الجمهوريـــة الجـزائـــرية الديمـــقراطيـــة الشعبيـــــة

وزارة التـــعليـــم العــــالـــي والبـــحث

العلمــــــــي

جـــامعـــة قـــــاصدي مربـــاح ورقـــلة

كليـــة الـــرياضـــيات وعلـــوم المـــادة

قســــم الفيـــــزيـــــاء

مــذكرة مقدمــة لاستكمـــال متطلبـــات شهادة المـــاستر أكـــــاديمـــي

الميـــــدان: علـــوم المـــادة

الشعبة : فيزياء

التخصـــص : فيزيـــاء نظـــريـــة

من إعـــداد الطـــالبتـــين:

مــــريـــــم يعقــــوب

مسعــــــــودة معمـــــري

بعنـــــــوان :

تطبيـــقات معـــادلة DKP من أجــل $(Spin - 0)$ و $(Spin - 1)$ في فضاءات منحنية في وجـــود حـــقل

نوقشت وأجريـــت علـــناً بتـــاريـــخ

أ: الحاج بالشراير بلغيثار(أستاذ محاضر أ- جامعــة قاصدي مرباح ورقلة) رئيساً

أ: الأمين خــوجة(أستاذ محــاضر أ- جامعـــة قاصدي مرباح ورقلة) مــشرفــاً.

أ : قريـــشي زينب (أستاذ محـــاضر أ- جامعـــة قاصدي مرباح ورقلة)مناقشا ومقررا.

السنة الجامعية: 2018/2019

المحتويات

جـــدول الـــــرمـــوز

الرمــز	الاســـم
$\Lambda^{\mu\nu}$	مصفوفة لورنتز
i	عدد مركب
P	مؤثر الاسقاط
H	الهاميلتونيان
L	الكثافة اللاغرنجية
β^{μ}	مصوفات كامر
m	الكتلة
ψ_k	دالة الموجة
e	الشحنة

مقـــــــدمـــــــة

مقـــــدمــــة

قبل ظهور نظرية المجال الكمي حاول علماء الفيزياء صياغة معادلة شرودينغر لتوافق النسبية الخاصة ، حيث وضعت أول معادلة موجية نسبية سميت بمعادلة كلاين جوردن وهي معادلة تصف الجسيمات ذات $(spin-0)$وتتوافق مع النسبية الخاصة . بعدها في سنة 1928 قدم ديراك معادلته الشهيرة لوصف الجسيمات ذات $(spin-1/2)$.
بقيت الأبحاث الفيزيائية في تطور مستمر إلى غاية أن تم اقتراح معادلة (DKP) سنة 1936من طرف العلماء الثلاث Duffin-Kemmer-Petiau وهي معادلة تصف الجسيمات ذات $(spin-0)$ و$(spin-1)$[1].
انطلاقا من هذا سيتم في الفصل الأول من هذه المذكرة التعرف على معادلة DKP وخصائصها في الحالة الحرة ،في الفصل الثاني نحاول إيجاد الحلول التحليلة لمعادلة (DKP) في فضاء $(de\ sitter)$للجسيمات ذات (spin-1) في وجود حقل جاذبية ذو بعدين تحت تأثير حقل كهربائي ثابت بالإضافة الى حساب كثافة انشاء الجسيمات ، وفي الفصل الثالث نقوم بحساب الحلول التحليلة لمعادلة DKP في فضاء(Gödel-type) ذو 4 أبعاد للجسيمات ذات $(spin-0)$ مع حساب القيم الذاتية للطاقة ،أما عن الفصل الرابع نحاول الوصول لجملة المعادلات التفاضلية لنفس المعادلة الأخيرة لكن بالنسبة للجسيمات ذات (spin-1) .

الفصل الأول

معادلة DKP الحرة

★ مقدمة

★ حقل DKP الحر

★ حلول معادلة DKP الحرة

★ الخلاصة

1.1- مقدمة :

معادلة Duffin-Kemmer-Petiau هي معادلة نسبية من الدرجة الأولى تصف بوزونات ذات (spin-0)و(spin-1) [2]،[3] وهي تشبه معادلة ديراك من حيث الشكل ،وكانت نتيجة أعمال منفصلة ل Duffin، Kemmer وpetiau خلال ثلاثينيات القرن الماضي.
في هذه السنوات الاخيرة إزداد الإهتمام بهذه المعادلة (DKP)خاصة تطبيقاتها في نظريات الحقول والنظريات العيارية $(Gauge\ teory)$ [4] ،وكذلك تطبيقاتها في الفضاءات المنحنية والنسبية العامة [5][6]. في هذا الفصل سنحاول أن نقدم لمحة حول حقل DKP في الحالة الحرة .

2.1- حقل DKPالحر :

إن معادلة DKP في الحالة الحرة تعطى من الشكل :

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu}-m)\,\psi=0, \tag{1.1}$$

حيث أن المصفوفات β^{μ}تحقق العلاقات الجبرية الثلاثية التالية :

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\rho}+\beta^{\rho}\beta^{\nu}\beta^{\mu}=\beta^{\mu}\eta^{\nu\rho}+\beta^{\rho}\eta^{\nu\mu}, \tag{2.1}$$

حيث $\eta^{\nu\mu}$ تمثل مترية فضاء منكوفسكي $(+,-,-,-)$.
مصفوفات β^{μ} تملك تمثيلين :مصفوفات خماسية مربعة (5×5) من أجل جسيم ذو $(spin-0)$ومصفوفات عشارية مربعة من أجل جسيم ذو $(spin-1)$يمكن كتابة هذين التمثيلين على النحو التالي:

spin(0) : (5×5)

$$\begin{array}{c}\beta^{0}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad\beta^{1}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \beta^{2}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad\beta^{3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}. \tag{3.1}$$

Spin(1) : (10×10)

$$\beta^0=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \beta^1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\tag{4.1}$$

$$\beta^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \beta^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

انطلاقا من العلاقة (2.1)الثلاثية للمصفوفات يمكننا استنتاج العلاقات التالية :

$$(\beta^\mu)^3=\eta^{\mu\mu}\beta^\mu,\tag{5.1}$$

$$\eta^\mu=2(\beta^\mu)^2-\eta^{\mu\mu},\tag{6.1}$$

$$(\eta^\mu)^2=1\quad,\quad \eta^\mu\eta^\nu-\eta^\nu\eta^\mu=0,\tag{7.1}$$

$$\eta^\mu\beta^\nu+\beta^\nu\eta^\mu=0\quad,\quad(\mu\neq\nu)\,,\tag{8.1}$$

$$\eta^{\mu\mu}\beta^{\mu}=\eta^{\mu}\beta^{\mu}=\beta^{\mu}\eta^{\mu}. \quad (9.1)$$

باستعمال هذه النتائج يمكن كتابة الكثافة اللاغرنجية لحقل DKP الحر على الشكل التالي :

$$L=\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi, \quad (10.1)$$

حيث $\bar{\psi}$معرفة بالشكل التالي :

$$\bar{\psi}=\psi^{+}\eta^{0}. \quad (11.1)$$

نضرب معادلة DKP في الحد $(\partial_{\alpha}\beta^{\alpha}\beta^{\nu})$ثم نشتق بالنسبة ل$\partial_{\nu}$ نحصل على المعادلة :

$$\Box\psi+m^{2}\psi=0. \quad (12.1)$$

وهي عبارة عن معادلة كلاين جوردنKG.
في العلاقة (10.1)من أجل $\nu=0$ يمكننا أن نكتب :

$$\partial_{t}\equiv\partial_{0} \quad , \quad i\partial_{t}\psi=H\psi, \quad (13.1)$$

حيث Hيمثل الهاميلتوني ويعرف على الشكل التالي:

$$H=i\left[\beta^{i},\beta^{0}\right]\partial_{i}+m\beta^{0}. \quad (14.1)$$

3.1- حلول معادلة DKPالحرة :

لدينا تحويل لورانتز $x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$, حيث:

$$\psi\rightarrow\psi'=U(\Lambda)\psi, \quad (15.1)$$

$$U^{-1}\beta^{\mu}U=\Lambda^{\mu}_{\nu}\beta^{\nu}. \quad (16.1)$$

من أجل تحويل عنصري $\Lambda^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+w^{\mu\nu}$حيث $(w^{\mu\nu}=-w^{\nu\mu})$نتحصل على [7]:

$$U=1+\frac{1}{2}w^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \quad , \quad S_{\mu\nu}=\left[\beta_{\mu},\beta_{\nu}\right]. \quad (17.1)$$

من أجل $(spin-0)$يمكننا أن نعرف المؤثر :(P)

$$P=-\left(\beta^{0}\right)^{2}\left(\beta^{1}\right)^{2}\left(\beta^{2}\right)^{2}\left(\beta^{3}\right)^{2}, \quad (18.1)$$

حيث p يحقق:

$$P^{2}=P_{\mu}P^{\mu}=P\beta^{\mu}. \quad (19.1)$$

يمكننا أن نبرهن أن :

$$P^{\mu}\beta^{\nu}=P\eta^{\mu\nu} \quad , \quad PS_{\mu\nu}=0 \tag{20.1}$$

كنتيجة لهذا فإن تحويلات لورانتز العنصرية المعطاة بالعلاقة (16.1)تسمح لنا بأن نكتب :

$$PU\psi=P\psi. \tag{21.1}$$

يمكننا البرهان كذلك على العبارة التالية :

$$P^{\mu}U\psi=P^{\mu}\psi+w^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}\psi, \tag{22.1}$$

بتطبيق هذا المؤثر على معادلة DKP (1.1) فاننا نحصل على :

$$\partial_{\nu}\left(P^{\nu}\psi\right)=\frac{m}{i}P\psi, \tag{23.1}$$

$$P^{\nu}\psi=\frac{i}{m}\partial^{\nu}\left(P\psi\right), \tag{24.1}$$

من خلال هاتين العبارتين يمكننا أن نتحصل على عبارة من الشكل :

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\left(P\psi\right)=\left(P\psi\right)+m^{2}\left(P\psi\right)=0, \tag{25.1}$$

إذن كل من عناصر العمود $P\psi$ هو عبارة عن حقل سلمي ذو كتلة m ويحقق معادلة كلاين غوردن (KG) باستعمال التعريف (18.1) و المصفوفات $\beta^{\mu}(5\times 5)$ يمكن كتابة المؤثرات التالية :

$$P\psi=p\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\ \psi_4\end{pmatrix} \quad , \quad p_{\mu}\psi=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\ \psi_{\mu}\end{pmatrix} \quad , \quad (\mu=0,....,3) \tag{26.1}$$

إذن المعادلة (24.1) و (26.1) والمعادلة(23)تسمح لنا بكتابة:

$$\psi_{\nu}=\frac{i}{m}\partial^{\nu}\left(\psi_4\right) \quad , \quad \left(\nu=0,1,2,3\right). \tag{27.1}$$

يمكننا أن نضع :

$$\psi_4=\sqrt{m}\varphi, \tag{28.1}$$

حيث φ هو حقل سلمي فنحصل على :

$$\psi_{\nu}=\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_{\nu}\varphi. \tag{29.1}$$

$$\psi=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_{\nu}\varphi\\ \sqrt{m}\varphi\end{pmatrix}. \tag{30.1}$$

كنتيجة لهذا يمكننا أيضا :

$$P\psi=\begin{pmatrix}0_{4\times1}\\ \sqrt{m}\varphi\end{pmatrix}\quad,\quad P^{\mu}\psi=\frac{i}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}0_{4\times1}\\ \partial^{\mu}\varphi\end{pmatrix}\quad,\quad \varphi+m^{2}\varphi=0. \tag{31.1}$$

وهذا هو شكل حل معادلة DKP الحرة للجسيمات ذات $(spin-0)$.
من أجل $(spin-1)$وبنفس الطريقة نعرف المؤثرات:

$$R^{\mu}=\begin{cases}\left(\beta^{1}\right)^{2}\left(\beta^{2}\right)^{2}\left(\beta^{3}\right)^{2}\beta^{\mu}\beta^{0}\ ;\ \mu\neq0\\ -\left(\beta^{1}\right)^{2}\left(\beta^{2}\right)^{2}\left(1-\left(\beta^{0}\right)^{2}\right)\ ;\ \mu=0\end{cases} \tag{32.1}$$

يمكن تجميع هذه العبارة على الشكل :

$$R^{\mu}=\left(\beta^{1}\right)^{2}\left(\beta^{2}\right)^{2}\left(\beta^{3}\right)^{2}\left[\beta^{\mu}\beta^{0}-\eta^{\mu0}\right]; \tag{33.1}$$

نعرف أيضا :

$$R^{\mu\nu}=R^{\mu}\beta^{\nu}. \tag{34.1}$$

هذه المؤثرات تملك الخواص التالية:

$$R^{\mu\nu}=-R^{\nu\mu}, \tag{35.1}$$

$$R^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\alpha}=\eta^{\nu\alpha}R^{\mu}-\eta^{\mu\alpha}R^{\nu}, \tag{36.1}$$

$$R^{\mu}S^{\nu\alpha}=\eta^{\mu\nu}R^{\alpha}-\eta^{\mu\alpha}R^{\nu}, \tag{37.1}$$

$$R^{\mu\nu}S^{\alpha\beta}=\eta^{\nu\alpha}R^{\mu\beta}-\eta^{\nu\beta}R^{\mu\alpha}+\eta^{\mu\beta}R^{\nu\alpha}, \tag{38.1}$$

بنفس الطريقة وباستعمال تحويلات لورانتز العنصرية يمكننا كتابة :

$$R^{\mu}U\psi=R^{\mu}\psi+w^{\mu}{}_{\alpha}R^{\alpha}\psi, \tag{39.1}$$

$$R^{\mu\nu}U\psi=R^{\mu\nu}\psi+w^{\nu}{}_{\beta}R^{\mu\beta}\psi+w^{\mu}{}_{\alpha}R^{\alpha\nu}\psi. \tag{40.1}$$

بتطبيق هذه العلاقة على معادلة(1.1) نتحصل على :

$$\partial_\nu \left(R^{\mu\nu}\psi\right) = \frac{m}{i} R^\mu \psi. \tag{41.1}$$

$$R^{\mu\alpha}\psi = -\frac{i}{m} U^{\mu\alpha}, \tag{42.1}$$

حيث :

$$U^{\mu\alpha} = \partial^\mu R^\alpha \psi - \partial^\alpha R^\mu \psi, \tag{43.1}$$

باستعمال العلاقات (41.1) (42.1) (43.1) يمكننا كتابة :

$$\partial_\nu \left(-\frac{i}{m} U^{\mu\nu}\right) = \frac{m}{i} R^\mu \psi, \tag{44.1}$$

$$\partial_\nu U^{\nu\mu} + m^2 R^\mu \psi = 0. \tag{45.1}$$

في النهاية هاتين العبارتين يمكن تجميعهما على النحو التالي:

$$\left(\Box + m^2\right) R^\mu \psi = 0 \quad ; \quad \partial_\mu R^\mu \psi = 0. \tag{46.1}$$

وهي عبارة عن معادلة بروكا من أجل حقل شعاعي $(spin-1)$ذوكتلة m حيث يمكن إيجاد الحلول لهذه المعادلة باستعمال نفس الطريقة السابقة وبتعويض المصفوفات (10*10).

4.1- خلاصة :

في هذا الفصل قمنا بتقديم لمحة على نظرية DKP وحلولها في حالة الجسيمات الحرة و في الفصول القادمة سنحاول دراسة معادلة DKP في حالة تفاعل أي في وجود حقل جاذبية أو حقل كهرومغناطيسي .

الفصل الثاني

معادلة DKP في حقل جاذبية ذو بعدين

- ★ مقدمة
- ★ معادلة DKP في وجود حقل جاذبية ذو بعدين تحت تأثير حقل كهربائي ثابت
- ★ كثافة خلق الجسيمات
- ★ خلاصة

1.2- مقدمة :

آلية إنشاء الجسيمات هي واحدة من المشاكل المهمة في علم الكون لذلك تم تخصيص العديد من الدراسات لظاهرة تكوين الجسيمات ، وذلك باستخدام نماذج فضاءات منحنية و مختلفة في وجود مجالات كهرومغناطيسية [8][9].
في هذه الدراسة نقوم بتحليل آلية إنتاج الجسيمات ذات $(spin-1)$ بناءً على نظرية DKP في وجود حقل جاذبية ذو بعدين تحت تأثير حقل كهربائي في فضاء $(de\ sitter)$. و سيكون تخطيط الدراسة كما يلي : سيتم في القسم (2.2) إيجاد الحلول التحليلية لمعادلة DKP في حقل جاذبية ذو بعدين ،في القسم (3.2) نحسب كثافة خلق (إنشاء) الجسيمات ونرسم منحنى كثافة إنشاء الجسيمات أخيرًا في القسم (4.2) نقوم بتحليل العلاقة التي تم الحصول عليها لمعدل تكوين الجسيمات لقيم مختلفة من المجال الكهربائي.

2.2- معادلة DKPفي وجود حقل جاذبية ذو بعدين تحت تأثير حقل كهربائي ثابت :

1.2.2- خصائص معادلة DKP :

★ معادلة DKP في وجود حقل جاذبية تحت تأثير حقل كهربائي مشابهة لمعادلات ماكسويل في حد الكتلة الصفرية [10]،ومعادلات كلاين جوردن وبروكا في حالة الحقول الحرة [11]. تعميمها المتغير في زمن فضاء ريمان مع وجود حقول كهرومغناطيسة خارجية يعطى بالشكل التالي :

$$\left[i\beta^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\Sigma_{\mu}+ieA_{\mu}\right)-m\right]\psi_{k}(t,x)=0. \qquad (1.2)$$

<u>حيث</u>:

* β^{μ} : مصفوفات Kemmer
* Σ_{μ} : Spin connections
* e : الشحنة
* A_{μ} : الحقل الكهرومغناطيسي
* m : الكتلة

★ في معادلة DKP نكتب مصفوفات Kemmer (β^{μ}) بدلالة مصفوفات Dirac (γ^{μ}) كالتالي:

$$\beta^{\mu}(x)=\gamma^{\mu}(x)\otimes I+I\otimes\gamma^{\mu}(x). \qquad (2.2)$$

حيث $(\otimes)$جداء كرونيكر و $\gamma^{\mu}=e_{i}^{\mu}\gamma^{i}$.

★ تكتب Σ_{μ} للجسيمات ذات $(spin-1)$بدلالة Γ_{μ}للجسيمات ذات $(spin-1/2)$ على النحو التالي :

$$\Sigma_{\mu}=\Gamma_{\mu}\otimes\mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes\Gamma_{\mu}, \qquad (3.2)$$

★ Γ_μ: Spin connections للجسيمات ذات $(spin-1/2)$ يعطى بالشكل التالي :

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \left[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\right], \tag{4.2}$$

حيث $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$هي معاملات $chistoffel$وتعطى بالعلاقة التالية:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right). \tag{5.2}$$

★ تعطى المترية $(g_{\mu\nu})$ في فضاء $(de\ sitter)$ ذو بعدين على النحو التالي:

$$ds^2 = -dt + e^{2Ht} dx^2, \tag{6.2}$$

حيث (H)يمثل ثابت هابل.
باعتبار التحويل $\eta = -\frac{1}{H} e^{-Ht}$, فان المترية (6.2)تأخذ الشكل التالي:

$$ds^2 = \frac{1}{H^2 \eta^2} \left(-d\eta^2 + dx^2\right), \tag{7.2}$$

اذن من العلاقة (6.2) نستنتج المترية ومقلوبها على الشكل المصفوفي التالي:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{2Ht} \end{pmatrix} \quad , \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{-2Ht} \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

2.2.2- حلول معادلة DKP :

من أجل الحصول على الحل العام (ψ_k) لمعادلة DKP (1.2)في وجود حقل جاذبية ذو بعدين تحت تأثير حقل كهربائي ثابت نتبع الخطوات السبعةالتالية:

الخطوة الاولى

حساب القيم $\beta^\mu(x)$ ، $\Sigma_\mu(x)$ ، $\psi_k(x)$

بمأن الدراسة في فضاء ذو بعدين $(de\ sitter) \Leftarrow (\mu = 0, 1)$ومنه المعادلة$(1.2)$تكتب على النحو التالي :

$$\left[i\beta^0 \left(\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0\right) + i\beta^1 \left(\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1\right) - m\right] \psi_k(t, x) = 0. \tag{9.2}$$

حيث:

$$A_0 = 0 \quad , \quad A_1 = \frac{-E_0}{H} e^{Ht} = \frac{E_0}{\eta H^2} \tag{10.2}$$

★ **حساب** $\beta^{\mu}(x.)$:

بتطبيق العلاقة (2.2) نجد قيم β^0 وβ^1:

- **حساب** β^0 :

$$\begin{aligned}\beta^0 &= \gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \\ &= \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11.2}$$

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

- **حساب** β^1:

بنفس الطريقة نجد:

$$\begin{aligned}\beta^1 &= \gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1 \\ &= \left(-ie^{-Ht}\sigma^2\right) \otimes I + I \otimes \left(-ie^{-Ht}\sigma^2\right) \\ &= \left[e^{-Ht} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + \left[e^{-Ht} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= e^{-Ht} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\end{aligned} \tag{13.2}$$

$$\beta^1 = e^{-Ht} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.2}$$

★ <u>حساب Σ_μ:</u>

بتطبيق العلاقات من (3.2) الى (5.2)نتحصل على قيم Σ_0 وΣ_1 على النحو التالي:

<u>$\lambda = 0$</u>

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \Gamma_0 \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes \Gamma_0 \\
\Gamma_0 &= -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu 0} \left[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\right] \\
\Gamma^\alpha_{\nu 0} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\nu g_{\beta 0} + \partial_0 g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu 0}\right)
\end{aligned} \tag{15.2}$$

<u>$\lambda = 1$</u>

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \Gamma_1 \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes \Gamma_1 \\
\Gamma_1 &= -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu 1} \left[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\right] \\
\Gamma^\alpha_{\nu 1} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\nu g_{\beta 1} + \cancelto{0}{\partial_1} g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu 1}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\nu g_{\beta 1} - \partial_\beta g_{\nu 1}\right)
\end{aligned} \tag{16.2}$$

• <u>حسابΣ_0</u>

لحساب Σ_0 لابد من حساب $\Gamma^\alpha_{\nu 0}$ وΓ_0 من العلاقات(15.2) اذن:

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\nu 0} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\nu g_{\beta 0} + \partial_0 g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu 0}\right)}$$

<u>$\alpha = 0$</u>

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{\nu 0} &= \frac{1}{2} g^{0\beta} \left[\partial_\nu g_{\beta 0} + \partial_0 g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu 0}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \left[\partial_\nu g_{00} + \cancelto{0}{\partial_0} g_{0\nu} - \cancelto{0}{\partial_0} g_{\nu 0}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \partial_\nu g_{00}
\end{aligned}$$

<u>$\nu = 0$</u>

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \cancelto{0}{\partial_0} g_{00} = 0$$

<u>$\nu = 1$</u>

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} = 0 \tag{17.2}$$

<u>$\alpha = 1$</u>

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{\nu 0} &= \frac{1}{2} g^{1\beta} \left[\partial_\nu g_{\beta 0} + \partial_0 g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu 0}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left[\cancelto{0}{\partial_\nu} g_{10} + \partial_0 g_{1\nu} - \cancelto{0}{\partial_1} g_{\nu 0}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \partial_0 g_{1\nu}
\end{aligned}$$

<u>$\nu = 0$</u>

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11} \cancelto{0}{\partial_0} g_{10} = 0$$

<u>$\nu = 1$</u>

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{10} &= \frac{1}{2} g^{11} \partial_0 g_{11} \\
&= \frac{1}{2} e^{-2Ht} \partial_0 e^{2Ht} \\
&= \frac{1}{2} 2H e^{-2Ht} e^{2Ht} = H
\end{aligned} \tag{18.2}$$

اذن:

$$\Gamma_{10}^{1}=H \quad , \quad \Gamma_{00}^{1}=0 \quad , \quad \Gamma_{00}^{0}=0 \quad , \quad \Gamma_{10}^{0}=0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Gamma_{\nu 0}^{\alpha} &= \Gamma_{10}^{1}\\ &= H \end{aligned} \qquad (19.2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Gamma_{0} &= -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha}\Gamma_{10}^{1}\left[\gamma^{\mu}(x),\gamma^{\nu}(x)\right]\\ &= -\frac{1}{8}\underbrace{g_{01}}_{0}\Gamma_{10}^{1}\left[\gamma^{0}(x),\gamma^{1}(x)\right]\\ &= 0\end{aligned} \qquad (20.2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Sigma_{0} &= \Gamma_{0}\otimes I + I\otimes\Gamma_{0}\\ \Sigma_{0} &= 0\end{aligned} \qquad (21.2)$$

- **حساب** $\underline{\Sigma_1}$

لحساب Σ_1لابد من حساب $\Gamma_{\nu 1}^{\alpha}$وΓ_1 من العلاقات (16.2)ذن:

$$\boxed{\Gamma_{\nu 1}^{\alpha}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\nu}g_{\beta 1}-\partial_{\beta}g_{\nu 1}\right)}$$

$\underline{\alpha=0}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu 1}^{0} &= \frac{1}{2}g^{0\beta}\left[\partial_{\nu}g_{\beta 1}-\partial_{\beta}g_{\nu 1}\right]\\ &= \frac{1}{2}g^{00}\left[\partial_{\nu}g_{01}-\partial_{0}g_{\nu 1}\right]\end{aligned}$$

$\underline{\nu=0}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^{0} &= \frac{1}{2}g^{00}\left[\cancelto{0}{\partial_{0}g_{01}}-\cancelto{0}{\partial_{0}g_{01}}\right]\\ &= 0\end{aligned} \qquad (22.2)$$

$\underline{\nu=1}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^{0} &= \frac{1}{2}g^{00}\left[\cancelto{0}{\partial_{1}g_{01}}-\partial_{0}g_{11}\right]\\ &= \frac{1}{2}2He^{2Ht}\\ &= He^{2Ht}\end{aligned}$$

$\underline{\alpha=1}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu 1}^{1} &= \frac{1}{2}g^{1\beta}\left[\partial_{\nu}g_{\beta 1}-\partial_{\beta}g_{\nu 1}\right]\\ &= \frac{1}{2}g^{11}\left[\partial_{\nu}g_{11}-\cancelto{0}{\partial_{1}g_{\nu 1}}\right]\\ &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_{\nu}g_{11}\end{aligned}$$

$\underline{\nu=0}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^{1} &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_{0}g_{11}\\ &= \frac{1}{2}e^{-2Ht}2He^{2Ht}\\ &= H\end{aligned}$$

$\underline{\nu=1}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^{1} &= \frac{1}{2}g^{11}\cancelto{0}{\partial_{1}g_{11}}\\ &= 0\end{aligned}$$

(23.2)

اذن:

$$\Gamma^{1}_{01}=H \quad , \quad \Gamma^{1}_{11}=0 \quad , \quad \Gamma^{0}_{01}=0 \quad , \quad \Gamma^{0}_{11}=He^{2Ht}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\nu 1} &= \Gamma^{1}_{01}+\Gamma^{0}_{11}\\
&= H+He^{2Ht}\\
&= -\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}(\Gamma^{1}_{01}+\Gamma^{0}_{11})\left[\gamma^{\mu}(x),\gamma^{\nu}(x)\right]\\
&= -\frac{1}{8}g_{00}\Gamma^{0}_{11}\left[\gamma^{0}(x),\gamma^{1}(x)\right]-\frac{1}{8}g_{11}\underbrace{\Gamma^{1}_{01}}_{\Gamma^{1}_{10}}\underbrace{\left[\gamma^{1}(x),\gamma^{0}(x)\right]}_{-[\gamma^{0}(x),\gamma^{1}(x)]}\\
&= \frac{1}{8}He^{2Ht}\left[\gamma^{0}(x),\gamma^{1}(x)\right]+\frac{1}{8}e^{2Ht}H\left[\gamma^{0}(x),\gamma^{1}(x)\right]\\
&= \frac{1}{4}He^{2Ht}\underbrace{\left[\gamma^{0}(x),\gamma^{1}(x)\right]}_{2\gamma^{0}\gamma^{1}}\\
&= \frac{1}{2}He^{2Ht}\gamma^{0}(x)\gamma^{1}(x) \qquad (24.2)
\end{aligned}$$

- **حساب** $\gamma^{0}\gamma^{1}$:

لدينا

$$\gamma^{0}=\sigma^{3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^{1}=e^{-Ht}\left(-i\sigma^{2}\right)=e^{-Ht}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \quad , \quad \eta=-\frac{1}{H}e^{-Ht}$$

المعطيات

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \gamma^{0}\gamma^{1} &= e^{-Ht}\sigma^{3}\left(-i\sigma^{2}\right)\\
&= e^{-Ht}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\\
&= -e^{-Ht}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Gamma_{1} &= \frac{1}{2}\underbrace{\left(-He^{2Ht}e^{-Ht}\right)}_{\frac{1}{\eta}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad (25.2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \Gamma_1 \otimes I + I \otimes \Gamma_1 \tag{26.2}$$

$$= \left[\frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + \left[\frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2\eta}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27.2}$$

★ **إيجاد** ψ_k

يتطلب حل معادلة DKP دالة الموجة (ψ_k)، التي يتم التوصل اليها بواسطة الجداء المباشر الذي يحتوي على دالتين لديراك وهما :

$$\psi_k = \psi_D \otimes \psi_D = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\rho \\ \rho\phi \\ \phi\rho \\ \phi\phi \end{bmatrix} \psi_k = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \tag{28.2}$$

حيث ρوϕمكونات دالة موجة ديراك

الخطـوةالثـانية

إيجـاد جملة المعـادلات التفاضلية بدلالـةχ_0،χ_1،χ_2

لايجاد جملة المعادلات التفاضلية لابد من تعويض القيم β^μ،Σ^μ،ψ_kالمتحصل عليها في الخطوة السابقة في المعادلة (9.2) نحصل على :

$$i\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_0\psi_1 \\ \partial_0\psi_0 \\ \partial_0\psi_{\tilde{0}} \\ \partial_0\psi_2 \end{pmatrix} + i\underbrace{e^{-Ht}}_{-H\eta}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 \\ \partial_1\psi_0 \\ \partial_1\psi_{\tilde{0}} \\ \partial_1\psi_2 \end{pmatrix}$$
$$-\frac{ie^{-Ht}}{2\eta}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{eE_0}{H}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_2 \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (29.2)$$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\begin{pmatrix} 2i\partial_0\psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ -2i\partial_0\psi_2 \end{pmatrix} - iH\eta\begin{pmatrix} -\partial_1\psi_0 - \partial_1\psi_{\tilde{0}} \\ \partial_1\psi_1 - \partial_1\psi_2 \\ \partial_1\psi_1 - \partial_1\psi_2 \\ \partial_1\psi_0 - \partial_1\psi_{\tilde{0}} \end{pmatrix} + iH\begin{pmatrix} -\psi_1 - \psi_2 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_1 + \psi_2 \end{pmatrix} + \frac{eE_0}{H}\begin{pmatrix} -\psi_0 - \psi_{\tilde{0}} \\ \psi_1 - \psi_2 \\ \psi_1 - \psi_2 \\ \psi_0 - \psi_{\tilde{0}} \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} m\psi_1 \\ m\psi_0 \\ m\psi_{\tilde{0}} \\ m\psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

(30.2)

وبالتالي يكون لدينا :

$$\begin{cases} 2i\partial_0\psi_1 + iH\eta\left(\partial_1\psi_0 + \partial_1\psi_{\tilde{0}}\right) - iH\left(\psi_1 + \psi_2\right) - \dfrac{eE_0}{H}\left(\psi_0 + \psi_{\tilde{0}}\right) - m\psi_1 = 0 \\ -iH\eta\left(\partial_1\psi_1 - \partial_1\psi_2\right) + \dfrac{eE_0}{H}\left(\psi_1 - \psi_2\right) - m\psi_0 = 0 \\ -iH\eta\left(\partial_1\psi_1 - \partial_1\psi_2\right) + \dfrac{eE_0}{H}\left(\psi_1 - \psi_2\right) - m\psi_{\tilde{0}} = 0 \\ -2i\partial_0\psi_2 - iH\eta\left(\partial_1\psi_0 - \partial_1\psi_0\right) + iH\left(\psi_1 + \psi_2\right) + \dfrac{eE_0}{H}\left(\psi_0 - \psi_{\tilde{0}}\right) - m\psi_2 = 0 \end{cases} \qquad (31.2)$$

لدينا

$$\psi_K(t,x) = e^{ik_x x}\chi_k \Rightarrow \partial_x\psi_K(t,x) = ik_x e^{ik_x x}\chi_k$$

$$\partial_0 = -H\eta\partial_\eta$$

المعطيات

بالتعويض في المعادلات (31.2) نجد:

$$\begin{cases} -2iH\eta\partial\chi_1 + iH\eta\left(ik_x\chi_0 + ik_x\chi_{\tilde{0}}\right) - iH\eta\left(\chi_1+\chi_2\right) - \dfrac{eE_0}{H}\left(\chi_0+\chi_{\tilde{0}}\right) - m\chi_1 = 0 & (32.2) \\ -iH\eta\left(ik_x\chi_1 - ik_x\chi_2\right) + \dfrac{eE_0}{H}\left(\chi_1-\chi_2\right) - m\chi_0 = 0 & (33.2) \\ -iH\eta\left(ik_x\chi_1 - ik_x\chi_2\right) + \dfrac{eE_0}{H}\left(\chi_1-\chi_2\right) - m\chi_{\tilde{0}} = 0 & (34.2) \\ 2iH\eta\partial_\eta\chi_2 - iH\eta\left(ik_x\chi_0 + ik_x\chi_{\tilde{0}}\right) + iH\left(\chi_1+\chi_2\right) + \dfrac{eE_0}{H}\left(\chi_0+\chi_{\tilde{0}}\right) - m\chi_2 = 0 & (35.2) \end{cases}$$

بضرب المعادلتين (32.2)و(35.2)في $\left(\dfrac{-1}{2iH\eta}\right)$ نتحصل على المعادلتين التاليتين على التوالي :

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2H\eta}\right)\chi_1 - \frac{1}{2}\left(ik_x + \frac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\chi_0 - \frac{1}{2}\left(ik_x + \frac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\chi_{\tilde{0}} + \frac{1}{2\eta}\chi_2 = 0 \qquad (36.2)$$

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2H\eta}\right)\chi_2 - \frac{1}{2}\left(ik_x + \frac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\chi_0 - \frac{1}{2}\left(ik_x + \frac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\chi_{\tilde{0}} + \frac{1}{2\eta}\chi_1 = 0 \qquad (37.2)$$

بضرب المعادلة (33.2)و(34.2) في $\left(-\dfrac{1}{iH\eta}\right)$ نتحصل على المعادلتين التاليتين على التوالي :

$$\left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\left(\chi_2-\chi_1\right) - \frac{im}{\eta H}\chi_0 = 0 \qquad (38.2)$$

$$\left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\left(\chi_2-\chi_1\right) - \frac{im}{\eta H}\chi_{\tilde{0}} = 0 \qquad (39.2)$$

من المعادلتين (33.2)و(34.2) نستنتج:

$$\begin{cases} \dfrac{im}{\eta H}\chi_0 = \left(ik_x + \dfrac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\left(\chi_1-\chi_2\right) \\ \dfrac{im}{\eta H}\chi_{\tilde{0}} = \left(ik_x + \dfrac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\left(\chi_1-\chi_2\right) \end{cases} \Rightarrow \chi_0 = \chi_{\tilde{0}} \qquad (40.2)$$

بالتعويض في المعادلات من(32.2)الى(35.2)نجد:

$$\begin{cases} \left(\partial_\eta + \dfrac{1}{2\eta} - \dfrac{im}{2H\eta}\right)\chi_1 - \left(ik_x + \dfrac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\chi_0 + \dfrac{1}{2\eta}\chi_2 = 0 & (41.2) \\ \left(ik_x + \dfrac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\left(\chi_2-\chi_1\right) - \dfrac{im}{\eta H}\chi_0 = 0 & (42.2) \\ \left(\partial_\eta + \dfrac{1}{2\eta} + \dfrac{im}{2H\eta}\right)\chi_2 - \left(ik_x + \dfrac{ieE_0}{H^2\eta}\right)\chi_0 + \dfrac{1}{2\eta}\chi_1 = 0 & (43.2) \end{cases}$$

وهي جملة معادلات تفاضلية بدلالة χ_0،χ_1،χ_2 وهو المطلوب .

الخطوةالثالثة

كتابة جملة المعادلات التفاضلية من (41.2)الى(43.2)بدلالة φ_0،φ_1،φ_2

انطلاقا من هذه من المعطيات نعوض في جملةالمعادلات السابقة :

★ المعادلة الاولى (41.2):

$$\left(-\eta^{-2}\varphi_1+\eta^{-1}\partial_\eta\varphi_1+\frac{1}{2\eta}\eta^{-1}\varphi_1-\frac{im}{2\eta H}\eta^{-1}\varphi_1\right)-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\eta^{-1}\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\eta^{-1}\varphi_2=0 \tag{44.2}$$

بالتبسيط نجد:

$$\left(\eta^{-1}\partial_\eta\varphi_1-\eta^{-2}\varphi_1+\frac{1}{2}\eta^{-2}\varphi_1-\frac{im}{2\eta \mathrm{H}}\eta^{-1}\varphi_1\right)-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\eta^{-1}\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\eta^{-1}\varphi_2=0 \tag{45.2}$$

بالضرب في $\left(\frac{1}{\eta^{-1}}\right)$ نجد:

$$\left(\partial_\eta-\frac{1}{2\eta}-\frac{im}{2\eta \mathrm{H}}\right)\varphi_1-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\varphi_2=0 \tag{46.2}$$

★ المعادلة الثانية (42.2):

$$\left(-\eta^{-2}\varphi_2+\eta^{-1}\partial_\eta\varphi_2+\frac{1}{2\eta}\eta^{-1}\varphi_2+\frac{im}{2\eta H}\eta^{-1}\varphi_2\right)-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\eta^{-1}\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\eta^{-1}\varphi_1=0 \tag{47.2}$$

بالتبسيط نجد:

$$\left(\eta^{-1}\partial_\eta\varphi_2-\eta^{-2}\varphi_2+\frac{1}{2}\eta^{-2}\varphi_2+\frac{im}{2\eta \mathrm{H}}\eta^{-1}\varphi_2\right)-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\eta^{-1}\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\eta^{-1}\varphi_2=0 \tag{48.2}$$

بالضرب في $\left(\frac{1}{\eta^{-1}}\right)$ نجد:

$$\left(\partial_\eta-\frac{1}{2\eta}-\frac{im}{2\eta \mathrm{H}}\right)\varphi_2-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\varphi_1=0 \tag{49.2}$$

★ المعادلة الثالثة (43.2):

$$\left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\left(\eta^{-1}\varphi_2 - \eta^{-1}\varphi_1\right) - \frac{im}{\eta H}\eta^{-1}\varphi_1 = 0 \tag{50.2}$$

بالضرب في $\left(\frac{1}{\eta^{-1}}\right)$ نجد:

$$\left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - \frac{im}{\eta H}\varphi_0 = 0 \tag{51.2}$$

وبالتالي نكون قد تحصلنا على جملة معادلات تفاضلية من الدرجة الاولى بدلالة φ_0،φ_1،φ_2

$$\begin{cases} \left(\partial_\eta - \frac{1}{2\eta}\left(1 + \frac{im}{\mathrm{H}}\right)\right)\varphi_1 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\varphi_0 + \frac{1}{2\eta}\varphi_2 = 0 & (52.2) \\ \left(\partial_\eta - \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{im}{\mathrm{H}}\right)\right)\varphi_2 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\varphi_0 + \frac{1}{2\eta}\varphi_1 = 0 & (53.2) \\ \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - \frac{im}{\eta \mathrm{H}}\varphi_0 = 0 & (54.2) \end{cases}$$

الخطوة الرابعة

تحويل جملة المعادلات التفاضلية من (52.2) الى (54.2) لمعادلة تفاضلية واحدة

من أجل الحصول على معادلة تفاضلية واحدة نتبع مايلي:

★ نطرح المعادلة (52.2) من المعادلة (53.2) نجد:

$$\begin{aligned} &\left(\partial_\eta - \frac{1}{2\eta}\left(1 + \frac{im}{\mathrm{H}}\right)\right)\varphi_1 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\varphi_0 + \frac{1}{2\eta}\varphi_2 - \left(\partial_\eta - \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{im}{\mathrm{H}}\right)\right)\varphi_2 \\ &+ \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta \mathrm{H}^2}\right)\varphi_0 - \frac{1}{2\eta}\varphi_1 = 0 \\ &\Rightarrow \partial_\eta\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \frac{1}{2\eta}\left(1 + \frac{im}{H}\right)\varphi_1 + \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{im}{\mathrm{H}}\right)\varphi_2 + \frac{1}{2\eta}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0 \\ &\Rightarrow \partial_\eta\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \frac{1}{2\eta}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \frac{1}{2\eta}\frac{im}{\mathrm{H}}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) - \frac{1}{2\eta}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0 \\ &\Rightarrow \partial_\eta\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \frac{1}{\eta}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{1}{2\eta}\frac{im}{\mathrm{H}}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) \\ &\Rightarrow \left(\partial_\eta - \frac{1}{\eta}\right)\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{1}{2\eta}\frac{im}{\mathrm{H}}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) \end{aligned}$$

(55.2)

★ نجمع المعادلة(52.2)مع المعادلة(53.2)

$$\left(\partial_\eta-\frac{1}{2\eta}\left(1+\frac{im}{\mathrm{H}}\right)\right)\varphi_1-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\varphi_2+\left(\partial_\eta-\frac{1}{2\eta}\left(1-\frac{im}{\mathrm{H}}\right)\right)\varphi_2$$
$$-\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\varphi_1=0$$
$$\Rightarrow\partial_\eta\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-\frac{1}{2\eta}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-\frac{im}{\eta\mathrm{H}}\left(\varphi_1-\varphi_2\right)-2\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)\varphi_0+\frac{1}{2\eta}\left(\varphi_2+\varphi_1\right)=0$$
$$\Rightarrow\partial_\eta\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-\frac{im}{\eta\mathrm{H}}\left(\varphi_1-\varphi_2\right)-2\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)\varphi_0=0$$

(56.2)

من المعادلة(51.2) نستنتج:

$$\varphi_0=\frac{\eta\mathrm{H}}{im}\left(ik_x+\frac{ieE_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\qquad(57.2)$$

من نتيجة معادلة الطرح(55.2)نستنتج:

$$\varphi_1+\varphi_2=\frac{2\eta\mathrm{H}}{im}\left(\partial_\eta-\frac{1}{\eta}\right)\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\qquad(58.2)$$

نعوض في نتيجة معادلة الجمع(56.2)نحصل على :

$$\partial_\eta\left[\frac{2\mathrm{H}}{im}\eta\left(\partial_\eta-\frac{1}{\eta}\right)\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right]=\left[\frac{im}{\eta\mathrm{H}}+\frac{2\eta\mathrm{H}}{m}\left(ik_x+\frac{ie\mathrm{E}_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)^2\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$
$$\Rightarrow\frac{2\mathrm{H}}{im}\partial_\eta\left[\eta\partial_\eta\left(\varphi_1-\varphi_2\right)-\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right]=\left[\frac{im}{\eta\mathrm{H}}+\frac{2\eta\mathrm{H}}{m}\left(ik_x+\frac{ie\mathrm{E}_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)^2\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$
$$\Rightarrow\frac{2\mathrm{H}}{im}\left[\partial_\eta\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+\eta\partial_\eta^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)-\partial_\eta\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right]=\left[\frac{im}{\eta\mathrm{H}}+\frac{2\eta\mathrm{H}}{m}\left(ik_x+\frac{ie\mathrm{E}_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)^2\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$
$$\Rightarrow\frac{2\mathrm{H}}{im}\eta\partial_\eta^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=\left[\frac{im}{\eta\mathrm{H}}+\frac{2\mathrm{H}\eta}{m}\left(ik_x+\frac{ie\mathrm{E}_0}{\eta\mathrm{H}}\right)^2\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$
$$\Rightarrow\partial_\eta^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=\left[-\frac{m^2}{2\mathrm{H}^2}\frac{1}{\eta^2}-\left(k_x+\frac{e\mathrm{E}_0}{\eta\mathrm{H}}\right)^2\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$
$$\Rightarrow\partial_\eta^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+\left[\frac{m^2}{2\mathrm{H}^2\eta^2}+\left(k_x+\frac{e\mathrm{E}_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)^2\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=0$$
$$\Rightarrow\left[\partial_\eta^2+\left(k_x+\frac{e\mathrm{E}_0}{\eta\mathrm{H}^2}\right)^2+\frac{m^2}{2\mathrm{H}^2\eta^2}\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=0$$

(59.2)

وهي معادلة تفاضلية بدلالة المتغيرات φ_2,φ_1

الخطوةالخامسة

كتابة المعادلة التفاضلية (59.2) مطابقة لمعادلة Whittaker

حتى نتمكن من ايجاد الحل العام للمعادلة (59.2) بطريقة سهلة نكتب هذه المعادلة مطابقة لمعادلة Whittaker [12]التالية:

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho}-\frac{1}{4}+\frac{k}{\rho}+\frac{1/4-\mu^2}{\rho^2}\right]W_{k,\mu}\left(\rho\right)=0 \tag{60.2}$$

حيث :

$$\rho=2ik_x\eta\Rightarrow\eta=\frac{1}{2ik_x}\rho \tag{61.2}$$

نحاول كتابة المعادلة (59.2)بدلالة (ρ) وبالتالي تكون المشتقات بدلالة (ρ) على النحو التالي:

$$\frac{d}{d\eta}=\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{d}{d\rho}=2ik_x\frac{d}{d\rho} \tag{62.2}$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2}=\left(2ik_x\right)^2\frac{d^2}{d\rho^2}=-4k_x^2\frac{d^2}{d^2\rho} \tag{63.2}$$

بالتعويض في المعادلة () نجد:

$$\left[-4k_x^2\frac{d^2}{d^2\rho}+\left(k_x+\frac{e\mathrm{E}_0kik_x}{\rho\mathrm{H}^2}\right)^2+\frac{m^2\left(-4k_x^2\right)}{4\rho^2\mathrm{H}^2}\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=0 \tag{64.2}$$

بضرب المعادلة في $(\frac{-1}{4k_x^2})$ نجد:

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{4k_x^2}\left[-4k_x^2\frac{d^2}{d^2\rho}+\left(k_x+\frac{2ie\mathrm{E}_0k_x}{\mathrm{H}^2\rho}\right)-\frac{m^2k_x^2}{\mathrm{H}^2\rho}\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=0\\
&\Rightarrow\left[\frac{d^2}{d^2\rho}-\frac{1}{4k_x^2}\left({k_x}^2+\frac{4ieE_0k_x^2}{H^2\rho}-\frac{4e^2E_0^2k_x^2}{H^4\rho^2}+\frac{m^2k_x^2}{\rho^2\mathrm{H}^2}\right)\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=0\\
&\Rightarrow\left[\frac{d^2}{d^2\rho}-\frac{1}{4}-\frac{ieE_0/H^2}{\rho}+\frac{e^2E_0^2/H^4+m^2k_x^2/H^2}{\rho^2}\right]\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=0\\
&\Rightarrow\left[\frac{d^2}{d^2z}-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{1/4-\mu^2}{z^2}\right]W_{k,\mu}\left(z\right)=0
\end{aligned} \tag{65.2}$$

بالمطابقة مع العلاقة (60.2) نجد أن:

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_1-\varphi_2)(\rho)=W_{k,\mu}\\
&k=-\frac{ieE_0}{H^2}\\
&\mu^2=\frac{1}{4}-\frac{e^2E_0^2}{H^4}-\frac{m^2k_x^2}{\mathrm{H}^2}\\
&i|\mu|=i\sqrt{\frac{e^2\mathrm{E}_0^2}{\mathrm{H}^4}+\frac{m^2k_x^2}{\mathrm{H}^2}-\frac{1}{4}}
\end{aligned}
\qquad (66.2)
$$

ومنه المعادلة (59.2) هي معادلة مطابقة لمعادلة Whitteker

الخطوةالسادسة

إيجاد قيم $\varphi_2,\varphi_1,\varphi_0$

لإيجاد هذه القيم لابد أولا من كتابة المعادلة (58.2) بدلالة $W_{k,\mu}(2ik_x\eta)$ ومنه:

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1+\varphi_2)&=\frac{2\eta\mathrm{H}}{im}\left(\partial_\eta-\frac{1}{\eta}\right)(\varphi_1-\varphi_2)\\
&=\frac{2\eta\mathrm{H}}{im}\partial_\eta(\varphi_1-\varphi_2)-\frac{2H}{im}(\varphi_1-\varphi_2)\\
&=\frac{2\eta\mathrm{H}}{im}\partial_\eta W_{k,\mu}(2ik_x\eta)-\frac{2H}{im}W_{k,\mu}(2ik_x\eta)
\end{aligned}
\qquad (67.2)
$$

ومنه اذن:

$$
\begin{cases}
\varphi_1-\varphi_2=W_{k,\mu}(2ik_x\eta) & (68.2)\\
\varphi_1+\varphi_2=\dfrac{2\eta\mathrm{H}}{im}\partial_\eta W_{k,\mu}(2ik_x\eta)-\dfrac{2H}{im}W_{k,\mu}(2ik_x\eta) & (69.2)
\end{cases}
$$

- حساب φ_1:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1&=\frac{(2.68)+(2.69)}{2}\\
\Rightarrow \varphi_1&=\frac{1}{2}\left[W_{k,x}(2ik_x\eta)+\frac{2\mathrm{H}\eta}{im}\partial_\eta W_{k,x}(2ik_x\eta)-\frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k,x}(2ik_x\eta)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2\mathrm{H}}{im}\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta)+\frac{2\mathrm{H}\eta}{im}\partial_\eta W_{k,\mu}(2ik_x\eta)\right]
\end{aligned}
\qquad (70.2)
$$

حيث $\partial_\eta W_{k,x}$ تحسب على النحو التالي:

$$\partial_\eta W_{k,\mu}(\rho) = \frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\rho}W_{k,\mu}(\rho) \tag{71.2}$$

$$= 2ik_x\partial_\rho W_{k,\mu}(\rho) \tag{72.2}$$

بتطبيق خاصية دوال$Wittaker$[13]التالية:

$$\partial_\rho W_{k,\mu}(\rho) = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{1}{2}\rho - k\right)W_{k,\mu}(\rho) - W_{k+1,\mu}(\rho)\right] \tag{73.2}$$

نعوض في العلاقة(72.2) نجد:

$$\partial_\eta W_{k,\mu}(\rho) = \frac{1}{\eta}\left[(ik\eta - k)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) - W_{k+1,\mu}(2ik_x\eta)\right] \tag{74.2}$$

وبالتعويض في العلاقة (70.2) نحصل على :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2\mathrm{H}}{im}\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) + \frac{2\mathrm{H}}{im}(ik\eta - k)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) - \frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}(2ik_x\eta)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{2\mathrm{H}}{im}(-1 + (ik_x\eta - k))\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) - \frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}(2ik_x\eta)\right]\end{aligned} \tag{75.2}$$

- **حساب φ_2:**

$$\varphi_2 = \frac{(2.69) - (2.68)}{2} \tag{76.2}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2\mathrm{H}\eta}{im}\partial_\eta W_{k,x}(2ik_x\eta) - \frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k,x}(2ik_x\eta) - W_{k,x}(2ik_x\eta)\right] \tag{77.2}$$

باتباع نفس الخطوات السابقة نجد:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{1}{2}\left[-\left(1 + \frac{2\mathrm{H}}{im}\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) + \frac{2\mathrm{H}\eta}{im}\partial_\eta W_{k,\mu}(2ik_x\eta)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-\left(1 + \frac{2\mathrm{H}}{im}\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) + \frac{2\mathrm{H}\eta}{im}\left(\frac{1}{\eta}\left[(ik\eta - k)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) - W_{k+1,\mu}(2ik_x\eta)\right]\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-\left(1 + \frac{2\mathrm{H}}{im}\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) + \frac{2\mathrm{H}}{im}(ik\eta - k)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) - \frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}(2ik_x\eta)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-\left(1 + \frac{2\mathrm{H}}{im}(1 + (ik_x\eta - k))\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) - \frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}(2ik_x\eta)\right]\end{aligned} \tag{78.2}$$

- حساب φ_0:

وجدنا في العلاقة (57.2):

$$\varphi_0 = \frac{\eta H}{im}\left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$\Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\eta H}{m}\left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2}\right)W_{k,\mu}(2ik_x\eta) \tag{79.2}$$

الخطـوة السـابعة

استنتاج الحل العام

(ψ_k)

لإيجاد الحل العام يكفي أن نعوض القيم المتحصل عليها في الخطوة السابقة في علاقة الحل العام التالية :

$$\psi_k = e^{ik_x x}\eta^{-1}\varphi_k \quad ; \quad k = (0,1,2) \tag{80.2}$$

- حساب ψ_1:

بالتعويض في العلاقة (80.2) نجد

$$\psi_1 = e^{ik_x x}\eta^{-1}\varphi_1 \tag{81.2}$$
$$= e^{ik_x x}\left\{\frac{1}{2\eta}\left[\left(1 + \frac{2\mathrm{H}}{im}\left(1 + (ik_x\eta - k)\right)\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right) - \frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}\left(2ik_x\eta\right)\right]\right\} \tag{82.2}$$

- حساب ψ_2

بنفس الطريقة نجد :

$$\psi_2 = e^{ik_x x}\eta^{-1}\varphi_2 \tag{83.2}$$
$$= e^{ik_x x}\left\{\frac{1}{2\eta}\left[-\left(1 + \frac{2\mathrm{H}}{im}\left(1 + (ik_x\eta - k)\right)\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right) - \frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}\left(2ik_x\eta\right)\right]\right\} \tag{84.2}$$

- **حساب** ψ_0:

$$\psi_0 = e^{ik_x}\eta^{-1}\varphi_0 \quad (85.2)$$

$$= e^{ik_x}\eta^{-1}\frac{\eta H}{m}\left(k_x + \frac{eE_0}{H^2\eta}\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right) \quad (86.2)$$

$$= -\frac{H}{m}\left(k_x + \frac{eE_0}{H^2\eta}\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right) \quad (87.2)$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة (59.2)يعطى من الشكل التالي:

$$\psi_k = e^{ik_x x}\begin{pmatrix} \left\{\frac{1}{2\eta}\left[\left(1+\frac{2\mathrm{H}}{im}\left(1+\left(ik_x\eta-k\right)\right)\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right)-\frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}\left(2ik_x\eta\right)\right]\right\} \\ -\frac{H}{m}\left(k_x+\frac{eE_0}{\eta H^2}\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right) \\ -\frac{H}{m}\left(k_x+\frac{eE_0}{\eta H^2}\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right) \\ \left\{\frac{1}{2\eta}\left[-\left(1+\frac{2\mathrm{H}}{im}\left(1+\left(ik_x\eta-k\right)\right)\right)W_{k,\mu}\left(2ik_x\eta\right)-\frac{2\mathrm{H}}{im}W_{k+1,\mu}\left(2ik_x\eta\right)\right]\right\} \end{pmatrix} \quad (88.2)$$

ومنه نكون قد تحصلنا على حلول معادلة DKP في حقل جاذبية ذو بعدين في فضاء ($de\ sitter$) في وجود حقل كهربائي ثابتE.

3.2- كثافة خلق الجسيمات :

1.3.2- تقنية Bogoluibov :

تقنية Bogoluibov هي تقنية لحساب طيف عدد الجسيمات التي تم إنشاؤها في أوقات فراغ منحنية وتسمى ايضا تقنية التحول[14].

2.3.2- حساب الكثافة :

انطلاقا من حلول المعادلة وبتطبيق طريقة معاملات Bogluibov نحسب كثافة خلق الجسيمات .
لما تؤول حلول المعادلة (88.2)الى (∞) تعطى الترددات السالبة والموجبة بالشكل التالي :

$$\begin{cases} f_\infty^+ = A_\infty^+ W_{k,\mu}(-2ik_x\eta) & (89.2) \\ f_\infty^- = A_\infty^+ W_{-k,\mu}(-2ik_x\eta) & (90.2) \end{cases}$$

لما تؤول حلول المعادلة (88.2)الى (0) تعطى الترددات السالبة والموجبة بالشكل التالي :

$$\begin{cases} f_0^+ = A_0^+ M_{K,\mu}(2ik_x\eta) & (91.2)\\ f_0^- = A_0^+ (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}} M_{k,-\mu}(-2ik_x\eta) & (92.2)\end{cases}$$

يعطى الحل العام للمعادلة :

$$f_\infty^+ = \alpha f_0^+ + \beta f_0^- \tag{93.2}$$

بحيث αوβمعاملات Bogoluibov

★ **ايجاد معاملات Bogoluibov :**

في العلاقة (88.2) تمثل $W_{k,\mu}$ دالة Whittaker [12] وتعطى على النحو التالي :

$$W_{k,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} M_{K,\mu}(\rho) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} M_{K,-\mu}(\rho) \tag{94.2}$$

بالتعويض في العلاقة (89.2) نجد :

$$\begin{aligned} f_\infty^+ &= A_\infty^+ W_{k,\mu}(2ik_x\eta) & (95.2)\\ &= A_\infty^+ \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} M_{K,\mu}(\rho) + A_\infty^+ \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} M_{K,-\mu}(\rho) & (96.2)\end{aligned}$$

من العلاقتين (91.2)و(92.2) نستنتج أن :

$$M_{K,\mu}(\rho) = \frac{f_0^+}{A_0^+} \tag{97.2}$$

$$M_{K,-\mu}(\rho) = \frac{f_0^-}{A_0^+} \tag{98.2}$$

بالتعويض في العلاقة (96.2) نجد :

$$f_\infty^+ = \underbrace{\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} \frac{A_\infty^+}{A_0^+}}_{\alpha} f_0^+ + \underbrace{\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} \frac{A_\infty^+}{A_0^+} (e^{i\Pi})^{\mu-\frac{1}{2}}}_{\beta} f_0^- \tag{99.2}$$

بالمطابقة مع علاقة الحل العام(93.2) نجد معاملات Bogoluibov على النحو التالي:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{A_\infty^+}{A_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} \\ \beta = \frac{A_\infty^+}{A_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} (e^{i\Pi})^{\mu-\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{100.2}$$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha^2|}{|\beta^2|} = (e^{i\Pi})^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)\right|^2}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)\right|^2} \tag{101.2}$$

★ حساب العلاقة (101.2)

- من العلاقة (66.2) نأخذ قيمة μوk

$$k = \frac{-ieE_0}{H^2} \tag{102.2}$$

$$\mu = i\,|\widetilde{\mu}| \tag{103.2}$$

$$y = |\widetilde{\mu}| + \frac{eE_0}{H^2} \tag{104.2}$$

$$\widetilde{y} = -\,|\widetilde{\mu}| + \frac{eE_0}{H^2} \tag{105.2}$$

- من الخواص [15]:

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right)\right|^2 = \frac{\Pi}{\cosh \Pi z} \tag{106.2}$$

- من خواص بوز انشتاين:

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \tag{107.2}$$

ومنه :

حساب $(\mu - k)$

$$\mu - k = i\,|\widetilde{\mu}| + \frac{ieE_0}{H^2}$$
$$= i\left(|\widetilde{\mu}| + \frac{eE_0}{H^2}\right)$$
$$= iy$$
$$\Rightarrow \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - k\right)\right|^2 = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right)\right|^2$$
$$= \frac{\Pi}{\cosh \Pi y} \tag{108.2}$$

حساب $(-\mu - k)$

$$-\mu - k = -i\,|\widetilde{\mu}| + \frac{ieE_0}{H^2}$$
$$= i\left(-\,|\widetilde{\mu}| + \frac{eE_0}{H^2}\right)$$
$$= i\widetilde{y}$$
$$\Rightarrow \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - k\right)\right|^2 = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\widetilde{y}\right)\right|^2$$
$$= \frac{\Pi}{\cosh \Pi \widetilde{y}} \tag{109.2}$$

نعوض في العلاقة (101.2)نتحصل على :

$$\frac{|\alpha^2|}{|\beta^2|} = \frac{e^{2\Pi|\widetilde{\mu}|}\cosh \Pi\widetilde{y}}{\cosh \Pi y} \tag{110.2}$$

يعطى قانون كثافة خلق الجسيمات بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} n &= \left[\left(\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}\right)^{-1} - 1\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} - 1\right]^{-1} = \left[\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{|\beta|^2}\right]^{-1} \\ &= |\beta|^2 = \left[\frac{1}{|\beta|^2}\right]^{-1} \\ &= |\beta|^2 \end{aligned} \tag{111.2}$$

ومنه كثافة خلق الجسيمات:

$$n \simeq |\beta|^2 = \frac{\cosh \Pi y}{e^{2\Pi|\widetilde{\mu}|} \cosh \Pi \widetilde{y} - \cosh \Pi y} \tag{112.2}$$

لحساب كثافة إنشاء الجسيمات نضع:

$$e = 1, H = 1, M = 2, E_0 = 10 \tag{113.2}$$

بالتعويض في العلاقات من (102.2)الى(105.2) نجد:

$$\mu = 20.21 \quad , \quad \tilde{\mu} = 10.21 \tag{114.2}$$

$$y = 20.21 \quad , \quad \tilde{y} = 0.21 \tag{115.2}$$

نعوض في العلاقة (113.2)نحصل على :

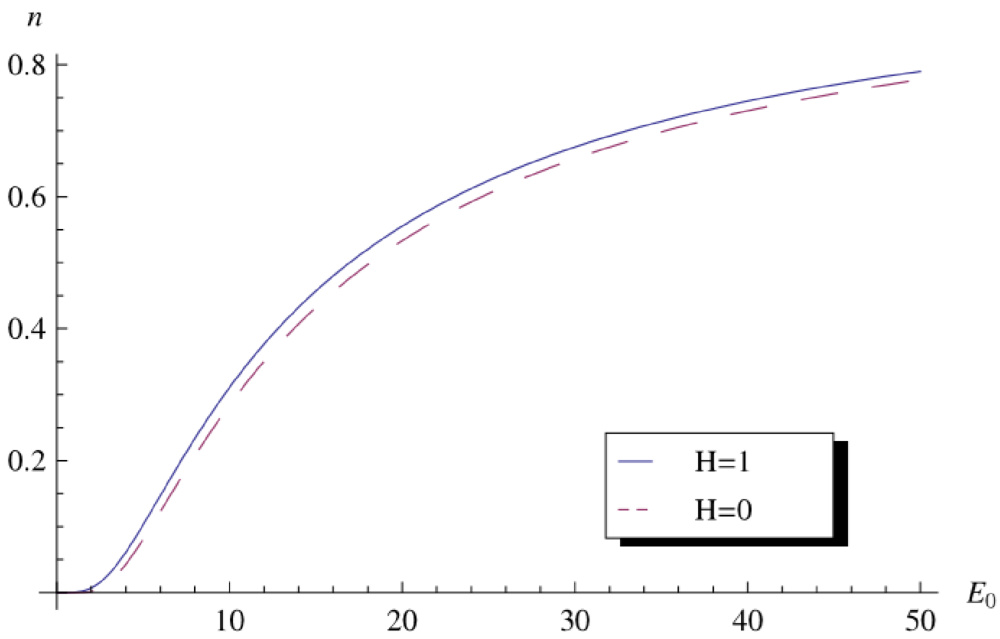
$$n = \frac{\cosh \Pi\,(20.21)}{e^{2\Pi|\tilde{\mu}|} \cosh \Pi\,(0.21) - \cosh \Pi\,(20.21)} \tag{116.2}$$

بتغيير قيم الحقل نحصل على :

40	30	20	10	E_0
7.0	6.0	5.0	3.0	n

3.3.2- طيف كثافة الخلق :

المنحنى الموالي يمثل معدل كثافة خلق الجسيمات ذات بحيث(spin-1) نلاحظ أن هناك علاقة طردية بين الحقل الكهربائي والكثافة أي ان كلما ازداد الحقل الكهربائي ازدادت كثافة خلق الجسيمات



منحنى كثافة خلق الجسيمات ذات (spin-1)

4.2- خلاصة :

في هذاالعمل قمنا بحل معادلةDKPبالنسبة للجسيمات ذات $(spin-1)$في حقل جاذبية ذو بعدين تحت تأثير حقل كهربائي . انطلاقا من الحلول حسبنا كثافة خلق الجسيمات ذات $(spin-1)$فتوصلنا الى أن الحقل الكهربائي يضخم عدد الجسيمات ذات $(spin-1)$مقارنة بالجسيمات ذات$(spin-0)$

معادلة DKP في فضاء $(Godel-type)$ ذو4ابعاد

★ مقدمة

★ خصائص معادلة DKP في فضاء (Gödel-type)

★ حلول معادلةDKPفي فضاء (Gödel-type)

★ الخلاصة

1.3- مقدمة :

معادلة DKP تصف كلا من الجسيمات ذات $(Spin-0)$ و$(Spin-1)$في فضاءات ومجالات كهرومغناطيسية مختلفة ،
حل هذه المعادلة سهل نسبيا مقارنة بمعادلة كلاين جوردن وبروكا لذلك في هذا الفصل سوف نحاول دراسة خصائص معادلة DKP في فضاء (Gödel-type) ،و نقوم بحل هذه المعادلة بالنسبة للجسيمات ذات $(Spin-0)$في أربعة أبعاد وإيجاد القيم الذاتية للطاقة .

2.3- معادلة DKPفي فضاء (Gödel-type) للجسيمات ذات$(spin-0)$:

1.2.3- خصائص معادلة DKP :

★ يعرف فضاء (Gödel-type) في الاحداثيات القطبية بالمترية التالية [15]:

$$ds^2 = -(dt + \Omega F(r)d\phi)^2 + H^2(r)d\phi^2 + dr^2 + dz^2, \tag{1.3}$$

حيث الدوال المتريةHوFتعطى بالعبارات التالية:

$$F(r) = \frac{\sinh^2 lr}{l^2} \quad , \quad H(r) = \frac{\sinh(2lr)}{2l}. \tag{2.3}$$

★ في الاحداثيات الكارتيزية $(x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$يمكن كتابة مترية فضاء Gödel-type على الشكل التالي [16]:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + (1 - \alpha_0^2 x^2)dy^2 - 2\alpha_0 x dt dy + dz^2 \tag{3.3}$$

$$= -(dt + H(x)dy)^2 + dx^2 + D^2(x)dy^2 + dz^2, \tag{4.3}$$

حيث:

$$\alpha_0 > 0 \quad , \quad D(x) = 1 \quad , \quad H(x) = \alpha_0 x. \tag{5.3}$$

★ الشروط المهمة من اجل ان يصبح زمكان (Gödel-type) زمكان متجانس [17] :

$$\frac{H'}{D} = \alpha_0 = 2\Omega \quad , \quad \frac{D''}{D} = 0 = 4l^2. \tag{6.3}$$

ومنه يمكن كتابة مصفوفة مترية ومقلوبها على الشكل التالي[18]:

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha_0 x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_0 x & 0 & 1-\alpha_0^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad g^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 - 1 & 0 & -\alpha_0 x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_0 x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

★ تعطى معادلةDKP في فضاء(Gödel-type)بالشكل التالي:

$$i\beta^{\mu}(x)[(\partial_{\mu}+\Gamma_{\mu}(x))-m]\Psi=0, \tag{8.3}$$

حيث $\beta^{\mu}(x)$ هي مصفوفات$Kemmer$ في فضاء (Gödel-type) وتعطى على النحو التالي :

$$\beta^{\mu}(x)=e^{\mu}_{a}(x)\beta^{a} \tag{9.3}$$

e^{μ}_{a} مصفوفات $Tetrads$[19] وتعرف من الميتريتين (7.3)بالشكل التالي :

$$e^{a}_{\mu}(x)=\begin{pmatrix}1&0&\alpha_0x&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad e^{\mu}_{a}(x)=\begin{pmatrix}1&0&-\alpha_0x&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

مع شروط التعامد:

$$e^{\mu}_{(a)}(x)e^{(a)}_{\nu}(x)=\delta^{\mu}_{\nu}, \tag{11.3}$$

$$e^{(a)}_{\mu}(x)e^{\mu}_{(b)}(x)=\delta^{a}_{b}, \tag{12.3}$$

$$g_{\mu\nu}(x)=e^{(a)}_{(\mu)}(x)e^{(b)}_{\nu}(x)\eta_{(a)(b)}, \tag{13.3}$$

★ الحد $\Gamma_{\mu}(x)$ هو$spin\ Connections$ يعطى بالعبارة التالية:

$$\Gamma\mu(x)=\frac{1}{2}\omega_{\mu\,ab}(x)[\beta^{a},\beta^{b}], \tag{14.3}$$

حيث$\omega_{\mu\,ab}(x)$ هي معاملات Christoffel وتعطى بالعلاقة:

$$\omega_{\mu(a)(b)}(x)=\eta_{(a)(c)}e^{(c)}_{\upsilon}e\tau_{(b)}\Gamma^{\upsilon_{\tau\mu}}-\eta_{(a)(c)}e^{\upsilon(b)}\partial_{\mu}e^{(c)}_{\nu}, \tag{15.3}$$

ومنه في فضاء(Gödel-type)يمكن حساب هذه المعاملات وكتابتها على النحو التالي[19]:

$$\omega_t(x)=\frac{\alpha_0}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad \omega_x(x)=-\frac{\alpha_0}{2}\begin{pmatrix}\alpha_0x&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$
$$\omega_y(x)=\alpha_0\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\alpha_0x&0\\0&-\alpha_0x&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad \omega_z(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{16.3}$$

2.2.3- حلول معادلة DKP :

لإيجاد الحل العام $\psi_k(x)$ لمعادلة DKP في فضاء(Gödel-type) ذو 4 أبعاد والقيم الذاتية للطاقة لا بد من اتباع الخطوات التالية :

الخطوة الاولــى

ايجاد القيم $\beta^\mu(x)$و$\Gamma_\mu(x)$ لمعادلة DKP (8.3)

بمأننا نبحث على حلول معادلة DKP في فضاء ذو 4 أبعاد $\Leftarrow$ $\mu = (0,1,2,3)$ ومنه نكتب المعادلة (8.3)على النحو التالي :

$$\left(i\beta^0\partial_0 + i\beta^1\partial_1 + i\beta^2\partial_2 + i\beta^3\partial_3 + i\beta^0\Gamma_0 + i\beta^1\Gamma_1 + i\beta^2\Gamma_2 + i\beta^3\Gamma_3 - m\right)\Psi = 0 \qquad (17.3)$$

-**حساب** $\beta^0(x)$:

بتطبيق العلاقة (9.3)و(10.3) نجد:

$$\begin{aligned}
\beta^0(x) &= e^0_a\beta^a && (18.3)\\
&= e^0_0\beta^0 + \cancelto{0}{e^0_1\beta^1} + \cancelto{0}{e^0_2\beta^2} + \cancelto{0}{e^0_3\beta^3}\\
&= \underbrace{e^0_0}_{1}\beta^0\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (19.3)
\end{aligned}$$

-**حساب** $\beta^1(x)$:

بنفس الطريقة نجد:

$$\beta^1(x) = \cancelto{0}{e_0^1\beta^0} + e_1^1\beta^1 + \cancelto{0}{e_2^1\beta^2} + \cancelto{0}{e_3^0\beta^3} \tag{20.3}$$

$$= \underbrace{e_1^1}_{1}\beta^0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21.3}$$

-**حساب** $\beta^2(x)$:

$$\beta^2(x) = \underbrace{e_0^2}_{-\alpha x}\beta^0 + \cancelto{0}{e_1^2\beta^1} + \underbrace{e^2}_{1}\beta^2 + \cancelto{0}{e_3^2\beta^3}$$

$$= -\alpha x\beta^0 + \beta^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x & 0 & -1 & 0 \\ -\alpha x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22.3}$$

-**حساب** $\beta^3(x)$:

$$\beta^3(x) = \cancelto{0}{e_0^3\beta^0} + \cancelto{0}{e_1^3\beta^1} + \cancelto{0}{e_2^3\beta^2} + \underbrace{e_3^3}_{1}\beta^3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23.3}$$

- **حساب** $\Gamma_0(x)$:

بتطبيق العلاقة (14.3) نجد:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}w_{012}[\beta^1,\beta^2] + \frac{1}{2}\underbrace{w_{021}}_{-w_{012}}\underbrace{[\beta^2,\beta^1]}_{-[\beta^1,\beta^2]} \tag{24.3}$$

$$= \omega_{012}[\beta^1,\beta^2] = \frac{\alpha}{2}[\beta^1,\beta^2]$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\beta^1\beta^2 - \beta^2\beta^1\right)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25.3}$$

- **حساب** Γ_1:

بنفس الطريقة نجد:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}w_{100}\underbrace{[\beta^0,\beta^0]}_{0} + \frac{1}{2}w_{102}[\beta^0,\beta^2] + \frac{1}{2}w_{120}[\beta^2,\beta^0] \tag{26.3}$$

$$= w_{102}[\beta^0,\beta^2] = -\frac{3\alpha}{2}\left[\beta^0\beta^2 - \beta^2\beta^0\right]$$

$$= -\frac{3\alpha}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -\frac{3\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = -\frac{3\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
(27.3)

- حساب $\Gamma_2(x)$:

$$\Gamma_2(x) = \frac{1}{2}\omega_{201}[\beta^0,\beta^1] + \frac{1}{2}\underbrace{\omega_{210}}_{-\omega_{210}}\underbrace{[\beta^1,\beta^0]}_{-[\beta^1,\beta^0]} + \frac{1}{2}\omega_{212}[\beta^1,\beta^2] + \frac{1}{2}\omega_{221}[\beta^2,\beta^1] \quad (28.3)$$
$$= \omega_{201}[\beta^0,\beta^1] + \omega_{212}[\beta^1,\beta^2]$$
$$= -\frac{\alpha_0}{2}[\beta^0,\beta^1] + \alpha_0^2 x[\beta^1,\beta^2]$$

حيث $[\beta^1,\beta^2]$ محسوبة في العلاقة (14.3)

حساب $[\beta^0,\beta^1]$:

$$[\beta^0,\beta^1] = \left(\beta^0\beta^1 - \beta^1\beta^0\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma_2(x) = -\frac{\alpha_0}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + \alpha_0^2 x\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varGamma_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_0}{2} & 0 & \alpha_0^2 x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0^2 x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29.3}$$

- حساب $\varGamma_3(x)$:

$$\Gamma_3(x) = \frac{1}{2} \underbrace{w_{3ab}(x)}_{0} \left[\beta^a, \beta^b\right] = 0 \tag{30.3}$$

وبالتالي نكون قد حسبنا قيم $\beta^\mu(x)$ و $\Gamma_\mu(x)$

الخطوة الثانية

ايجاد جملة المعادلات التفاضلية وتحويلها لمعادلة تفاضلية واحدة

لايجاد جملة المعادلات التفاضلية لابد من تعويض نتائج القيم $\beta^\mu(x)$ و $\Gamma_\mu(x)$ المتحصل عليها في الخطوة السابقة في المعادلة (17.3) فنتحصل على:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0\psi_1 \\ \partial_0\psi_2 \\ \partial_0\psi_3 \\ \partial_0\psi_4 \\ \partial_0\psi_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 \\ \partial_1\psi_2 \\ \partial_1\psi_3 \\ \partial_1\psi_4 \\ \partial_1\psi_5 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha x & 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_2\psi_1 \\ \partial_2\psi_2 \\ \partial_2\psi_3 \\ \partial_2\psi_4 \\ \partial_2\psi_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_3\psi_1 \\ \partial_3\psi_2 \\ \partial_3\psi_3 \\ \partial_3\psi_4 \\ \partial_3\psi_5 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{3\alpha^2 x}{2}\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\\ \psi_5\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\\ \psi_5\end{pmatrix} = 0 \quad (31.3)$$

بعد التبسيط نجد:

$$i\partial_0\Psi_2 - i\partial_1\Psi_3 - i\alpha_0 x\partial_2\Psi_2 - i\partial_2\Psi_4 - \frac{3i\alpha^2}{2}x\Psi_3 - i\partial_3\Psi_5 - m\Psi_1 = 0 \quad (32.3)$$

$$\partial_0\Psi_1 - i\alpha_0 x\partial_2\Psi_1 - m\Psi_2 = 0 \quad (33.3)$$

$$\partial_1\Psi_1 - m\Psi_3 = 0 \quad (34.3)$$

$$i\partial_2\Psi_1 - m\Psi_4 = 0 \quad (35.3)$$

$$\partial_3\Psi_1 - m\Psi_5 = 0 \quad (36.3)$$

نضع:

$$\Psi(t,x,y,z) = e^{i(-Et+ly+kz)}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_5\\ \psi_6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0\Psi(t,x,y;z) = -iE\Psi(t,x,y;z)\\ \partial_2\Psi(t,x,y;z) = il\Psi(t,x,y;z)\\ \partial_3\Psi(t,x,y;z) = ik\Psi(t,x,y;z) \end{cases} \quad (37.3)$$

بالتعويض في جملة المعادلات من(32.3)الى (36.3) نجد :

$$\begin{cases} \psi_2 = \frac{1}{m}(E+\alpha_0 lx)\psi_1 & (38.3)\\ \psi_3 = \frac{i}{m}\psi' & (39.3)\\ \psi_4 = \frac{-l}{m}\psi_1 & (40.3)\\ \psi_5 = \frac{-k}{m}\psi_1 & (41.3) \end{cases}$$

نعوض العلاقات من(38.3)الى(41.3)في المعادلة(31.3)نتحصل على :

$$E\left[\frac{1}{m}(E+\alpha_0 lx)\psi_1\right] + \left[\frac{1}{m}\psi_1{}''\right] + l\alpha_0 x\frac{1}{m}(E+\alpha_0 lx)\psi_1 - \left[\frac{l}{m}\psi_1\right] - \left[\frac{k^2}{m}\psi_1\right] + \frac{3\alpha_0^2 x}{2m}\psi_1{}' = m\psi_1 \quad (42.3)$$

ننشر ونضرب هذه المعادلة في (m) نجد:

$$\begin{aligned}&E^2\psi_1+\underline{E\alpha_0 lx\psi_1}+\psi''+\underline{l\alpha_0 xE\psi_1}+l^2\alpha_0^2x^2\psi_1-l^2\psi_1-k^2\psi_1+\frac{3\alpha_0^2x}{2}\psi'_1=m^2\psi_1\\ &\Rightarrow \psi''+\frac{3\alpha_0^2x}{2}\psi'+\underline{2l\alpha_0xE\psi_1}+l^2\alpha_0^2x^2\psi_1=m^2\psi_1+l^2\psi_1+k^2\psi_1-E^2\psi_1\end{aligned} \tag{43.3}$$

نضع:

$$a=\frac{3\alpha_0^2}{2}\quad,\quad b=2\alpha_0El\quad,\quad c=\alpha_0^2l^2\quad,\quad \lambda=m^2+l^2+k^2-E^2$$

ومنه تكتب المعادلة (43.3) على النحو التالي:

$$\psi''+\alpha x\psi'_1+bx\psi_1+cx^2=\lambda\psi_1 \tag{44.3}$$

الخطوة الثالثة

كتابة المعادلة (44.3) بدلالة $u(x)$

في هذه الخطوة والخطوات الموالية نحاول في كل مرة القيام بتغير المتغير من أجل الوصول لحل المعادلة (44.3) بطريقة سهلة وسلسة وبالتالي نضع:

$$\psi_1(x)=e^{-a/4x^2}u(x) \tag{45.3}$$

حساب المشتقة الاولى:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{a}{4}x^2}u(x)\right) \tag{46.3}$$

$$=-\frac{a}{4}2xe^{-\frac{a}{4}x^2}u(x)+e^{-\frac{a}{4}x^2}u'(x) \tag{47.3}$$

حساب المشتقة الثانية:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x)\right) \tag{48.3}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{a}{4}2xe^{-\frac{a}{4}x^2}u+e^{-\frac{a}{4}x^2}u'\right) \tag{49.3}$$

بالتعويض في المعادلة (44.3) نحصل على :

$$\begin{aligned}&u''+u'(-ax+ax)+u[-(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}x^2)-\frac{a^2}{2}x+bx+cx^2]=\lambda u\\ &\Rightarrow u''+u[(-\frac{a^2}{4}x^2+cx^2)+bx-\frac{a}{2}-\lambda]=0\\ &\Rightarrow u''-u[(\frac{a^2}{4}-c)x^2-bx]-(\frac{a}{2}+\lambda)u=0\end{aligned} \tag{50.3}$$

نضع

$$A=\frac{a^2}{4}-c\quad;\quad B=b \tag{51.3}$$

$$\Rightarrow u'' - (Ax^2 - Bx)u - (\lambda + \frac{a}{2})u = 0 \qquad (52.3)$$

يمكن كتابة المعادلة (52.3) على الشكل التالي :

$$u'' - (\sqrt{A} - B/2\sqrt{A})^2 u + [B^2/4A - (\lambda + a/2)]u = 0 \qquad (53.3)$$

حيث:

$$s = \sqrt{A}x - B/2\sqrt{A} \quad , \quad D = B^2/4A - (\lambda + a/2) \qquad (54.3)$$

بالتعويض في المعادلة(53.3) نحصل على الشكل التالي:

$$u''(x) + \left(-s^2 + D\right) u(x) = 0 \qquad (55.3)$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغير $u(x)$.

الخطوة الرابعة

كتابة المعادلة (55.3) بدلالة المتغير $u(x)$ ثم $u(r)$

★ اولا نقوم بحساب المشتقات بالنسبة للمتغير $u(x)$:

حساب المشتقة الاولى :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial s} = \sqrt{A}\frac{\partial u}{\partial s} \qquad (56.3)$$

حساب المشتقة الثانية :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{A}\frac{\partial u}{\partial s}\right)\\ &= \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}(\sqrt{A}\frac{\partial u}{\partial s})\\ &= \sqrt{A}\frac{\partial}{\partial s}(\sqrt{A}\frac{\partial u}{\partial s})\\ &= A\frac{\partial^2 u}{\partial^2 s}\\ &= Au''(s) \qquad (57.3)\end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة(55.3) نجد:

$$Au''(s) + (-s^2 + D)u = 0 \qquad (58.3)$$

$$\Rightarrow u''(s) + (-\frac{s^2}{A} + \frac{D}{A})u = 0 \qquad (59.3)$$

وهي معادلة تفاضلية بدلالة المتغير $u(s)$حيث:

$$s = A^{1/4}r \tag{60.3}$$

★ ثانيا نقوم بتغيير المتغير$u(s)$ الى المتغير $u(r)$

من العلاقة (60.3) نجد:

$$s = A^{1/4}r \quad \Rightarrow \quad r = A^{\frac{1}{4}} \tag{61.3}$$

ومنه تصبح الاشتقاقات على النحو التالي:

المشتقة الاولى

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial r} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(A^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial r})\end{aligned} \tag{62.3}$$

المشتقة الثانية

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= A^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 s} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(A^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial r}) \\ &= \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial}{\partial r}(A^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial r}) \\ &= A^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}\end{aligned} \tag{63.3}$$

بالتعويض في المعادلة(59.3)نحصل على الشكل التالي :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} - s^2 u + Du = 0 \\ \Rightarrow &\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} - \frac{s^2}{\sqrt{A}}u + \frac{D}{\sqrt{A}}u = 0 \\ \Rightarrow &\frac{d^2 u}{dr^2} + [\epsilon - r^2]u(r) = 0\end{aligned} \tag{64.3}$$

حيث:

$$\epsilon = \frac{D}{\sqrt{A}} \quad , \quad r^2 = \frac{s^2}{\sqrt{A}} \tag{65.3}$$

ومنه بعد الخطوات الخمسة السابقة نكون قد توصلنا الى معادلة تفاضلية بسيطة ومعروفة تنطبق على معادلة شرودينغر لهزاز توافقي ذو بعد واحد المعرفة بالشكل التالي:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\frac{2m}{h^2}E - \frac{2mw^2}{2h^2}x^2)\psi(x) = 0 \tag{66.3}$$

حيث يعطى حلها على النحو [19]التالي:

$$\psi_n = NH_n(x) \tag{67.3}$$

حيث$H_n(x)$هو كثير حدود هرميتي و $N=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\Omega}{2^n n}}$ وبالتالي حل المعادلة (64.3) كالتالي:

$$u_n(r) = C_n H_n(r) e^{-\frac{r^2}{2}} \tag{68.3}$$

حيث:

$$r = A^{-\frac{1}{4}} s \quad ; \quad s = A^{-\frac{1}{4}}(\sqrt{A}x - \frac{B}{2\sqrt{A}}) \tag{69.3}$$

الخطوة الخامسة

استنتاج الحل العام للمعادلة (64.3)

حساب ψ_{1n}

نعوض قيمة $u(x)$ في العلاقة التالية:

$$\psi_1(x) = e^{-a/4x^2} u(x) \tag{70.3}$$

اذن

$$\psi_{1n} = N e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2 - Bx} H_n(x) \tag{71.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = N e^{\frac{B^2}{A}} [\frac{1}{2}(-\frac{a}{4} + A)x - B e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2 - Bx} H_n - n H_{n-1}] \tag{72.3}$$

$$= N e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2 - Bx} [((-\frac{a}{8} + \frac{A}{2})x - B) H_n - n H_{n-1}] \tag{73.3}$$

لدينا من خواص دالة هرميتية :

$$H'_n(x) = n H_{n-1}(x) \tag{74.3}$$

حساب $\psi_{2n}, \psi_{3n}, \psi_{4n}$

بالتعويض نجد :

$$\begin{cases} \psi_{2n} = N[E + \alpha_0 l x] e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2 - Bx} H_n(x) & (75.3) \\ \psi_{3n} = \frac{i}{m} e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2} - Bx[((-\frac{a}{8} + \frac{A}{2}) - B) H_n - n H_{n-1} & (76.3) \\ \psi_{4n} = -\frac{Nl}{m} e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2 - Bx H_n(x)} & (77.3) \\ \psi_{5n} = -\frac{Nk}{m} e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2 - Bx^2 H_n} & (78.3) \end{cases}$$

اذن الحلول النهائية لمعادلةDKP في فضاء Godel ذو 4 أبعاد هي كالتالي:

$$\Psi(t,x,y,z) = e^{i(-Et+ly+kz)} \begin{pmatrix} Ne^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2-Bx} H_n(x) \\ [E+\alpha_0 lx] e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2-BxH_n(x)} \\ \frac{i}{m} e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2} - Bx[((-\frac{a}{8}+\frac{A}{2})-B)H_n - nH_{n-1}] \\ -\frac{Nl}{m} e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2-Bx*H_n(x)} \\ -\frac{Nk}{m} e^{\frac{B^2}{A}} e^{(-\frac{a}{4}+A)x^2-Bx^2H_n} \end{pmatrix} \quad (79.3)$$

الخطوة السابعة

استنتاج القيم الذاتية للطاقة

انطلاقا من العبارات (65.3)و(69.3) نجد:

$$\epsilon = 2n+1 = \frac{D}{\sqrt{A}}$$

$$\frac{D}{\sqrt{A}} = \frac{\frac{4\Omega^2E^2l^2}{4A} - (m^2+l^2+k^2+\frac{a}{2})}{\sqrt{A}}$$

$$= (2n+1)$$

$$E^2(1+\frac{4\Omega^2l^2}{A}) - (m^2+l^2+k^2+\frac{a}{2})\sqrt{A}$$

$$E_n^2 = \frac{[(2n+1)\sqrt{A} + (m^2+l^2+k^2+\frac{a}{2})]^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{4\Omega^2l^2}{A}} \quad (80.3)$$

3.3- خلاصة :

في هذا الفصل قمنا بكتابة معادلة DKP في فضاء منحني ذو 4أبعادوحاولنا إيجاد حلول هذه المعادلة بالنسبة لجسيمات سلمية ذات $(spin-0)$فتحصلنا في النهاية على حلول متاطبقة مع حلول معادلة شرودينغر لهزاز توافقي ذو بعد واحد مما مكننا من إيجاد صيغ تحليلية لدوال الموجة والقيم الذاتية للطاقة .

الفصل الرابع

حل معادلة DKP للجسيمات ذات (spin-1)

★ مقدمة

★ ايجاد جملة المعادلات التفاضلية DKP في فضاء $(Gdel-type)$ للجسيمات ذات (spin-1)

★ الخلاصة

1.4- مقدمة :

في الفصل السابق وجدنا حلول معادلة DKP بالنسبة لجسيمات سلمية ذات $(spin-0)$ وفي هذا الفصل نحاول إيجاد جملة المعادلات التفاضلية لنفس المعادلة وفي نفس الفضاء بالنسبة لجسيمات شعاعية ذات كتلة m و $(spin-1)$

2.4- ايجاد جملة المعادلات التفاضلية DKP في فضاء (Gödel-type) للجسيمات ذات $(spin-1)$:

في هذا الفصل نتبع نفس الخطوات المطبقة على حالة الجسيمات ذات $(spin-0)$ للحصول على جملة المعادلات التفاضلية DKP

الخطوة الاولى

ايجاد القيم $\beta^{\mu}(x)$ و $\Gamma_{\mu}(x)$ لمعادلة DKP (8.3)

- حساب $\beta^0(x)$

$$
\begin{aligned}
\beta^0(x) &= e^0_a\beta^a \\
&= e^0_0\beta^0 + e^0_1\beta^1 + e^0_2\beta^2 + e^0_3\beta^3 \\
&= \underbrace{e^0_0}_{1}\beta^0 \\
&= \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

- **حساب** $\beta^1(x)$

$$\beta^1(x)=e^1_0\beta^0+e^1_1\beta^1+e^1_2\beta^2+e^1_3\beta^3$$

$$=\underbrace{e^1_1}_{1}\beta^1$$

$$=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

- **حساب** $\beta^2(x)$

$$\beta^2(x)=\underbrace{e^2_0}_{-\alpha x}\beta^0+e^2_{11}\beta^1+\underbrace{e^2}_{1}\beta^2+e^2_3\beta^3$$

$$=-\alpha x\beta^0+\beta^2$$

$$=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&-\alpha x&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-\alpha x&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&-\alpha x\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-\alpha x&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&-\alpha x&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-\alpha x&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

- **حساب** $\beta^3(x)$

$$\beta^3(x)=e^3_0\beta^0+e^3_1\beta^1+e^3_2\beta^2+e^3_3\beta^3$$

$$= \underbrace{e_3^3}_{1} \beta^3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

• **حساب** Γ_0

بتطبيق نفس العلاقات نجد :

$$\Gamma_0 = \frac{\alpha}{2}\left(\beta^1\beta^2 - \beta^2\beta^1\right)$$

$$\Gamma_0 = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{5.4}
$$

- -حساب Γ_1

$$
\Gamma_1 = \frac{-3\alpha}{2}(\beta_0\beta_2 - \beta_2\beta_0)\left(-\frac{3\alpha}{2}\right)
$$

$$
= \left(-\frac{3\alpha}{2}\right) \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{6.4}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \qquad (7.4)
$$

- **- حساب** Γ_2

$$
\Gamma_2 = -\frac{\alpha}{2}(\beta^0\beta^1 - \beta^1\beta^0) + \alpha^2 x \left(\beta^1\beta^2 - \beta^2\beta^1\right)
$$

$$
= -\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} + \left(\alpha^2 x\right)\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$(8.4)$$

$$=\begin{pmatrix}
0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{1}{2}\alpha & 0 & -x\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & x\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x\alpha^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha & x\alpha^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad (9.4)$$

الخطوة الثانية

إيجاد جملة المعادلات التفاضلية

لايجاد جملة المعادلات التفاضلية نعوض في العلاقة ()فبعد النشر والتبسيط نحصل على :

$$
\begin{aligned}
&=\begin{pmatrix} 0 \\ i\psi_8\partial_0 \\ i\psi_9\partial_0 \\ i\psi_{10}\partial_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i\psi_2\partial_0 \\ i\psi_3\partial_0 \\ i\psi_4\partial_0 \end{pmatrix}
+\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}i\alpha_0\psi_9 \\ \frac{1}{2}i\alpha_0\psi_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}i\alpha_0\psi_3 \\ \frac{1}{2}i\alpha_0\psi_2 \\ 0 \end{pmatrix}
+\begin{pmatrix} -i\psi_8\partial_1 \\ 0 \\ -i\psi_7\partial_1 \\ i\psi_6\partial_1 \\ 0 \\ -i\psi_4\partial_1 \\ i\psi_3\partial_1 \\ i\psi_1\partial_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\alpha_0\psi_7 \\ 0 \\ \frac{1}{2}i\alpha_0\psi_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}i\alpha_0\psi_1 \\ -\frac{1}{2}i\alpha_0\psi_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+\begin{pmatrix} -i\psi_9\partial_2 \\ i\psi_7\partial_2 - ix\alpha_0\psi_8\partial_2 \\ -ix\alpha_0\psi_9\partial_2 \\ -i\psi_5\partial_2 - ix\alpha_0\psi_{10}\partial_2 \\ i\psi_4\partial_2 \\ 0 \\ -i\psi_2\partial_2 \\ -ix\alpha_0\psi_2\partial_2 \\ i\psi_1\partial_2 - ix\alpha_0\psi_3\partial_2 \\ -ix\alpha_0\psi_4\partial_2 \end{pmatrix}
+\begin{pmatrix} -ix\psi_8\alpha_0^2 - \frac{1}{2}i\psi_7\alpha_0 \\ i\psi_9 x^2\alpha_0^3 + \frac{1}{2}i\psi_9\alpha_0 \\ -ix\alpha_0\left(x\psi_8\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\psi_7\alpha_0\right) \\ \frac{3}{2}ix\alpha_0^2\psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ ix\psi_3\alpha_0^2 + \frac{1}{2}i\psi_1\alpha_0 \\ ix\alpha_0\left(x\psi_3\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\psi_1\alpha_0\right) \\ -i\psi_2 x^2\alpha_0^3 - \frac{1}{2}i\psi_2\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+\begin{pmatrix} -i\psi_{10}\partial_3 \\ -i\psi_6\partial_3 \\ i\psi_5\partial_3 \\ 0 \\ -i\psi_3\partial_3 \\ i\psi_2\partial_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i\psi_1\partial_3 \end{pmatrix}
+\begin{pmatrix} -m\psi_1 \\ -m\psi_2 \\ -m\psi_3 \\ -m\psi_4 \\ -m\psi_5 \\ -m\psi_6 \\ -m\psi_7 \\ -m\psi_8 \\ -m\psi_9 \\ -m\psi_{10} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
-ix\psi_8\alpha_0^2 - m\psi_1 - i\partial_1\psi_8 - i\partial_2\psi_9 - i\partial_3\psi_{10} \\
i\psi_9 x^2\alpha_0^3 - i\partial_2\psi_8 x\alpha_0 - m\psi_2 + i\partial_0\psi_8 - i\partial_3\psi_6 + i\partial_2\psi_7 \\
i\alpha_0\psi_8 - m\psi_3 + i\partial_3\psi_5 - i\partial_1\psi_7 + i\partial_0\psi_9 - ix\alpha_0\left(x\psi_8\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\psi_7\alpha_0\right) - ix\alpha_0\partial_2\psi_9 \\
\frac{3}{2}ix\psi_6\alpha_0^2 - ix\partial_2\psi_{10}\alpha_0 - m\psi_4 - i\partial_2\psi_5 + i\partial_1\psi_6 + i\partial_0\psi_{10} \\
i\partial_2\psi_4 - i\partial_3\psi_3 - m\psi_5 \\
i\partial_3\psi_2 - m\psi_6 - i\partial_1\psi_4 \\
ix\psi_3\alpha_0^2 - m\psi_7 - i\partial_2\psi_2 + i\partial_1\psi_3 \\
i\partial_1\psi_1 - i\alpha_0\psi_3 - m\psi_8 + i\partial_0\psi_2 + ix\alpha_0\left(x\psi_3\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\psi_1\alpha_0\right) - ix\alpha_0\partial_2\psi_2 \\
-i\psi_2 x^2\alpha_0^3 - i\partial_2\psi_3 x\alpha_0 - m\psi_9 + i\partial_2\psi_1 + i\partial_0\psi_3 \\
i\partial_3\psi_1 - m\psi_{10} + i\partial_0\psi_4 - ix\alpha_0\partial_2\psi_4
\end{pmatrix} \quad (11.4)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
-ix\psi_8\alpha_0^2 - m\psi_1 - i\psi_8^t + l\psi_9 + k\psi_{10} = 0 \\
i\psi_9 x^2\alpha_0^3 + l\psi_8 x\alpha_0 - m\psi_2 + E\psi_8 + k\psi_6 - l\psi_7 = 0 \\
i\alpha_0\psi_8 - m\psi_3 - k\psi_5 - i\psi_7^t + E\psi_9 - ix\alpha_0\left(x\psi_8\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\psi_7\alpha_0\right) + lx\alpha_0\psi_9 = 0 \\
\frac{3}{2}ix\psi_6\alpha_0^2 + x\psi_{10}l\alpha_0 - m\psi_4 + l\psi_5 + i\psi_6^t + E\psi_{10} = 0 \\
-l\psi_4 + k\psi_3 - m\psi_5 = 0 \\
-k\psi_2 - m\psi_6 - i\psi_4^t = 0 \\
ix\psi_3\alpha_0^2 - m\psi_7 + l\psi_2 + i\psi_3^t = 0 \\
i\psi_1^t - i\alpha_0\psi_3 - m\psi_8 + E\psi_2 + ix\alpha_0\left(x\psi_3\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\psi_1\alpha_0\right) + lx\alpha_0\psi_2 = 0 \\
-i\psi_2 x^2\alpha_0^3 + l\psi_3 x\alpha_0 - m\psi_9 - l\psi_1 + E\psi_3 = 0 \\
-k\psi_1 - m\psi_{10} + E\psi_4 + lx\alpha_0\psi_4 = 0
\end{pmatrix} \quad (12.4)
$$

3.4- خلاصة :

في هذا الفصل حاولنا كتابة معادلة DKP في فضاء Godel بالنسبة للجسيمات ذات $(spin-1)$ تحصلنا في النهاية على جملة معادلات ذات 10دوال ،يمكننا تبسيط هذه المعادلات للحصول على معادلة تفاضلية واحدة تمكننا من ايجاد الحلول.

خـــــاتمـــــة

خـــاتمـــة

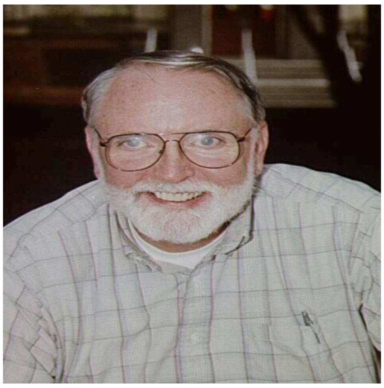
في هذه المذكرة قمنا بدراسة تطبيقات معادلة DKP من أجل (spin-0) و(spin-1) في فضاءات منحنية في وجود حقل. حيث في الفصل الأول من هذه المذكرة تعرفنا على معادلة DKP الحرة وحلولها وبعض الخصائص العامة لهذه المعادلة. في الفصل الثاني قمنا بدراسة معادلة DKP بالنسبة للجسيمات ذات (spin-1) في وجود حقل جاذبية ذو بعدين تحت تأثير حقل كهربائي ثابت في فضاء de) (Sitter حيث استطعنا إيجاد الحلول التحليلية لهذه المعادلة. انطلاقا من هذ الحلول حسبنا ورسم منحنى كثافة خلق الجسيمات فتوصلنا إلى أن الحقل الكهربائي يضخم عدد الجسيمات ذات (spin-1) مقارنة بالجسيمات ذات (spin-0). أما عن الفصل الثالث درسنا حالة الجسيمات ذات (spin-0) في فضاء (Gödel-type) ذو أربعة أبعاد فتوصلنا الى حلول من شكل هزاز توافقي مما مكننا من استنتاج القيم الذاتية للطاقة. أخير في الفصل الرابع قمنا بنفس الدراسة في الفصل الثالث، لكن بالنسبة للجسيمات ذات (spin-1) فتوصلنا لجملة معادلات تفاضلية ذات العشر أسطر التي يمكننا تبسطيها وحلها واستنتاج تطبيقاتها الفيزيائية مثل سابقاتها.

ملحق

kemmer Nicholas

عالم فيزيائي نووي روسي ولد في ديسمبر 1911 بسانت بطرسبرغ،تلقى تعليمه في جامعة غوتنغن ،حصل على الدكتوراه في الفيزياء النووية في جامعة زيوريخ،لعب دورا رئيسيا في البرنامج النووي للمملكة المتحدة،حائزةعلى جائزة نوبل في الفيزياء،توفي 21اكتوبر 1998

Duffin James Richard



عالم فيزيائي امريكي ولد عام 1909 ،حصل دوفين على درجة بكالوريوس في الفيزياء من جامعة إلينوي بعدها درجة الدكتوراه من نفس الجامعة،اصبح استاذلرياضيات في جامعة كارنيجي،اشتهر لمساهمته في نظرية النقل الكهربائي وفي تطوير البرمجة الهندسية وغيرها،حصل لاحقا على جائزة نوبل،كان فائزا مشتركا بجائزة فون نيومان النظرية عام1982،توفي 29اكتوبر 1996

مـــــراجع

[1] R. J. Duffin, Phys. Rev. 54 ,(1938) .1114

[2] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A173 ,(1939) 91

[3] G. Petiau, University of Paris thesis .(1936) Published in Acad. Roy. de Belg., Classe Sci., Mem in 8o 16 ,(1936) No. .2

[4] I. V. Kanatchikov, hep-th/9911175

[5] V. M. Red'kov, quant-ph/9812007

[6] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel and R. G. Teixeira, gr-qc/9909033

[7] H. Umezawa, "Quantum Field Theory," North-Holland, 1956

[8] L. Parker, Phys. Rev. D 3 (1971) 346

[9] S. Haouat, R. Chekireb, Eur. Phys. J. C. 72 (2012) .2034

[10] V.Ya. Fainberg, B.M. Pimentel, Theoret. Math. Phys. 124 (2000) ;1249–1234 J.T. Lunardi, B.M. Pimentel, R.G. Teixeira, J.S. Valverde, Phys. Lett. A 268 (2000) .173–165

[11] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel, J.S. Valverde, Phys. Lett. A (2000) .268165

[12] M.Abramowitz,I.Stegun,HandbookofMathematicalFunctions,Dover,NewYork,197.

[13] N.Unal,Found.Phys.747(1997)27; Found.Phys.755(1998)28; ConceptsofPhysics,Vol.II,2005,p.273.

[14] J.Autretsch,G.Shafer,J.Phys.A:Math.Gen.1583(1975)11.

[15] F. Ahmed, Eur. Phys. J. C (2019) 79 (02) : .104

[16] F. Ahmed, Commun. Theor. Phys. ,68 735 ,(2017) arXiv: 01274.1712 [gr-qc].

[17] F. Ahmed, Eur. Phys. J. C (2018) 78 (07) : 598

[18] B. C. Clark, R. J. Furnstahl, L. K. Kerr, J. Rusnak, S. Hama, Phys. Lett. B. ,427 231 .(1998)

[19] L. B. Castro, Eur. Phys. J. C (2016) :76 .61

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة معادلة DKP في الحالات التالية :

- معادلة DKP في فضاء $(desitter)$ ذو بعدين في وجود حقل كهربائي ثابت بالنسبة لجسيم شعاعي $(spin{-}1)$ بالإضافة الى حساب كثافة انشاء الجسيمات.
- معادلة DKP في فضاء Godel-type من أجل الجسيمات السلمية ووجدنا الحلول التحليلية للمعادلة .
- معادلDKP في فضاء Godel-type من أجل الجسيمات الشعاعية $(spin-1)$.

الكلمات المفتاحية : معادلة DKP ، انشاء الجسيمات ، نسبية عامة

Résumé

Dans ce mémoire, nous avans étudié l'équation de DKP dans les cas suivants :

- Equation de DKP dans un espace de de Sitter à deux dimensions en présence d'un champ élcetrique constant pour une particule vectoriele (spin-1) et nous la densité des particules créées calculé.
- Equation de DKP dans un espace de Godel à 4 dimensions pour des partiules slcaires , et nous avans trouvé les solutions analytiques de l'équation.
- Equation de DKP dans un espace de Godel à 4 dimantions pour les particles vectoriels.

Mots-clés : Equation de DKP ,création des particules ,Relativité générale .

Abstract

In this Master the sis, we have studied the DKP equation in the follwing cases :

- DKP equation in 2D de sitter spacetime in the presence of à constant electric field for spin-1 particles and the number density of partiule cveated is obtained.
- DKP equation in Godel spactime for scalair particles and we have obtained the analytical solutions of the equation .
- DKP equation in Godel spacetime for vectoriel particles .

Keywords : DKP equation ,paircractions, General relativity.