

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Le problème à deux-corps en mécanique quantique ordinaire</b>	<b>3</b>
2.1	Un bref rappel sur le problème à deux corps . . . . .	3
2.1.1	Le cas classique . . . . .	3
2.1.2	Le cas quantique . . . . .	6
2.2	Certaines applications (Suivant le formalisme de Feynman) . . . . .	9
2.2.1	Definition . . . . .	9
2.2.2	Formulat de Trotter à deux particules . . . . .	10
2.2.3	L'interaction de l'oscillateur harmonique . . . . .	13
2.2.4	Le Puits infini . . . . .	14
2.2.5	Le potentiel de Morse . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Le problème à deux-corps dans l'espace de phase non-commutatif</b>	<b>18</b>
3.1	Un bref rappel sur l' espace de phase non commutative . . . . .	18
3.2	Le système de deux corps dans l'espace de phase non-commutatif . . . . .	20
3.3	Interaction de l'oscillateur harmonique . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Le problème à deux-corps en présence de la distance minimale</b>	<b>26</b>
4.1	Un bref sur l'algebre déformé . . . . .	26
4.2	Le système de deux corps en présence de la distance minimale . . . . .	27
4.3	Interaction de la fonction de Delta . . . . .	29
4.4	Intéraction de type Coulomb . . . . .	30
4.5	Spectre d'énergie pour des cas particuliers . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>37</b>

## Dédicace

*Ce travail modeste est dédié :*

*À nos chers parents;*

*À tous nos proches de la famille (Safia Benothmane  
et Naoual Halassa), et plus particulièrement, nos sœurs et nos frères tout à son nom ;*

*À tous nos chers amis et nos collègues de l'Université de Ouargla ;*

*Et à tous ce qui ont enseigné nous au long de notre vie scolaire ;*

**Naoual et Safia**

## **Remerciements**

Au travers de ce mémoire majeure, nous voudrions remercier toutes les personnes qui ont contribué dans un proche avenir à la construction de cet humble travail, même avec un petit sourire d'encouragement.

Nous remercions Dr Hadjira BENZAIK pour sa participation volontaire à ce mémoire, ainsi que pour ses efforts, ses conseils avisés, sa patience et sa persévérance dans notre suivi. Nous voudrions remercier les membres du jury, M. Khouja Lamine ,Belghitar El hadj Becherair, qui nous ont donné l'honneur de participer et de juger notre ce mémoire. Enfin, je n'oublie pas de remercier nos chers parents qui nous ont encouragé à effectuer ce travail tout au long de notre parcours éducatif, ainsi que toute la famille et tous nos amis.

**Halassa Naoual et Benothmane Safia**



# 1

## Introduction générale

La mécanique quantique est une branche de la physique, qui est très important pour décrit les phénomènes fondamentaux à l'échelle atomique . Elle fut développée au début du XXe siècle par un groupe de chercheurs européens. Afin de résoudre les problèmes que la physique classique n'a pas réussi à expliquer, comme le rayonnement du corps noir, l'effet photo-électrique, ou l'existence des raies spectrales ... ect. elle permit notamment d'élucider le mystère de la structure de l'atome, et plus globalement elle s'avéra être le cadre général de description du comportement des particules élémentaires, jusqu'à constituer la base de la physique moderne. Ensuite, des règles mathématiques ont été formées pour étudier les problèmes liés à cette branche de la physique. tels que, l'équation de Schrödinger et le formalisme de Heisenberg. En 1948, Feynman a introduit sa fameuse technique des intégrales de chemins qui est alternative aux méthodes de Heisenberg et l'équation de Schrödinger afin de répondre au besoin profond de la compréhension de la physique quantique. Cette formulation a été suggérée par certaines remarques de Dirac celui qui a observé que l'action joue un rôle central dans la mécanique classique et qui est plus importante que la formulation hamiltonienne, mais qu'il ne semblait avoir aucun rôle fondamentale dans la mécanique quantique, il a ensuite montré que cette situation pourrait être corrigée si la fonction de transformation, qui est connue comme le propagateur, est identique à  $\exp(\frac{i}{\hbar}S)$  où  $S$  est l'action classique évaluée le long du chemin classique. Par analogie avec ces idées, Feynman a réussi à dériver une formulation spatio-temporelles qui repose sur le fait que le propagateur (noté  $K$ ) qui contient toutes les information du système physique

Récemment, plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre le problème de l'unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles, notamment l'existence de dimensions supplémentaires de l'espace-temps, ou l'existence d'une

longueur minimale pour laquelle la physique est inaccessible [1, 2, 3, 4, 5]. Ainsi, la gravitation devrait mener à une coupure à la limite de l'ultraviolet étant donné que la résolution de l'espace pour les très petites distances nécessite une très haute énergie. Par conséquent, la structure de l'espace-temps va être perturbée par les effets gravitationnels, et une limite inférieure de résolution de l'espace devient inévitable [6, 7, 8].

Il existe un autre type de déformation appelé la géométrie non-commutative (GNC) a reçu un accueil chaleureux de la part des chercheurs dans le domaine de physique et mathématique,

Dans ce contexte, les plusieurs problèmes ont été étudiés dans le cadre de cette version déformée de la mécanique quantique: par exemple; l'oscillateur harmonique [11, 12], l'atome d'hydrogène [13, 25], le problème de Landau [27, 29], le puits quantique gravitationnel [29, 30], systèmes classiques à potentiels divers [31, 36], systèmes à particules multiples [10, ?, 31, 40] et de nombreux autres.

Ce mémoire comporte trois chapitres. Dans le chapitre 1, nous présentons la construction standard de la formulation d'intégrale de chemin pour le système à deux particules avec potentiels de couplage cinétiques non nulle ( $\kappa P^{(a)}.P^{(b)}$ ). Des exemples simple, dans la mécanique quantique standard non-relativiste ont été donnés, l'oscillateur harmonique, le puits infini et le potentiel de Morse. Le chapitre 2 est consacré à étudier ce type de système dans la géométrie de l'espace de phase non-commutatif d'un oscillateur harmonique. Le chapitre 3 concerne l'étude du même système ainsi que dans l'existence de la distance minimale, pour l'interaction de la fonction delta de Dirac et l'interaction de Coulomb.

## 2

# Le problème à deux-corps en mécanique quantique ordinaire

### 2.1 Un bref rappel sur le problème à deux corps

Le problème à deux corps est un modèle théorique important en mécanique, qu'elle que soit classique ou quantique, dans lequel sont étudiés les mouvements de deux corps assimilés à des points matériels en interaction mutuelle (conservative), le système global étant considéré comme isolé.

En mécanique classique, le problème des deux corps consiste à prédire le mouvement de deux objets massifs qui sont vus de manière abstraite comme des particules ponctuelles. Le problème suppose que les deux objets n'interagissent que l'un avec l'autre, la seule force qui affecte chaque objet provient de l'autre et tous les autres objets sont ignorés. Le cas le plus important du problème classique à deux corps est le cas gravitationnel (voir aussi le problème de Kepler), apparaissant en astronomie pour prédire les orbites (ou les fuites d'orbite) d'objets tels que des satellites, des planètes et des étoiles. Un modèle particulière à deux points d'un tel système décrit presque toujours assez bien son comportement pour fournir des indications et des prévisions utiles.

#### 2.1.1 Le cas classique

En mécanique classique, le problème des deux corps consiste à déterminer le mouvement de particules ponctuelles qui n'interagissent que les unes avec les autres. Des exemples courants incluent un satellite en orbite autour d'une planète, une planète en orbite une étoile, deux

étoiles en orbite (une étoile binaire) et un électron classique en orbite autour d'un noyau atomique (bien que pour résoudre correctement le système électron / noyau à 2 corps, un système quantique), approche mécanique doit être utilisé).

Le problème à deux corps peut être reformulé en deux problèmes à un corps, un problème trivial et un qui implique la résolution du mouvement d'une particule dans un potentiel externe. Etant donné que de nombreux problèmes à un corps peuvent être résolus avec précision, le problème à deux corps correspondant peut également être résolu

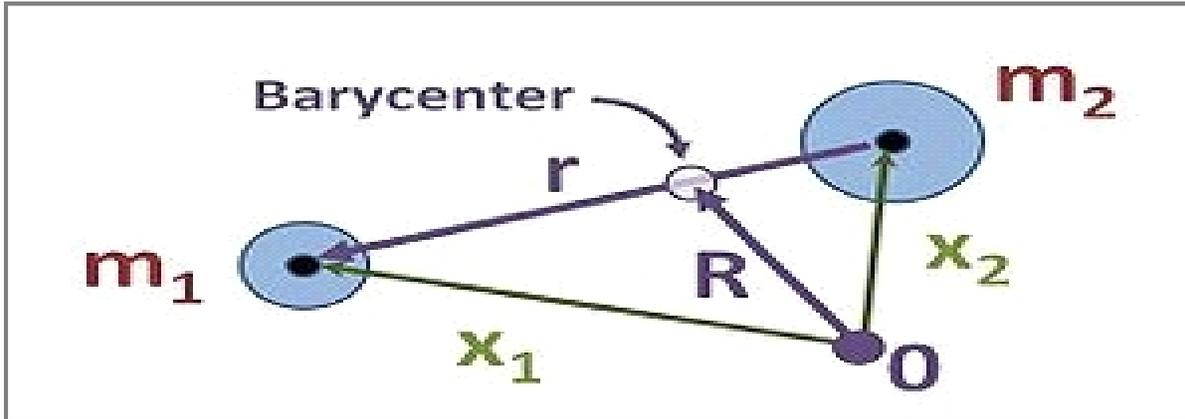


FIG1: Pour un problème à deux corps, les coordonnées de jacobí sont  $R = \frac{m_1}{M}x_1 + \frac{m_2}{M}x_2$  et  $r = x_1 - x_2$  avec  $M = m_1 + m_2$ .

Appliqué aux deux masses, le deuxième loi de Newton déclare que

$$F_{12}(x_1, x_2) = m_1 \frac{dV_1}{dt} = m_1 a_1, \quad (2.1.1)$$

$$F_{21}(x_1, x_2) = m_2 \frac{dV_2}{dt} = m_2 a_2, \quad (2.1.2)$$

où  $F_{12}$  est la force sur la masse 1 en raison de ses interactions avec la masse 2 et  $F_{21}$  est la force sur la masse 2 en raison de ses interactions avec la masse 1. Les deux points au-dessus des vecteurs de position-x indiquent leur dérivée seconde par rapport à temps, ou leurs vecteurs d'accélération.

Ajouter et soustraire ces deux équations les dissocie en deux problèmes à un corps, qui peuvent être résolus indépendamment. L'ajout des équations (2.1.1) et (2.1.2) donne une équation décrivant le mouvement du centre de masse (barycentre). En revanche, en soustrayant l'équation (2.1.2) de l'équation (2.1.1), on obtient une équation décrivant comment le vecteur  $r = x_1 - x_2$  situé entre les masses change avec le temps. Les solutions de ces problèmes mono-corps indépendants peuvent être combinées pour obtenir les solutions des trajectoires  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

\* **Centre de mouvement de masse (1er problème mono-corps):** Soit  $R$  la position du centre de masse (barycentre) du système. Addition des équations de force Eq. (2.1.1) et Eq. (2.1.2)

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = (m_1 + m_2) \tilde{R} = F_{12} + F_{21} = 0, \quad (2.1.3)$$

où nous avons utilisé la troisième loi de Newton  $F_{12} = -F_{21}$  et où

$$\tilde{R} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.1.4)$$

L'équation résultante:

$$\tilde{R} = 0, \quad (2.1.5)$$

montre que la vitesse  $V = dR/dt$  du centre de masse est constante, d'où découle que la quantité de mouvement totale  $m_1 v_1 + m_2 v_2$  est également constante (conservation de la quantité de mouvement). Par conséquent, la position  $R(t)$  du centre de masse peut être déterminée à tout moment à partir des positions et vitesses initiales.

\*\* **Mouvement vectoriel de déplacement (2ème problème d'un corps):** En divisant les deux équations de force par les masses respectives, en soustrayant la deuxième équation de la première et en réarrangeant, on obtient l'équation

$$\Delta a = a_1 - a_2 = \left( \frac{F_{12}}{m_1} - \frac{F_{21}}{m_2} \right) = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_{12}, \quad (2.1.6)$$

où nous avons encore utilisé la troisième loi de Newton  $F_{12} = -F_{21}$  et où  $r$  est le vecteur de déplacement de la masse 2 à la masse 1, tel que défini ci-dessus. La force entre les deux objets, qui provient de ces deux objets, ne devrait être fonction que de leur séparation  $r$  et non de leurs positions absolues  $x_1$  et  $x_2$ ; sinon, il n'y aurait pas de symétrie de translation et les lois de la physique devraient changer d'un endroit à l'autre. L'équation soustraite peut donc être écrite:

$$\mu \Delta a = F_{12}(x_1, x_2) = F(r), \quad (2.1.7)$$

où  $\mu$  est la masse réduite  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Résoudre l'équation pour  $r(t)$  est la clé du problème des deux corps; Les méthodes générales de résolution sont décrites ci-dessous. Une fois que  $R(t)$  et  $r(t)$  ont été déterminés, les trajectoires initiales peuvent être obtenues

$$x_1(t) = R(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r(t). \quad (2.1.8)$$

$$x_2(t) = R(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r(t). \quad (2.1.9)$$

Comme on peut le vérifier en substituant les définitions de  $R$  et  $r$  dans les membres de droite de ces deux équations.

**\*\*\* Energie du système à deux corps:** Si la force  $F(r)$  est conservatrice, le système a une énergie potentielle  $U(r)$ , de sorte que l'énergie totale peut être écrite ainsi:

$$E = \frac{1}{2}\mu\Delta r^2 + U(r). \quad (2.1.10)$$

Les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  peuvent être exprimées par

$$x_1 = \frac{\mu}{m_1}r, \quad x_2 = -\frac{\mu}{m_2}r. \quad (2.1.11)$$

Et de la même manière, l'énergie  $E$  est liée aux énergies  $E_1$  et  $E_2$  qui contiennent séparément l'énergie cinétique de chaque corps:

$$E_1 = \frac{\mu}{m_1}E = \frac{1}{2}m_1\Delta x_1^2 + \frac{\mu}{m_1}U(r), \quad (2.1.12)$$

$$E_2 = \frac{\mu}{m_2}E = \frac{1}{2}m_2\Delta x_2^2 + \frac{\mu}{m_2}U(r), \quad (2.1.13)$$

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}m_1\Delta x_1^2 + \frac{\mu}{m_1}U(r) + \frac{1}{2}m_2\Delta x_2^2 + \frac{\mu}{m_2}U(r). \quad (2.1.14)$$

De nombreux problèmes d'astronomie (et de physique en général) peuvent être bien modélisés en commençant par la solution d'un problème à deux, ce qui rend le problème des deux corps d'autant plus important à comprendre.

## 2.1.2 Le cas quantique

Supposons que nous avons deux particules qui interagissent sous une force mutuelle avec l'énergie potentielle  $\tilde{V}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ , et se déplacent également dans un potentiel externe  $V(x_i)$ . Alors l'Hamiltonien est  $H = T_1 + T_2 + \tilde{V} + V(\mathbf{x}_1) + V(\mathbf{x}_2)$  de sorte que l'équation de Schrödinger, qui dépend du temps, devient

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + \tilde{V}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + V(\mathbf{x}_1) + V(\mathbf{x}_2) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t), \quad (2.1.15)$$

où  $\nabla_i^2$  se réfère au laplacien par rapport aux coordonnées de la particule ( $i = a, b$  où  $1, 2$ ). Pour résoudre cette équation, nous séparons d'abord les variables temporelles et spatiales de la manière habituelle en écrivant

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)T(t). \quad (2.1.16)$$

En substituant ceci dans Eq (2.1.15). Division des deux côtés par  $\psi T$  rendements

$$\frac{1}{\psi} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_2^2 + \tilde{V}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + V(\mathbf{x}_1) + V(\mathbf{x}_2) \right] \psi = \frac{i\hbar}{T} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Puisque le côté gauche est uniquement fonction des variables spatiales et que le côté droit est uniquement fonction du temps, les deux côtés doivent être égaux à une constante que nous appelons  $E$ . Ensuite, l'équation du temps a la solution (jusqu'à la normalisation).

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.1.17)$$

Donc, l'équation spatial devient

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_2^2 + \tilde{V}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + V(\mathbf{x}_1) + V(\mathbf{x}_2) \right] \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (2.1.18)$$

Si les solutions à Eq. (2.1.18) sont  $E_n$  et  $\psi_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , alors la solution générale à Eq (2.1.15) est de la forme

$$\psi_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.1.19)$$

Maintenant, nous interprétons  $|\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)|^2$  comme la densité de probabilité pour que la particule  $i$  soit dans le volume  $d^3\mathbf{x}_i$ , et les constantes  $c_n$  sont choisies de manière à normaliser la fonction d'onde

$$\int |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)|^2 d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 = 1. \quad (2.1.20)$$

Nous allons maintenant nous spécialiser dans le cas où les potentiels externes disparaissent. Dans ce cas, Eq (2.1.18) devient

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \right] \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (2.1.21)$$

La présence du terme  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  suggère que nous modifions les variables de  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  à

$$r_i = \mathbf{x}_{1i} - \mathbf{x}_{2i}, \quad (2.1.22)$$

$$R_j = \alpha \mathbf{x}_{1j} + \beta \mathbf{x}_{2j}. \quad (2.1.23)$$

Nous verrons que celles-ci se révèlent être les coordonnées habituelles du centre de masse. En utilisant la règle de la chaîne, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x_{1i}} = \frac{\partial r_j}{\partial x_{1i}} \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_{1i}} \frac{\partial}{\partial R_j} = \frac{\partial}{\partial r_i} + \alpha \frac{\partial}{\partial R_i}, \quad (2.1.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{2i}} = -\frac{\partial}{\partial r_i} + \beta \frac{\partial}{\partial R_i}, \quad (2.1.25)$$

on a

$$\nabla_1^2 = (\partial_{r_i} + \alpha \partial_{R_i})(\partial_{r_i} + \alpha \partial_{R_i}) = \nabla_r^2 + 2\alpha \nabla_r \cdot \nabla_R + \alpha^2 \nabla_R^2. \quad (2.1.26)$$

$$\nabla_2^2 = (-\partial_{r_i} + \beta \partial_{R_i})(-\partial_{r_i} + \beta \partial_{R_i}) = \nabla_r^2 - 2\beta \nabla_r \cdot \nabla_R + \beta^2 \nabla_R^2. \quad (2.1.27)$$

Avec  $\partial_{r_i} = \partial/\partial r_i$ , on trouve,

$$\frac{1}{m_1} \nabla_1^2 + \frac{1}{m_2} \nabla_2^2 = \frac{1}{\mu} \nabla_r^2 + 2 \left( \frac{\alpha}{m_1} - \frac{\beta}{m_2} \right) \nabla_r \cdot \nabla_R + \left( \frac{\alpha^2}{m_1} + \frac{\beta^2}{m_2} \right) \nabla_R^2, \quad (2.1.28)$$

avec

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.1.29)$$

s'appelle la masse réduite. Nous pouvons éliminer le terme croisé en choisissant

$$\beta = \frac{m_2}{m_1} \alpha, \quad (2.1.30)$$

qui se traduit par

$$\frac{1}{m_1} \nabla_1^2 + \frac{1}{m_2} \nabla_2^2 = \frac{1}{\mu} \nabla_r^2 + M \frac{\alpha^2}{m_1^2} \nabla_R^2, \quad (2.1.31)$$

avec  $M = m_1 + m_2$ . Notre choix d'alpha ( $\alpha$ ) est toujours arbitraire, et il est plus pratique de le choisir pour que

$$\int d_1^3 \mathbf{x} d_2^3 \mathbf{x} = \int d^3 r d^3 R, \quad (2.1.32)$$

ce qui signifie que le jacobien de la transformation doit être l'unité.

Je laisse cela comme un bon exercice (et pas aussi difficile que vous ne le pensez) pour vous montrer que substituer les équations Eq.(2.1.22) et Eq.(2.1.30) à ceci et évaluer les rendements déterminants

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M}. \quad (2.1.33)$$

Alors notre changement de variables devient

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad (2.1.34)$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{M}, \quad (2.1.35)$$

qui sont les coordonnées familières CM telles que revendiquées.

En réunissant tout cela, nous avons

$$\frac{1}{m_1} \nabla_1^2 + \frac{1}{m_2} \nabla_2^2 = \frac{1}{\mu} \nabla_r^2 + \frac{1}{M} \nabla_R^2. \quad (2.1.36)$$

Donc l'équation de Schrödinger (2.1.21) devient,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(r, R) = E\psi(r, R). \quad (2.1.37)$$

Ceci est clairement séparable en laissant (dans une notation quelque peu bâclée)  $\psi(r, R) = \psi(r)\varphi(R)$  ce qui a pour résultat

$$\frac{1}{\psi(\mathbf{r})} \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \right] \psi(r) = E - \frac{1}{\phi(R)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \phi(R) \right]. \quad (2.1.38)$$

Encore une fois, les côtés gauche et droit de cette équation dépendent uniquement de différentes variables et doivent donc être constants. Cela donne les deux équations

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \right] \psi(r) = E_r \psi(r), \quad (2.1.39)$$

et

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \phi(R) \right] = E_R \phi(R), \quad (2.1.40)$$

avec

$$E = E_r + E_R. \quad (2.1.41)$$

Ceci exprime l'énergie totale en tant que somme de l'énergie de centre de masse en translation et de l'énergie du mouvement relatif.

## 2.2 Certaines applications (Suivant le formalisme de Feynman)

### 2.2.1 Définition

Considérons une particule de masse ( $m$ ) non relativiste sans spin à une dimension, en mouvement sous l'action d'un potentiel scalaire  $V(x, t)$  allant du point  $A(x_i, t_i)$  au point  $B(x_f, t_f)$ . Le chemin de la particule est représenté par une fonction du temps  $x(t)$  avec  $x(t_i) = x_i$  et  $x(t_f) = x_f$ .

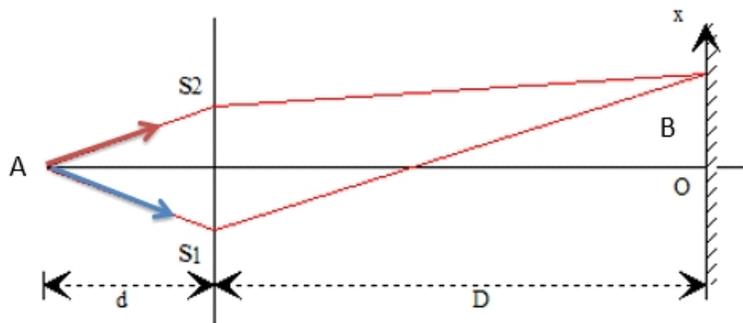


FIG2: Quand un électron a deux trajets possibles pour aller de A vers B

Le mouvement de la particule est régi par le Lagrangien:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - V(x, t). \quad (2.2.1)$$

Le chemin classique noté par  $\bar{x}(t)$  est celui pour lequel l'action de la particule donnée par

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt. \quad (2.2.2)$$

Au lieu de considérer seulement la trajectoire classique, nous allons maintenant considérer tous les chemins possibles que peut prendre la particule pour aller du point  $A$  au point  $B$ . On associe à chacun de ces chemins une amplitude de probabilité partielle  $\Phi_\Gamma(x(t))$  donnée par

$$\Phi_\Gamma(x(t)) = N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_\Gamma(x(t)) \right\}, \quad (2.2.3)$$

où  $N$  est une constante de normalisation et  $S_\Gamma$  est l'action associée au chemin  $\Gamma$ . Par définition, la probabilité de transition du point  $x_i$  à  $t_i$  au point  $x_f$  à  $t_f$  est

$$P(x_f, x_i) = |K(x_f, x_i)|^2, \quad (2.2.4)$$

où  $K(x_f, x_i)$  est l'amplitude ou propagateur d'aller de  $A$  à  $B$ . Cette amplitude est la somme des contributions  $\Phi_\Gamma(x(t))$  de chaque chemin

$$K(x_f, x_i) = \sum_{\Gamma} \Phi_\Gamma(x(t)). \quad (2.2.5)$$

Décrite en mécanique quantique par une fonction d'onde, supposons que l'on se l'équation de Schrödinger, est donnée par l'équation intégrale:

$$\Psi(x, t) = \int dy K(x, t, y, t') \Psi(y, t'), \quad (2.2.6)$$

où  $K(x, t)$  est le propagateur de la particule, ce propagateur est une solution de l'équation de Schrödinger comme celle de la fonction d'onde.

### 2.2.2 Formulat de Trotter à deux particules

Considérons deux particules à une dimension en mouvement sous l'action d'un potentiel  $V(\mathbf{x})$

$$K(\mathbf{x}_f^b, \mathbf{x}_f^a; \mathbf{x}_i^b, \mathbf{x}_i^a; T) = \langle \mathbf{x}_f^b, \mathbf{x}_f^a | \hat{U}(t_f; t_i) | \mathbf{x}_i^a, \mathbf{x}_i^b \rangle. \quad (2.2.7)$$

En divisant l'intervalle de temps  $T = t_f - t_i$  en  $N + 1$  intervalles infinitésimaux égaux  $\epsilon = t_f - t_i / (N + 1)$ . On peut décomposer l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(t_f; t_i) = \exp \left\{ \frac{-i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i) \right\}$ , avec l'Hamiltonien de ce système est défini par

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_{(a)}^2}{2m_{(a)}} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_{(b)}^2}{2m_{(b)}} + \kappa \hat{\mathbf{p}}_{(a)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{(b)} + U(\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}). \quad (2.2.8)$$

Ensuite, en insérant  $N$  relations de fermeture de la forme:

$$\int |\mathbf{x}_j^b, \mathbf{x}_j^a\rangle \langle \mathbf{x}_j^b, \mathbf{x}_j^a| d\mathbf{x}_j^a d\mathbf{x}_j^b = 1. \quad (2.2.9)$$

Entre les opérateurs d'évolution infinitésimaux, le propagateur peut se mettre sous la forme d'un produit de  $(N + 1)$  propagateur élémentaires

$$\begin{aligned} K\left(\mathbf{x}_f^{(b)}, \mathbf{x}_f^{(a)}; \mathbf{x}_i^{(a)}, \mathbf{x}_i^{(b)}; T\right) &= \langle \mathbf{x}_f^{(a)}, \mathbf{x}_f^{(b)} | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}\right\} \dots \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}\right\} | \mathbf{x}_i^{(a)}, \mathbf{x}_i^{(b)} \rangle \\ &= \int d\mathbf{x}_1^{(a)} \dots d\mathbf{x}_N^{(a)} \int d\mathbf{x}_2^{(b)} \dots d\mathbf{x}_N^{(b)} \times \\ &\quad \prod_{j=1}^{N+1} \langle \mathbf{x}_j^{(a)}, \mathbf{x}_j^{(b)} | \left(1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}\right) | \mathbf{x}_{j-1}^{(a)}, \mathbf{x}_{j-1}^{(b)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Introduisons la relation de fermeture  $(N + 1)$  fois ( $\int |\mathbf{p}_j^{(a)}, \mathbf{p}_j^{(b)}\rangle \langle \mathbf{p}_j^{(a)}, \mathbf{p}_j^{(b)}| d\mathbf{p}_j^{(a)} d\mathbf{p}_j^{(b)} = 1$ ) entre l'opérateur infinitésimale  $\exp(-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H})$ , on trouve

$$\begin{aligned} K\left(\mathbf{x}_j^{(b)}, \mathbf{x}_j^{(a)}; \mathbf{p}_j^{(a)}, \mathbf{p}_j^{(b)}; T\right) &= \prod_{j=1}^N \int d\mathbf{x}_j^{(a)} d\mathbf{x}_j^{(b)} \prod_{j=1}^{N+1} \int d\mathbf{p}_j^{(a)} d\mathbf{p}_j^{(b)} \langle \mathbf{x}_j^1, \mathbf{x}_j^2 | \left(1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}\right) | \mathbf{p}_j^{(a)}, \mathbf{p}_j^{(b)} \rangle \\ &\quad \times \langle \mathbf{p}_j^{(a)}, \mathbf{p}_j^{(b)} | \mathbf{x}_{j-1}^1, \mathbf{x}_{j-1}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

En utilise  $\delta\left(\mathbf{x}_j^{(a)}, \mathbf{x}_{j-1}^{(a)}\right) \delta\left(\mathbf{x}_j^{(b)}, \mathbf{x}_{j-1}^{(b)}\right) = \int \frac{d\mathbf{p}_j^{(a)}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_j^{(a)}(\mathbf{x}_j^{(a)} - \mathbf{x}_{j-1}^{(a)})} \int \frac{d\mathbf{p}_j^{(b)}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_j^{(b)}(\mathbf{x}_j^{(b)} - \mathbf{x}_{j-1}^{(b)})}$  nous faisons la valeur de  $\hat{H}$

$$\begin{aligned} K\left(\mathbf{x}_j^{(b)}, \mathbf{x}_j^{(a)}; \mathbf{p}_j^{(a)}, \mathbf{p}_j^{(b)}; T\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int d\mathbf{x}_j^a d\mathbf{x}_j^b \prod_{j=1}^{N+1} \int \frac{d\mathbf{p}_j^{(a)}}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}_j^{(b)}}{(2\pi\hbar)^3} \\ &\quad \prod_{j=1}^{N+1} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[ \mathbf{p}_j^{(a)} \Delta \mathbf{x}_j^{(a)} + \mathbf{p}_j^{(b)} \Delta \mathbf{x}_j^{(b)} - \epsilon \left( \frac{(\mathbf{p}_j^1)^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{p}_j^2)^2}{2m_2} + \kappa \mathbf{p}_j^{(a)} \mathbf{p}_j^{(b)} + V\left(\mathbf{x}_j^{(a)} - \mathbf{x}_j^{(b)}\right) \right) \right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

L'intégrale de chemin hamiltonien correspondante pour l'évolution dans le temps de  $\mathbf{x}_{1,2}(t_i)$  à  $\mathbf{x}_{1,2}(t_f)$  dans l'intervalle de temps  $T = t_f - t_i$  ne peut donc être écrit [26].

Nous pouvons passer au centre de la masse  $\mathbf{X}$  et aux coordonnées relatives  $\mathbf{x}_r$  au moyen de

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2, & \mathbf{x}_r &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - r_0, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, & \mathbf{p}_r &= \mu_2 \mathbf{p}_1 - \mu_1 \mathbf{p}_2, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

où  $(\mu_i = m_i/M, i = 1, 2, (\mu_1 + \mu_2 = 1), M = m_1 + m_2)$  est la masse totale, et  $\mu = m_1 m_2 / M$  est la masse réduite. Inversement, nous avons

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{X} + \frac{m_2}{M} \mathbf{x}_r, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{X} - \frac{m_1}{M} \mathbf{x}_r, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_r + \mu_1 \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_2 = \mu_2 \mathbf{p} - \mathbf{p}_r. \quad (2.2.14)$$

Convertir de  $(\mathbf{x}_j^1, \mathbf{x}_j^2)$  et  $(\mathbf{p}_j^1, \mathbf{p}_j^2)$  à  $(\mathbf{X}, \mathbf{x}^r)$  et  $(\mathbf{P}, \mathbf{p}^r)$ , où le Jacobien est égal à 1, on trouve:

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{x}^r, \mathbf{P}, \mathbf{p}^r; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int d\mathbf{X}_j d\mathbf{x}_j^{(r)} \prod_{j=1}^{N+1} \int \frac{d\mathbf{P}_j}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{p}^{(r)}}{(2\pi\hbar)^3} \prod_{j=1}^{N+1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \mathbf{P}_j \Delta \mathbf{X}_j + \mathbf{p}_j^r \Delta \mathbf{x}_j^r - \epsilon \left[ \mathbf{P}_j^2 \left( \frac{1}{2M} + \kappa \mu_1 \mu_2 \right) + \left( \mathbf{p}_j^{(r)} \right)^2 \left( \frac{1}{2\mu} - \kappa \right) + V(\mathbf{x}_j^{(r)}) + \mathbf{P}_j \mathbf{p}_j^{(r)} \kappa (\mu_2 - \mu_1) \right] \right] \right\} \quad (2.2.15)$$

Nous pouvons effectuer les intégrations de moments pour obtenir l'intégrale de chemin lagrangien pour le système couplé

$$K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_{in}, t_f; \mathbf{x}_f^{(r)}, \mathbf{x}_{in}^{(r)}, t_{in}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int d\mathbf{X}_j \prod_{j=1}^{N+1} \left( \frac{1}{4\pi i \hbar \epsilon \beta} \right)^{3/2} \prod_{j=1}^N \int d\mathbf{x}_j^{(r)} \prod_{j=1}^{N+1} \left( \frac{\beta}{4\pi i \hbar \epsilon a} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{\alpha}{4\epsilon a} (\Delta \mathbf{X}_j)^2 + \frac{\beta}{4\epsilon a} (\Delta \mathbf{x}_j^{(r)})^2 - \frac{2\gamma}{4\epsilon a} \Delta \mathbf{X}_j \cdot \Delta \mathbf{x}_j^{(r)} - \epsilon V(\mathbf{x}^{(r)}) \right] \right\}. \quad (2.2.16)$$

Et nous avons utilisé les abréviations

$$\alpha = \frac{1}{2\mu} - \kappa, \quad \beta = \frac{1}{2M} + \kappa \mu_{(a)} \mu_{(b)}, \quad \gamma = \frac{\kappa}{2} (\mu_{(b)} - \mu_{(a)}) \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{m_{(a)} m_{(b)}} - \kappa^2 \right). \quad (2.2.17)$$

Et nous avons utilisé les abréviations Eq (2.2.12) nous pouvons effectuer l'intégration des moments pour obtenir l'intégrale de chemin lagrangien pour le système couplé

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{x}^r; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4\sqrt{D}\pi i \hbar} \right)^{N+1} \prod_{j=1}^N \int d\mathbf{X} \int d\mathbf{x}^r \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \Delta \mathbf{x}^{r2} \left[ \frac{a}{4(ad-b^2)} \right] + \Delta \mathbf{X}^2 \left[ \frac{b^2}{4aD} + \frac{ad-b^2}{4aD} \right] - \Delta \mathbf{x}^r \Delta \mathbf{X} \left[ \frac{2b}{4(ad-b^2)} \right] \right] \right\} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} [-V(\mathbf{x}_j^r)] \right\}, \quad (2.2.18)$$

et  $D = ad - b^2 = \frac{1}{4} (1/m_1 m_2 - \kappa^2)$ . Le cas limite  $\kappa = 0$  est facilement récupérable, la formulation de treillis l'intégrale de chemin Eq( 2.2.18 ) est donnée de la manière habituelle par

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{x}^r; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4\sqrt{D}\pi i \hbar} \right)^{N+1} \prod_{j=1}^N \int d\mathbf{X} \int d\mathbf{x}^r \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \Delta \mathbf{X}_j^2 \left( \frac{d}{4D} \right) + \Delta \mathbf{x}_j^{r2} \left( \frac{a}{4D} \right) - \Delta \mathbf{x}_j^r \Delta \mathbf{X}_j \left( \frac{b}{2D} \right) \right\} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} [-V(\mathbf{x}_j^r)] \right\}, \quad (2.2.19)$$

l'intégrale de chemin dans la coordonnée de centre de masse est couplée à la coordonnée relative  $x_r$  via  $\Delta x_r \Delta X$ , ainsi l'intégration de chemin  $X$  est celle d'une particule libre avec un champ magnétique, qui dépend du temps mais pas du chemin  $X$ . solution classique pour la coordonnée centre de masse  $X$  s'avère être

$$\mathbf{X}_{cl}(t) = \frac{\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i}{T} (t - t_i) - \frac{d}{2D} \int_{t_i}^t \dot{\mathbf{x}}_r(t) dt, \quad (2.2.20)$$

avec action classique correspondante

$$S_{cl}(\mathbf{X}_{cl}) = \frac{d}{4D} \frac{(\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i)^2}{T} - \frac{b^2}{4dD} \int_{t_i}^{t_f} \dot{\mathbf{x}}_r^2(t) dt. \quad (2.2.21)$$

Après ces étapes de calcul important, nous allons examiner les applications suivantes.

### 2.2.3 L'interaction de l'oscillateur harmonique

Dans cette exemple l'interaction entre les deux particules est défini par

$$V(x^{(a)} - x^{(b)}) = \varkappa \left( |x^{(a)} - x^{(b)}|^2 \right). \quad (2.2.22)$$

Avec  $\varkappa$  est paramètre positive. Avec l'interaction de l'oscillateur harmonique (2.2.22), on peut séparer l'intégration  $X$  du chemin de centre de masse. On obtient:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_a, t_b; \mathbf{x}_b^{(r)}, \mathbf{x}_a^{(r)}, t_a) &= \sqrt{\frac{M}{2\pi i \hbar \lambda} \frac{(1-2\mu\kappa)}{(1-\mu M \kappa^2)}} \exp \left[ \frac{iM}{2\hbar \lambda} \frac{(1-2\mu\kappa)}{(1-\mu M \kappa^2)} (\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i)^2 \right] \\ &\times \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{x}_j^{(r)} \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi i \hbar \varepsilon (1-2\mu\kappa)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{\mu}{2\varepsilon(1-2\mu\kappa)} (\Delta \mathbf{x}_j^{(r)})^2 - \varepsilon \varkappa (\mathbf{x}^{(r)})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Suivant Ref.[37], le propagateur est donné par,

$$K(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_a, t_b; \mathbf{x}_b^{(r)}, \mathbf{x}_a^{(r)}, t_a) = \left( \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar} \left[ (\mathbf{x}_a^2 + \mathbf{x}_b^2) \cot \omega T - 2 \frac{\mathbf{x}_a \mathbf{x}_b}{\sin \omega T} \right] \right\}. \quad (2.2.24)$$

Pour que

$$m = \frac{\mu}{(1-2\mu\kappa)}, \omega = \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}}, T = \tau. \quad (2.2.25)$$

On trouve,

$$\begin{aligned} K(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_a, t_b; \mathbf{x}_b^{(r)}, \mathbf{x}_a^{(r)}, t_a) &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\pi\hbar} \sqrt{1 + \frac{2\varkappa}{\mu\omega^2}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i)} \\ &\times \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{1-\mu M \kappa^2}{2M(1-2\mu\kappa)} \hbar^2 K^2 + \sqrt{\varkappa \frac{(1-2\mu\kappa)}{\mu}} (n + \frac{1}{2}) \right) (t_b - t_a)} D_n \left( \sqrt{\frac{2M\omega \sqrt{1 + \frac{2\varkappa}{\mu\omega^2}}}{\hbar}} x_f^{(r)} \right) D_n \left( \sqrt{\frac{2M\omega \sqrt{1 + \frac{2\varkappa}{\mu\omega^2}}}{\hbar}} x_i^{(r)} \right). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Où  $D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2})$  sont des fonctions de cylindre paraboliques et  $H_n(z)$  est une polynomie d'Hermitel. Pour obtenir l'énergie de ce système, il faut déterminer la fonction de Green correspondant.

$$G\left(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_a; \mathbf{x}_b^{(r)}, \mathbf{x}_a^{(r)}; E\right) = \int \frac{dT}{2\pi\hbar} e^{iET} K\left(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_a, t_b; \mathbf{x}_b^{(r)}, \mathbf{x}_a^{(r)}, t_a\right). \quad (2.2.27)$$

Ainsi, les valeurs propres d'énergie  $E_n$

$$E_n = \frac{1-\mu M\kappa^2}{2M(1-2\mu\kappa)} \hbar^2 K^2 + \sqrt{\frac{(1-2\mu\kappa)\mathcal{X}}{\mu}} \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.2.28)$$

### 2.2.4 Le Puits infini

Nous montrons maintenant une application de ces résultats. Le problème du potentiel de puits carré infini (ISW) est peut-être le problème le plus simple d'états liés en mécanique quantique. Son traitement intégral de la voie n'est toutefois pas facile. Une méthode consiste à utiliser le propagateur de particules libre et la méthode des images. Une autre méthode consiste à utiliser la transformation de coordonnées et de temps pour l'associer à un problème pouvant être résolu. Nous utilisons la deuxième approche ici. Le potentiel (I S W) est défini comme

$$V_{ISW}(|x^{(a)} - x^{(b)}|) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & x \leq 0 \text{ et } x \geq L \end{cases} \quad (2.2.29)$$

Avec la constante de cinétique potentiel coubling est dépendante de l'énergie  $\kappa(E)$ .

L'intégrale du trajet dans la coordonnée du centre de masse est couplée à la coordonnée relative  $x^r$  via  $\dot{x}^r \dot{X}$ , de sorte que l'intégration du trajet  $X$  est celle d'une particule libre avec un champ magnétique, qui est le temps dépendante mais pas dépendante du chemin  $X$ . En suivant les étapes décrites dans le document [37], il est facile de séparer l'intégration du chemin de centre de masse  $X$

$$\begin{aligned} K\left(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_a, t_b; \mathbf{x}_b^{(r)}, \mathbf{x}_a^{(r)}, t_a\right) &= \sqrt{\frac{M}{2\pi i \hbar \lambda} \frac{(1-2\mu\kappa)}{(1-\mu M\kappa^2)}} \exp\left[\frac{iM}{2\hbar\lambda} \frac{(1-2\mu\kappa)}{(1-\mu M\kappa^2)} (\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i)^2\right] \\ &\times \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{x}_j^{(r)} \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi i \hbar \varepsilon (1-2\mu\kappa)}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[\frac{\mu}{2\varepsilon(1-2\mu\kappa)} (\Delta\mathbf{x}_j^{(r)})^2 - \varepsilon V_{ISW}(\mathbf{x}^{(r)})\right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

L'intégrale de chemin dans la troisième ligne de Eq (2.2.30) est celle du puits carré infini que l'on peut trouver dans [37] au moyen de la transformation de Duru-Kleinert (Appendice de ce mémoire). Où la transformation spatio-temporelle est définie comme:

$$x^r = \frac{2L}{\pi} \tan^{-1}(\exp[-\bar{a}q^r]), \varepsilon = \sigma \left( \frac{\bar{a}L}{\pi} \right)^2 \sec^2(\bar{a}q^r). \quad q^r \in ]-\infty, +\infty[, \quad \frac{dt}{ds} = \left( \frac{aL}{\pi} \right)^2 \sec^2(aq). \quad (2.2.31)$$

Ce qui donne ce nouveau potentiel

$$V_{eff} = \frac{\hbar^2 \bar{a}^2}{2m} \left( \frac{1}{2} - \bar{k}^2 \right) + \frac{\hbar^2 \bar{a}^2}{2m} \left( \bar{k}^2 - \frac{1}{4} \right) \tanh^2(\bar{a}q^r). \quad (2.2.32)$$

La fonction de Green transformée pour bien le carré infini peut maintenant être écrite en termes du propagateur du potentiel de Rosen-Morse[37]. On peut donc obtenir

$$K(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_a, t_b; \mathbf{x}_b^{(r)}, \mathbf{x}_a^{(r)}, t_a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i)} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} T \left( -\hbar^2 K^2 \frac{1 - \mu M \kappa_E^2}{2M(1 - 2\mu\kappa_E)} - \frac{\hbar^2(1 - 2\mu\kappa_E)}{2\mu} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)} \sin(n\pi x_f^r/L) \sin(n\pi x_i^r/L). \quad (2.2.33)$$

Ainsi, les valeurs propres d'énergie  $E_n$  et les fonctions d'onde  $\Psi_n(x)$  sont

$$E_n = \frac{1 - \mu M \kappa^2}{2M(1 - 2\mu\kappa)} \hbar^2 K^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2; \quad \Psi_n(x) = \sqrt{(2/L)} \sin(n\pi x/L). \quad (2.2.34)$$

## 2.2.5 Le potentiel de Morse

Considérons un système à deux particules constitué de particules ayant les masses  $m_1$  et  $m_2$  dans un espace à une dimension le potentiel morse donne par

$$V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \lambda \left( 1 - \alpha e^{-\beta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \right)^2. \quad (2.2.35)$$

Le premier exemple est un modèle en physique moléculaire qui prend en compte l'anharmonicité du potentiel inter-moléculaire (e.g.  $H_2O, H_2S, C_2H_2$ ) au moyen du potentiel de Morse[38, 40]

Nous pouvons donc séparer le centre de l'intégration de chemin de masse  $X$  selon [26, 27]

$$K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, \mathbf{x}_f^r, \mathbf{x}_i^r; T) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dK}{2\pi} \exp(iK(\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i) - i\hbar K^2 \frac{1 - \mu M \kappa^2}{2M(1 - 2\mu\kappa)} T - \frac{i}{\hbar} \lambda T) \\ \times \int_{\mathbf{x}_r(t_i) = \mathbf{x}_i^r}^{\mathbf{x}_r(t_f) = \mathbf{x}_f^r} D\mathbf{x}_r(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2\mu} - \kappa \right)^{-1} \dot{\mathbf{x}}_r^2 - \lambda \alpha^2 (e^{-2\beta \mathbf{x}_r} - \frac{2}{\alpha} e^{-\beta \mathbf{x}_r}) \right] dt \right\}. \quad (2.2.36)$$

Encore une fois, le cas  $\kappa = 0$  donne un découplage complet (note  $1/4 = \mu/2$  pour  $\kappa = 0$ ).

L'intégrale de chemin dans la deuxième ligne de est Eq( 2.2.5 ) celle du potentiel Morse que l'on peut trouver dans [26] . Réglage

$$K(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_i, \mathbf{x}_f^r, \mathbf{x}_i^r; T) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i)} K_K(\mathbf{x}_f^r, \mathbf{x}_i^r; T), \quad (2.2.37)$$

$$K_K(\mathbf{x}_f^r, \mathbf{x}_i^r; T) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} G_K(\mathbf{x}_f^r, \mathbf{x}_i^r; E). \quad (2.2.38)$$

Où  $G_K$  est la fonction de Green (dépendante de l'énergie) correspondant au noyau  $K_K$ . Nous trouvons la fonction de Green au moyen de la transformation (transformation Duru-Kleinert) [26, 27, 80] :

$$\begin{aligned} G_K(\mathbf{x}_f^r, \mathbf{x}_i^r; E) &= \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dT e^{-iET/\hbar} \exp(-i\hbar K^2 \frac{1-\mu M\kappa^2}{2M(1-2\mu\kappa)} T - \frac{i}{\hbar} \lambda T) \\ &\times \int_{\mathbf{x}_r(\mathbf{t}_i)=\mathbf{x}_i^r}^{\mathbf{x}_r(\mathbf{t}_f)=\mathbf{x}_f^r} D\mathbf{x}_r(\mathbf{t}) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \left[ \frac{1}{4d} \dot{\mathbf{x}}_r^2 - \lambda \alpha^2 (e^{-2\beta\mathbf{x}_r} - \frac{2}{\alpha} e^{-\beta\mathbf{x}_r}) \right] dt \right\} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \eta - \xi)}{2d\hbar^2 \Gamma(1+2\eta)} e^{-\beta(\mathbf{x}_i^r + \mathbf{x}_f^r)/2} W_{\xi, \eta}(2\alpha\xi e^{\beta\mathbf{x}_r, >}) M_{\xi, \eta}(2\alpha\xi e^{\beta\mathbf{x}_r, <}). \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

Ici nous avons abrégé

$$\xi = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\lambda}{d}}, \quad \eta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-\frac{E-E_0}{d}}, \quad E_0 = \frac{\hbar^2 K^2}{2M} \frac{1-\mu M\kappa}{1-2\mu\kappa} + \lambda, \quad (2.2.40)$$

$x_{r, >}$  et  $x_{r, <}$  désignent respectivement le plus grand et le plus petit des  $\mathbf{x}_r^1, \mathbf{x}_r^2$ . Des pôles de  $G_K$  les états liés sont donnés par

$$E_n = \frac{\hbar^2 K^2}{2M} \frac{1-\mu M\kappa}{1-2\mu\kappa} - \left(\frac{1}{2\mu} - \kappa\right) \hbar^2 \beta^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\hbar\beta \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\lambda \left(\frac{1}{2\mu} - \kappa\right)}. \quad (2.2.41)$$

Le premier terme est juste le spectre continu qui n'est pas pertinent pour le spectre discret. Les fonctions d'onde de l'état lié sont déterminées par les pôles de  $G_K$ , et nous trouvons [26]

$$\begin{aligned} \Psi_{n,K}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_r) &= \frac{e^{iK\mathbf{X}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\beta(2\xi - 2n - 1)n!(2\alpha\xi)^{2\xi-2n-1}}{\Gamma(2\xi - n)}} \\ &\exp\left(\left(2\xi - 2n - \frac{1}{2}\right)\beta\mathbf{x}_r - \alpha\xi e^{\beta\mathbf{x}_r}\right) L_n^{(2\xi-2n-1)}(\alpha\xi e^{\beta\mathbf{x}_r}). \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Le spectre continu est déterminé par la coupure en  $G_K$  et on obtient

$$\Psi_{k,K}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_r) = \frac{e^{iK\mathbf{X}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\beta \frac{k \sinh(\pi k)}{2\pi^2 \alpha \xi}} \Gamma\left(ik - \xi + \frac{1}{2}\right) e^{-\beta\mathbf{x}_r} W_{\xi, ik}(2\alpha\xi e^{\beta\mathbf{x}_r}), \quad (2.2.43)$$

avec le spectre d'énergie

$$E_k = \frac{\hbar^2 K^2}{2M} \frac{1-\mu M\kappa}{1-2\mu\kappa} + \left(\frac{1}{2M} - \kappa\mu_1\mu_2\right) \hbar^2 k^2. \quad (2.2.44)$$

En conclusion, nous avons présenté, dans ce chapitre, les résultats qui démontrent clairement l'applicabilité des techniques d'intégration de chemin dans les systèmes avec couplage à

énergie cinétique ( $\kappa P^{(1)}.P^{(2)}$ ). Le premier exemple est l'interaction de potentielle de Morse, c'est un modèle connu en physique moléculaire, a été converti en centre de masse( $X$  et relative ( $x_r$ ). Suivi du chemin d'intégration des coordonnées du centre de masse, permettant ainsi une séparation complète des variables entre ( $X$ ) et ( $x_r$ ). L'analyse habituelle donne les fonctions d'onde et le spectre d'énergie pour les spectres séparé et continu, respectivement. Nous avons étudié l'oscillateur harmonique. L'énergie obtenue par la fonction d'état est le polynôme Hermite, et nous avons examiné le problème du potentiel des puits carrés infinis (ISW). Nous avons obtenu les valeurs d'énergie intrinsèques ( $E_n$ ) et les fonctions d'onde ( $\Psi_n(x)$ ).

# 3

## Le problème à deux-corps dans l'espace de phase non-commutatif

### 3.1 Un bref rappel sur l'espace de phase non commutative

Pendant longtemps, l'idée de non-comutativité n'a pas été étudiée de manière intensive. Ces dernières années, en raison du développement de la théorie des cordes et de la gravité quantique (voir), l'intérêt porté aux études sur la non-comutativité a considérablement augmenté. Différents problèmes ont été étudiés dans le cadre de différents types de non-comutativité, parmi lesquels l'oscillateur harmonique[41, 43], l'atome d'hydrogène[44, 46], le problème de Landau[51, 52, 53], le puits quantique gravitationnel [54, 55], systèmes classiques à potentiels divers [56, 57, 61], systèmes à particules multiples[62, 63, 64, 65, 66, 67, 68] et de nombreux autres. Les coordonnées et les moments répondent aux relations de commutation suivantes

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \quad (3.1.1)$$

$$[X_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (3.1.2)$$

$$[p_1, p_2] = i\hbar\eta. \quad (3.1.3)$$

Le cadre de la procédure de quantification de Weyl [69] fournit un formalisme qui associe à l'algèbre de coordonnées non commutantes  $(\hat{A}, \bullet)$  une algèbre de fonctions de variables de commutation avec un produit déformé  $(A, *)$  Nous définissons une carte  $W : A \rightarrow \hat{A}$  de telle

sorte qu'un élément de  $(\hat{A})$  est affecté à une fonction  $f(x_0, x_1, x_2) = f(x)$  from  $A$

$$W(f) = \hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 K e^{iK_\nu \hat{x}^\nu} \tilde{f}(K), \quad (3.1.4a)$$

où  $\tilde{f}(K)$  est la transformée de Fourier de  $f(x)$ ,

$$\tilde{f}(K) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 x e^{-iK_\nu \hat{x}^\nu} f(x). \quad (3.1.5)$$

La multiplication de deux opérateurs  $W(f)$  et  $W(g)$  obtenue à partir de Eq (3.1.4a) donne un autre opérateur  $W(f * g)$ :

$$W(f) \bullet W(g) = \hat{f} \bullet \hat{g} = W(f * g), \quad (3.1.6)$$

avec  $f * g \in (A, *)$ , une fonction classique bien définie, comme indiqué dans la suite. En substituant Eq(3.1.4a) en Eq (3.1.6) on obtient:

$$\begin{aligned} W(f * g) &= W(f) \bullet W(g) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 K d^3 P e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{iP_\nu \hat{x}^\nu} \tilde{f}(K) \hat{g}(P). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Dans le cas de la non-comutativité canonique donnée par eq , le produit des deux exponentielles dans la formule ci-dessus donnera une exponentielle d'une combinaison linéaire de  $\hat{x}^\mu$  après l'application de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^Z = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] + \dots)}. \quad (3.1.8a)$$

Et considérer la relation de commutateur ( $[[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu], \hat{x}^\nu] = 0$ ) fait donc disparaître tous les termes incluant plus d'un commutateur dans Eq(3.1.8a)disparus:

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{iP_\nu \hat{x}^\nu} = e^{i(k_\mu + P_\mu) \hat{x}^\mu - \frac{i}{2} k_\mu P_\nu \theta^{\mu\nu}}. \quad (3.1.9)$$

On obtient  $(f * g)$  en comparant Eq(3.1.7) avec Eq (3.1.4a) et en remplaçant l'opérateur  $(\tilde{x})$  par la coordonnée  $(x)$ :

$$\begin{aligned} f * g &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 K d^3 P e^{i(k_\mu + P_\mu) \hat{x}^\mu - \frac{i}{2} k_\mu P_\nu \theta^{\mu\nu}} \\ &\quad \cdot \tilde{f}(K) \hat{g}(p). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Ainsi, le produit **Moyal – Weyl** est défini par:

$$f(x) * g(x) = \exp \left[ \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{x_\mu} \partial_{y_\nu} \right] f(x) g(y)|_{x=y}, \quad (3.1.11)$$

où  $(\partial_{x_\mu})$  est l'opérateur de la dérivée partielle. Montrons que le produit star induisant la non-commutativité est remplacé par le produit habituel plus une correction non locale de la fonction scalaire  $f(x)$ . En effet, il est facile de montrer que

$$f(x) * g(y) = f(x) \cdot g(y) + \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \cdot \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x). \quad (3.1.12)$$

Maintenant, nous remplaçons  $(\partial_{jk})$  et  $ip_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^{jk}}$  introduisons  $(P_{ik} = \theta^{ik} p_{jk})$ . Nous prenons la transformée de Fourier de  $f(x)$ ; puis

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} g(x) \\ &= i^n \int d^3 K e^{ikx} f(K) (Kp)^n g(x). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

En résumé sur n dans Eq(3.1.12), on obtient:

$$f(x) * g(y) = \int d^3 K e^{ikx} e^{ipk} f(k) g(y). \quad (3.1.14)$$

Maintenant, en utilisant  $[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$  nous obtenons

$$f(x) * g(y) = f\left(x - \frac{p}{2}\right) \cdot g(y). \quad (3.1.15)$$

Ce résultat Eq (3.1.15) est un point de passage du cas non commutatif au cas commutatif (c'est-à-dire que le produit peut être transformé en un produit ordinaire en déplaçant  $\tilde{x}$  par  $x - \frac{p}{2}$ ) qui est s'appale "Décalage de Bopp".

## 3.2 Le système de deux corps dans l'espace de phase non-commutatif

Considérons un système à deux particules constitué de particules ayant les masses  $m_1$  et  $m_2$  dans un espace de phase non commutatif à quatre dimensions et étudions l'hamiltonien suivant.

$$\hat{H} = \frac{(\mathbf{p}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(p^{(2)})^2}{2m_2} + U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|), \quad (3.2.1)$$

Les opérateurs des coordonnées et des impulsions pour deux particules satisfont les relations de commutation suivantes:

$$\left[X_1^{(a)}, X_2^{(b)}\right] = i\hbar\delta^{ab}\theta_a, \quad \left[X_i^{(a)}, p_j^{(b)}\right] = i\hbar\delta^{ab}\delta_{ij}, \quad \left[p_1^{(a)}, p_2^{(b)}\right] = i\hbar\delta^{ab}\eta_a, \quad (3.2.2)$$

Hamiltonien Eq (3.2.1) peut être représenté sous la forme suivante

$$H = \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M} + \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + U(|\Delta\mathbf{X}|), \quad (3.2.3)$$

où nous utilisons les notations suivantes pour le moment et les coordonnées du centre de masse, les moments et les coordonnées du mouvement relatif,

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}, \quad (3.2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \frac{m_1\mathbf{X}^{(1)} + m_2\mathbf{X}^{(2)}}{m_1 + m_2}, \quad (3.2.5)$$

$$\Delta\mathbf{P} = \mu_1\mathbf{P}^{(2)} - \mu_2\mathbf{P}^{(1)}, \quad (3.2.6)$$

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}. \quad (3.2.7)$$

Où  $M = m_1 + m_2$  est la masse totale et  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  est la masse réduite,  $\mu_a = m_a/M$ . Notez que les coordonnées  $X_i^{(a)}$  et les impulsions  $P_i^{(a)}$  dans Eq (3.2.4) - Eq(3.2.7) satisfont Eq( 3.2.2 )- Eq(3.2.3). Il est important de souligner qu'en raison de la non-commutativité, le mouvement du centre de masse et le mouvement relatif ne sont pas indépendants dans l'espace de phase non commutative [72]. En prenant en compte Eq(( 3.2.2) -(3.2.3), (3.2.4)-(3.2.7)), on peut obtenir les relations de commutation suivantes pour les coordonnées et les moments du centre de masse et les coordonnées du mouvement relatif.

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = i\hbar\tilde{\theta}, \quad (3.2.8)$$

$$[\tilde{P}_1, \tilde{P}_2] = i\hbar\tilde{\eta}, \quad (3.2.9)$$

$$[\tilde{X}_i, \tilde{P}_j] = [\Delta\mathbf{X}_i, \Delta\mathbf{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (3.2.10)$$

$$[\tilde{P}_1, \Delta P_2] = -[\tilde{P}_2, \Delta P_1] = i\hbar(\mu_1\eta_2 - \mu_2\eta_1), \quad (3.2.11)$$

$$[\tilde{X}_1, \Delta X_2] = i\hbar(\mu_2\theta_2 - \mu_1\theta_1), \quad (3.2.12)$$

Dans nos articles [70, 71], nous avons proposé des conditions sur les paramètres de non-commutativité

$$\frac{\eta_a}{m_a} = \alpha = \text{const}, \quad (3.2.13)$$

$$\theta_a m_a = \gamma = \text{const}. \quad (3.2.14)$$

Avec  $\alpha, \gamma$  étant des constantes identiques pour des particules de masses différentes,  $\theta_a, \eta_a$  sont les paramètres de non-commutativité qui correspondent à une particule de masse  $m_a$ . Il est

clair que les commutateurs (18, 19) dans [72] sont égaux à zéro lorsque les relations (3.2.13), (3.2.14) sont satisfaites. Donc,

$$\left[ \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M}, \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + U(|\Delta\mathbf{X}|) \right] = 0. \quad (3.2.15)$$

Et le problème des deux particules peut être réduit aux problèmes de mouvement du centre de masse et de mouvement relatif, qui peuvent être étudiés séparément.

### 3.3 Interaction de l'oscillateur harmonique

Etudions un cas particulier où un système est constitué de deux particules avec interaction oscillateur harmonique

$$U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|) = \frac{k}{2} (\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})^2. \quad (3.3.1)$$

Ici  $k$  est une constante. Dans ce cas, l'hamiltonien du système lit

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + \frac{k}{2} (\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})^2. \quad (3.3.2)$$

En utilisant Eq (3.2.4) - Eq (3.2.7), l'Hamiltonien peut être réécrit comme

$$H = H_c + H_{rel}, \quad (3.3.3)$$

où les hamiltoniens

$$H_c = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M}, \quad (3.3.4)$$

et

$$H_{rel} = \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + \frac{k}{2} (\Delta\mathbf{X})^2. \quad (3.3.5)$$

Comme indiqué dans la section précédente, le mouvement du centre de masse et le mouvement relatif sont indépendants si les conditions Eq (3.2.13), Eq (3.2.14) sont respectées. Donc, dans ce cas, nous pouvons considérer les problèmes de valeurs propres pour  $H_{rel}$  et  $H_c$  indépendamment.

Tout d'abord, étudions le mouvement du centre de masse décrit par  $H_c$ . Notez que les moments totaux  $\tilde{P}_i$  satisfont les relations de commutation Eq (3.2.9) [72]. Ainsi,  $H_c$  correspond à l'hamiltonien de la particule libre dans l'espace des phases non commutatives avec le paramètre effectif de la non-commutativité  $\tilde{\eta}$ . L'influence de non commutativité sur

le mouvement de la particule libre a été étudiée [73]. Les moments non commutatifs  $\tilde{P}_i$  qui satisfont Eq (3.2.9) [72] peuvent être représentés par

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = \tilde{p}_1 + \frac{\tilde{\eta}}{2}\tilde{x}_2, \quad (3.3.6)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_2 = \tilde{p}_2 - \frac{\tilde{\eta}}{2}\tilde{x}_1. \quad (3.3.7)$$

Où les coordonnées  $\tilde{x}_i$  et les moments  $\tilde{p}_j$  satisfont les relations de commutation ordinaires

$$[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2] = 0, \quad [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2] = 0, \quad [\tilde{x}_i, \tilde{p}_j] = i\hbar. \quad (3.3.8)$$

Par conséquent, le hamiltonien  $H_c$  peut être réécrit comme suit:

$$H_c = \frac{(\tilde{\mathbf{P}}_1)^2}{2M} + \frac{(\tilde{\mathbf{P}}_2)^2}{2M}. \quad (3.3.9)$$

Considérons maintenant le mouvement relatif décrit par  $H_{rel}$ . Notez que les coordonnées et les moments du mouvement relatif satisfont les relations de commutation Eq (3.2.10) - (3.2.12) en suivant informations décrites dans le document [73]

Ainsi, le hamiltonien  $H_{rel}$  peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} H_{rel} = & \left( \frac{\Delta\theta\Delta\eta}{4\mu(1-\sqrt{1-\Delta\theta\Delta\eta})} + \frac{\kappa\Delta\theta(1-\sqrt{1-\Delta\theta\Delta\eta})}{4\Delta\eta} \right) \Delta\mathbf{p}^2 \\ & + \left( \frac{\kappa\Delta\theta\Delta\eta}{4(1-\sqrt{1-\Delta\theta\Delta\eta})} + \frac{\Delta\eta(1-\sqrt{1-\Delta\theta\Delta\eta})}{4\mu\Delta\theta} \right) \Delta\mathbf{x}^2 \\ & + \left( \frac{\Delta\eta}{2\mu} + \frac{\kappa\Delta\theta}{2} \right) (\Delta x_2 \Delta p_1 - \Delta x_1 \Delta p_2). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Problème de valeur propre  $\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x)$ .

$$\hat{H}_c\Psi(x) = E_c\Psi(x), \quad (3.3.11)$$

$$\left( \frac{(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)}{2M} + \frac{\tilde{\eta}^2}{8M}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \frac{\tilde{\eta}}{2M}(\hat{y}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_y) \right) \Psi(x) = E_c\Psi(x). \quad (3.3.12)$$

A la représentation du position  $\hat{x} = x$  et  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ , et  $\nabla^2$  est l'opérateur Laplacien en coordonnées *Polaire*  $(\rho, \phi)$ , si le problème a une symétrie *Polaire*.

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Alors l'équation de  $\Psi(x)$  dans l'Eq.(3.3.11) devient:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2M} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} \right) + \frac{\tilde{\eta}^2}{8M} \rho^2 + \frac{\tilde{\eta}}{2M} i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Psi(\rho, \phi) = E_c \Psi(\rho, \phi), \quad (3.3.14)$$

c'est-à-dire, le spinor peut être augmenté en termes de tournent-vers le haut et tournent-vers le bas des états.

Les solutions exactes sont définit par

$$\Psi(\rho, \phi) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} m_\ell \phi}}{\sqrt{2\pi}} \Phi(\rho), \quad (3.3.15)$$

on trouve

$$\left[ \left( \frac{-\hbar^2}{2M} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right) + \frac{m_\ell^2}{2M\rho^2} + \frac{\tilde{\eta}^2}{8M} \rho^2 - \frac{\tilde{\eta}}{2M} m_\ell \right] \Phi(\rho) = E_c \Phi(\rho), \quad (3.3.16)$$

ensuite nous pouvons écrire la fonction radiale par multiplication à deux fonctions  $\Phi(\rho) = f(\rho)\mathcal{R}(\rho)$ , le terme  $\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right)$  s'obtient:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f(\rho)\mathcal{R} = f(\rho)\mathcal{R}'' + \left( f'' + \frac{1}{\rho} f' \right) \mathcal{R} + \left( \frac{f}{\rho} + 2f' \right) \mathcal{R}'. \quad (3.3.17)$$

Peut être choisi la fonction  $f(\rho)$  suivant la condition suivante  $\left( \frac{f}{\rho} + 2f' = 0 \right)$ , qui donne l'expression  $f = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ , alors l'eq(3.3.16) s'obtient:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(m_\ell^2 - 1/4)}{\rho^2} + \left( \frac{\tilde{\eta}^2}{8M} \right)^2 \rho^2 - \frac{\tilde{\eta}}{2M} m_l \right] \mathcal{R}_{m_l, n}(\rho) = E_c \mathcal{R}_{m_l, n}(\rho). \quad (3.3.18)$$

On peut facilement trouver la solution exacte de cette équation radial [8]:

$$\mathcal{R}_{n_r, m_\ell} = c \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{\frac{m_l+1/2}{2}} L_n^{m_l}(x), \quad (3.3.19)$$

avec  $c$  est la constante de normalisation et  $L_n^{m_l}(x)$  sont les polynômes de Laguerre et

$$x = \frac{\tilde{\eta}^2}{8M} r^2, \mu = m_l. \quad (3.3.20)$$

Cela implique que l'énergie du centre de masse est donnée par

$$E_c = \frac{\tilde{\eta}}{2M} (2n_\rho + |m_l| - m_l + 1), \quad (3.3.21)$$

problème de valeur propre  $\hat{H}_{rel} \Psi(x) = E_{rel} \Psi(x)$ , Nous répétons la même Les étapes de  $\hat{H}_c$  à  $\hat{H}_{rel}$  pour trouver l'énergie relative

$$E_{rel} = \left( \frac{\Delta\eta}{2\mu} + \frac{\kappa\Delta\theta}{2} \right) (2n_\rho + |m_l| - m_l + 1), \quad (3.3.22)$$

nous pouvons écrire le spectre d'un système à deux particules avec une interaction oscillateur harmonique dans un espace de phase non commutatif

$$E_{c,rel} = E_c + E_{rel} = \frac{\tilde{\eta}}{2M} (2n_\rho + |m_l| - m_l + 1) + \left( \frac{\Delta\eta}{2\mu} + \frac{\kappa\Delta\theta}{2} \right) (2n_\rho + |m_l| - m_l + 1). \quad (3.3.23)$$

Ainsi, le spectre d'un système à deux particules avec interaction oscillateur harmonique correspond au spectre de l'oscillateur harmonique à trois dimensions.

En conclusion, dans ce chapitre, le problème des deux particules a été examiné correctement. Nous avons examiné le cas où différentes particules ressentent la non-commutativité avec différents paramètres. Il convient de noter que le mouvement du centre de masse du système et le mouvement relatif ne sont pas indépendants dans l'espace de phase non commutative (18), (19). Comme expliqué dans le papier [73], il a été montré que, dans le cas où les paramètres de non-commutativité qui correspondent à une particule sont déterminés par sa masse (3.2.13), (3.2.14), une liste de problèmes est résolue dans la phase non commutative espace. Parmi eux figurent le problème de la dépendance du mouvement du centre de masse d'un système composite sur le mouvement relatif, le problème de la violation du principe d'équivalence, le problème de la violation des propriétés de l'énergie cinétique. L'importance des conditions (3.2.13), (3.2.14) est soulignée par le nombre de problèmes pouvant être résolus. Par conséquent, dans cet article, nous avons examiné l'espace de phase non commutative avec des paramètres de non-commutativité déterminés comme (3.2.13), (3.2.14). Dans ce cas, le mouvement du centre de masse d'un système composite et le mouvement relatif sont indépendants. Par conséquent, le problème des deux particules peut être réduit au problème d'une particule dans l'espace de phase non commutative. Nous avons étudié et examiné l'influence des coordonnées non-commutatives et des moments non-commutatives sur le mouvement du centre de masse et le mouvement relatif pour le problème à deux particules avec interaction oscillateur harmonique. Nous avons trouvé exactement les niveaux d'énergie du système dans l'espace des phases non commutatives (3.3.23).

## 4

# Le problème à deux-corps en présence de la distance minimale

### 4.1 Un bref sur l'algebre déformé

La mécanique quantique avec modification des relations de commutation canoniques habituelles a récemment attiré beaucoup d'attention. Cet intérêt est motivé par les recherches sur la théorie des cordes et la gravitation quantique, qui suggèrent l'existence d'une longueur minimale en tant que limite inférieure finie à la résolution possible de la longueur. Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck ( $l_P \approx 10^{-35}m$ ). L'introduction de cette longueur élémentaire est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position,

de sorte que l'incertitude minimale non nulle. De ce fait, plusieurs études en théorie des cordes et en théorie de la gravitation proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg de la forme [1, 2, 9]

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \dots). \quad (4.1.1)$$

Cette correction a comme conséquence, la modification de la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion qui devient

$$[X, P] = i\hbar (1 + \beta P^2 + \dots). \quad (4.1.2)$$

. Considérons une algèbre de Heisenberg unidimensionnelle modifiée générée par les opérateurs de position  $\hat{X}$  et d'impulsion  $\hat{P}$  qui satisfont la relation suivante:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar f(\hat{P}), \quad (4.1.3)$$

où  $f$  sont appelées fonctions de déformation. Nous supposons qu'il s'agit strictement d'une fonction positive ( $f > 0$ ), voire même.

Nous considérons une représentation laissant l'opérateur de position non déformé,

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{x} = i\hbar \frac{d}{dp}, \\ \hat{P} &= g(p). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Du fait que les opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$ , écrits en représentation Eq (4.1.4), doivent satisfaire la relation de commutation Eq (4.1.3), on obtient l'équation différentielle suivante pour  $g(p)$

$$\frac{dg(p)}{dp} = f(p), \quad (4.1.5)$$

## 4.2 Le système de deux corps en présence de la distance minimale

Supposons que dans un espace déformé, l'hamiltonien à deux corps a une forme similaire à celle de l'hamrain non déformé. En l'absence de potentiel externe, l'hamiltonien lit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + V(\hat{X}_1 - \hat{X}_2), \quad (4.2.1)$$

où  $V(\hat{X}_1 - \hat{X}_2)$  est l'énergie potentielle d'interaction des deux particules. Pour exprimer le fait que le paramètre de déformation est différent pour différentes particules, nous écrivons la représentation des moments en tant que

$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= g(b_i, p_i) = g_i(p_i), \\ \hat{X}_i &= \hat{x}_i, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

avec  $P_i \in [-b_i, b_i]$  et  $i = 1, 2$  énumérant les particules. Il est également naturel de supposer que les opérateurs correspondant à différentes particules commutent les uns avec les autres. Sans perte de généralité, on suppose  $b_1 \geq b_2$ , où l'égalité est obtenue dans le cas de particules identiques. Ici nous utilisons la notation  $\mu_1 = \frac{m_1}{M}$ ,  $\mu_2 = \frac{m_2}{M}$ , et  $M = m_1 + m_2$ .

Introduisons les coordonnées de centre de masse et la quantité de mouvement  $\hat{x}_0$  et  $p_0$  ainsi que celles de mouvement relatif  $\hat{x}$  et  $p$  de la manière traditionnelle,

$$\hat{x}_0 = \mu_1 \hat{x}_1 + \mu_2 \hat{x}_2, \quad p_0 = p_1 + p_2, \quad (4.2.3)$$

$$\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \quad p = \mu_2 p_1 - \mu_1 p_2. \quad (4.2.4)$$

Notez que  $p_0$  fait partie intégrante du mouvement, car il commute avec l'hamiltonien.

En utilisant la représentation Eq (4.2.2), et Eq (4.2.3), Eq (4.2.4) l'hamiltonien peut être écrit comme suit:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left[ \frac{g_1^2(\mu_1 p_0 + p)}{\mu_1} + \frac{g_2^2(\mu_2 p_0 - p)}{\mu_2} \right] + V(\hat{x}). \quad (4.2.5)$$

L'espace momentum à deux particules après le changement de variables est présenté à la FIG3. Comme on peut le voir sur la figure 1, la plage de quantité de mouvement relative varie en fonction de la valeur de la quantité de mouvement du centre de masse  $p_0$ .

Les résultats de l'analyse des plages possibles pour les moments de centre de masse et de mouvement relatif sont présentés dans le tableau I. Nous voyons qu'il existe trois domaines différents dans l'espace momentum, qui sont définis par la valeur de  $p_0$ . La quantité de mouvement relative appartient à la région asymétrique  $[c_1, c_2]$ , où les valeurs de  $c_1$  et de  $c_2$  dépendent de la valeur de la quantité de mouvement du centre de masse  $p_0$ .

En réécrivant l'hamiltonien en termes de variables de centre de masse et de mouvement relatif, on obtient

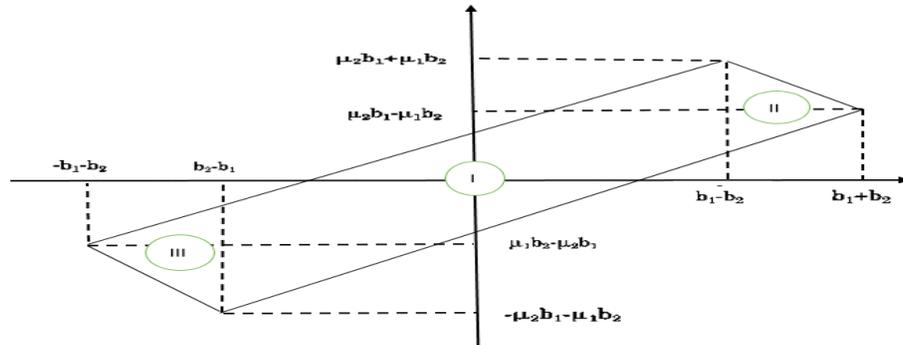


FIG3: Espace momentum à deux particules.

Domaine	Gamme de $p_0$	Gamme de $P \in [-c_1, c_2]$
1	$[-(b_1 - b_2), b_1 - b_2]$	$[-(b_2 - \mu_2 p_0), b_2 + \mu_2 p_0]$
2	$[(b_1 - b_2), b_1 + b_2]$	$[-(b_2 - \mu_2 p_0), b_1 - \mu_1 p_0]$
3	$[-(b_1 + b_2), -(b_1 - b_2)]$	$[-(b_1 - \mu_1 p_0), b_2 - \mu_2 p_0]$

Tableau 1. Plages de moments pour différents domaines.

L'équation de Schrödinger dans la représentation de la quantité de mouvement pour le système à deux particules peut être écrite de la même manière que pour les systèmes à une particule, comme suit:<sup>15,16</sup>

$$\frac{1}{2M}G^2(p_0, p)\phi(p) + \int_{c_1}^{c_2} U(p-p')\phi(p')dp' = E\phi(p), \quad (4.2.6)$$

où  $U(p-p')$  est le noyau de l'opérateur d'énergie potentielle et

$$G^2(p_0, p) = \frac{g_1^2(\mu_1 p_0 + p)}{\mu_1} + \frac{g_2^2(\mu_2 p_0 + p)}{\mu_2}. \quad (4.2.7)$$

La principale différence entre Eq( 4.2.6 )et celle correspondant aux systèmes à une particule est que  $G(p_0, p)$  dépend de  $p_0$  et que les extrémités de  $p$ , notées  $c_1$  et  $c_2$ , ne sont plus symétriques. en général et dépend également de  $p_0$ . Notez que  $p_0$  est une constante de mouvement.

Ainsi, le problème à deux corps dans un espace déformé peut être réduit au problème à un corps

### 4.3 Interaction de la fonction de Delta

Dans le cas non déformé, le potentiel delta attractif dans la représentation de coordonnées

$$V(x) = -2\pi\hbar U_0\delta(x), \quad (4.3.1)$$

correspond à un potentiel constant dans la quantité de mouvement

$$U(p-p') = -U_0. \quad (4.3.2)$$

Nous supposons que dans un espace déformé, le potentiel delta est toujours exprimé par le potentiel constant dans l'espace cinétique. L'équation de Schröinger Eq (4.2.6) se lit alors

$$\frac{1}{2M}G^2(p_0, p)\phi(p) - U_0 \int_{c_1}^{c_2} \phi(p')dp' = E\phi(p). \quad (4.3.3)$$

Nous avons

$$q = \sqrt{-2ME}. \quad (4.3.4)$$

En utilisant  $q$

$$(G^2(p_0, p) + q^2)\phi(p) = 2MU_0 \int_{c_1}^{c_2} \phi(p')dp'. \quad (4.3.5)$$

La solution de Eq ( 4.3.3) peut être facilement obtenue,

$$\phi(p) = \frac{2MU_0 \int_{c_1}^{c_2} \phi(p')dp'}{G^2(p_0, p) + q^2}. \quad (4.3.6)$$

En intégrant Eq (4.3.6) sur  $p$  dans la plage  $[c_1, c_2]$ , on obtient

$$\int_{c_1}^{c_2} \phi(p) dp = \int_{c_1}^{c_2} \frac{2MU_0 \int_{c_1}^{c_2} \phi(p') dp'}{G^2(p_0, p) + q^2} dp, \quad (4.3.7)$$

les spectre est contunu

$$2MU_0 \int_{c_1}^{c_2} \frac{dp}{G^2(p_0, p) + q^2} = 1, \quad (4.3.8)$$

avec  $G(p_0, p)$  présenté dans Eq (4.2.7). Notez que les limites d'intégration  $c_1$  et  $c_2$  dépendent de la valeur de la quantité de mouvement du centre de masse  $p_0$  et sont présentées dans le tableau 1.

## 4.4 Intéraction de type Coulomb

Le noyau de l'opérateur d'énergie potentielle de type coulombien dans la représentation de la quantité de mouvement dans le cas non déformé a la forme suivante:<sup>16</sup>

$$U(p - p') = -\frac{\alpha}{2\hbar}(2i\theta(p' - p) - i + \cot(\pi\delta)), \quad (4.4.1)$$

avec  $\alpha$  et  $\theta(p' - p)$  étant la constante de couplage et la fonction de pas Heaviside, respectivement. Paramètre  $\delta \in [0, 1)$  identifie les extensions auto-adjointes de l'opérateur de position, qui ont toutes un opérateur inverse distinct, auto-adjoint. Notez que le point final 1 est exclu car dans la limite de  $\delta$  à 0, on obtient la même définition d'un opérateur énergétique potentiel que dans la limite de  $\delta$  à 1.

De la relation Eq (4.4.1)

$$\frac{1}{\hat{X}}\phi(p) = -\frac{1}{2\hbar} \int_{c_1}^{c_2} [2i(\theta(p' - p) - i + \cot(\pi\delta))] \phi(p') dp'. \quad (4.4.2)$$

Laisser la fonction  $\varepsilon(p' - p)$  suivante

$$\varepsilon(p' - p) = \theta(p' - p) - 1. \quad (4.4.3)$$

$$\frac{1}{\hat{X}}\phi(p) = -\frac{i}{\hbar} \int_{c_1}^{c_2} \varepsilon(p' - p) \phi(p') dp' - \frac{1}{2\hbar} (i + \cot(\pi\delta)) \int_{c_1}^{c_2} \phi(p') dp'. \quad (4.4.4)$$

Pour que

$$\varepsilon(p' - p) = \begin{cases} 0, & \text{si } p' > p \\ 1, & \text{si } p' < p \end{cases}, \quad (4.4.5)$$

Nous supposons que le noyau de l'opérateur d'énergie potentielle reste inchangé dans l'espace déformé, ce qui signifie que l'opérateur de position inverse peut être écrit comme suit:

$$\frac{1}{\hat{X}}\phi(p) = -\frac{i}{\hbar} \int_{c_1}^p \varepsilon(p' - p) \phi(p') dp' + \frac{1}{2\hbar} (i + \cot(\pi\delta)) \int_{c_1}^{c_2} \phi(p') dp'. \quad (4.4.6)$$

L'opérateur de position inverse défini ci-dessus est linéaire et dans la limite de  $c_1$  à  $-\infty$  et  $c_2$  à  $\infty$ , elle coïncide avec celle non déformée. L'équation de Schrödinger pour problème de type 1D de Coulomb dans un espace déformé avec des lectures de longueur minimale

$$(G(p_0, p)^2 + q^2) \phi(p) - \frac{2M\alpha}{2\hbar} \left[ (i + \cot(\pi\delta)) \int_{c_1}^{c_2} \phi(p') dp' - 2i \int_{c_1}^p \phi(p) dp \right] = 0. \quad (4.4.7)$$

En différenciant  $p$  cette dernière équation intégrale, on obtient la différentielle,

$$\frac{1}{2M} (G^2(p_0, p) \phi(p) + \frac{i\alpha}{\hbar} \phi(p)) = E \phi'(p), \quad (4.4.8)$$

qui peut être écrit comme

$$((G^2(p_0, p) - 2ME^2) \phi(p))' = -\frac{2iM\alpha}{\hbar} \phi(p), \quad (4.4.9)$$

avec  $q = \sqrt{-2ME}$ . La solution de Eq (4.4.9) lit

$$\frac{d}{dp} (G^2(p_0, p) + q^2) \phi(p) + (G^2(p_0, p) + q^2) \frac{d\phi(p)}{dp} = -\frac{2iM\alpha}{\hbar} \phi(p). \quad (4.4.10)$$

En divisant cette relation sur  $G^2(p_0, p)$  et  $\phi(p)$  Multiplication ( $dp$ )

$$\frac{d(G^2(p_0, p) + q^2)}{G^2(p_0, p) + q^2} + \frac{d\phi(p)}{\phi(p)} = -\frac{2iM\alpha}{\hbar (G^2(p_0, p) + q^2)}. \quad (4.4.11)$$

En intégrant tous les côtés on trouve

$$\ln [(G^2(p_0, p) + q^2) \phi(p)] = - \int_0^p \frac{2iM\alpha}{\hbar (G^2(p_0, p) + q^2)} dp. \quad (4.4.12)$$

Nous utilisons exp

$$\phi(p) = \frac{c}{G^2(p_0, p) + q^2} e^{-i\frac{2M\alpha}{\hbar} \int_0^p \frac{dp}{G^2(p_0, p) + q^2}}. \quad (4.4.13)$$

Pour déterminer  $c$  nous utilisons la condition de régulation

$$\int_{c_1}^{c_2} \phi(p)^* \phi(p) dp = 1. \quad (4.4.14)$$

Ici la constante de normalisation est

$$c = \left( \int_{c_1}^{c_2} \frac{dp'}{(G^2(p_0, p) + q^2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.4.15)$$

Nous utilisons également la notation

$$\int_{c_1}^{c_2} \phi(p') dp' = c \int_{c_1}^{c_2} \frac{e^{-i\phi(p'')}}{G^2(p_0, p') + q^2} dp'. \quad (4.4.16)$$

avec

$$\phi(p'') = \frac{2M\alpha}{\hbar} \int_0^{p'} \frac{dp''}{G^2(p_0, p'') + q^2}. \quad (4.4.17)$$

La fonction propre Eq ( 4.4.13 ) est la solution de Eq.(4.4.9 ) mais pas nécessairement Eq (4.4.7).

$$ce^{-i\varphi(p)} \Big|_{c_1}^{c_2} = -\frac{2iM\alpha}{\hbar} \int_{c_1}^{c_2} \phi(p) dp. \quad (4.4.18)$$

Seules les fonctions propres Eq (4.4.13) avec certaines valeurs spécifiques de l'énergie E satisferaient à Eq.(4.4.7) . Pour trouver ces énergies, calculons les intégrales à partir de Eq (4.4.7). En utilisant les formules Eq ( 4.4.9) et Eq (4.4.13), nous avons

$$\int_{c_1}^{c_2} \phi(p') dp' = \frac{i\hbar c}{2M\alpha} (e^{-i\varphi(c_2)} - e^{-i\varphi(c_1)}), \quad (4.4.19)$$

$$\int_{c_1}^p \phi(p') dp' = \frac{i\hbar c}{2M\alpha} (e^{-i\varphi(p)} - e^{-i\varphi(c_1)}). \quad (4.4.20)$$

En substituant les résultats obtenus Eq (4.4.13) ,Eq ( 4.4.19) et Eq ( 4.4.20 ) dans Eq ( 4.4.7), on trouve

$$e^{-i\varphi(p)} - \frac{i}{2} \left[ \left( i + \frac{\cos(\pi\delta)}{\sin(\pi\delta)} \right) (e^{-i\varphi(c_2)} - e^{-i\varphi(c_1)}) - 2i (e^{-i\varphi(p)} - e^{-i\varphi(c_1)}) \right] = 0, \quad (4.4.21)$$

$$-\frac{i}{2} \left[ \left( \frac{\cos(\pi\delta) + i \sin(\pi\delta)}{\sin(\pi\delta)} \right) (e^{-i\varphi(c_2)} - e^{-i\varphi(c_1)}) + 2ie^{-i\varphi(c_1)} \right] = 0, \quad (4.4.22)$$

$$= -\frac{i}{2 \sin \pi\delta} [e^{-i(\varphi(c_2)-\pi\delta)} - e^{-i(\varphi(c_1)-\pi\delta)} + e^{-i(\varphi(c_1)-\pi\delta)} - e^{-i(\varphi(c_1)+\pi\delta)}] = 0, \quad (4.4.23)$$

$$-\frac{ie^{-i(\varphi(c_1)+\pi\delta)}}{2 \sin \pi\delta} [e^{-2ix} - 1] = 0, \quad (4.4.24)$$

Pour que

$$2x = (\varphi(c_2) - 2\pi\delta - \varphi(c_1)). \quad (4.4.25)$$

Utiliser cette relation  $e^{-iax} = \cos(ax) - i \sin(ax)$  Réécrire la relation Eq (4.4.24)

$$-\frac{ie^{-i(\varphi(c_1)+\pi\delta)}}{2 \sin \pi\delta} [\cos(2x) - i \sin(2x) - 1] = 0. \quad (4.4.26)$$

Et utiliser cette relation  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$  et  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$  Réécrire la relation Eq (4.4.26)

$$\left[ \frac{-e^{-i(\varphi(c_1)+\pi\delta)}}{\sin \pi\delta} \right] \sin \left( \frac{\varphi(c_2) - \varphi(c_1)}{2} - \delta\pi \right) [\cos x - i \sin x] = 0. \quad (4.4.27)$$

De cette relation nous trouvons

$$\sin \left( \frac{\varphi(c_2) - \varphi(c_1)}{2} - \delta\pi \right) = 0. \quad (4.4.28)$$

Et utiliser cette relation ( $\sin x = 0 \implies x = n\pi$ )

$$\frac{\varphi(c_2) - \varphi(c_1)}{2} = \pi(n + \delta). \quad (4.4.29)$$

Enfin, le spectre d'énergie peut être trouvé à partir de

$$\frac{M\alpha}{\hbar} \int_{c_1}^{c_2} \frac{dp}{G^2(p_0, p) + q^2} = \pi(n + \delta), \quad (4.4.30)$$

avec  $n = 0, 1, \dots$  et  $\delta \in [0, 1)$ . Les limites d'intégration  $c_1$  et  $c_2$  dépendent de la valeur de la quantité de mouvement du centre de masse  $p_0$  et sont présentées dans le tableau 1.

Ici, la solution exacte du problème à deux particules avec une interaction de type Coulomb est trouvée dans le cas général de l'algèbre de Heisenberg déformée de longueur minimale.

## 4.5 Spectre d'énergie pour des cas particuliers

La condition de spectre d'énergie pour le problème de type coulombien Eq (4.4.30) contient la même intégrale que dans la condition correspondante pour le potentiel delta Eq (4.3.8). Par conséquent, trouver le spectre pour des cas particuliers de la fonction de déformation est similaire pour les deux systèmes. Nous combinons les conditions Eq (4.4.30) et Eq (4.3.8) dans la suivante:

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{dp}{G^2(p_0, p) + q^2} = \frac{\kappa}{M}, \quad (4.5.1)$$

avec  $\kappa = \frac{1}{2U_0}$  pour le potentiel delta et  $\kappa = \frac{\pi\hbar(n+\delta)}{M}$  pour celui de type Coulomb.

### Example1

Considérons la relation de commutation déformée la plus simple conduisant à une longueur minimale et correspondant à la coupure ultraviolette,

$$f_i(p_i) = 1, \quad p_i \in [-b_i, b_i], \quad (4.5.2)$$

$$g_i(p_i) = \hat{P}_i, \quad p_i \in [-b_i, b_i], \quad (4.5.3)$$

avec  $i = 1, 2$  énumérant les particules. Dans ce cas, la condition d'énergie sur le spectre d'énergie Eq(4.5.1) est

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{dp}{\frac{(\mu_1 p_0 + p)^2}{\mu_1} + \frac{(\mu_2 p_0 + p)^2}{\mu_2} + q^2} = \frac{\kappa}{M}. \quad (4.5.4)$$

En prenant l'intégrale dans cette dernière équation, on obtient

$$\sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{P_0^2 + q^2}} \left( \arctan \left( \frac{c_2}{P_0^2 + q^2} \right) - \arctan \left( \frac{c_1}{P_0^2 + q^2} \right) \right) = \frac{\kappa}{M}. \quad (4.5.5)$$

Dans le cas de  $|p_0| \ll b_1 - b_2$  (domaine 1) de Eq (4.5.5), on obtient le spectre d'énergie en série sur des petites  $\frac{1}{b_2}$ ,

$$E = \frac{p_0^2}{2M} - \frac{\pi^2 \mu}{2\kappa^2} + \frac{2\pi^2 \mu^2}{\kappa^3 b_2} - \frac{6\pi^2 \mu^3}{\kappa^4 b_2^2} + O\left(\frac{1}{b_2^3}\right), \quad (4.5.6)$$

avec  $\mu = \mu_1 \mu_2 M$  désignant la masse réduite. La dépendance du spectre d'énergie sur  $p_0$  est masquée dans la correction d'ordre supérieur à  $\frac{1}{b_2}$ . Il est intéressant de noter que dans ce cas, la correction du spectre d'énergie dépend uniquement du paramètre de déformation  $b_2$  de la particule, qui ressent la déformation plus forte que l'autre. Le spectre d'énergie du système à deux particules avec interaction de fonction delta similaire à l'espace non déformé est constitué d'un niveau d'énergie,

$$E = E^0 + \frac{16\pi^2 \mu^2 U_0^3}{b_2} - \frac{96\pi^2 \mu^3 U_0^4}{b_2^2} + O\left(\frac{1}{b_2^3}\right). \quad (4.5.7)$$

Le spectre du système avec interaction de type Coulomb est

$$E_n = E_n^0 + \frac{2\mu^2 \alpha^3}{\pi \hbar^3 (n + \delta)^3 b_2} - \frac{96\pi^2 \mu^3 U_0^4}{\hbar^4 \pi^2 (n + \delta)^4 b_2^2} + O\left(\frac{1}{b_2^3}\right). \quad (4.5.8)$$

Ici

$$E^0 = \frac{p_0^2}{2M} - 2\pi^2 \mu U_0^2, \quad (4.5.9)$$

et

$$E_n^0 = \frac{p_0^2}{2M} - \frac{\alpha^2 \mu}{2\hbar^2 (n + \delta)^2}, \quad (4.5.10)$$

désignent des spectres d'énergie non déformés du système à deux particules avec des interactions de type delta et de type coulombienne, respectivement.

Nous obtenons des résultats différents pour des particules identiques ( $m_1 = m_2 = m$  et  $b_1 = b_2 = b$ ). Dans une telle situation, le domaine I de la figure 1 disparaît et les Eq(4.5.6) domaines II et III peuvent être combinés en un seul avec  $p \in [-2b + |p_0|, 2b - |p_0|]$ . Eq (4.5.4) donne

$$\frac{1}{\sqrt{p_0^2 + q^2}} \arctan\left(\frac{2b - |p_0|}{\sqrt{p_0^2 + q^2}}\right) = \frac{\kappa}{M}. \quad (4.5.11)$$

Enfin, l'extension du spectre d'énergie jusqu'à l'ordre  $1/b^2$  écrit

$$E = \frac{p_0^2}{2M} - \frac{\pi^2 \mu}{2\kappa^2} + \frac{2\pi^2 \mu^2}{\kappa^3 b} - \frac{6\pi^2 \mu^3}{\kappa^4 b^2} \left(1 - \frac{2\kappa |p_0|}{3M}\right). \quad (4.5.12)$$

L'équation Eq (4.5.6) pour les interactions de type delta et de Coulomb est

$$E = E^0 + \frac{16\pi^2 \mu^2 U_0^3}{b} - \frac{96\pi^2 \mu^3 U_0^4}{b^2} + \left(1 - \frac{|p_0|}{3MU_0}\right). \quad (4.5.13)$$

Et

$$E_n = E_n^0 + \frac{2\mu^2\alpha^3}{\pi\hbar^3(n+\delta)^3b} - \frac{6\pi^2\mu^3U_0^4}{\hbar^4\pi^2(n+\delta)^4b^2} + \left(1 - \frac{2\pi\hbar(n+\delta)|p_0|}{3MU_0}\right). \quad (4.5.14)$$

D'après Eq (4.5.6), nous concluons que dans le cas de particules identiques, la dépendance à  $p_0$  est présente dans la correction du second ordre sur  $1/b$ , tandis que pour des particules différentes, cette dépendance est présente dans les corrections à l'ordre supérieur. Par conséquent, l'effet de dépendance du spectre d'énergie sur  $p_0$  du problème considéré est plus susceptible d'être observé pour des particules identiques.

### Exemple 2

Une autre algèbre pour laquelle des résultats analytiques ont été obtenus pour des particules identiques ( $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$ ) est donnée par la fonction de déformation

$$f_i(p_i) = (1 + \beta_i P_i^2)^{3/2}, \quad p_i \in [-\infty, \infty], \quad (4.5.15)$$

$$g_i(p_i) = \frac{P_i}{\sqrt{1 - \beta_i P_i^2}}, \quad p_i \in [-b_i, b_i], \quad b_i = \frac{1}{\sqrt{\beta_i}}. \quad (4.5.16)$$

Les particules identiques ressentent la déformation de la même manière, c'est pourquoi nous considérons  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .

La condition sur le spectre d'énergie peut être écrite comme

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{dp}{\frac{(\mu_1 p_0 + p)^2}{(1 - \beta(\mu_1 p_0 + p)^2)^{\mu_1}} + \frac{(\mu_2 p_0 + p)^2}{(1 - \beta(\mu_2 p_0 + p)^2)^{\mu_2}} + q^2} = \frac{\kappa}{M}. \quad (4.5.17)$$

La série de spectre d'énergie sur  $\sqrt{\beta}$  jusqu'au deuxième ordre est la suivante:

$$E = \frac{p_0^2}{2M} - \frac{\pi^2\mu}{2\kappa^2} + \frac{4\pi^2\mu^2\sqrt{\beta}}{\kappa^3} - \left(\frac{p_0^2}{32\mu} + \frac{3\mu\pi^2 P_0^2}{4\kappa^2} - \frac{3\mu^3\pi^4}{2\kappa^4} - \frac{24\mu^3\pi^2}{\kappa^4}\right)\beta. \quad (4.5.18)$$

Ainsi, les spectres d'énergie pour les systèmes à deux particules avec interactions delta et de type coulombienne sont écrits ainsi:

$$E = E^0 + 32\pi^2\mu^2U_0^3\sqrt{\beta} - \left(\frac{p_0^2}{32\mu} + 3\mu\pi^2U_0^2p_0^2 - 24\mu^3\pi^4U_0^4 - 384\mu^3\pi^2U_0^4\right)\beta. \quad (4.5.19)$$

Et

$$E_n = E_n^0 + \frac{4\pi^2\alpha^2\sqrt{\beta}}{\pi\hbar^3(n+\delta)^3} - \left(\frac{p_0^2}{32\mu} + \frac{3\mu\pi^2 P_0^2}{4\hbar^2(n+\delta)^2} - \frac{3\mu^3\pi^4}{2\hbar^4(n+\delta)^4} - \frac{24\mu^3\pi^2}{\pi^2\hbar^4(n+\delta)^4}\right)\beta. \quad (4.5.20)$$

Respectivement. Comme dans l'exemple précédent, la dépendance vis-à-vis de la quantité de mouvement du centre de masse n'est pas présentée dans la correction principale.

Cependant, dans la prochaine correction d'ordre de l'énergie, nous avons la dépendance vis-à-vis du moment du centre de masse comme  $p_0^2$  et  $p_0^4$  contrairement au premier exemple de déformation, où nous obtenons la correction du second ordre proportionnelle à  $|p_0|$ .

En conclusion dans ce chapitre, nous avons étudié deux problèmes de particules dans le cas général de l'algèbre de Heisenberg déformée menant à une longueur minimale. Nous avons supposé que différentes particules ressentent la déformation de différentes manières. En introduisant les coordonnées et les moments du centre de masse et du mouvement relatif, nous avons réussi à réduire le problème des deux particules à celui à une particule. La particularité du problème d'une particule obtenu réside dans sa dépendance à la quantité de mouvement du centre de masse. Le système à deux particules avec interaction delta ainsi que celui de Coulomb ont été pris en compte. Nous avons obtenu exactement les fonctions d'onde et les spectres d'énergie des problèmes mentionnés dans le cas général de l'algèbre déformée. Nous avons considéré deux exemples partiels de la fonction de déformation. En élargissant le spectre d'énergie sur le paramètre de déformation, nous concluons que la dépendance à l'impulsion du centre de masse n'est pas présente dans la correction principale de l'énergie.

Pour les deux exemples considérés. Pour la fonction de déformation qui correspond à la coupure ultraviolette, nous avons obtenu que, pour différentes particules, la dépendance à l'impulsion du centre de masse n'est pas non plus présente dans la correction du second ordre, bien que pour des particules identiques, la correction du second  $|p_0|$ . Cela signifie que pour le type de déformation considéré, l'effet de la dépendance du spectre d'énergie sur la quantité de mouvement du centre de masse est plus susceptible d'être observé pour des particules identiques. Dans l'autre exemple de déformation, nous avons obtenu pour des particules identiques que la correction d'ordre 2 de l'énergie avait des termes proportionnels à  $p_0^2$  et  $p_0^4$ . Cela signifie que, dans différents cas de déformation, la dépendance à l'égard de la quantité de mouvement du centre de masse est essentiellement différent .

# 5

## Conclusion générale

Cette mémoire vise à obtenir :

Le premier chapitre, le problème à deux corps est un modèle théorique important en mécanique, qu'elle que soit classique ou quantique l'énergie totale en tant que somme de l'énergie de centre de masse en translation et de l'énergie du mouvement relatif. Les résultats montrent clairement l'applicabilité des techniques d'intégration de chemin dans les systèmes à couplage d'énergie cinétique. Le premier exemple L'oscillateur harmonique et le deuxième exemple c'est le Puits Infinie et troisièmer exemple est l'interaction de potentiel de Morse qui est un modèle connu en physique moléculaire, a été transformé en centre de masse  $X$  et les coordonnées relatives  $x_r$  suivies de l'intégration du chemin de la coordonnée du centre de masse, permettant ainsi une séparation complète des variables dans  $X$  et  $x_r$ . Cela laissait l'intégrale de chemin restante en tant qu'intégrale de chemin  $K$  du potentiel Morse et la fonction de Green correspondante,  $GK$  pourrait être écrite. L'analyse habituelle de  $GK$  donnait les fonctions d'onde et le spectre d'énergie du spectre discret et continu.

Le deuxième chapitre , nous avons examiné l'espace de phase non commutative avec des paramètres de non-commutativité déterminés comme (3.2.13), (3.2.14). Dans ce cas, le mouvement du centre de masse d'un système composite et le mouvement relatif sont indépendants. Par conséquent, le problème des deux particules peut être réduit au problème d'une particule dans l'espace de phase non commutative, De plus, nous pourrions étudier ce type de système dans la géométrie de l'espace de phase non-commutative d'un oscillateur harmonique

L troisième chapitre nous avons étudié deux problèmes de particules dans le boîtier général de l'algèbre de Heisenberg déformée conduisant à une longueur minimale. Nous avons supposé que différentes particules ressentiaient la déformation de différentes manières.

En introduisant les coordonnées et les moments du centre de masse et du mouvement relatif, nous avons réussi à réduire le problème des deux particules à celui à une particule. La particularité du problème d'une particule obtenu réside dans sa dépendance à la quantité de mouvement du centre de masse. Le système à deux particules avec interaction delta ainsi que celui de Coulomb ont été pris en compte. Nous avons obtenu exactement les fonctions d'onde et les spectres d'énergie des problèmes mentionnés dans le cas général de l'algèbre déformée. Nous avons considéré deux exemples partiels de la fonction de déformation. En élargissant le spectre d'énergie sur le paramètre de déformation, nous concluons que la dépendance à l'impulsion du centre de masse n'est pas présente dans la correction principale de l'énergie .

### Méthode Duru-Kleinert (transformation spation temporelles)

La combinaison d'une reparamétrisation dans le temps dépendant du chemin et d'une transformation de coordonnées compensatrices ,Duru et Kleinert [3] ont utilisé la transformation Kustaanheimo-Stifel ( $KS$ ) [2] pour la première fois dans l'intégration du potentiel Coulomb. Cette transformation ( $KS$ ) est bien connue dans la mécanique céleste,consiste en une transformation spatiale (pas nécessairement un changement de coordonnées)suivie d'une transformation temporelle, utilisée par Duru et Kleinert pour transformer l'intégrale du chemin de Coulomb en une intégrale de chemin harmonique-oscillateur, peut être généralisée pour associer divers intégraux de chemin à chacun. de cette manière, de nombreuses intégrales de chemin inconnues peuvent être résolues par leur relation avec les intégrales de chemin connues.

$$K(x_b, x_a; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} = \prod_{j=1}^N \int dx_j \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} \right)^{N+1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{m}{2\epsilon} \Delta x_j^2 - \epsilon V(x_j) \right] \right\}. \quad (0.0.1)$$

Appliquons une transformation de coordonnées:

$$x_j = f(q_j). \quad (0.0.2)$$

Dans la version discrétisée, nous exprimons les incréments  $\Delta x_j = (x_j - x_{j-1})$  en termes d'incrémentes  $\Delta q_j = (q_j - q_{j-1})$ . Ici, la règle du point milieu est une valeur sûre. De plus, les contributions jusqu'à l'ordre  $\epsilon$  doivent être conservées dans l'action et nous devons garder à l'esprit Ça  $(\Delta q_j)^2 \approx \epsilon$ . Expanding  $f(q_j)$  et  $f(q_{j-1})$  sur le point milieu  $\bar{q}_j = (q_j + q_{j-1})/2$ , et conserver les termes jusqu'au troisième ordre dans  $\Delta q_j$ , nous avons

$$\Delta x_j = \bar{f}'_j \Delta q_j \left( 1 + \frac{(\Delta q_j)^2}{24} \frac{\bar{f}''''_j}{\bar{f}'_j} + \dots \right), \quad (0.0.3)$$

où la prime indique les dérivés  $\bar{f}'_j$  par rapport à  $\bar{q}_j$ , puis nous trouvons le terme d'énergie cinétique dans l'action:

$$\frac{m}{2\epsilon} (\Delta x_j)^2 = \frac{m}{2\epsilon} \bar{f}'_j{}^2 (\Delta q_j)^2 \left( 1 + \frac{(\Delta q_j)^2}{12} \frac{\bar{f}''''_j}{\bar{f}'_j} + \dots \right). \quad (0.0.4)$$

Le terme d'énergie potentielle prend la forme simple :

$$\epsilon V(x_j) = \epsilon V(f(q_j)). \quad (0.0.5)$$

Considérons maintenant le terme

$$\prod_{j=1}^N dx_j = \prod_{j=1}^N f'(q_j) dq_j, \quad (0.0.6)$$

ce qui doit être symétrisé entre les points  $q_j, q_{j-1}$ . de sorte qu'aucun des points finaux de l'intervalle ne soit préféré lorsque nous développons autour du point milieu  $\bar{q}_j$  de l'intervalle. Ceci peut être fait en réécrivant

$$\prod_{j=1}^N dx_j = \left( f'(q_b) f'(q_a) \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{f'(q_j) f'(q_{j-1})} \prod_{j=1}^N dq_j.$$

Nous développons  $f(q_j)$  et  $(f(q_{j-1}))$  jusqu'au deuxième ordre  $\Delta q_j$ , dons de sorte que

$$\left( f'(q_j) f'(q_{j-1}) \right)^{\frac{1}{2}} = \bar{f}'_j \left( 1 - \frac{(\Delta q_j)^2}{8} \left( \frac{\bar{f}''_j}{\bar{f}'_j} \right)^2 + \frac{(\Delta q_j)^2}{8} \frac{\bar{f}'''_j}{\bar{f}'_j} + \dots \right), \quad (0.0.7)$$

et par conséquent

$$\prod_{j=1}^N dx_j = \left( f'(q_b) f'(q_a) \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \bar{f}'_j \left( 1 - \frac{(\Delta q_j)^2}{8} \left( \frac{\bar{f}''_j}{\bar{f}'_j} \right)^2 + \frac{(\Delta q_j)^2}{8} \frac{\bar{f}'''_j}{\bar{f}'_j} + \dots \right). \quad (0.0.8)$$

La transformation Eq (0.0.2) a rendu suffisamment compliquée la forme discrétisée de l'intégrale de chemin. De plus, le paramètre de masse est devenu un paramètre local,  $m f_j'^2$ . Nous appliquons la transformation de l'heure locale suivante pour surmonter cette difficulté pour inviter le probleme de masse variable

$$\frac{dt}{ds} = \left[ f'(q(s)) \right]^2; t(s_N) \approx t''; t(s_0) \approx t', \quad (0.0.9)$$

où  $s$  représente le nouveau "**temps**". Par souci de cohérence, nous devons d'abord symétriser Eq (0.0.9) sur l'intervalle  $(j-1, j)$  afin d'éviter toute préférence d'un point final par rapport à l'autre. Cela signifie que

$$\epsilon_j = \sigma_j f'(q_j) f'(q_{j-1}), \quad (0.0.10)$$

où  $\sigma_j = s_j - s_{j-1}$ . En développant  $f'(q_j)$  et  $f'(q_{j-1})$  autour du milieu  $\bar{q}_j$ , nous avons

$$\epsilon_j = \sigma_j (\bar{f}'_j)^2 \left( 1 - \frac{(\Delta q_j)^2}{4} \left( \frac{\bar{f}''_j}{\bar{f}'_j} \right)^2 + \frac{(\Delta q_j)^2}{4} \frac{\bar{f}'''_j}{\bar{f}'_j} + \dots \right). \quad (0.0.11)$$

Notez que  $\sigma_j$  ne sont plus de longueur égale. Une conséquence immédiate de Eq( 0.0.6) et Eq (0.0.11) est que la mesure de différence de chemin prend la forme

$$A_N \prod_{j=1}^N dx_j = \left( f'(q_b) f'(q_a) \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^N dq_j. \quad (0.0.12)$$

En insérant l'expression Eq(0.0.11) pour  $\epsilon$  dans Eq (0.0.13) et en conservant .terms jusqu'à  $(\Delta q)^4$ , nous obtenons

$$\frac{m (\Delta x_j)^2}{2\epsilon} = \frac{m (\Delta q_j)^2}{2\sigma_j} + \frac{m (\Delta q_j)^4}{8\sigma_j} \left[ \left( \frac{f_j''}{f_j'} \right)^2 - \frac{2 f_j'''}{3 f_j'} \right]. \quad (0.0.13)$$

En combinant tous ces résultats, nous écrivons

$$\begin{aligned} K(f(q_b), f(q_a); T) &= \frac{1}{\sqrt{f_a' f_b'}} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int dq_j \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \sigma_j}} \\ &\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{m}{2\sigma_j} (\Delta q_j)^2 + \frac{m}{8\sigma_j} (\Delta q_j)^4 \left[ \left( \frac{f_j''}{f_j'} \right)^2 - \frac{2 f_j'''}{3 f_j'} \right] \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{2 f_j'''}{3 f_j'} \right] - \sigma_j f_j' f_{j-1}' V(f(q_j)) \right\}. \end{aligned} \quad (0.0.14)$$

Et à partir de là

$$V_{eff} = f_j' f_{j-1}' V(f(q_j)) - \frac{m}{8\sigma_j} (\Delta q_j)^4 \left[ \left( \frac{f_j''}{f_j'} \right)^2 - \frac{2 f_j'''}{3 f_j'} \right], \quad (0.0.15)$$

le terme d'énergie potentielle prend la forme

$$\epsilon V(x_j) = \sigma_j f_j' f_{j-1}' V(f(q_j)). \quad (0.0.16)$$

En faisant maintenant intervenir les changements (oujours par application de la procedure de Mc Lavghlin\_schulman)

$$(\Delta q)^4 = \frac{-3\hbar^2 \sigma^2}{m^2}, \quad (0.0.17)$$

Le dernier point important est que la nouvelle différence de temps ( $s_b - s_a$ ) est une quantité dépendante du chemin. Cette dépendance doit être incorporée au moyen de la contrainte

$$T = t_b - t_a = \int_{s_a}^{s_b} ds \left( f'(q(s)) \right)^2, \quad (0.0.18)$$

dans l'intégrale de chemin. Pour cela, l'identité suivante est utilisée

$$\left( f_b' f_a' \right) \int_0^\infty d\sigma \left( T - \int_{s_a}^{s_b} ds \left( f'(q(s)) \right)^2 \right) = 1. \quad (0.0.19)$$

On peut donc écrire le propagateur

$$K = K_l \int_0^\infty ds \sigma \left( T - \int_{s_a}^{s_b} ds \left( f'(q(s)) \right)^2 \right), \quad (0.0.20)$$

où  $K_l$  est le transformé discrétisé de

$$\begin{aligned} K_l = & \sqrt{f'_b f'_a} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dq_j \prod_{j=1}^{N+1} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{m}{2\epsilon} (\Delta q_j)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3\hbar^2 \sigma_j}{8m} \left[ \left( \frac{f''_j}{f'_j} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{f''_j}{f'_j} \right] - \sigma_j f_j'^2 V(f(q_j)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (0.0.21)$$

On roumplace

$$\sigma \left( T - \int_{s_a}^{s_b} ds \left( f'(q(s)) \right)^2 \right) = \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E \left( T - \int_{s_a}^{s_b} ds \left( f'(q(s)) \right)^2 \right) \right\}. \quad (0.0.22)$$

La représentation de Fourier des rendements de la fonction  $\sigma$

$$K(f(q_b), f(q_a); T) = \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} ET \right\} G(f(q_b), f(q_a); E). \quad (0.0.23)$$

En introduisant la fonction de Green

$$G(f(q_b), f(q_a); E) = \sqrt{f'_b f'_a} \int_0^\infty ds P_l(q_a, q_b; s). \quad (0.0.24)$$

La quantité  $P_l(q_a, q_b; s)$  est le promoteur qui, comme le propagateur, est défini comme la limite de discret de  $P_N$

$$\begin{aligned} P(q_b, q_a; s) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int dq_j \prod_{j=1}^{N+1} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{m}{2\sigma_j} (\Delta q_j)^2 - \sigma_j [(f'_j)^2 (V(f_j(q)) - E) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3\hbar^2}{8m} \left[ \left( \frac{f''_j}{f'_j} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{f'''_j}{f'_j} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (0.0.25)$$

Le promoteur transformé est comme le propagateur dans de nouvelles coordonnées et un nouveau temps avec l'action . La formulation discutée ici a le mérite que la transformation des coordonnées suggère la transformation de temps locale.

# Bibliographie

- [1] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D52, 1108 (1995).
- [2] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37 (1996) 2121-2137.
- [3] Sabine. Hossenfelder, Phys. Rev. D 65, 125028 (2002).
- [4] S. Hossenfelder, Mod. Phys. Lett. **A 37**, 379-383 (2004).
- [5] M. Fontanini, E. Spallucci, and T. Padmanabhan, Phys. Lett. B 633, 627(2006).
- [6] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 145 (1995).
- [7] M. T. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A 185, 143 (1994).
- [8] C. A. Mead, Phys. Rev. 135, 849 (1964).
- [9] M. Maggiore, Phys. Lett. B 319, 83 (1993).
- [10] M. Merad, F. Zeroual, and H. Benzair, Electron J. Theor. Phys. 7(23), 41 (2010).
- [11] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, Phys. Rev. A 72, 012104 (2005).
- [12] M. Merad and M. Falek, Phys. Scr. **79**, 015010 (2009).
- [13] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D 66, 026003 (2002).
- [14] K. Nozari and T. Azizi, Gen. Relativ. Grav. **38**, 735 (2006).
- [15] K. Nozari and M. Karami, Mod. Phys. Lett. **A 20**, 3095 (2005).
- [16] M. Falek and M. Merad, J. Math. Phys. **50**, 023508 (2009).

- 
- [17] M. Falek and M. Merad, *J. Math. Phys.* **51**, 033516 (2010).
- [18] K. Nouicer, *J. Phys. Lett. A* **354**, 399 (2006).
- [19] K. Nouicer, *J. Math. Phys.* **48**, 112104 (2007).
- [20] M. Merad, F. Zeroual, and H. Benzair, *Electron J. Theor. Phys.* 7(23), 41 (2010).
- [21] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, and A. W. Schreiber, *Phys. Rev. A* 59, 1762 (1999).
- [22] A. Lecheheb, M. Merad, and T. Boudjedaa, *Annals of Physics* 322(5), 1233–1246 (2007).
- [23] K. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 5125 (2006).
- [24] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, and K. V. Bhagwat, *Path Integral Methods and their Applications* (World Scientific, Singapore, 1993).
- [25] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981).
- [26] C. Grosche and F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals* (Springer, Berlin, 1998).
- [27] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic, New York, 1980) (Corrected and enlarged edition).
- [28] I. H. Duru et H. Kleinert, *Phys. Lett. B* 84 (1979) 185
- [29] F. Brau, and F. Buisseret, *Phys. Rev. D* 74, 036002 (2006).
- [30] K. Nouicer, *Phys. Lett. B* 646, 63 (2007) ; Y-W. Kim and Y-J Park, *Phys. Lett. B* 655, 172 (2007) ; K. Nouicer, *Class. Quantum. Grav.* 25, 075010 (2008) ; Y-W. Kim and Y-J Park, *Phys. Rev. D* 77, 067501 (2008). H. Snyder, *Phys. Rev.* 71, 38 (1947).
- [31] K. M. Case, *Phys. Rev.* 80, 797 (1950).
- [32] A. M. Perelemov and V. S. Popov, *Teor. Mat. Fiz.* 4, 48 (1970) [*Theor. Math. Phys.* 4, 664 (1970)].
- [33] K. Meetz, *Nuovo Cimento* 34, 690 (1964).
- [34] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125027 (2002)

- 
- [35] Achim. Kempf, J. Math. Phys. 38, 1344 (1997).
- [36] Achim. Kempf, Phys. Rev. D 63, 083514 (2001).
- [37] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, Phys. Rep 137, (1986) 115.
- [38] I.M.Mills and A.G.Robinette:Mol.Phys.56(1985)743.
- [39] H.Yi Fan J.R .Klauder:Phys Rev.A 49(1994)704.
- [40] H.Yi Fan B.Z.Chen ,and .Klauder:Phys Rev.A 51(1995)3343.
- [41] N. Seiberg, E. Witten, J. High En. Phys. 9909, 032(1999).
- [42] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Phys. Lett.B 331, 39 (1994).
- [43] A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis, J. Math. Phys. 43, 113(2002).
- [44] A. Kijanka, P. Kosinski, Phys. Rev. D 70, 127702 (2004).
- [45] Jing Jian, Jian-Feng Chen, Eur. Phys. J. C 60, 669(2009).
- [46] A. Smailagic, E. Spallucci, Phys. Rev. D 65, 107701(2002).
- [47] A. E. F. Djemai, H. Smail, Commun. Theor. Phys. 41,837 (2004).
- [48] P. R. Giri, P. Roy, Eur. Phys. J. C 57, 835 (2008).
- [49] J. Ben Geloun, S. Gangopadhyay, F. G. Scholtz, Europhys. Lett. 86, 51001 (2009).
- [50] D. Nath, P. Roy Ann. Phys, 377, 115 (2017).
- [51] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, Mod.Phys. Lett. A 16, 2075 (2001).
- [52] P. A. Horvathy, Ann. Phys. 299 128 (2002).
- [53] O. F. Dayi, L. T. Kelleyane, Mod. Phys. Lett. A 17 1937 (2002).
- [54] M. Daszkiewicz, Acta Phys. Polon. B 44, 59 (2013).
- [55] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragao, P. Castorina,
- [56] J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas, Phys. Rev. D 64,067901 (2001).
- [57] J. M. Romero, J. D. Vergara, Mod. Phys. Lett. A 18,1673 (2003).

- 
- [58] B. Mirza, M. Dehghani, Commun. Theor. Phys. 42, 183(2004).
- [59] A. E. F. Djemai, Int. J. Theor. Phys. 43, 299 (2004).
- [60] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A 31, 1650026 (2016).
- [61] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A 381,2463 (2017).
- [62] A. E. F. Djemai, H. Smail, Commun. Theor. Phys. 41,837 (2004).
- [63] Pei-Ming Ho, Hsien-Chung Kao, Phys. Rev. Lett. 88151602 (2002).
- [64] M. Daszkiewicz, C. J. Walczyk, Mod. Phys. Lett. A **26**,819 (2011).
- [65] Kh. P. Gnatenko, Phys. Lett. A **377**, 3061 (2013).
- [66] Kh. P. Gnatenko, J. Phys. Stud. **17**, 4001 (2013).
- [67] M. Daszkiewicz, Acta Phys. Polon. B 44, 699 (2013).
- [68] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Ukr. J. Phys. **61**, 432(2016)
- [69] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, **39** (1994).
- [70] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **381**,2463 (2017).
- [71] Kh. P. Gnatenko, Mod. Phys. Lett. A **32**, 1750166(2017).
- [72] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk J. Math. Phys.v. 21, No. **3** (2017) 3001
- [73] A. E. F. Djemai, H. Smail, Commun. Theor. Phys. **41**,837 (2004).
- [74] C. Grosche, F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer Tracts in Modern Physics, vol. 145 (Springer, Berlin, Heidelberg, (1998).
- [75] H. Benzair, M. Merad and T. Boudjedaa, submitted in the review: Chin. Ph
- [76] C.Grosche ,I.theore.phys.N.**10**.1413(1999).
- [77] M. I. Samar, and V. M. Tkachuk, J .Math. Phys .**58**, 122108 (2017).
- [78] H. Benzaira;b;d, M. Meradc, T. Boudjedaad;e, and A. Makhlouf b ,77(2012 ).
- [79] Samar J. Math. Phys. **57**, 042102 (2016).
- [80] SamarJ. Math. Phys. **57**, 082108 (2016).