UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et Géométrie

Par : Lakhchakheche Maissa

Thème

Inégalité de Golod-Shafarevich

Soutenu publiquement le : 03 /07/2019

Devant le jury composé de :

Mr. Kaouidri Mohammed	M.A UKMO	Président
Mr. Guerboussa Yacine	M.A UKMO	Examinateur
Mr. Ben Moussa Mohammed Tayeb	M.A UKMO	Superviseur

Année Scollaire : 2018/2019

Dédication

Je dédie ce travail à :

Ma mère ***Saida*** *≪ Allah yarhamoha ≫ et mon père* ***Mebrouk***

A toutes mes frères, mes sœurs, et mon fiancé

et un beaucoup merci à ma grande sœur ***Chérifa***

A toute ma famille ***Lakhchakheche*** *et* ***Aimene***

A mes chers amies

Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.

Et a tous mes professeurs

Remerciement

*Je remercie, en premier lieu **ALLAH** qui m'a donné la bonne santé, la volonté et la patience tout au long de mes études.*

*Je tiens à remercier avec gratitude mon encadreur **BEN MOUSSA Mohammed Tayeb** , de m'avoir guidé et suivi tout ou long de ce travail de m'avoir conseillé, en couragé et aussi prodigué de précieux d'enrichissement. Son aide et sa disponibilité m'on permit d'avance dans le travail et de finaliser cette étude.*

*Je remercie l'examinateur **Dr Y.Guerboussa**, et le président **Mr M.Kaouidri**.*

Je remercie également à tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mes études et qui n'ont pas oublié leurs précieux conseils.

Je remercie aussi toute personne de près ou loin a constribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

NOTATIONS

- (A,+) : un groupe additif.
- A : un grpupe, un anneau, une algèbre sur K.
- I : un idéal.
- A/I : un anneau quotient.
- $f : A \to B$: un homomorphisme de groupes, d'anneaux, d'algèbres.
- $\ker f$: le neyau de f dans A.
- M(E) : magma libre construit sur l'ensemble E.
- $\ell(w)$: longueur du mot w (word).
- $Lib_K(E)$: une algèbre libre associative sur l'anneau K.
- $K\langle X\rangle$: une k-algèbre des polynômes non commutatives sur l'ensemble des monômes X.
- $K[X]$: une K-algèbre des polynômes en varaibles commutatives.
- $\bigoplus$: somme directe.
- $|\,.\,|$: le cardinal d'un ensemble, d'un groupe,....
- $\langle X/R\rangle$: une présentation par des générateurs X et relateurs R.
- $a_n = \dim_k(A_n) = rank_k(A_n)$.
- $r_n = \{r \in R : \ell(r) = n\}$: le nombre minimal des relateurs.
- $(1- \mid X \mid t + H_R(t)) \cdot H_A(t) \geqslant 1$: l'inégalité de Golod-Shafarevich.

INTRODUCTION

La présentation d'un groupe par générateurs et relateurs est trés utile. Comme un fruit de cet ideé est l'inégalité montrée en 1964 par Golod et Shafarevich, celui là a produit plusieur applications importantes dans différents domaines : théorie combinatoire des groupes, théorie des nombres,$\cdots$. Comme exemple de ces applications :

1) Class filed tower problem (cet inégalité mène à montrer l'infinité des extensions (les groupes de Galois)).
2) $r(G) > \dfrac{d(G)^2}{4}$ où :

$$d(G) = \dim H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \textit{le nombre minimal des générateurs avec des conditions sur } G.$$

$$r(G) = \dim H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \textit{le nombre minimal des relateurs avec des conditions sur } G.$$

3) Réponse négative aux problème de Burnside.

Ce mémoire à diviser en trois chapitre :
Dans le premier chapitre : nous rappelons des outils essentiels pour notre étude, comme anneau, anneau quotient, algèbre,........

Dans le deuxième chapitre : nous étudions l'inégalité de Golod-Shafarevich et leurs composants, la présentation par générateurs et relateurs, séries de Hilbert.

Dans le troisieme chapitre : nous avons posé le problème de Kurosh-Levitzky, et nous essayons résolu la réponse de ce problème avec un exemple.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Anneau

Définition 1.1.1 On appelle anneau un ensemble A muni de deux lois de compositions appelées respectivement addition($(x, y) \mapsto x + y$) et multiplication($(x, y) \mapsto x \cdot y$)), satisfaisant aux axiomes suivants :
pour tout $x, y, z \in$ A

1. (A,+) est un groupe commutatif telles que :
   ⋆ $x + (y + z) = (x + y) + z.$
   ⋆ $x + y = y + x.$
   ⋆ $0 + x = x + 0 = x.$
   ⋆ $x + (-x) = (-x) + x = 0.$
2. (A,×) est un monoïde telle que :
   ⋆ $x(yz) = (xy)z.$
   ⋆ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
   ⋆ $(x + y) \cdot z = xz + yz.$
   ⋆ $x \cdot (y + z) = xy + xz.$

A un anneau commutatif si l'on a $xy = yx$ pour tout $x, y \in$ A.

Exemple 1.1.1 $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau.

Proposition 1.1.1 (Morphisme d'anneaux) Soient A et B deux anneaux et f : A→B une application. On dit que f est un morphisme d'anneaux (si et seulement si) :
- ⋆ $f(a+b) = f(a) + f(b)$
- ⋆ $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
- ⋆ $f(1_A) = 1_B$.

Pour tout a,b ∈ A.
Si f est bijective alors on dit que f est un isomorphisme.

Définition 1.1.2 Soit A un anneau. On appelle sous-anneau de A toute partie S de K ($S \subseteq K$) tels que
pour tout x,$y \in S$

1. S est un sous-groupe de (A,+) tels que :
   - ⋆ $0 \in S$.
   - ⋆ $x + y \in S$.
   - ⋆ $(-x) \in S$.
2. S est stable pour la multiplication *i.e* :$xy \in S$.
3. S contient l'unité de A *i.e* : 1_A ∈ S.

Exemple 1.1.2 $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.3 Soient A un anneau et I une partie de A. On dit que I est un idéal à gauche ou à droite de A si I est un sous-groupe additif de (A,+) et si pour tout a ∈ A et x ∈ I : $ax \in$ I ou $xa \in$ I.
On appelle un idéal bilitère de A si I est à la fois un idéal à gauche et à droite.

Exemple 1.1.3 I = n$\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$

Anneau quotient

Soient A un anneau et I un idéal bilitère de A. Pour x et y dans A, on écrit x= y+I, si $x - y \in$ I . Les relations x= y+I et x' = y'+I entraînent à :
- ⋆ $(x + x')$=$(y + y')$+I
- ⋆ xx' = xy'+I car I est un idéal à gauche.
- ⋆ xy' =yy'+I car I est un idéal à droite.

D'où xx' = yy'+I.
Ainsi on note A/I l'ensemble quotient de A par la relation d'equivalence x= y+I, muni de l'addition et la multiplication quotients et de la structure d'anneux tels que :
Soient $a, b, c \in$ A/I tels que $a = x$+I, $b = y$+I et $c = z$+I, pour tout $x, y, z \in$ A.

1. (A/I,+) est un groupe commutatif quotient du groupe additif de (A,+) par le sous-groupe I telles que :

- ⋆ $a+(b+c) = x+(y+z)$+I $= (x+y)+z$+I $= (a+b)+c$.
- ⋆ $a+b = (x+y)$+I $= (y+x)$+I $= a+b$.
- ⋆ $a = x$+I $= (0+x)$+I $= (x+0)$+I.
- ⋆ $a+(-a) = (x+(-x))$+I $=((-x)+x)$+I $=$ I.

2. (A/I,$\times$) est un monoïde telles que :
   - ⋆ $a(bc) = x(yz)$+I $= (xy)z$+I $= (ab)c$.
   - ⋆ $a\cdot 1 = (x\cdot 1)$+I $= (1\cdot x)$+I $= x$+I $= 1\cdot a = a$.
3. La multiplication est distrubitive par rapport à l'addition :
   Soients $a, b, c \in$ A/I et P :A$\rightarrow$A/I une applicaton canonique. Soit $x, y, z \in$ A tels que $P(x) = a$, $P(y) = b$, $P(z) = c$.
   On a :

$$\begin{aligned}
a(b+c) &= P(x)(P(y)+P(z)) \\
&= P(x)P(y+z) \\
&= P(x(y+z)) \\
&= P(xy+xz) \\
&= P(xy)+P(xz) \\
&= P(x)P(y)+P(x)P(z) \\
&= ab+ac.
\end{aligned}$$

D'où $a(b+c) = ab+ac$.

Définition 1.1.4 Soients A un anneau et I un idéal bilitère de A. On appelle anneau quotient de A par I et l'on note A/I l'ensemble quotient de A muni d'une structure d'anneau.

Théorème 1.1.1 Soients A et B deux anneaux, f un homomorphisme de A dans B.
1. I=ker f est un idéal bilitère de A.
2. B' $= f$(A) est un sous-anneau de B.
3. Soient P :A$\rightarrow$A/I et i : B' $\rightarrow$B des morphismes canoniques. Il existe un unique morphisme $\tilde{f}$ de A/I dans B' telle que $f = i\circ\tilde{f}\circ$P et le diagramme commute.

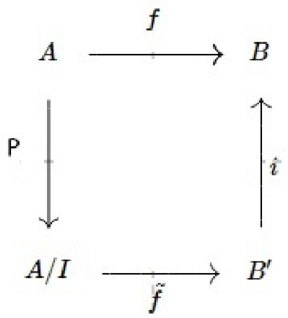

FIGURE 1.1

Preuve

1. Comme f est un morphisme du groupe additif de A dans B, I est un sous-groupe de A tel que I=$\{x \in A/f(x) = 0\}$. Si $x \in$ I et $a \in$ A on a :

$$f(ax) = f(a)f(x) = 0, \text{ alors } ax \in \text{I, donc I est un idéal à gâuche.}$$
$$f(xa) = f(x)f(a) = 0, \text{ alors } xa \in \text{I, donc I est un idéal à droite.}$$

D'où I=ker f est un idéal bilitère de A.

2. $*$ Montrons que B' $= f$(A) est un sous-groupe de B. Soient $x, y \in$ B', il existe a et b$\in$A tel que : $x = f(a)$ et $y = f(b)$

- 0 $\in$A , $f(0) = 0 \in$ B'.
- $x + y = f(a) + f(b) = f(a + b) \in$ B'.
- $-x = -f(a) = f(-a) \in$ B'

D'où B' est un sous-groupe de B.

$*$ Montrons que B' stable pour la multiplication :

$xy = f(a)f(b) = f(ab) \in$ B'.

3. Comme $\tilde{f}$ est nulle sur I, il existe un morphisme $\tilde{f}$ de A/I dans B' tel que $f = i \circ \tilde{f} \circ$P. L'unicité de $\tilde{f}$, et le fait que $\tilde{f}$ soit un isomorphisme. ∎

Théorème 1.1.2 (De propriété universelle d'anneau quotient) Soient A un anneau et I un idéal bilitère de A.

1. L'application canonique P :A$\rightarrow$A/I est un homomorphisme d'anneaux.
2. Soient B un anneau et f :A$\rightarrow$B un homomorphisme d'anneaux.
   Si f(I)=0 ($i.e$ I$\subseteq$ ker f) il existe un unique homomorphisme $\tilde{f}$:A/I$\rightarrow$B tel que $f = i \circ \tilde{f} \circ$P et le diagramme commute

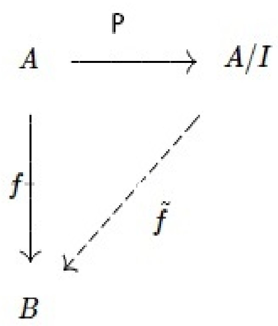

FIGURE 1.2

Preuve

1. L'application canonique P : A→A/I est un homomorphisme de groupes
   et on a :
   $$\begin{cases} P(x+y) = P(x) + P(y) \ et \ P(xy) = P(x)P(y) \\ P(1) \ est \ l'unit\acute{e} \ \varepsilon \ de \ A/I \end{cases}$$
   et on a A et A/I deux anneaux. D'où P est un homomorphisme d'anneaux.
2. Soient H,H‘ deux sous-groupe additif de A et B respectivement. Comme f un homomorphisme de groupes de H dans H‘, I sous-groupe de H, il existe un unique homomorphisme $\tilde{f}$:H/I→H‘ tel que $f = \tilde{f}$∘P. Soient a,b∈ A/I et $x, y \in$ A tels que P(x)=a et P(y)=b
   On a ab=P(x)P(y)=P(xy)
   D'où $\tilde{f}(ab) = \tilde{f}$(P($xy$))= $f(xy) = f(x)f(y) = \tilde{f}$(P($x$))$\tilde{f}$(P($y$)) $= \tilde{f}(a)\tilde{f}(b)$
   et $\tilde{f}(\varepsilon) = \tilde{f}$(P(1))= $f(1) = 1$
   D'où $\tilde{f}$ est un homomorphisme d'anneaux.

■

Définition 1.1.5 On dit qu'un anneau K est un corps s'il n'est pas réduit à 0 et si tout élément non nul de K est inversible.

1.2 Algèbre

Définition 1.2.1 Soit K un corps. On appelle une algèbre sur K ou k-algèbre, un ensemble A muni d'une structure définit par les données suivants :

pour tout $\alpha, \beta \in K, x, y \in A, 1 \in K$

1. Une application k-bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

   tel que : $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$.
2. Une structure de k-module :
   * $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
   * $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
   * $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
   * $1 \cdot x = x$

Exemple 1.2.1 l'anneau des polynômes à coefficient dans K est une algèbre sur K.

Définition 1.2.2 Soit A une k-algèbre. On dit que B est une sous-algèbre de A si :
❶ B est un sous-module stable de A muni d'une application de B×B dans B telle que :
- B est un sous-groupe de A.
- $\forall x, y \in B$, $xy \in B$.

❷ l'injection cannonique de B dans A est une application linéaire ($\forall \alpha \in A, \forall x \in B : \alpha x \in B$).

1.3 Algèbre libre

Définition 1.3.1 Soit E un ensemble. Pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{cases} M_1(E) = E & si \quad n = 1 \\ M_n(E) = M_p(E) \times M_{n-p}(E) & si \quad n \geqslant 2 \quad tel\ que\ p \in \{1, ..., n-1\} \end{cases}$$

$M_p(E) \times M_{n-p}(E) = M_n(E) \to M_{p+q}(E) = M_n(E)$ tel que n=p+q pour tout p,q$\in \mathbb{N}$ et l'application ℓ définit par :

$$\begin{array}{rcl} \ell : M_p(E) \times M_q(E) & \longrightarrow & M_{p+q}(E) \\ (w_1, w_2) & \longmapsto & w_1 \cdot w_2 \end{array}$$

On pose $p = \ell(w_1)$, $q = \ell(w_2)$ les longueurs des mots w_1 et w_2 respectivement,alors $\ell(w_1 \cdot w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$. Alors, on appelle magma libre construit sur E un ensemble M(E) muni de la loi de composition $(w_1, w_2 \mapsto w_1 \cdot w_2)$ telle que $w_1 \in M_p(E), w_2 \in M_q(E)$ et la longueur de $w_1 \cdot w_2$ est $\ell(w_1 \cdot w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$.

Définition 1.3.2 Soient E un ensemble et M(E) magma libre construit sur E. une algèbre de M(E) sur un corps K s'appelle une algèbre libre,et on note Lib_K(E), tel que le diagramme commute

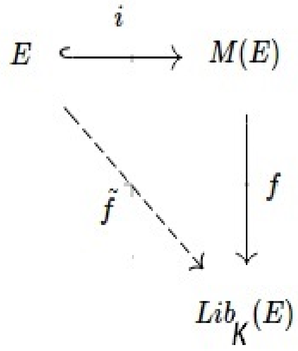

FIGURE 1.3

Théorème 1.3.1 (De propriété universelle d'algèbre :) Soient E un ensemble, F une algèbre sur K. Pour toute application $f : E \to F$, il existe un homomorphisme unique $\tilde{f}$: $Lib_K(E) \to F$ tel que $\tilde{f}(X) = f(x)$, pour tout X$\in$ $Lib_K(E)$ et $x \in E$, tel que le diagramme commute

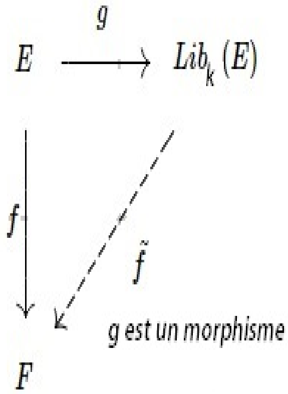

FIGURE 1.4

1.4 Algèbre des polynômes en variables non commutatives

Les k-algèbres des polynômes non commutatives K$\langle X\rangle$ sur X sont tout élément f de K$\langle X\rangle$ tel que $f = \sum \lambda_w w$ où w un mot sur X et $\lambda_w = 0$ presque partous. Soient A une k-algèbre et $\phi \neq S \subseteq A$ un sous-ensemble de A.

Définition 1.4.1 L'algèbre des polynômes K$\langle x_s/s \in S\rangle$ est une algèbre libre associative de l'ensemble X=$\{x_s, s \in S\}$ tel que l'application $\varphi : \{x_s, s \in S\} \longrightarrow A$ s'étend à un morphisme de k-algèbre $\tilde{\varphi} : K\langle x_s/s \in S\rangle \longrightarrow A$ tel que $\tilde{\varphi}(x_s) = s$ pour tout $s \in S$.

Définition 1.4.2 $\ll S \gg$ est le plus-petit sous-algèbre de A qui contient S.

Proposition 1.4.1 L'image de $\tilde{\varphi}$ est un sous-algèbre de A inclus dans $\ll S \gg$.

Preuve

❶ Montrons que $Im\tilde{\varphi} \subseteq \ll S \gg$. Soit $\tilde{\varphi}(f) \in Im\tilde{\varphi}$ tel que $f \in K\langle x_s/s \in S\rangle$ où $f = \sum \lambda_w w,\ \forall\ w \in X,\ \tilde{\varphi}(f) = \tilde{\varphi}(\sum \lambda_w w) = \sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w) = \lambda_w \sum \tilde{\varphi}(w)$.

Alors on montre que $\tilde{\varphi}(w) \in \ll S \gg$ pour tout mot w sur l'ensemble $\{x_s, s \in S\}$.

D'abord si $\ell(w) = 1$, alors $w = x_s$ pour certains $s \in S$. Ainsi $\tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(x_s) = s \in S \subseteq \ll S \gg$. Donc $\tilde{\varphi}(w) \in \ll S \gg$.

Si pour tous les mots de longueur$<\ell(w)$, on peut écrire $w = w` \cdot x_s$ tel que $w`$ est un mot de longueur $\ell(w) - 1$, alors $\tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(w` \cdot x_s) = \tilde{\varphi}(w`) \cdot \tilde{\varphi}(x_s) = \tilde{\varphi}(w`) \cdot s$, donc $\tilde{\varphi}(w) \cdot s^{-1} = \tilde{\varphi}(w`)$

On a $\tilde{\varphi}(w) = s, s^{-1} \in \ll S \gg$, donc $\tilde{\varphi}(w`) \in \ll S \gg$.

Donc $\tilde{\varphi}(f) \in \ll S \gg$. D'ou $Im\tilde{\varphi} \subseteq \ll S \gg$.

❷ Montrons que $Im\tilde{\varphi}$ est un sous-algèbre de A.

⋆ Soit $\tilde{\varphi}(f), \tilde{\varphi}(g) \in Im\tilde{\varphi}$ où $\tilde{\varphi}(f) = \tilde{\varphi}(\sum \lambda_w w)$ et $\tilde{\varphi}(g) = \tilde{\varphi}(\sum \lambda_{w`} w`)$.

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(f) + \tilde{\varphi}(g) &= \sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w) + \sum \lambda_{w`} \tilde{\varphi}(w`) \\ &= \sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w) + \lambda_{w`} \tilde{\varphi}(w`)\end{aligned}$$

$\tilde{\varphi}(w), \tilde{\varphi}(w`) \in \ll S \gg$ , alors $\sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w), \lambda_{w`} \tilde{\varphi}(w`) \in Im\tilde{\varphi}$, donc $\tilde{\varphi}(f) + \tilde{\varphi}(g) \in Im\tilde{\varphi}$

⋆ $\tilde{\varphi}(f)^{-1} = \tilde{\varphi}(f^{-1}) = \tilde{\varphi}(\sum \lambda_w w^{-1}) = \sum \lambda_w \tilde{w^{-1}} = \sum \lambda_w \tilde{\varphi}(x_s^{-1}) = \sum \lambda s^{-1}$

$s^{-1} \in \ll S \gg$, alors $\tilde{\varphi}(w^{-1}) \in \ll S \gg$

Alors $\tilde{\varphi}(\sum \lambda_w w^{-1}) \in Im\tilde{\varphi}$, donc $\tilde{\varphi}(f^{-1}) \in Im\tilde{\varphi}$.

⋆

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(f) \cdot \tilde{\varphi}(g) &= \tilde{\varphi}(\sum \lambda_w w)\tilde{\varphi}(\sum \lambda_{w`} w`) \\ &= \sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w) \sum \lambda_{w`} \tilde{\varphi}(w`) \\ &= \sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w) \lambda_{w`} \tilde{\varphi}(w`)\end{aligned}$$

$\tilde{\varphi}(w), \tilde{\varphi}(w`) \in \ll S \gg$, alors $\sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w) \sum \lambda_{w`} \tilde{\varphi}(w`)$, donc $\tilde{\varphi}(f)\tilde{\varphi}(g) \in Im\tilde{\varphi}$
D'où $Im\tilde{\varphi}$ est un sous-groupe stable.
$\star$ $\forall \alpha \in A, \tilde{\varphi}(f) \in Im\tilde{\varphi}$

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{\varphi}(f) &= \alpha\tilde{\varphi}(\lambda_w w) \\ &= \alpha \sum \lambda_w \tilde{\varphi}(w) \\ &= \sum \alpha\lambda_w \tilde{\varphi}(w) \\ &= \sum \lambda_w \alpha\tilde{\varphi}(w) \end{aligned}$$

$\alpha\tilde{\varphi}(w) \in \ll S \gg$, alors $\sum \lambda_w \alpha\tilde{\varphi}(w) \in Im\tilde{\varphi}$, donc $\alpha\tilde{\varphi}(f) \in Im\tilde{\varphi}$.
D'où $Im\tilde{\varphi}$ est un sous-algèbre de A inclus dans $\ll S \gg$. ■

Définition 1.4.3 On dit que A est une k-algèbre finement générée(finitely generated) si :

1. $A{=}\ll S \gg$ pour S un sous-ensemble fini de A.
2. $|S|{=}n$, A est n-généré par S.

Exemple 1.4.1 $K[x]$ est un 1-généré par S={x} et $K[x] = \ll x \gg$

conséquence 1.4.1 Soient A une k-algèbre n-généré par $\{a_1, \cdots, a_n\}$ et $K\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ une algèbre des polynômes en variables non commutatives.
$\tilde{\varphi} : K\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \longrightarrow A$ est un morphisme induit par l'application $\varphi : x_i \longrightarrow a_i$ pour $f \in K\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ où $f = \sum \lambda_w w$ $\forall$ $w \in X$ et $\lambda_w = 0$ presque partous $w \in X$. On remplace chaque x_i par a_i. Alors $A{=}\ll a_1, \cdots, a_n \gg = \{f(a_1, \cdots, a_n)\}$.

Exemple 1.4.2 Soit $f \in K[x_1, x_2]$ tel que $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_2x_1 + x_1x_2$
Soient $a_1, a_2 \in M_2(\mathbb{Z})$ où $a_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), a_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 - 3\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - 3\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc la k-algèbre A est 2-généré par $\{a_1, a_2\}$ *i.e* A$=\ll a_1, a_2 \gg = \{f(a_1, a_2)\}$

1.5 Structure d'une graduation

Définition 1.5.1 Soient S et E des ensembles. On appelle graduation de type S sur E une famille $(E_s)_{s \in S}$ des sous-ensembles de E, dont E est somme directe *i.e* $E = \bigoplus_{s \in S} E_s$

Définition 1.5.2 Soient K un anneau et $(K_s)_{s\in S}$ une graduation sur le groupe additif K, on dit que cette graduation est compatible avec la structure d'anneau de K si l'on a

$$K_sK_t \subset K_{s+t}$$

quels que soient s, t dans S.
L'anneau K, muni de cette graduation appelé anneau gradué de type S, et on écrit $K = \bigoplus\limits_{s\in S} K_s$.

Définition 1.5.3 Soient K un anneau gradué de type S ,$(K_s)_{s\in S}$ sa graduation, et M un k-module à gauche (ou à droite), on dit qu'une graduation $(M_s)_{s\in S}$ sur le groupe addditif M est compatible avec la structure de k-module de M si l'on a

$$K_sM_t \subset M_{s+t} \ (M_sK_t \subset M_{s+t})$$

quels que soient s et t dans S.
Le module M, muni de cette graduation appelé module gradué à gauche (ou à droite) de type S sur l'anneau gradué K, et on écrit $M = \bigoplus\limits_{s\in S} M_s$.

Proposition 1.5.1 Soient K un anneau gradué de type S, M un k-module gradué de type S, (M_s) sa graduation, N un sous-k-module de M. Les proprietés suivantes sont équivalentes :

a) N est somme de la famille $(N \cap M_s)_{s\in S}$.

b) Les composantes homogènes(les éléments de même degré ou longueur) de tout élément de N appartiennent à N.

c) N engendré par des éléments homogènes.

Preuve Voir [[4],ch2.p.167] ∎

Définition 1.5.4 Soient S un monoïde commutatif, K un anneau gradué commutatif de type S, $(K_s)_{s\in S}$ sa graduation et A une k-algèbre. On dit qu'une graduation $(A_s)_{s\in S}$ sur le groupe additif K est compatible avec la structure de k-algèbre de K si elle est compatible à la fois avec la structure de k-module est avec la structure d'anneau de K, autrement dit, si l'on a, quels que soient s, t dans S :

1 $K_sA_t \subset A_{s+t}$

2 $A_sA_t \subset A_{s+t}$

La k-algèbre A, munie de cette graduation appelée algèbre graduée de type S sur l'anneau gradué K, et on écrit $A = \bigoplus\limits_{s\in S} A_s$.

Chapitre 2

Inégalité Golod-Shafarevich

2.1 Présentation par des générateurs et relateurs

2.1.1 ensemble des générateurs et relateurs

Définition 2.1.1 Soient G un groupe et $X = \{x_1, \cdots, x_d\}$ un ensemble de G. On dit que X est un ensemble des générateurs si $G = \langle X \rangle$ tel que $\langle X \rangle$ un sous-groupe engendré par X. Le nombre minimal des générateurs de G est appelé le rang (rank) de G et est noté $d(G) = \mid X \mid$.

Définition 2.1.2 Soit X un ensemble des générateurs de G et $\tilde{X}$ un ensemble des lettres tel qu'il existe une bijection $\tilde{X} \to X$. On utilise des lettres majuscules $X, Y, A, B, C, \cdots$ pour les éléments de $\tilde{X}$ et les lettres minuscules $x, y, z, a, b, c, \cdots$ pour les éléments de X.

$\star$ Un mot(word) W sur X est une expression formelle $W(\tilde{X}) = X_1^{\varepsilon_1} X_2^{\varepsilon_2} \cdots X_k^{\varepsilon_k} = \prod_{j=1}^{k} X_j^{\varepsilon_j}$ où $X_1, \cdots, X_k \in \tilde{X}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k \in \{1, -1\}$, et k longueur de mot $W(\tilde{X})$ ($k = \ell(W(\tilde{X}))$).

$\star$ Le mot $W(\tilde{X})$ définit l'élément $g \in G$ si $g = W(\tilde{X}) = \prod_{j=1}^{k} x_j^{\varepsilon_j}$ où $x_j \in X$.

$\star$ Si $V(\tilde{X})$ est un mot définit $h \in G$, le produit $W(\tilde{X})V(\tilde{X})$ des mots $W(\tilde{X})$ et $V(\tilde{X})$ est le mot obtenu en écrivant d'abord $W(\tilde{X})$, puis $V(\tilde{X})$, alors $gh = W(\tilde{X})V(\tilde{X})$.
$\star$ Le mot inverse de $W(\tilde{X})$ est le mot $W(\tilde{X})^{-1} = X_k^{-\varepsilon_k}, \cdots, X_2^{-\varepsilon_2}, X_1^{-\varepsilon_1}$, il définit l'élément inverse g^{-1} de G. $W(\tilde{X})W(\tilde{X})^{-1}$ également le mot trivial ou vide, notez par 1 ou $\varnothing$ et $\ell(1) = 0$ définit l'élément neutre de G.

Exemple 2.1.1 Soient G un groupe , $g, h \in G$ où $g = W = ABC^{-1}DEF^{-1}C$, $h = V =$

$C^{-1}BDEF^{-1}$, $\ell(W) = 7$ et $\ell(V) = 5$ tel que W et V des mots sur l'ensemble X de G.
$gh = WV = ABC^{-1}DEF^{-1}CC^{-1}BDEF^{-1} = ABC^{-1}DEF^{-1}BDEF^{-1}$ car $CC^{-1} = 1$
$W = ABC^{-1}DEF^{-1}C$,et $W^{-1} = C^{-1}FE^{-1}D^{-1}CB^{-1}A^{-1}$,
alors $WW^{-1} = ABC^{-1}DEF^{-1}CC^{-1}FE^{-1}D^{-1}CB^{-1}A^{-1} = 1$

Définition 2.1.3 Un mot $R(\tilde{X}) = X_1^{\varepsilon_1} \cdots , X_k^{\varepsilon_k}$ est appelé un relateur (par rapport à X et à G), si $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_k^{\varepsilon_k} = 1$ en G, alors $R = \{R_1(\tilde{X}), \cdots , R_k(\tilde{X})\}$ est un ensemble des relateurs.

Définition 2.1.4 Si X un ensemble des générateurs de G et R un ensemble des relateurs, alors $\langle X/R\rangle$ est une présentation de G, et on écrit G=$\langle X/R\rangle$.

Exemple 2.1.2 Soit $G = (\mathbb{Z}, +)$ un groupe, avec un unique générateur 1. $A \in \tilde{X}, 1 \in X$, alors $W = A^{\varepsilon_1}A^{\varepsilon_2} \cdots A^{\varepsilon_k} \equiv A^{n_1}A^{n_2} \cdots A^{n_q}$ où $\varepsilon_j = \pm 1, n_j \in \mathbb{Z}$, toutes les lettres ont le même exposant ε et le même exposant n.
Soit $n_j \cdot n_{j+1} < 0$, $W \equiv A^n$ où $n = \sum_{j=1}^{q} n_j \in \mathbb{Z}$,
par exemple : $-9 = -1-1-1-1-1-1-1-1-1 \equiv 1^{-1}1^{-1}1^{-1}1^{-1}1^{-1}1^{-1}1^{-1}1^{-1}1^{-1} \equiv 1^{-9} \equiv 1^5 1^{-14}$.
$\star$ $A^n \equiv A^m, n, m \in \mathbb{Z}$ si seulement si $n = m$.
$\star$ $A^n, n \in \mathbb{Z}$ est un relateur si seulement si $n = 0$.
Par conséquent, il y a des relateurs triviaux(vides), donc $\mathbb{Z} = \langle A/-\rangle$

Exemple 2.1.3 Considérons le groupe $SL(2, \mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)/a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$, soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $BA = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det(AB) = 1$ et $\det(BA) = 1$, alors $SL(2, \mathbb{Z})$ engendré par A et B, et on écrit $SL(2, \mathbb{Z}) = \langle A, B\rangle$.
$A^2 = AA = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$, $\det(A^2) = 1$
$B^3 = BBB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$, $\det(B^3) = 1$,alors $A^2B^{-3} = Id$ est un relateur.
$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = Id$, $\det(A^4) = 1$, alors A^4 est un relateur. Donc $\{A^2B^{-3}, A^4\}$ est un ensemble des relateurs, d'où $SL(2, \mathbb{Z}) = \langle A, B/A^2 = B^3, A^4\rangle$.

2.1.2 Présentation d'une algèbre par des générateurs et relateurs

Soit A une k-algèbre engendré par $\{a_1, \cdots , a_n\}$ (i.e $\{a_1, \cdots , a_n\}$ sont des générateurs). On a vu qu'il existe un morphisme $\tilde{\varphi} : K\langle x_1, \cdots , x_n\rangle \longrightarrow A$ tel que $\tilde{\varphi}(x_i) = a_i$ $\forall i \in I$, soit $\tilde{\varphi}$ surjectif alors K$\langle x_1, \cdots , x_n\rangle/\ker\tilde{\varphi}$ $\simeq$A.
Soit R un sous-ensemble de K$\langle x_1, \cdots , x_n\rangle$ tel que R engendre l'idéal bilitère $\ker\tilde{\varphi}$ ($\ker\tilde{\varphi}$ le plus petit idéal qui contient R). Les éléments de R s'appelle des relateurs.

Définition 2.1.5 $\langle\{a_1, \cdots , a_n\}/R\rangle$ est une présentation de A telle que $\{a_1, \cdots , a_n\}$ l'ensemble des générateurs et R l'ensemble des relateurs, et on écrit A=$\langle a_1, \cdots , a_n/R\rangle$.

Exemple 2.1.4 Soit R=$\{x_ix_j - x_jx_i\}$ alors $\langle\{x_1, \cdots , x_n\}/R\rangle$ est une présentation de l'algèbre commutative k$[x_1, \cdots, x_n]$. Considérons la morphisme naturel

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\varphi} : K\langle x_1, \cdots, x_n\rangle & \longrightarrow & k[x_1, \cdots, x_n] \\ x_i & \longmapsto & x_i\end{array}$$

R engendre $\ker\tilde{\varphi}$ alors $x_ix_j - x_jx_i \in \ker\tilde{\varphi}$

$$\begin{array}{c}\text{Donc } \ \tilde{\varphi}(x_ix_j - x_jx_i) = 0, \ \forall i, j \in I \\ x_ix_j - x_jx_i = 0\end{array}$$

D'où par le premier théorème d'isomorphisme K$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle / \ker\tilde{\varphi} \simeq$k$[x_1, \cdots, x_n]$
Et on écrit k$[x_1, \cdots, x_n] = \langle\{x_1, \cdots, x_n\}/R\rangle$

Définition 2.1.6 A est une k-algèbre finement présentée(finitely presented) si A admet une présentation finie $\langle X/R\rangle$ alors $|X|< \infty$ et $|R|< \infty$. En particulier A admet n-générateurs et m-relateurs.

Exemple 2.1.5 Soient $\langle\{x_1, \cdots, x_n\}/x_ix_j - x_jx_i, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\rangle$ une présentation finie de la k-algèbre k$[x_1, \cdots, x_n] = \langle x_1, \cdots, x_n/x_ix_j - x_jx_i, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\rangle$ alors k$[x_1, \cdots, x_n]$ est finiment présenté admet n-générateurs et $\frac{n(n-1)}{2}$-relateurs.

Remarque 2.1.1 Soient A est une k-algèbre et R$\subseteq$A , alors l'idéal engendré par R est un sous-module engendré par tous les éléments de la forme r, xr, ry, xry telle que $r \in$R $x, y \in$A

Exemple 2.1.6 Soient X$=\{x_1, x_2, x_3\}$ un ensemble fini, $R = \{x_1^3+2x_1^2 = 0, 2x_2^2 = x_3^2/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ un ensemble des relateurs, et A une algèbre définit par la présentation $\langle x_1, x_2, x_3/R\rangle$ sur un corps K$=\mathbb{R}$. Considérons le morphisme naturel

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\varphi} : K\langle x_1, x_2, x_3\rangle & \longrightarrow & A \\ f_i & \longmapsto & f_i\end{array}$$

$\tilde{\varphi}(x_1^3 + 2x_1^2) = x_1^3 + 2x_1^2 = 0$, alors $x_1^3 + 2x_1^2 \in \ker\tilde{\varphi}$.

$\tilde{\varphi}(2x_2^2) = 2x_2^2 = x_3^2 = \tilde{\varphi}(x_3^2) \Rightarrow 2x_2^2 = x_3^2 \Rightarrow 2x_2^2 - x_3^2 = 0$ alors $2x_2^2 - x_3^2 \in \ker\tilde{\varphi}$.
Donc $\ker\tilde{\varphi} = \ll x_1^3 + 2x_1^2, 2x_2^2 = x_3^2 \gg$

D'où $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle / \ker\tilde{\varphi} \simeq A = \langle x_1, x_2, x_3/R\rangle$.

2.2 Algèbre graduée non-commutative et séries Hilbert

Soient K un corps, X$=\{x_1, \cdots, x_d\}$ un ensemble fini. On note K$\langle X\rangle$=K$\langle x_1, \cdots, x_d\rangle$ une k-algèbre libre associative sur X, qu'est une algèbre des polynômes en variables non commutatives $\{x_1, \cdots, x_d\}$ avec des coefficients en K.

2.2.1 Les composantes homogènes d'une algèbre des polynômes en variables non commutatives

Définition 2.2.1 Un polynôme homogène est un polynôme en plusieurs variables dont tous les monômes non nuls sont de même longueurs.

Exemple 2.2.1 Le polynôme $x^5 + 2x^3y^2 + 9xy^4$ est homogène de longeur 5 car la somme des exposants est 5 pour chacun des monômes.

Définition 2.2.2 Soit A une algèbre graduée tel que A=$\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$. En considéront les A_n comme des sous-modules de A contient des polynômes homogènes(des composantes homogènes) de même longueur n. Par concéquent, un élément w $\in$A est homogène si seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w \in A_n$

2.2.2 Décomposition d'un polynôme en des composantes homogènes

Définition 2.2.3 Soit K$\langle X \rangle$ une algèbre des polynômes en variables non commutatives. On dit que $K\langle X \rangle_n$ est un sous-module contient des polynômes homogènes de longueur n, de sorte que $K\langle X \rangle = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K\langle X \rangle_n$.

Exemple 2.2.2 Soient K=$\mathbb{R}$ un corps, X=$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et K$\langle X \rangle$ une algèbre des polynômes. Soit P(X)$\in K\langle X \rangle$ tel que P(x)=$-x_1^2 + x_2x_3x_2 - 5x_2^4x_1 + 3x_2x_3x_4 - 1$.
On remarque que

$$-x_1^2 \in K\langle X \rangle_2$$

$$(x_2x_3x_2), (3x_2x_3x_4) \in K\langle X \rangle_3$$

$$-5x_2^4x_1 \in K\langle X \rangle_5$$

$$-1 \in K\langle X \rangle_0 = K = \mathbb{R}$$

Donc *P(X)*$\in K\langle X \rangle_0 \bigoplus K\langle X \rangle_2 \bigoplus K\langle X \rangle_3 \bigoplus K\langle X \rangle_5$
D'où $K\langle X \rangle = K\langle X \rangle_0 \bigoplus K\langle X \rangle_2 \bigoplus K\langle X \rangle_3 \bigoplus K\langle X \rangle_5$

2.2.3 Présentation par des générateurs et éléments homogènes des relateurs

Soient R un sous-ensemble de K$\langle X \rangle$ constitué par des éléments homogènes de longueur positive et A une k-algèbre définit par la présentation $\langle X/R \rangle$. Cela signifie que A=K$\langle X \rangle$/I où I un idéal de K$\langle X \rangle$ engendré par R.

A et K$\langle X \rangle$ sont des algèbres graduées. On note I un idéal gradué tel que I=$\bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n$ où $I_n \subset$

$K\langle X\rangle_n$, et par les définitions (2.2.2) et (2.2.3) A_n et $K\langle X\rangle_n$ sont des sous-modules centients des composantes homogènes. I engendré par des éléments homogènes, alors I_n contient des éléments homogène.

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K\langle X\rangle_n / I_n = K\langle X\rangle / I = \langle X/R\rangle.$$

2.2.4 Séries de Hilbert

D'aprés ce qui precède. Soient $a_n = \dim_K A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ et r_n le nombre minimal des éléments homogènes de R qui ont de longueur n $i.e$ $r_n = \{r \in R : \ell(r) = n\}$.

Définition 2.2.4 Soit K un corps, A une k-algèbre graduée associative. A est locallement finie si seulement si A_n est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Pour $K\langle X\rangle_n$ est un sous-espace de dimension finie, on peut être supposer que $r_n < \infty$ (finie) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2.5 Les séries de Hilbert de A sont des séries infine $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} rank_K(A_n)t^n,\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.1 On a $a_n = rank_k(A_n) = \dim_K A_n$,donc

$$H_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, et\ H_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n t^n$$

sont des séries Hilbert.

2.3 Inégalité de Golod-Shafarevich

Théorème 2.3.1 (Inégalité de Golod-Shafarevich :(cas gradué))

$$\boxed{(1- \mid X \mid t + H_R(t)) \cdot H_A(t) \geqslant 1}$$

Preuve

Soit $R_n = \{r \in R/\ell(r) = n\}$ tel que R l'ensemble d'éléments homogènes des relateurs, alors $R = \displaystyle\bigcup_{n\geqslant 1} R_n$. On rappelle que I est un idéal gradué de l'algèbre libre associative K$\langle X\rangle$ engendré par R et I=$\displaystyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} I_n$ avec $I_n \subseteq$K$\langle X\rangle_n$ où K$\langle X\rangle_n$ la composante homogène du longueur n de K$\langle X\rangle$ et K$\langle X\rangle$=$\displaystyle\bigoplus_{n=0}^{\infty}K\langle X\rangle_n$ (en particulier les K$\langle X\rangle_n$ comme des sous-modules de K$\langle X\rangle$).

Maintenant fixons $n \geqslant 1$. Pour chaque $r \in R$ est un élément homogène, I_n est étendu de K par des éléments de la forme xry, pour certains $x \in$K$\langle X\rangle_s$,$y \in$ K$\langle X\rangle_t$ et $r \in R_m$ où $s+m+t = n$,telle que x et y sont des monômes.

- ⋆ Si $x \neq 1$, alors $x = zx`$, pour certains $z \in$X et $x` \in$K$\langle X\rangle_s$. Donc $xry = zx`ry \in zI_{n-1}$ car $zx`ry \in I_n$.
- ⋆ Si $x = 1$, alors $xry = ry \in R_m$K$\langle X\rangle_t$. Dans ce cas $s = 0$ $i.e$ $0 + m + t = n$ alors $t = n - m$. Donc $xry = ry \in R_m$K$\langle X\rangle_{n-m}$

D'où

$$\begin{cases} si\ x \neq 1 \quad xry = zx`ry \in zI_{n-1}\ tel\ que\ z \in X\ et\ x` \in K\langle X\rangle_s \\ si\ x = 1 \quad xry = ry \in R_m K\langle X\rangle_{n-m} \end{cases} \tag{2.1}$$

Par conséquent

$$I_n = span_k(X)I_{n-1} + \sum_{m=1}^{n} span_k(R_m)K\langle X\rangle_{n-m} \tag{2.2}$$

Pour chaque $i \in \mathbb{Z}_+$, choisissons un k-sous-espace vectoriel B_i de K$\langle X\rangle_i$ tel que K$\langle X\rangle_i$ = $I_i \bigoplus B_i$. Pour $i = n-m$ K$\langle X\rangle_{n-m} = I_{n-m} \bigoplus B_{n-m}$, alors $span_k(R_m)$K$\langle X\rangle_{n-m}$=$span_k(R_m)I_{n-m}$+ $span_k(R_m)B_{n-m}$ et $span_k(R_m)I_{n-m} \subseteq span_k(X)I_{n-1}$.

En combinant cette observation avec (2.2), nous concluons :

$$\begin{aligned} I_n &= span_k(X)I_{n-1} + \sum_{m=1}^{n} span_k(R_m)I_{n-m} + span_k(R_m)B_{n-m} \\ &= span_k(X)I_{n-1} + \sum_{m=1}^{n} span_k(R_m)B_{n-m} \end{aligned}$$

D'où

$$I_n = span_k(X)I_{n-1} + \sum_{m=1}^{n} span_k(R_m)B_{n-m} \tag{2.3}$$

Soient A une k-algèbre définit par la présentation $\langle X/R\rangle$, cela signifie que A=K$\langle X\rangle/I$, et A une algèbre graduée où A=$\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ et $A_n = K\langle X\rangle_n/I_n$.

Soit $\mid X \mid = d$, on a $a_n = \dim_k A_n = K\langle X\rangle_n - \dim_k I_n$, et alors $\dim_k I_n = d^n - a_n$, et ainsi $\dim_k B_{n-m} = a_{n-m}$.

Par conséquent, calculer les dimensions des deux côtes de (2.3), on obtient :

$$\dim_k I_n = d^n - a_n$$

$$\dim_k span_k(X)I_{n-1} = span_k(X)\dim_k I_{n-1} = d(d^{n-1} - a_{n-1})$$

$$\dim_k span_k(R_m)B_{n-m} = span_k(R_m)\dim_k B_{n-m} = r_m a_{n-m}$$

Donc

$$d^n - a_n \leqslant d(d^{n-1} - a_{n-1}) + \sum_{m=1}^{n} r_m a_{n-m}$$

$$d^n - a_n \leqslant d^n - da_{n-1} + \sum_{m=1}^{n} r_m a_{n-m}$$

$$-d^n + a_n + d^n - da_{n-1} + \sum_{m=1}^{n} r_m a_{n-m} \geqslant 0$$

Alors cet inégalité est infine,d'où

$$a_n - da_{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m a_{n-m} \geqslant 0$$

$$\left(1 - da + \sum_{m=1}^{\infty} r_m a_m\right) a_n \geqslant 0$$

t^n le coefficient dans la série pour $t \in \mathbb{R}$, alors $\left(1 - dt + \sum_{m=1}^{\infty} r_m t^m\right) t^n \geqslant 0$,donc

$$\left(1 - dt + \sum_{n=1}^{\infty} r_n t^n\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \geqslant 0$$

On note que $\sum_{n=1}^{\infty} r_n t^n = H_R(t)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = H_A(t)$ sont des séries de Hilbert.
Et d'où l'inégalité $(1 - dt + H_R(t)) \cdot H_A(t) \geqslant 0$. Le terme constant de cette série est $a_0 = 1$, on a

$$\begin{aligned}
(1 - dt + H_R(t)) &\geqslant 1 \\
(1 - dt + H_R(t))H_A(t) &\geqslant H_A(t) \\
(1 - dt + H_R(t))H_A(t) &\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\
(1 - dt + H_R(t))H_A(t) &\geqslant a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \\
(1 - dt + H_R(t))H_A(t) &\geqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 t^n
\end{aligned}$$

D'où $(1 - dt + H_R(t)) \cdot H_A(t) \geqslant 1$ ∎

Chapitre 3

Application de l'inégalité Golod-Shafarevich pour résoudre le problème de Kurosh-Levitzky

3.1 Problème de Kurosh-Levitzky

En 1940, Kurosh et Levitzky ont formulé un analogue des problèmes de Burnside.
Dans ce chapitre nous essayons résolu et détaillé la réponse de ce problème.

Définition 3.1.1 Soit A une algèbre. Un élément x dans A est dit nilpotent si $x^n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si chaque élément de A est nilpotent, alors A est appelée une algèbre nil (nil algebra).

Corollaire 3.1.1 (Critère de Cauchy) Soit $\sum a_n$ une suite à termes positifs, posons $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = l$

- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Lemme 3.1.1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ telle que :

$$a_{n+m} \leqslant a_n a_m \; pour \; tout \; n, m \in \mathbb{N} \; (sous-multiplicative) \tag{3.1}$$

Si $a_1 < \infty$, alors $a_n < \infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n)^{1/n}_{n\in\mathbb{N}}$ est converge et $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant (a_m)^{1/m}$ pour certains $m \in \mathbb{N}$.

Preuve

Par (3.1), on déduire

$$a_{nm} = \underbrace{a_{m+\cdots+m}}_{n\ fois} \leqslant \underbrace{a_m a_m \cdots a_m}_{n\ fois} = a_m^n$$

alors

$$a_{nm} \leqslant a_m^n \tag{3.2}$$

En particulier, $a_n = a_{n\cdot 1} \geqslant a_1^n$. Depuis, si a_1 est finie, alors a_n est finie. On pose l'ensemble $a = \inf\{(a_n)^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Pour compléter la preuve, il suffit de montrer

$$\lim_{n\to\infty} \sup(a_n)^{1/n} \leqslant a \tag{3.3}$$

Si $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(a_m)^{1/m} < a + \varepsilon$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, il y a $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $q_n \in \{0, \cdots, m-1\}$ tel que $n = p_n m + q_n$. Par (3.1) et (3.2), on a

$$a_n = a_{p_n m + q_n} \leqslant a_{p_n m} a_{q_n} \leqslant a_m^{p_n} a_1^{q_n}$$

qui donne

$$(a_n)^{1/n} \leqslant (a_m)^{p_n/n}(a_1)^{q_n/n}$$

$$(a_n)^{1/n} \leqslant ((a_m)^{1/m})^{p_n m/n}(a_1)^{q_n/n}$$

et on a $n = p_n m + q_n \Rightarrow p_n m = n - q_n \Rightarrow p_n m/n = 1 - q_n/n$. Alors

$$(a_n)^{1/n} \leqslant ((a_m)^{1/m})^{1-q_n/n}(a_1)^{q_n/n} \leqslant (a+\varepsilon)^{1-q_n/n}(a_1)^{q_n/n}$$

. Puisque $q_n/n \to 0$, pour $n \to \infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(a_n)^{1/n} \leqslant a + \varepsilon$. Cela donne (3.3) car ε un réel positif arbitraire.

D'où $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$ existe et inférieur ou égal à $(a_m)^{1/m}$ ($i.e$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant (a_m)^{1/m}$) . ■

Corollaire 3.1.2 Supposons qu'il existe un nombre réel $t \geqslant 0$, et $1 - dt + H_R(t) \leqslant 0$(en particulier que la série $H_R(t)$ converge). Alors :

1) La série $H_A(t)$ diverge.
2) Supposons que $t \in]0,1[$ et $1 - dt + H_R(t) < 0$. Alors l'algèbre A a une croissance exponentielle, c'est-à-dire que la séquence $a_n = \dim_K A_n$ croît de façon exponentielle. En particulier A est de dimension infinie.

Preuve

1) Supposons que la série $H_A(t)$ converge. Alors les deux côté gauche de l'inégalité Golod-Shafarevich devient convergents, il faut donc obtenir un inégalité numérique valide $H_A(t)(1-dt+H_R(t)) \geqslant 1$. C'est clair $H_A(t) > 0$, mais $1-dt+H_R(t) \leqslant 0$. Alors $H_A(t)(1-dt+H_R(t)) < 0$, contardiction. D'où la série $H_A(t)$ diverge.(L'idée de cette preuve est la divergence fait pordre l'equilibre de cet inégalité).

2) La série $H_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ diverge, on peut écrire $H_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} ((a_n)^{1/n} t)^n$, par le corollaire (3.1.1),nous devons avoir $\lim_{n\to\infty} \sup(a_n)^{1/n} t > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup(a_n)^{1/n} \geqslant \frac{1}{t} > 1$. Comme A une algèbre graduée, la série $\{a_n\}$ est sous-multiplicative (en utilise lemme (3.1.1)), alors $\frac{1}{t} = \inf\{(a_n)^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ et $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ existe. Donc $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \geqslant \frac{1}{t} > 1$, donc $\{a_n\}$ croît de façon exponentielle. D'où A est de dimension infinie. $\blacksquare$

Problème 3.1.1 (Kurosh-Levitzky) Soit K un corps. Est-il vrai qu'une algèbre nil finement générée sur K doit être de dimension finie (et donc nilpotent) ?

Le théorème suivant est une réponse de ce problème.

Théorème 3.1.2 Soient K un corps et $d \geqslant 2$ un entier. Alors il existe une algèbre nil associative d-générée sur K de dimension infinie.

Preuve

Soient $X = \{x_1, \cdots, x_d\}$ un ensemble fini, et $K\langle X\rangle^+$ un sous-ensemble de $K\langle X\rangle$ constitué de tous les polynômes à terme constant nul. Soit K est dénombrable,on note $K\langle X\rangle_n^+ \subset K\langle X\rangle^+ \subset K\langle X\rangle$ l'ensemble des polynômes à terme constant nul homogène, on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K\langle X\rangle_n^+ \\ (k_1, \cdots, k_n) & \longmapsto & k_1x_1 + \cdots + k_nx_n \end{array}$$

Donc l'ensemble $K\langle X\rangle_n^+$ est dénombrable. Puisque $K\langle X\rangle^+ = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K\langle X\rangle_n^+$ est une union dénombrable des ensembles dénombrables. D'où $K\langle X\rangle$ dénombrable. Ainsi on peut dénombrer ses éléments : $K\langle X\rangle^+ = \{f_1, f_2, \cdots\}$.
Soient $t \in]1/d, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $1 - dt + \sum\limits_{n=N}^{\infty} t^n < 0$.
$*$ Choisissons $N_1 \geqslant N$, et écrivons l'élément $f_1^{N_1}$ sous forme de la somme de ses composantes homogènes : $f_1^{N_1} = \sum\limits_{i=1}^{k_1} f_{1,i}$ où $deg(f_{1,i}) \geqslant N_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$.
$*$ Ensuite, choisissons $N_2 \geqslant \max\{N_1 + 1, \{deg(f_{1,i})\}\}$, et soit $\{f_{2,i}\}_{i=1}^{k_2}$ les composantes homogènes de $f_2^{N_2}$ *i.e* $f_2^{N_2} = \sum\limits_{i=1}^{k_2} f_{2,i}$ où $deg(f_{2,i}) \geqslant N_2$.
$*$ Et ensuite, choisissons $N_3 \geqslant \max\{N_2 + 1, \{deg(f_{2,i})\}\}$,... etc
Alors, choisisons $R = \{f_{n,i} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant k_n\}$ l'ensemble des relateurs, et considérons l'algèbre $A = \langle X/R\rangle$, et prenons A^+ l'image de $K\langle X\rangle^+$ dans A. On a le morphisme $\tilde{\varphi}$ de $K\langle X\rangle$ dans A, ainsi $A = K\langle X\rangle/I$ où I un idéal engendré par les éléments homogènes de R. Pour $A^+ \subset A$ et $K\langle X\rangle^+ \subset K\langle X\rangle$, alors $A^+ = K\langle X\rangle^+/I \subset A = K\langle X\rangle/I$, donc $A^+ = \langle X/R\rangle^+$.
Par construction, l'algèbre A^+ est d-générée. Soit un élément $a^+ \in A^+ = K\langle X\rangle^+/I$, on a $a^+ = P(x_1, \cdots, x_d) + I$ où $P(x_1, \cdots, x_d) \in K\langle X\rangle^+$, d'aprés la construction de R, il existe un entier convenable N_α tel que $P^{N_\alpha} \in I$ alors ${a^+}^{N_\alpha} = 0$ D'où A^+ est nil, et de dimension $n - 1$.
- Le choix de $\{N_i\}$ assure que l'ensemble des relateurs R ne contient au plus qu'un élément de chaque degré et aucun élément de degré inférieur à N.

Par conséquent, $1 - dt + H_R(t) \leqslant 1 - dt + \sum_{n=N}^{\infty} t^n < 0$. Alors A est de dimension infinie par corollaire 3.1.2.

Nous avons montrée ce théorème si K est un corps dénombrable, et nous ne l'avons pas montrée si K un corps arbitraire. Nous espérons terminer la démonstration à d'autres moments. ■

Pour illustrer l'idée de la démonstration on a choisit l'exemple suivant :

Exemple 3.1.1 Soient $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $K = \mathbb{R}$ un corps. $K\langle X\rangle^+ = \{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ un sous-ensemble de $K\langle X\rangle$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2x_3 - x_3x_1x_3 - x_2^4$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2x_3^2 + x_2^3 - x_1^3x_2x_3 - x_3^5$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^6 + x_1^5x_2 - x_3^2 - x_2^3x_3 + x_3^2x_1^2 - x_1^3$$

On écrit f_1 sous forme de la somme de ses composantes homogènes tels que
$f_{1,1}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$, $f_{1,2}(x_1, x_2, x_3) = x_2^2x_3 - x_3x_1x_3$,$f_{1,3}(x_1, x_2, x_3) = -x_2^4$
Donc

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} f_{1,i}(x_1, x_2, x_3)$$

.

$*$On coisit $N_1 \geqslant N$ où $deg(f_{1,i}) \geqslant N_1$ et$f_1^{N_1} = \sum_{i=1}^{3} f_{1,i}$,$N \in \mathbb{N}$, on remarque $N_1 = 2$ le plus petit degré dans $\{f_{1,i}\}$, alors $deg(f_{1,i}) \geqslant 2$, donc $f_1^2 = \sum_{i=1}^{3} f_{1,i}$.

$*$On coisit $N_2 \geqslant \max\{3, \{2, 3, 4\}\}$, on remarque $N_2 = 3$ le plus petit degré dans $\{f_{1,i}\}$, alors $deg(f_{2,i}) \geqslant 3$, donc $f_2^3 = \sum_{i=1}^{3} f_{2,i}$.

$*$On choisit $N_3 \geqslant \max\{4, \{3, 4, 5\}\}$, et on remarque $N_3 = 2$ le plus petit degré dans $\{f_{3,i}\}$, alors $deg(f_{1,i}) \geqslant 2$, donc$f_3^2 = \sum_{i=1}^{4} f_{3,i}$.

Alors $R = \{f_{1,i} : (1 \leqslant i \leqslant 3), f_{2,i} : (1 \leqslant i \leqslant 3), f_{3,i} : (1 \leqslant i \leqslant 4)\}$ l'ensemble des relateurs. Considérons l'algèbre $A = \langle X/R\rangle$, et prenons A^+ l'image de $K\langle X\rangle^+$ dans A. On a le morphisme $\tilde{\varphi}$ de $K\langle X\rangle$ dans A, alors $A^+ = K\langle X\rangle^+/I \subset A = K\langle X\rangle/I$ où I un idéal engendré par l'élément homogènes de R.

Par construction, l'algèbre A^+ est 3-générée car $|X| = 3$. Soit $a^+ \in A^+$, on a $a^+ = f_n(x_1, x_2, x_3) + I$ où $f_n(x_1, x_2, x_3) = \sum f_{n,i}(x_1, x_2, x_3) \in K\langle X\rangle^+$, d'aprés la construction de R, il existe un entier convenable N_α tel que $f_n^{N_\alpha} \in I$ alors $a^{+N_\alpha} = 0$.

Par exemple $a^+ = f_1(x_1, x_2, x_3) + I$ où $f_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} f_{1,i}(x_1, x_2, x_3) \in K\langle X\rangle^+$,il existe $N_1 = 2$ tel que $f_1^{N_1} = \sum_{i=1}^{3} f_{1,i} \in I$ alors $a^{+N_\alpha} = 0$. D'où A^+ est nil.

Conclusion

Dans ce travail on a confirmé l'importance de l'inégalité de Golod-Shafarevich par résoudre le problème de Kurosh-Levitzky similaire aux célèbre problème de Burnside. Cet inégalité est un lien entre des générateurs et relateurs d'un certain groupe. On a découvert des nouvelles techeniques amusant surtou dans le domaine de géométrie de groupe.

Notre espoire est continuer dans ce chemain et répondre proposé par MIKHAIL ERCHOV surtou le problem ouvert(paege 61,[6]) :≪Soit G un groupe abstrait de Golod-Shafarevich finement présenté. Exist'il un sous-groupe libre de G non abélien ?≫

Bibliographie

[1] Alexey, Parshin and R. Shafarevich,*Algebra VII : Combinatorial Group Theory Applications to Geometry*,volume 58,pages 124, 01-1993.

[2] Amrani M.E,*Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*,publisher by Ellipses,pages 437, 11-2011.

[3] Anick, David,*Non-commutative graded algebras and their Hilbert series*,volume 78,Journal of Algebra,pages 120-140, 09-1982.

[4] N. Bourbaki,*Algèbre*,volume 41,number 2,Edition originale publiée par Masson, Paris, 1970,publisher by Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pages XIII-636, 2007.

[5] C.G Gibson,*Elementary geometry of algebraic curves :an undergraduate introduction*,number 1,publisher by Cambridge University Press New York,USA 1998,pages 250, 1998-1998.

[6] Ershov, Mikhail,*Golod–Shafarevich groups : a survey*,volume 22, number 05, International Journal of Algebra and Computation, publisher by World Scientific,pages 1230001(68), 2012.

[7] Jachymski, Jacek,*König chains for submultiplicative functions and infinite products operators*,volume 361, journal of Transactions of the American Mathematical Society, pages 5967 ?5981, 11-2009.

[8] un, Young-Bae and Roh, Eun,*NIL SUBSETS IN BCH-ALGEBRAS*,volume 22,number 2,East Asian mathematical journal, pages 207-2013, 11-2006.

[9] Voden, Thomas, *Subalgebras of Golod-Shafarevich Algebras*, volume 19, International Journal of Algebra and Computation, 11-2011.

الملخص:

بإستعمال متراجحة غولود-شافاريفيتش توصلنا إلى إجابة سلبية لمشكلة كوروس-ليفيتسكي التي تنص على: «أحقا أنّ الجبور المتلاشية ذات العدد المنتهي من المولدات لها بعد منته؟».

كلمات مفتاحية: الجبر المدرج، الجبر المصفى، متراجحة غولود-شافاريفيش، المولدات، العلاقات.

Résumé :

Avec l'utilisation de l'inégalité Golod-Shafarevich, nous avons obtenu une réponse négative au problème de Kurosh-Levitzky dit que : «Est-il vrai qu'une algèbre nil finement générée sur un corps K doit être de dimension finie ?».

Mots-clés: Algèbre graduée, algèbre filtrée, l'inégalité Golod-Shafarevich, générateurs, relateurs.

Abstract :

By using Golod-Shafarevich inequality ,we got a negative answer to the problem of Kurosh-Levitzky said that: « It is true that a finitely generated nil algebra over a filed K must be finite-dimensional?».

Key-words: Graded algebra, filtered algebra, inequality Golod-Shafarevich, generators, relators.