Inégalité Golod-Shafarevich

Par :LAKHCHAKHECHE Maissa
Encadreur :BEN MOUSSA Mohammed Tayeb
Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
maissageo5@gmail.com

Résumé

Le but de ce travail est de révéler quelques des secrets de l'inégalité de Golod-Shafarevich dans le cas gradué et leurs composants, et comment a constribué efficacement à mettre fin pour plusieur problèmes et conjecteurs trés célèbre en mathématiques citer par exemple le problème de Kurosh-Levitzky.
Mots-clés : Algèbre graduée, algèbre filtrée, l'inégalité Golod-Shafarevich, les générateurs, les relateurs.

1. Introduction

En 1964, Golod et Shafarevich ont confirmé pour tout p-groupe fini G, les nombres minimal des générateurs $d(G)$ et des relateurs $r(G)$ sont liées par l'inégalité $r(G) > (d(G)-1)^2/4$, et pour prouver cette inégalité a utilisé se qu'on appelle l'inégalité Golod-Shafarevich a définit en des nombreuses catégories différents(l'algèbre graduée associative, l'algèbre filtrée complétes,$\cdots$). Certains objet dans ces catégories données une présentation par des générateurs et relateurs.
Les groupes et algèbres qui addmettent une présentation par des générateurs et relateurs s'appellent Golod-Shafarevich.

2. Notations et préliminaire

Définition 2.1 (Magma libre) *:* Soit E un ensemble. Pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{cases} M_1(E) = E & si \;\; n = 1 \\ M_n(E) = M_p(E) \times M_{n-p}(E) & si \;\; n \geqslant 2 \;\; tel\ que\ p \in \{1, ..., n-1\} \end{cases}$$

$M_p(E) \times M_{n-p}(E) = M_n(E) \to M_{p+q}(E) = M_n(E)$ telle que p,q$\in \mathbb{N}$ n=p+q

$$\begin{aligned} M_p(E) \times M_q(E) &\longrightarrow M_{p+q}(E) \\ (w_1, w_2) &\longmapsto w_1 \cdot w_2 \end{aligned}$$

On pose $p = \ell(w_1)$, $q = \ell(w_2)$ les longeurs de w_1 et w_2 alors $\ell(w_1 \cdot w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$. Ainsi, on appelle magma libre construit sur E l'ensemble M(E) muni de la loi de composition $(w_1, w_2 \mapsto w_1 \cdot w_2)$ telle que $w_1 \in M_p(E), w_2 \in M_q(E)$ et le longeur de $w_1 \cdot w_2$ est $\ell(w_1 \cdot w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$.

Définition 2.2 (algèbre libre) Soient E un ensemble et M(E) magma libre construit sur E. L'algèbre de M(E) sur l'anneau K s'appelle l'algèbre libre,et on note Lib_K(E).

Définition 2.3 (Algèbre des polynômes) L'algèbre des polynômes K$\langle x_s / s \in S\rangle$ est une algèbre libre associative de l'ensemble X=$\{x_s, s \in S\}$. L'application $\varphi : \{x_s, s \in S\} \longrightarrow A$ s'étend à un morphisme de k-algèbre $\tilde{\varphi} : K\langle x_s / s \in S\rangle \longrightarrow A$ tel que $\tilde{\varphi}(x_s) = s$ pour tout $s \in S$.

Définition 2.4 On dit que A est finement généré si :

1. *A=*$\ll S \gg$ pour S un sous-ensemble fini de A.
2. $|S|$*=n ,* A est n-généré par S.

Définition 2.5 (Algèbre graduée) Soient S un monoïde commutatif, K un anneau gradué commutatif de type S, $(K_s)_{s\in S}$ sa graduation et A une k-algèbre. On dit qu'une graduation $(A_s)_{s\in S}$ sur le groupe additif K est compatible avec la structure de k-algèbre de K si elle est compatible à la fois avec la structure de k-module est avec la structure d'anneau de K, autrement dit, si l'on a, quels que soient s, t dans S :

1 $K_s A_t \subset A_{s+t}$

2 $A_s A_t \subset A_{s+t}$

La k-algèbre A, munie de cette graduation appelée algèbre graduée de type S sur l'anneau gradué K, et on écrit $A = \bigoplus_{s\in S} A_s$.

Définition 2.6 $\langle \{a_1, \cdots, a_n\}/R\rangle$ est une présentation de A telle que $\{a_1, \cdots, a_n\}$ l'ensemble des générateurs et R l'ensemble des relateurs, et on écrit A=$\langle a_1, \cdots, a_n/R\rangle$.

Définition 2.7 Les séries Hilbert de A sont des séries infine $\sum_{n=0}^{\infty} rank_K(A_n)t^n, \;\; \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.8 On a $a_n = rank_k(A_n) = \dim_K A_n$,donc

$$H_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, et\ H_R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n$$

sont des séries Hilbert.

3. Théorème : Inégalité Golod-Shafarevich : cas gradué

Soient $\mid X \mid$ le nombre des générateurs, $H_R(t)$ et $H_A(t)$ sont des séries Hilbert, alors

$$\boxed{(1- \mid X \mid t + H_R(t)) \cdot H_A(t) \geqslant 1}$$

4. La résolution de problème (Kurosh-Levitzky) par l'inégalité Golod-Shafarevich

Définition 4.1 (nil algebra) Soit A une algèbre. Un élément x dans A est dit nilpotent si $x^n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si chaque élément de A est nilpotent, alors A est appelée une algèbre nil (nil algebra).

Problème 4.1 (Kurosh-Levitzky) Soit K un corps. Est-il vrai qu'une algèbre nil finement générée sur K doit être de dimension finie (et donc nilpotent) ?

La théorème suivant résolu ce problème (la réponse de ce probléme).

Théorème 4.2 Soient K un corps et $d \geqslant 2$ un entier. Alors il existe une algèbre nil associative d-générée sur K de dimension infinie.

Références

[1] Alexey, Parshin and R. Shafarevich,*Algebra VII : Combinatorial Group Theory Applications to Geometry*,volume 58,pages 124, 01-1993.

[2] Amrani M.E,*Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*,publisher by Ellipses,pages 437, 11-2011.

[3] Anick, David,*Non-commutative graded algebras and their Hilbert series*,volume 78,Journal of Algebra,pages 120-140, 09-1982.

[4] N. Bourbaki,*Algèbre*,volume 41,number 2,Edition originale publiée par Masson, Paris, 1970,publisher by Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pages XIII-636, 2007.

[5] C.G Gibson,*Elementary geometry of algebraic curves :an undergraduate introduction*,number 1,publisher by Cambridge University Press New York,USA 1998,pages 250, 1998-1998.

[6] Ershov, Mikhail,*Golod–Shafarevich groups : a survey*,volume 22, number 05, International Journal of Algebra and Computation, publisher by World Scientific,pages 1230001(68), 2012.

[7] Jachymski, Jacek,*König chains for submultiplicative functions and infinite products operators*,volume 361, journal of Transactions of the American Mathematical Society, pages 5967 ?5981, 11-2009.

[8] un, Young-Bae and Roh, Eun,*NIL SUBSETS IN BCH-ALGEBRAS*,volume 22,number 2,East Asian mathematical journal, pages 207-2013, 11-2006.

[9] Voden, Thomas,*Subalgebras of Golod-Shafarevich Algebras*,volume 19,International Journal of Algebra and Computation, 11-2011.