\gamma}^2 = t^{-1}\gamma^2 \quad , \quad \tilde{\gamma}^3 = \gamma^3 \tag{IV.20}$$

يمكننا كتابتها على شكل مضغوط :

$$\tilde{\gamma}^\mu = \sqrt{g^{\mu\mu}}\gamma^\mu \tag{IV.21}$$

الآن نقوم بحساب مركبات رموز Christoffel . حيث ترتبط هذه الرموز بتنسور المترية بالعلاقة التالية :

$$\Gamma^\alpha_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\Big(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}\Big) \tag{IV.22}$$

بتعويض المترية نجد أن المركبات غير المعدومة هي :

$$\Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = t \quad , \quad \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{20} = t^{-1} \tag{IV.23}$$

اما بقيةالمركبات فهي معدومة . الآن نقوم بحساب مركبات الاتصال السبيني . من أجل المركبة الزمنية لدينا :

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \frac{1}{8}g_{\alpha\lambda}\Big[\Big(\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}\Big)a^\alpha_a - \Gamma^\alpha_{\nu 0}\Big][\tilde{\gamma}^\lambda, \tilde{\gamma}^\nu] \\ &= \frac{1}{8}g_{00}\Big[\Big(\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}\Big)a^0_a - \Gamma^0_{\nu 0}\Big][\tilde{\gamma}^0, \tilde{\gamma}^\nu] + \frac{1}{8}g_{11}\Big[\Big(\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}\Big)a^1_a - \Gamma^1_{\nu 0}\Big][\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^\nu] + \frac{1}{8}g_{22}\Big[\Big(\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}\Big)a^2_a - \Gamma^2_{\nu 0}\Big][\tilde{\gamma}^2, \tilde{\gamma}^\nu] \\ &+ \frac{1}{8}g_{33}\Big[\Big(\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}\Big)a^3_a - \Gamma^3_{\nu 0}\Big][\tilde{\gamma}^3, \tilde{\gamma}^\nu]\end{aligned} \tag{IV.24}$$

لدينا

$$\begin{aligned}&\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}a^0_a = \frac{\partial b^0_\nu}{\partial x^0}a^0_0 = 0 \qquad ,(\text{لأن } b^0_\mu \text{ تنسور ثابت}) \\ &\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}a^1_a = \frac{\partial b^1_\nu}{\partial x^0}a^1_1 = \frac{\partial b^1_1}{\partial x^0}a^1_1 = t^{-1} \\ &\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}a^2_a = \frac{\partial b^2_\nu}{\partial x^0}a^2_2 = \frac{\partial b^2_2}{\partial x^0}a^2_2 = t^{-1} \\ &\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^0}a^3_a = \frac{\partial b^3_\nu}{\partial x^0}a^3_3 = 0 \qquad (\text{لأن } b^3_\mu \text{ تنسور ثابت})\end{aligned} \tag{IV.25}$$

هذا يعني أن :

$$\Gamma_0 = = \frac{1}{8} g_{11} \Big[t^{-1} - \underbrace{\Gamma^1_{10}}_{t^{-1}} \Big] [\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^1] + \frac{1}{8} g_{22} \Big[t^{-1} - \underbrace{\Gamma^2_{20}}_{t^{-1}} \Big] [\tilde{\gamma}^2, \tilde{\gamma}^2] = 0 \tag{IV.26}$$

من أجل المركبات الفضائية لدينا :

$$\Gamma_i = \frac{1}{8} g_{\alpha\lambda} \Big[\Big(\frac{\partial b^a_\nu}{\partial x^i} \Big) a^\alpha_a - \Gamma^\alpha_{\nu i} \Big] [\tilde{\gamma}^\lambda, \tilde{\gamma}^\nu] = -\frac{1}{8} g_{\alpha\lambda} \Gamma^\alpha_{\nu i} [\tilde{\gamma}^\lambda, \tilde{\gamma}^\nu] \quad , i = 1, 2, 3 \tag{IV.27}$$

لأن التنسورات b^a_μ تتعلق فقط بـ t فإن:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= -\frac{1}{8} g_{\alpha\lambda} \Gamma^\alpha_{\nu 1} [\tilde{\gamma}^\lambda, \tilde{\gamma}^\nu] = -\frac{1}{8} \underbrace{g_{00}}_{-1} \underbrace{\Gamma^0_{11}}_{t} [\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 - \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0] - \frac{1}{8} \underbrace{g_{11}}_{t^2} \underbrace{\Gamma^1_{01}}_{t^{-1}} [\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 - \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1] \\
&= \frac{1}{8} \Big(t\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 - t\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 - t\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 + t\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 \Big) \\
&= \frac{t}{4} \Big(\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 - \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^0 \Big) \\
&= \frac{t}{4} \sqrt{|g^{00}||g^{11}|} \Big(\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0 \Big) \qquad , (\tilde{\gamma}^\mu = \sqrt{|g^{\mu\mu}|} \gamma^\mu \text{ حيث استخدمنا }) \\
&= \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^1 \qquad , (\eta^{01} = 0 \text{ و } \gamma^1 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^1 + 2\eta^{01} \text{ حيث استخدمنا })
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

بنفس الطريقة نجد أن بقية المركبات تُعطى بـ :

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^2 \quad , \quad \Gamma_3 = 0 \tag{IV.29}$$

قبل أن نقوم بحساب حدود المعادلة (IV.12) نقوم بحساب تطبيق Seiberg-Witten من أجل الحقل $A_\mu = (0, 0, 0, -Et)$ [33] حيث التصحيح الأول:

$$A^{(1)}_\mu = (0, 0, 0, -\Theta^{30} E^2 t) \tag{IV.30}$$

من أجل التصحيح الأول نكتب $\hat{A}_\mu$ على الشكل:

$$\hat{A}_\mu = (0, 0, 0, -E(1 + \Theta^{30} E)t) \tag{IV.31}$$

الآن نقوم بحساب حدود المعادلة (IV.12) من أجل $\Theta^{03} = \Theta$ وبقية المركبات معدومة . لدينا الحد الأول :

$$(\tilde{\gamma}^{\mu}(\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu} - iqA_{\mu}) - m)\psi = (\gamma^0\partial_0 + t^{-1}(\gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_1) + \gamma^3(\partial_3 + iqEe^{-E\Theta}t) + t^{-1}\tilde{\gamma}^0 - m)\psi \tag{IV.32}$$

من أجل حساب الحد الثاني لدينا :

$$\partial_{\alpha}\tilde{\gamma}^{\mu} = \gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\sqrt{|g^{\mu\mu}|} = \gamma^1\partial_0\sqrt{|g^{11}|} + \gamma^2\partial_0\sqrt{|g^{22}|} = -\gamma^1 t^{-2} - \gamma^2 t^{-2} \tag{IV.33}$$

بالتالي:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}\tilde{\gamma}^{\mu})\partial_{\beta}\partial_{\mu}\psi &= -\frac{1}{2}\Theta^{0\beta}(\partial_0\tilde{\gamma}^{\mu})\partial_{\beta}\partial_{\mu}\psi \\
&= \frac{1}{2}\Theta^{0\beta}(\partial_0\tilde{\gamma}^1)\partial_{\beta}\partial_1\psi + \frac{1}{2}\Theta^{0\beta}(\partial_0\tilde{\gamma}^2)\partial_{\beta}\partial_2\psi \\
&= -\frac{1}{2t^2}\Theta^{03}\gamma^1\partial_3\partial_1\psi - \frac{1}{2t^2}\Theta^{03}\gamma^2\partial_3\partial_2\psi \\
&= -\frac{\Theta}{2t^2}(\gamma^1\partial_1\partial_3 + \gamma^2\partial_2\partial_3)\psi
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

من أجل حساب الحد الثالث لدينا :

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha}(\tilde{\gamma}^{\mu}\Gamma_{\mu}) &= \gamma^{\mu}\Gamma_{\mu}\partial_0(\sqrt{|g^{\mu\mu}|}) = \gamma^1\Gamma_1\partial_0(\sqrt{|g^{11}|}) + \gamma^2\Gamma_2\partial_0(\sqrt{|g^{22}|}) \\
&= \gamma^1\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^1\partial_0(t^{-1}) + \gamma^2\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^2\partial_0(t^{-1}) = \gamma^0 t^{-2}
\end{aligned} \tag{IV.35}$$

حيث استخدمنا $\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1$ و $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$. ولدينا أيضا:

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha}(iq\gamma^{\mu}A_{\mu}) &= \partial_0(iq\tilde{\gamma}^3 A_3) \\
&= -iqEe^{-E\Theta}\gamma^3\partial_0(t) \\
&= -iqEe^{-E\Theta}\gamma^3
\end{aligned} \tag{IV.36}$$

بالتالي :

$$\frac{1}{2}\Theta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}(\tilde{\gamma}^{\mu}(\Gamma_{\mu} + iqA_{\mu}))\partial_{\beta}\psi = \frac{\Theta}{2t^2}\gamma^0\partial_3\psi - \frac{iqE\Theta}{2}\gamma^3\partial_3\psi \tag{IV.37}$$

من أجل حساب الحد الرابع لدينا :

$$\partial_\alpha(\ln\sqrt{-g}) = 2\partial_0 \ln t = 2t^{-1} \tag{IV.38}$$

وأيضا:

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \ln\sqrt{-g}\partial_\beta &= \frac{i}{2}\Theta^{03}\partial_0 \ln\sqrt{-g}\partial_3 \\ &= it^{-1}\Theta\partial_3 \end{aligned}\tag{IV.39}$$

بالتالي :

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \ln\sqrt{-g}\partial_\beta\Big[\Big(\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu - iq\hat{A}_\mu) - m\Big)\psi\Big] &= i(t^{-1}\Theta\gamma^0\partial_3\partial_0 + t^{-2}\Theta(\gamma^1\partial_3\partial_1 + \tilde{\gamma}^2\partial_3\partial_2) \\ &+ \gamma^3(t^{-1}\Theta\partial_3^2 + iqE\Theta\partial_3) + t^{-2}\gamma^0\Theta\partial_3 - mt^{-1}\Theta\partial_3)\psi \end{aligned}\tag{IV.40}$$

بتعويض المعادلات (IV.32),(IV.34),(IV.37) و (IV.40) في المعادلة (IV.12) فنجد :

$$\begin{aligned}&(\gamma^0\partial_0 + t^{-1}(\gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2) + \gamma^3(\partial_3 + iqEe^{-E\Theta}t) + t^{-1}\gamma^0 - m)\psi + i\frac{\Theta}{2t^2}(\gamma^1\partial_1\partial_3 + \gamma^2\partial_2\partial_3)\psi \\ &- i\frac{\Theta}{2t^2}\gamma^0\partial_3\psi - \frac{qE\Theta}{2}\gamma^3\partial_3\psi - i(t^{-1}\Theta\gamma^0\partial_3\partial_0 + t^{-2}\Theta(\tilde{\gamma}^1\partial_3\partial_1 + \gamma^2\partial_3\partial_2) + \gamma^3(t^{-1}\Theta\partial_3^2 \\ &\quad + iqE\Theta\partial_3) + t^{-2}\gamma^0\Theta\partial_3 - mt^{-1}\Theta\partial_3)\psi = 0 \end{aligned}\tag{IV.41}$$

من أجل إلغاء مساهمة الاتصال السبيني نضع $\psi_0 = t\psi$ وبالتالي نجد :

$$\begin{aligned}&\Big[\gamma^0\Big((1 - \frac{i\Theta}{t}\partial_3)\partial_0 - i\frac{\Theta}{2t^2}\partial_3\Big) + \gamma^3\Big(e^{qE\Theta/2}\partial_3 - i\frac{\Theta}{t}\partial_3^2 + iqEte^{-E\Theta}\Big) + \frac{1}{t}(\gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2) \\ &- \frac{i\Theta}{2t^2}(\gamma^1\partial_3\partial_1 + \gamma^2\partial_3\partial_2) - m\Big(1 - \frac{i}{t}\Theta\partial_3\Big)\Big]\psi_0 = 0 \end{aligned}\tag{IV.42}$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها كمجموع مؤثرين من الرتبة الأولى يتبادلان على الشكل التالي :

$$(\hat{K}_1 + \hat{K}_2)\Phi = 0 \tag{IV.43}$$

$$\hat{K}_2\Phi = k\Phi = -\hat{K}_1\Phi \tag{IV.44}$$

حيث k هو ثابت الفصل . و $\Phi = \gamma^3\gamma^0\psi_0$. المؤثرين $\hat{K}_1$ و $\hat{K}_2$ يُعطيان بـ :

$$\begin{aligned}\hat{K}_1 = t\Big[&\gamma^3\Big((1-\frac{i\Theta}{t}\partial_3)\partial_0 + i\frac{\Theta}{2t^2}\partial_3\Big) + \gamma^0(e^{qE\Theta/2}\partial_3 - i\frac{\Theta}{t}\partial_3^2 + iqEte^{-E\Theta}) \\ &- \frac{i\Theta}{2t^2}(\gamma^1\partial_1\partial_3 + \gamma^2\partial_2\partial_3)\gamma^3\gamma^0 - \gamma^3\gamma^0 m(1-\frac{i}{t}\Theta\partial_3)\Big] \qquad \text{(IV.45)}\\ \hat{K}_2 = (&\gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2)\gamma^3\gamma^0 \qquad \text{(IV.46)}\end{aligned}$$

لاحظ أن المؤثرين $\hat{K}_1$ و $\hat{K}_2$ يتبادلان مع المؤثر $\hat{\nabla}_i$ وبالتالي يمكننا كتابة السبينور Φ على الشكل :

$$\Phi = \Phi_0 \exp -i(k_x x + k_y y + k_z z) \qquad \text{(IV.47)}$$

حيث Φ_0 هو سبينور يتعلق فقط بـ t . من أجل عملنا نختار التمثيل التالي لمصفوفات غاما ديراك:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} \;,\; \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_0 \\ -i\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \;,\; \gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.48)}$$

حيث σ_0 هي مصفوفة الوحدة 2×2 و σ_i هي مصفوفات باولي وتُعطى بـ:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \;,\; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.49)}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_0 \\ -i\sigma_o & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_0\sigma_3 \\ -i\sigma_0\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3\sigma_1 \\ -\sigma_3\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.50)}\end{aligned}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$. بنفس الطريقة نجد أن:

$$\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \tag{IV.51}$$

حيث استخدمنا حقيقة ان $\sigma_2\sigma_2 = \sigma_0$. بالتالي فإن معادلة القيم الذاتية للمؤثر $\hat{K}_2$ نكتبها على الشكل :

$$\hat{K}_2\Phi = k\Phi \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \right\} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = k \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} +\sigma_2 k_x \Phi_2 - i k_y \Phi_1 = k\Phi_1 \\ -\sigma_2 k_x \Phi_1 + i k_y \Phi_2 = k\Phi_2 \end{cases} \tag{IV.52}$$

بحل هذه الجملة نجد أن:

$$\Phi_2 = \frac{k_x \sigma_2}{i k_y - k}\Phi_1 \tag{IV.53}$$

و $k = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. معادلة القيم الذاتية من أجل المؤثر $\hat{K}_1$ ، من أجل $k_z = 0$ ، تُكتب على الشكل :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} iqEte^{-E\Theta} - m \begin{pmatrix} -i\sigma_3\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3\sigma_1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{t} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \tag{IV.54}$$

هذا يعطينا المعادلة التالية:

$$\sigma_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \sigma_1 qEte^{-E\Theta}\Phi_1 + mi\sigma_3\sigma_1\Phi_1 = -\frac{k}{t}\Phi_1 \tag{IV.55}$$

لدينا $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ حيث φ_1 و φ_2 دوال سلمية ، بالتالي المعادلة (IV.55) تًصبح على الشكل :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} qEte^{-E\Theta} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} m \right\} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{IV.56}$$

هذا يؤدي إلى الجملة التالية :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{k}{t}\varphi_1+(qEte^{-E\Theta}+im)\varphi_2=0 \tag{IV.57}$$
$$-\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{k}{t}\varphi_2+(qEte^{-E\Theta}-im)\varphi_1=0 \tag{IV.58}$$

نقوم بإدخال المشتق بالنسبة لـ t على المعادلة (IV.58) فنجد :

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{k}{t^2}\varphi_2+(qtEe^{-E\Theta}-im)\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}+qEe^{-E\Theta}\varphi_1=0 \tag{IV.59}$$

من المعادلتين (IV.57), (IV.58) نجد :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{k}{t}\varphi_1-(qEte^{-E\Theta}+im)\varphi_2 \tag{IV.60}$$
$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{t}\varphi_2+(qEte^{-E\Theta}-im)\varphi_1 \tag{IV.61}$$

بتعويض النتيجة (IV.60) في الحد الرابع من (IV.59) والنتيجة (IV.61) في الحد الثاني من (IV.59) نجد :

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{t}\Big(\frac{k}{t}\varphi_2+(qEte^{-E\Theta}-im)\varphi_1\Big)-\frac{k}{t^2}\varphi_2+(qtEe^{-E\Theta}-im)\Big(-\frac{k}{t}\varphi_1-(qEte^{-E\Theta}+im)\varphi_2\Big)$$
$$+qEe^{-E\Theta}\varphi_1=0$$
$$\Rightarrow -\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k^2}{t^2}\varphi_2-\frac{k}{t^2}\varphi_2-\Big((qtE)^2e^{-2E\Theta}+m^2\Big)\varphi_2+qEe^{-E\Theta}\varphi_1=0 \tag{IV.62}$$

لدينا

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{t}\Big(\frac{k}{t}\varphi_2+(qEte^{-E\Theta}-im)\varphi_1\Big)\\&=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{k}{t^2}\varphi_2-qEe^{-E\Theta}\varphi_1+\frac{im}{t}\varphi_1\\\Rightarrow \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{k}{t^2}\varphi_2-qEe^{-E\Theta}\varphi_1+\frac{im}{qtEe^{-E\Theta}-im}\Big(\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{k}{t^2}\varphi_2\Big)\end{aligned} \tag{IV.63}$$

نقوم بإهمال الحد الاخير وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}-\frac{k}{t^2}\varphi_2-qEe^{-E\Theta}\varphi_1 \tag{IV.64}$$

نقوم باضافة هذا الحد في المعادلة (IV.62) فنجد :

$$\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}+\frac{k(k-2)}{t^2}\varphi_2-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2}-\Big((qtE)^2e^{-2E\Theta}+m^2\Big)\varphi_2=0 \tag{IV.65}$$

من أجل تبسيط هذه المعادلة نضع $\varphi_2=t^{1/2}\chi$ بالتالي فإن :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2t^{1/2}}\chi+t^{1/2}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=t^{1/2}\Big(\frac{1}{2t}\chi+\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\Big) \tag{IV.66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{1}{2t^{1/2}}\Big(\frac{1}{2t}\chi+\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\Big)+t^{1/2}\Big(-\frac{1}{2t^2}\chi+\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}t^2}\Big)\\&=t^{1/2}\Big(\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{4t^2}\chi\Big)\end{aligned} \tag{IV.67}$$

بالتعويض في المعادلة (IV.65) نجد :

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}t^2}+\Big(-\frac{k^2-2k+\frac{3}{4}}{t^2}+m^2+q^2E^2e^{-2E\Theta}t^2\Big)\chi=0 \tag{IV.68}$$

من أجل حل هذه المعادلة نقوم بتغير المتغير بحيث نضع $s=iqEe^{-E\Theta}t^2$. الآن نحسب المشتقات في المتغير الجديد:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}=2iqEe^{-E\Theta}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \tag{IV.69}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(2iqEe^{-E\Theta}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)=2iqEe^{-E\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}-4q^2E^2e^{-2E\Theta}t^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\\&=2iqEe^{-E\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+i4qEe^{-E\Theta}s\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\\&=iqEe^{-E\Theta}\Big(2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+4s\frac{\mathrm{d}^2}{ds^2}\Big)\end{aligned} \tag{IV.70}$$

ونضع أيضا $\chi=s^{-1/4}\xi$ بالتالي فإن :

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}s}=-\frac{1}{4}s^{-5/4}\xi+s^{-1/4}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=s^{-1/4}\Big(-\frac{1}{4s}\xi+\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}\Big) \tag{IV.71}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}s^2}&=-\frac{1}{4}s^{-5/4}\Big(-\frac{1}{4s}\xi+\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}\Big)+s^{-1/4}\Big(+\frac{1}{4s^2}\xi-\frac{1}{4s}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2}\Big)\\&=s^{-1/4}\Big(\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2}-\frac{1}{2s}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}+\frac{5}{16s^2}\xi\Big)\end{aligned} \tag{IV.72}$$

هذا يعني أن :

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}t^2} = iqEe^{-E\Theta}s^{-1/4}\Big(-\frac{2}{4s}\xi + 2\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s} + 4s\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2} - 2\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s} + \frac{5}{4s}\xi\Big)$$
$$= iqEe^{-E\Theta}s^{-1/4}\Big(\frac{3}{4s}\xi + 4s\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2}\Big) \tag{IV.73}$$

بالتعويض في المعادلة (IV.68) نجد :

$$iqEe^{-E\Theta}s^{-1/4}\Big(\frac{3}{4s}\xi + 4s\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2}\Big) + iqEe^{-E\Theta}\Big(-\frac{k^2-2k+\frac{3}{4}}{s} + \frac{m^2}{iqEe^{-E\Theta}} - s\Big)s^{-1/4}\xi = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2} + \Big[-\frac{1}{4} + \frac{1}{s}\frac{m^2}{4iqEe^{-E\Theta}} + \frac{1}{s^2}\Big(-\frac{k^2}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{3}{16} + \frac{3}{16}\Big)\Big]\xi = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2} + \Big[-\frac{1}{4} + \frac{1}{s}\frac{m^2}{4iqEe^{-E\Theta}} + \frac{1}{s^2}\Big(-\frac{(k-1)^2}{4} + \frac{1}{4}\Big)\Big]\xi = 0 \tag{IV.74}$$

لدينا المعادلة التفاضلية لـ Whittaker [35] :

$$\frac{\partial^2 M_{\kappa,\mu}}{\partial s^2} + \Big[-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{s} + \frac{1}{s^2}\Big(\mu^2 + \frac{1}{4}\Big)\Big]M_{\kappa,\mu} = 0 \tag{IV.75}$$

بمقارنة المعادلتين (IV.74) مع (IV.75) نجد ان حل المعادلة (IV.74) يُعطى بدلالة دوال Whittaker كالتالي :

$$\xi = \alpha_1 M_{\kappa,\mu}(s) + \alpha_2 W_{\kappa,\mu}(s) \tag{IV.76}$$

حيث $\kappa = -\frac{im^2}{4qEe^{-E\Theta}}$ و $\mu = \frac{k-1}{2}$ و α_1, α_2 ثابتين كيفيين . هذا يعني أن حل المعادلة (IV.65) هو :

$$\varphi_2 = C_1 M_{\kappa,\mu}(iqEe^{-E\Theta}t^2) + C_2 W_{\kappa,\mu}(iqEe^{-E\Theta}t^2) \tag{IV.77}$$

بإعادة نفس الخطوات في إيجاد الحل φ_2 يمكننا إيجاد أن الحل φ_1 يُعطى بـ :

$$\varphi_1 = C_3 M_{\kappa,\mu+1}(iqEe^{-E\Theta}t^2) + C_4 W_{\kappa,\mu+1}(iqEe^{-E\Theta}t^2) \tag{IV.78}$$

3.IV كثافة عدد إنتاج الأزواج

من أجل بناء الأنماط ذات الترددات الموجبة والسالبة نستخدم السلوك المقارب للحلين φ_1 و φ_2 ونقارنها مع الحلول التي نتحصل عليها من حل معادلة هاملتون–جاكوبي النسبوية [33] (انظر الملحق 3) . في الحقيقة ، من أجل $t \to 0$ ، يمكننا

البرهان أن الحلول ذات التردد الموجب $\varphi^{+}(t\to 0)$ والتردد السالب $\varphi^{-}(t\to 0)$ هي تُعطى بالاشكال المقاربة التالية :

$$\varphi_0^{+} \sim C_0^{+} M_{\kappa,\mu}(iqEe^{-E\Theta}t^2) \tag{IV.79}$$

و

$$\varphi_0^{-} \sim \left(C_0^{+} M_{\kappa,\mu^{+}}(iqEe^{-E\Theta}t^2)\right)^{*} = C_0^{+}(-1)^{-\mu+1/2} M_{\kappa,-\mu}(iqEe^{-E\Theta}t^2) \tag{IV.80}$$

حيث C_0^{+} هي دالة التنظيم و دالة Whittaker لديها السلوك المقارب التالي :

$$x \to 0 \qquad M_{\kappa,\mu}(x) \sim e^{-x/2}x^{\mu+1/2} \tag{IV.81}$$

بالمثل من أجل $t\to\infty$ الأنماط ذات التردد الموجب والسالب الموافقة هي:

$$\varphi_\infty^{+} \sim C_\infty^{+} W_{\kappa,\mu}(iqEe^{-E\Theta}t^2) \tag{IV.82}$$

و

$$\varphi_\infty^{-} \sim C_\infty^{-} W_{-\kappa,\mu}(-iqEe^{-E\Theta}t^2) \tag{IV.83}$$

حيث $C_\infty^{\pm}$ هي دوال التنظيم .

نمط التردد الموجب φ_0^{+} عند $t\to 0$ يمكن التعبير عنه بدلالة النمطين موجب التردد φ_∞^{+} وسالب التردد φ_∞^{-} عن طريق تحويل Bogoliubov:

$$\varphi_0^{+} = \alpha\varphi_\infty^{+} + \beta\varphi_\infty^{-} \tag{IV.84}$$

مع $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. دالة Whittaker $M_{\kappa,\mu}(z)$ يمكن التعبير عنها بدلالة $W_{\kappa,\mu}(z)$ على الشكل [36, 35]:

$$M_{\kappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-\kappa+\frac{1}{2})}e^{-i\pi\kappa}W_{-\kappa,\mu}(-z) + \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+\kappa+\frac{1}{2})}e^{-i\pi(\kappa-\mu-1/2)}W_{\kappa,\mu}(z) \tag{IV.85}$$

وبالتالي فإن :

$$\varphi_0^{-} = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-\kappa+1/2)}e^{-i\pi\kappa}\varphi_\infty^{-} + \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+\kappa+1/2)}(-1)^{-1/4}e^{-i\pi(\kappa-\mu-1/2)}(\varphi_\infty^{-})^{*} \tag{IV.86}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $W_{-\kappa,\mu}(-z) = (W_{\kappa,\mu}(z))^*$. عند المطابقة هذه النتيجة مع $\varphi_0^- = \alpha\varphi_\infty^- + \beta(\varphi_\infty^-)^*$ نجد أن:

$$\alpha = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-\kappa+1/2)} e^{-i\pi\kappa} \tag{IV.87}$$

$$\beta = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+\kappa+1/2)} (-1)^{-1/4} e^{-i\pi(\kappa-\mu-1/2)} \tag{IV.88}$$

كثافة احتمال إنتاج زوج من الجسيمات ذات سبين $\frac{1}{2}$ هو :

$$P(k) = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = \frac{|\Gamma(\mu-\kappa+\frac{1}{2})|^2}{|\Gamma(\mu+\kappa+\frac{1}{2})|^2} e^{i2\pi \mathrm{Im}\mu} \tag{IV.89}$$

لدينا من خواص الدالة غاما :

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y} \tag{IV.90}$$

بالتالي فإن :

$$|\Gamma(\mu-\kappa+1/2)|^2 = |\Gamma(i(\frac{k_\perp}{2} + \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}))| = \frac{\pi}{\left(\frac{k_\perp}{2} + \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_\perp}{2} + \frac{\pi m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right)} \tag{IV.91}$$

$$|\Gamma(\mu+\kappa+1/2)|^2 = |\Gamma(i(\frac{k_\perp}{2} - \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}))| = \frac{\pi}{\left(\frac{k_\perp}{2} - \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_\perp}{2} - \frac{\pi m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right)} \tag{IV.92}$$

بالتعويض في العبارة (IV.89) نجد تعبير كثافة احتمال إنتاج الزوج :

$$P(k) = \frac{\left(\frac{k_\perp}{2} - \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_\perp}{2} - \frac{\pi m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right)}{\left(\frac{k_\perp}{2} + \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_\perp}{2} + \frac{\pi m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right)} e^{-\pi k_\perp} \tag{IV.93}$$

كثافة عدد إنتاج الجسيمات n يُعطى بدلالة معاملات Bogoliubov كالتالي :

$$\begin{aligned} n(k) = |\beta|^2 &= \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \\ &= \Big(\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\beta|^2}\Big)^{-1} = \Big[\Big(\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}\Big)^{-1} + 1\Big]^{-1} \end{aligned} \tag{IV.94}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن معاملات Bogoliubov من أجل الفرميونات تُحقق $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. وبالتالي فإن :

$$n(k) = \left(\frac{\left(\frac{k_\perp}{2} + \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_\perp}{2} + \frac{\pi m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right)}{\left(\frac{k_\perp}{2} - \frac{m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_\perp}{2} - \frac{\pi m^2}{4qEe^{-E\Theta}}\right)} e^{\pi k_\perp} + 1 \right)^{-1} \tag{IV.95}$$

4.IV الخلاصة

في هذا الفصل قمنا بكتابة معادلة ديراك في الفضاء Bianchi I في الهندسة غير التبديلية في وجود حقل كهربائي ثابت مع الاخذ بعين الاعتبار تطبيق Seiberg-Witten لمختلف الحقول . ثم بعد ذالك قمنا بحل هذه المعادلة وتحصلنا على الحلول على شكل دوال Whittaker ، وباستعمال طريقة مُعاملات Bogoliubov استطعنا إيجاد كثافة عدد إنتاج الجسيمات (سبين $\frac{1}{2}$) والتي وجدناها تتعلق بالحقل الكهربائي ومعامل التشوه Θ ، وهنا يظهر تأثير تشوه الفضاء (الهندسة غير التبديلية) في كمية الجسيمات المنتجة .

من خلال العبارة (IV.95) لاحظنا أن عدد الجسيمات المنتجة يزداد في وجود التشوه في الفضاء وبالتالي معامل التشوه Θ يلعب دور الكمون الكيميائي .

خاتمة عامة

في الاخير نُشير إلى أننا استخدمنا في هذه المذكرة الجداء نجمة (جداء مويال) كآلية لبناء النظريات في الهندسة غير التبديلية واستخدمنا تطبيقات Seiberg-Witten من أجل المحافظة على التناظر الموجود في النظريات عند الانتقال من الهندسة التبديلية إلى الهندسة غير التبديلية ، واستخدمنا ايضا طريقة مُعاملات Bogoliubov كآلية لحساب كثافة احتمال وكثافة عدد إنتاج الجسيمات من أجل إيجاد إنتاج الازواج في نظرية QED في الهندسة غير التبديلية في عدة حالات (كتابة اللاغرونجية المشوهة للنظام ثم كتابة معادلة الحركة المشوهة وإيجاد حلولها ،وحساب مُعدل و كثافة عدد إنتاج الجسيمات من خلال طريقة Bogoliubov).

كتطبيق أول اعتبرنا حالة حقل ديراك في وجود حقل كهرومغناطيسي ثابت ، بحيث عندما قمنا بحل معادلة ديراك المشوهة وباستخدام السلوكات المقاربة للحلول وجدنا أن مُعدل إنتاج الجسيمات ذات سبين $\frac{1}{2}$ يتعلق بوسيط التشوه Θ كما هو مُتوقع ، على عكس النتائج المتحصل عليها في المقال المنشور [25] ، الذي تحصل على مُعدل إنتاج الجسيمات في شكل كلاسيكي بسبب إهمال تطبيقات Seiberg-Witten .

كتطبيق ثاني اعتبرنا حالة حقل ديراك في وجود حقل كهربائي ثابت في الفضاء المنحني (انحناء الفضاء يلعب دور الحقل الجاذبي) ، بحيث عندما قمنا بحل المعادلة من أجل حالة فضاء Bianchi I وجدنا أن الحلول تُعطى بدوال Whittaker وبدراسة سلوك المقارب لهذه الدوال عند النهايات استطعنا حساب كثافة عدد إنتاج الجسيمات ذات سبين $\frac{1}{2}$ والتي جدنا أنها تتعلق بوسيط التشوه Θ الذي يعمل على الزيادة في عدد الجسيمات المنتجة وبالتالي هو يلعب دور الكمون الكيميائي .

ثم إن تطبيقنا الهندسة غير التبديلة على إنتاج الجسيمات في نظرية QED أعطى نتائج جديدة تختلف عن النتائج الموجودة في الهندسة التبديلية ، والتي هي اكثر دقة . كما نأمل مستقبلا أن الهندسة غير التبديلية ستساهم في إيجاد نظريات جديدة وفي تكميم الجاذبية .

ملحق 1

بعض التعاريف

فضاء شوارتز

تعريف 1.1 ([37]) فضاء شوارتز $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ هو فضاء شعاعي طبولوجي للدوال $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ بحيث تُحقق $f \ni C^\infty(\mathbb{R}^n)$ و :

$$x^\alpha \partial^\beta f(x) \to 0 \quad , \quad |x| \to \infty \tag{1.1}$$

من أجل الزوج من القرائن $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. من أجل $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ و $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ بحيث :

$$||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f| \tag{1.2}$$

متتالية الدوال $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ تتقارب للدالة f من $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ إذا كان :

$$||f_n - f||_{\alpha,\beta} \to 0 \quad , \quad k \to \infty \tag{1.3}$$

من أجل كل $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$

الجبر$-C^*$

قبل تعريف الجبر$-C^*$ نحتاج الى بعض التعاريف

تعريف 2.1 ([38]) النظيم على الفضاء الشعاعي A هو التطبيق $||\ \ \ || A \to \mathbb{R}$ بحيث يُحقق

1. $||a|| \geq 0$ من أجل كل $a \in A$.

2. $||a|| = 0$ إذا وفقط إذا كان $a = 0$

3. $||\alpha a|| = |\alpha| ||a||$ من أجل كل $\alpha \in \mathbb{C}$ و $a \in A$.

4. $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$ (متراجحة المثلث)

النظيم على A يُعرف المتري d على A بـ $d(a,b) := ||a-b||$. الفضاء الشعاعي مع النظيم الذي هو تام في المتري المرتبط بالنظيم يُسمى فضاء بناخ .

تعريف 3.1 ([38]) جبر باناخ هو فضاء باناخ B وفي نفس الوقت جبر ، والذي من أجل كل $x, y \in B$ فإن

$$||xy|| \leq ||x|| ||y|| \tag{1.4}$$

تعريف 4.1 ([38]) التماثل العكسي (*involution*) على الجبر B هو التطبيق الخطي-الحقيقي $a \to a^*$ بحيث من أجل كل $a, b \in B$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ فإن :

$$(a^*)^* = a \tag{1.5}$$

$$(ab)^* = b^* a^* \tag{1.6}$$

$$(\alpha a)^* = \bar{\alpha} a^* \tag{1.7}$$

حيث $\bar{\alpha}$ هو المرافق المركب .

الجبر-$*$ هو جبر مزود بالتماثل العكسي .

الآن بالامكان أن نُقدم تعريف الجبر-C^*

تعريف 5.1 ([38]) الجبر-C^* هو فضاء باناخ مركب A وفي نفس الوقت هو جبر-$*$ ، بحيث يُحقق من أجل كل $a, b \in A$ فإن :

$$||ab|| \leq ||a|| ||b|| \tag{1.8}$$

$$||a^* a|| = ||a||^2 \tag{1.9}$$

بعبارة اخرى ، هو جبر-$*$ باناخ يحتوي على (1.9)

ببساطة شديدة ، A له بُنيتين بنية جبرية وبنية طبولوجية تأتي من النظيم ، الشرط المتمثل في ان يكون A جبر باناخ يُعبر عن التلائم بين البُنيتين .

مُتشعب بواسون (Poisson manifold)

تعريف 6.1 ([39]) قوس بواسون (او بنية بواسون) على المتشعب P هي العملية ثنائية الخطية $\{\cdot,\cdot\}$ على $\mathcal{F}(P) = C^{\infty}(P)$ ، بحيث تُحقق:

1. $(\mathcal{F}(P), \{\cdot,\cdot\})$ هي جبر *Lie* .
2. $\{\cdot,\cdot\}$ يُحقق قاعدة *Leibniz* :

$$\{FG, H\} = \{F, H\}G + F\{G, H\} \tag{1.10}$$

من أجل كل $F, G, H \in \mathcal{F}(p)$

المتشعب P مُزود بقوس بواسون على $\mathcal{F}(P)$ يُسمى متشعب بواسون .

الدالة الناعمة (Smooth function)

اذا كانت مُشتقات الدالة f المعرفة على المجال U موجودة لكل الرتب ومستمرة فاننا نقول عن f انها دالة ناعمة [40].

ملحق 2

صياغة tetrad

نستخدم صياغة tetrad في النسبية العامة لأن القوانين الفيزيائية تكون واضحة في المعلم العطالي المحلي من معلم الاحداثيات ، بحيث في هذا الصياغة الكائن الاساسي هو vierbein ،e_μ^a، الذي يُقابل المترية في صياغة الاحداثيات . هنا في هذا القسم سنقدم المبادئ الاساسية لهذه الصياغة .

صيغة tetrad هي طريقة اخرى لمشكلة تحديد تأثير الجاذبية على الأنظمة الفيزيائية ، وهي كإجراء شكلي وليست نظرية ، فهي لا تقوم بالتنبؤات المختلفة ولكنها تسمح بالتعبير عن المعادلات المرتبطة بشكل دقيق [41].

باستخدام مبدأ التكافؤ ، نُقدم الاحداثيات العطالية المحلية ξ^a عند نقطة معطاة X . في هذه الاحداثيات عنصر الطول يُعطى بـ $\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\mathrm{d}\xi^a\mathrm{d}\xi^b$ حيث η_{ab} هي مترية منكوفسكي (الفضاء المماسي) . في معلم غير عطالي عام تنسور المترية يُكتب على الشكل [41] :

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \tag{2.1}$$

حيث

$$e_\mu^a = \left(\frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu}\right)_{x=X} \tag{2.2}$$

لاحظ أن النظام العطالي المحلي عند كل نقطة X هو مُحدد وبالتالي اذا حولنا الاحداثيات غير العطالية المحلية $x^\mu \to x'^\mu$

$$e_\mu^a \to e'^a_\mu = \left(\frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x'^\mu}\right)_{x=X} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\nu}\right)_{x=X} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu^a \tag{2.3}$$

الكائنات e_μ^a يمكن اعتبارها كمجموعة من اربعة تنسورات تغايرية مُرقمة بالقرينة a ، هذه المجموعة تُسمى vierbein .

من العلاقة (2.2) نلاحظ أن :

$$e_a^\mu = \Big(\frac{\partial \xi_a(x)}{\partial x_\mu}\Big)_{x=X} = g^{\mu\nu}\eta_{ab}\Big(\frac{\partial \xi^b(x)}{\partial x^\nu}\Big) = g^{\mu\nu}\eta_{ab}e_\nu^b \tag{2.4}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن الاحداثيات ξ^a تتغير في الفضاء–زمن المماسي (فضاء مسطح) عند النقطة X وبالتالي فإن $\xi^a = \eta^{ab}\xi_b$ بينما الاحداثيات x^μ تتغير في الفضاء–زمن المنحني بالتالي $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$. وبالتالي نستنتج أن :

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad , \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a \tag{2.5}$$

الآن ، من أجل تنسور ضد تغايري في الفضاء–زمن المسطح اي فضاء النسبية الخاصة A^a فإنه يرتبط بمقابله في الفضاء–زمن المنحني $A^\mu(x)$ بالعلاقة التالية :

$$A^\mu(x) = e_a^\mu A^a \tag{2.6}$$

وبالمثل من أجل تنسور تغايري:

$$A_\mu(x) = e_\mu^a A_a \tag{2.7}$$

لاحظ أن A_a هو سلمية تحت تحويل الاحداثيات $x^\mu \to x'^\mu$.

نُقدم هذه الصياغة لأنها سهلة عندما نريد البحث عن تفسير الكميات في الصياغة وضرورية في دراسة السبينور [42] اي في دراسة الجسيمات ذات سبين $\frac{1}{2}$.

ملحق 3

معادلة جاكوبي–هاميلتون النسبوية

هي معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى بدلالة الفعل S والذي يُعطى بدلالة اللاغرانجية بـ:

$$S = \int L dt \tag{3.1}$$

تساعدنا هذه المعادلة في إيجاد الدوال التي تعبر عن حالة الجسيم .

إشتقاق معادلة جاكوبي–هاميلتون النسبوية

لدينا عبارة الطاقة النسبوية :

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{3.2}$$

الأن نعرف دالة في الفضاء – زمن لا تغايرية $S(x, y, z, t)$ تمثل الفعل للجسيم ، و التي نتحصل عليها من اللاغرانجية النسبوية . نستطيع تعريف الطاقة و كمية الحركة بدلالة هذا الفعل كالتالي :

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad , \quad p^i = -\frac{\partial S}{\partial x_i} \tag{3.3}$$

نعوض العبارتين السابقتين في معادلة الطاقة النسبية فنجد :

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + m^2 = 0 \tag{3.4}$$

المعادلة السابقة تُمثل معادلة جاكوبي –هاميلتون النسبوية لجسيم حر . ويمكننا بسهولة التأكد أن دالة الفعل يُمكن كتابتها بالشكل :

$$S = -Et + p_x x + p_y y + p_z z \tag{3.5}$$

الدالة الموجية التي تعبر عن حالة الجسيم نحصل عليها من الفعل بالشكل التالي :

$$\psi = Ae^{iS} \tag{3.6}$$

A : ثابت التنظيم .

تُعمم معادلة جاكوبي – هاميلتون النسبوية إلى الشكل التالي :

$$g^{\alpha\beta}\Big(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - eA_\alpha\Big)\Big(\frac{\partial S}{\partial x^\beta} - eA_\beta\Big) + m^2 = 0 \tag{3.7}$$

الأن ، نحاول إيجاد حل معادلة جاكوبي – هاميلتون النسبية في مترية مُعرفة بالشكل :

$$ds^2 = -dt^2 + t^2(dy^2 + dz^2) + dz^2 \tag{3.8}$$

وكمون شعاعي من الشكل : $A_\alpha = (0, 0, 0, -Et)$. إذن معادلة جاكوبي –هاميلتون النسبية تُصبح متعلقة فقط بـ t بالتالي نستطيع كتابة S و الذي يُمثل حل المعادلة بالشكل التالي :

$$S = F(t) + k_x x + k_y y + k_z z \tag{3.9}$$

بتعويض عبارة S في معادلة جاكوبي–هاميلتون النسبية المعممة ومع أخذ بعين الاعتبار المترية و الحقل المعرفين سابقًا نجد أن الدالة $F(t)$ تحقق :

$$\dot{F}^2 = \frac{k_x^2 + k_y^2}{t^2} + (k_z + eEt)^2 + m^2 \tag{3.10}$$

المعادلة الأخيرة بدلالة F هي معادلة تفاضلية في الزمن ، حلها لها السلوكات التقاربية الأتية :

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \pm\frac{1}{2}t\sqrt{e^2E^2t^2 - m^2} \mp \frac{m^2}{2eE}\log(eEt + \sqrt{e^2E^2t^2 - m^2}) \tag{3.11}$$

$$\psi = \exp(iS) \to C\exp(\pm\frac{i}{2}eEt^2)(eEt)^{\mp\frac{im^2}{2eE}} \tag{3.12}$$

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \pm\sqrt{(k_x^2+k_y^2)\log(t)} \tag{3.13}$$

$$\psi = \exp(iS) \to Ct^{\pm i\sqrt{k_x^2+k_y^2}} \tag{3.14}$$

حيث أن ψ تمثل الدالة النسبوية للجسيم . نستطيع تحديد الحلول التي تمثل الترددات الموجبة و الحلول التي تمثل الترددات السالبة إنطلاقًا من إشارة المؤثر $i\partial_t$. وضعية الترددات الموجبة ستوافق القيم الذاتية الموجبة ، و وضعية الترددات السالبة ستوافق القيم الذاتية السالبة ، إذن في حالتنا الإشارات العلوية للدالة ψ تمثل الترددات السالبة و الإشارات السفلية ل ψ تمثل الترددات الموجبة .

هذا التطبق يساعدنا في تحديد الحلول التي تمثل الحالات in و الحالات out المدروسة في الفصل الرابع إنطلاقا من دراسة السلوكات المقاربة للحلول و مقارنتها مع السلوك التقاربي للدالة الموجية الموافقة لمعادلة جاكوبي – هاميلتون و التي وجدناها ، و بالنسبة للترادات الموجبة و السالبة للحلول التي وجدناها في الفصل الرابع نستطيع تحديدها من إشارة المؤثر $i\partial_t$.

قائمة المراجع

[1] Werner Heisenberg. Quantum-theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations. *Z. Phys*, 33:879, 1925.

[2] P. A. M Dirac. The fundamental equations of quantum mechanics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 109:642, 1925.

[3] Max Born, Werner Heisenberg, and Pasqual Jordan. On quantum mechanics ii. *Z. Phys*, 35:557, 1926.

[4] Alain Connes. *Noncommutative geometry.* Academic Press, 1994.

[5] Masoud Khalkhali. Very basic noncommutative geometry. *arXiv preprint math/0408416*, 2004.

[6] Nikita A Nekrasov. Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories. *arXiv preprint hep-th/0011095*, 2000.

[7] Eugene Paul Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. In *Part I: Physical Chemistry. Part II: Solid State Physics*, page 110. Springer, 1997.

[8] Antoine Royer. Wigner function as the expectation value of a parity operator. *Phys. Rev A*, 15:449, 1977.

[9] Allen C. Hirshfeld and Peter Henselder. Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics. *AM. J. PHYS*, page 537, 2008.

[10] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, 9909:032, 1999.

[11] Richard J Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 378:207, 2003.

[12] B Jurco, L Moller, S Schraml, P Schupp, and J Wess. Construction of non-abelian gauge theories on noncommutative spaces. *Eur, Phys. J. C*, 21:383, 2001.

[13] Kayhan Ülker and Barış Yapışkan. Seiberg-witten maps to all orders. *Phys. Rev D*, 77:065, 2008.

[14] Kang Li, Jianhua Wang, and Chiyi Chen. Representation of noncommutative phase space. *Mod. Phys. Lett A*, 20:2165, 2005.

[15] KT Hecht. The klein paradox: An example from the history of negative energy state difficulties: The positron interpretation. In *Quantum Mechanics*, pages 692–702. Springer, 2000.

[16] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev*, 82(5):664, 1951.

[17] Ren-Chuan Wang and Cheuk-Yin Wong. Finite-size effect in the schwinger particle-production mechanism. *Phys. Rev. D*, 38:348, 1988.

[18] Qiong-gui Lin. Electron - positron pair creation in vacuum by an electromagnetic field in (3+1)-dimensions and lower dimensions. *J. Phys.*, G25:17, 1999.

[19] E Brezin and C Itzykson. Pair production in vacuum by an alternating field. *Phys. Rev. D*, 2:1191, 1970.

[20] Ashok Das. *Lectures of Quantum Field Theory.* World Scientific Publishing Company, 2008.

[21] Dan V. Schroeder Michael E. Peskin. *An introduction to quantum field theory.* Frontiers in Physics. Addison-Wesley Pub. Co, 1995.

[22] Babis Anastasiou. Quantum field theory i. *http://www.itp.phys.ethz.ch / research / particle / lectures / quantum-field-theory-1.html*, 2017.

[23] S Haouat and R Chekireb. Exact fermion pair creation by an electric field in ds2 space-time. *arXiv:1504.08201*, 2012.

[24] S Haouat and R Chekireb. Effect of electromagnetic fields on the creation of scalar particles in a flat robertson–walker space-time. *The European Physical Journal C*, 72:2034, 2012.

[25] N Chair and MM Sheikh-Jabbari. Pair production by a constant external field in noncommutative qed. *Phys. Lett B*, 504:141, 2001.

[26] Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, Francesco G Tricomi, and Harry Bateman. *Higher transcendental functions*, volume 2. New York McGraw-Hill, 1953.

[27] Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations*, volume 1. Gulf Professional Publishing, 1998.

[28] IS Gradshteyn and IM Ryzhik. Table of integrals, series, and products, 2007.

[29] G. N. Watson E. T. Whittaker. *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1927.

[30] AI Nikishov. Pair production by a constant external field. *Sov. Phys. JETP*, 30:660, 1970.

[31] SI Kruglov. Pair production and solutions of the wave equation for particles with arbitrary spin. *arXiv preprint hep-ph/9908410*, 1999.

[32] Sean Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2004.

[33] Victor M Villalba and Walter Greiner. Creation of dirac particles in the presence of a constant electric field in an anisotropic bianchi i universe. *Mod. Phys. Lett A*, 17(28):1883–1891, 2002.

[34] N Mebarki, L Khodja, and S Zaim. On the noncommutative space-time bianchi i universe and particles pair creation process. *EJTP*, 7:181, 2010.

[35] Nicholas D Kazarinoff. Asymptotic expansions for the whittaker functions of large complex order m. *Transactions of the American Mathematical Society*, 78:305, 1955.

[36] E Ersin Kangal, Hilmi Yanar, Ali Havare, and Kenan Sogut. Creation of vector bosons by an electric field in curved spacetime. *Ann. Phys*, 343:40, 2014.

[37] John K Hunter. Notes on partial differential equations. *Lecture Notes, https://www. math. ucdavis. edu/hunter/pdes/pdes.*, 2014.

[38] Nicolas P Landsman. Lecture notes on c^*-algebras, hilbert c^*-modules, and quantum mechanics. *arXiv preprint math-ph/9807030*, 1998.

[39] Jerrold E Marsden and Tudor S Ratiu. Introduction to mechanics and symmetry. *Physics Today*, 48:65, 1995.

[40] Stephen Semmes. An introduction to some aspects of functional analysis, 5: Smooth functions and distributions. *Rice University Publication*, 1998.

[41] Philippe Jetzer and Simone S Bavera. Advanced topics in general relativity and gravitational waves. *https:// www.physik.uzh.ch / groups / jetzer /*, 2017.

[42] Friedrich W Hehl, Paul Von der Heyde, G David Kerlick, and James M Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys*, 48:393, 1976.

مُلخص

في هذه المذكرة درسنا حقل ديراك في سياقات مُختلفة ضمن الهندسة غير التبديلية . قمنا بدراسة جسيمات ذات سبين 1/2 في حقل كهرومغناطيسي ثابت وقد برهنا أن الهندسة غير التبديلية تلعب دور الكمون الكيميائي . من جهة اخرى ، قمنا بدراسة معادلة ديراك في كوْن Bianchi I وبرهنا أن عدد الجسيمات المنتجة يتعلق بوسيط الهندسة غير التبديلية .

الكلمات المفتاحية : الهندسة غير التبديلية ، حقل ديراك ، إنتاج الازواج من الجسيمات .

Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié le champ de Dirac dans différents contextes dans le cadre de la géométrie noncommutative. On a étudié les particules spin ½ dans un champ électromagnétique constant et on a montré que la géométrie noncommutative joue le rôle d'un potentiel chimique. Une autre étude de l'équation de Dirac dans un univers de Bianchi 1 montre aussi que le nombre de particules créées dépend du paramètre de la noncommutativité.

Mots-clés : Géométrie noncommutative ; Champ de Dirac ; Création des paires de particules.

Abstract

In this memorandum we have studied the Dirac field in different contexts in the noncommutative geometry formalism. The spin ½ particles have been studied in a constant electromagnetic field and we have shown that the noncommutative geometry plays the role of a chemical potential. In another hand, we have studied of Dirac's equation in the Bianchi 1 universe, and we have shown that the number of particles created depends on the parameter of noncommutativity.

Keywords: Noncommutative geometry; Dirac field; Pair creation.