جامعة قاصدي مرباح ورقلة

إنتاج الأزواج في QED في الهندسة غير التبديلية

من إعداد : محمد العربي قاجة ، عبد الحكيم بن كران / تحت إشراف : الأستاذ خوجة الأمين

كلية : الرياضيات وعلوم المادة . قسم : الفيزياء . تخصص : فيزياء نظرية

ملخص :

يهدف هذا البحث إلى بناء نظرية الالكتروديناميك الكمومية في الفضاء-زمن غير التبديلي (كتابة الكثافة اللاغرونجية ومعادلة الحركة وحل المعادلة) وإيجاد معدل إنشاء الأزواج في النظرية باستعمال طريقة بوغوليوبوف مع الأخذ بالاعتبار تطبيق سيبارغ-ويتين .

الكلمات المفتاحية : نظرية الالكتروديناميك الكمومية ، الفضاء-زمن غير التبديلي ، إنشاء الأزواج

البنية الرياضية للهندسة غير التبديلية

1- مقدمة :

بداية ظهور الهندسة غير التبديلية كان مع وضع الصيغة الرياضية لميكانيك الكم من قِبل هايزنبارغ [1] وديراك [2] . في ميكانيك الكم نقوم باستبدال فضاء الأطوار التبديلي المُعرف بالثنائية (x_i, p_i) بفضاء الأطوار غير التبديلي ، ويتم هذا برفع الثنائية (x_i, p_i) من مجرد إحداثيات إلى مؤثرات $(\hat{x}_i, \hat{p}_j)$ تؤثر على فضاء هيلبرت وتُحقق علاقة التبديل $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$. بنفس الطريقة من اجل الحصول على الفضاء-زمن غير التبديلي نقوم برفع إحداثيات الفضاء زمن x_μ من مجرد إحداثيات إلى مؤثرات هرميتيه $\hat{x}_\mu$ تُحقق علاقة التبديل التالية

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\Theta_{\mu\nu}$$

حيث $\Theta_{\mu\nu}$ مصفوفة 4×4 ضد متناظرة .

2- مؤثرات وايل :

لايجاد عناصر الفضاء-زمن غير التبديلي قدّم وايل تحويل يربط أي عنصر من الفضاء-زمن التبديلي (دالة في إحداثيات الفضاء-زمن $f(x)$) بعنصر من الفضاء-زمن غير التبديلي :

$$\mathcal{W}[f] = \int dx\, f(x)\hat{\Delta}(x)$$

حيث $\hat{\Delta}(x)$ عنصر التداخل بين الفضاء التبديلي والفضاء غير التبديلي ، ويُعطى بـ :

$$\hat{\Delta} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} e^{-ik_\nu \hat{x}^\nu}$$

3- الجداء نجمة لمويال

يمكننا الانتقال من الفضاء التبديلي إلى الفضاء غير التبديلي بتعريف الجداء نجمة لمويال :

$$f * g = f(x) exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x)$$

حيث يُعتبر مؤثر وايل تشاكل بين الفضاء بالجبر التبديلي والفضاء بالجبر غير التبديلي :

$$\mathcal{W} : (\mathcal{M}, \cdot) \longrightarrow (\mathcal{M}, *)$$

4- تطبيقات سايبرغ-ويتين :

ربط سايبرغ-ويتين [3] الحقول في النظرية المعيارية غير التبديلية النظرية في بالحقول $\hat{A}_\mu$ المعيارية التبديلية من اجل المحافظة إلى التناظرات الموجودة في النظرية . حيث قام بنشر الحقل المعياري في النظرية المعيارية غير التبديلية كسلسلة في الحقل المعايري التبديلي

$$\hat{\Lambda} = \alpha + \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \cdots$$

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + A_\mu{}^{(1)} + A_\mu{}^{(2)} + \cdots$$

حيث $A_\mu{}^{(1)} + A_\mu{}^{(2)} + \cdots$ تصحيحات . و $\hat{\Lambda}$ هو الوسيط المعياري غير التبديلي و α هو الوسيط المعياري التبديلي . التصحيح من الرتبة إلى يُعطى بـ [3] :

$$A_\mu{}^{(1)} = -\frac{1}{4}\Theta^{\alpha\beta}\{A_\alpha, \partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}\}$$

$$\Lambda^{(1)} = -\frac{1}{4}\Theta^{\mu\beta}\{A_\mu, \partial_\beta \alpha\}$$

إنتاج الازواج في QED غير التبديلية

1- الالكتروديناميك الكمومي غير التبديلي

نظرية الالكتروديناميك الكمومي التبديلي موصوف باللاغرونجية التالية :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

حيث $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. هو الاشتقاق التغايري و $U(1)$هذه النظرية يتم بناؤها عن طريق تحقيق التناظر المحلي تحت تحويلات الزمرة المعيارية . هو تنسور الشدة الكهرومغناطيسية $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. في الفضاء-زمن غير التبديلي نتحصل على اللاغرونجية التي تصف نظرية QEDمن خلال استبدال الجداء العادي بالجداء نجمة في اللاغرونجية السابقة فنتحصل على :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\bar{\psi})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\partial_\beta\psi - \frac{ie}{2}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma^\mu\partial_\beta(\hat{A}_\mu\psi) - \frac{ie}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{A}_\mu)\partial_\beta\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{i}{8}\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha F^{\mu\nu})\partial_\beta F_{\mu\nu}$$

من خلال معادلة اولر-لاغرونج نتحصل على معادلة ديراك المشوّهة في الهندسة غير التبديلية :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\gamma^\mu\hat{A}_\mu\psi + \frac{ie}{2}\gamma^\mu\Theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{A}_\mu)(\partial_\beta\psi)$$

2- تطبيق سايبرغ-ويتين وحل معادلة الحركة

الحقل A_μ يُعطى بـ [4] :

$$A_\mu = (0,0,Bx_1, Et)$$

في الفضاء غير التبديلي فان هذا الحقل يُصبح على الشكل :

$$\hat{A}_\mu = \left(-\frac{e}{2}\Theta^{23}BEx_1, -\frac{e}{2}\Theta^{23}BEt, Bx_1 e\Theta^{12}B^2x_1 - e\Theta^{13}BEt, -Et\right)$$

إذن معادلة الحركة من اجل فضاء-فضاء غير تبديلي (أي $\Theta^{i0} = 0$ حيث $(i = 1,2,3$ ونضع $\Theta^{12} = \Theta$ و $\Theta^{13} = \Theta^{23} = 0$نكتبها على الشكل

$$(i\gamma^\mu\Pi_\mu - m)\psi = 0$$

حيث

$$\begin{cases} \Pi_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu & , \quad \mu \neq 2 \\ \Pi_\mu = ie^{eB\Theta/2}\partial_2 + \frac{e}{2}B\Theta\partial_3 - eBe^{2\Theta B}x_1 \end{cases}$$

من اجل حل هذه المعادلة نضع $\psi = (\gamma^\mu\Pi_\mu + m)\Psi$ فنتحصل على المعادلة

$$(\Pi^2 + S^{(d)} - m^2)\Psi = 0 \quad , S^{(d)} = -\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}{}^{(d)}$$

حيث الحل Ψ يُعطى بـ :

$$\Psi(x) = \Gamma_\pm\chi_\pm(x_1)\Phi_\pm(x_0)exp(ip_2x_2 + ip_3x_3)$$

حيث : $\Gamma_\pm$ يُمثل الجزء السبيني وهي حالات ذاتية للموثر $S^{(d}$

$\chi_\pm$ يُعطى بدلالة دوال هيرميت $\chi_\pm(\rho) = e^{-\frac{\rho^2}{2}}H_n(\rho)$

$\Phi_\pm$ يُعطى بدلالة الدوال المكافئ الاسطواني [6,5]

$$\begin{cases} \Phi_{1+} = D_\nu((i-1)\tau) \\ \Phi_{2+} = D_{-\nu-1}(-i(i-1)\tau) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \Phi_{1-} = D_{-\nu-1}(i(i-1)\tau) \\ \Phi_{2-} = D_\nu(-(i-1)\tau) \end{cases}$$

حيث

$$\nu = -1 + i\frac{\lambda_\pm}{2} \quad , \quad \lambda_\pm = \frac{m^2 - eBe^{eB\Theta}K_\pm}{eE}$$

$$K_+ = -2(n+1), \quad K_- = -2n \quad , \quad n = 0,1,2, \ldots\ldots$$

3- مُعدل إنتاج الأزواج

مُعدل إنتاج الأزواج يُعطى بعدد الأزواج على وحدة الزمن على وحدة الحجم:

$$I = \frac{\mathcal{N}}{L^3T} = \frac{\alpha EB}{\pi} exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right) coth\left(\frac{\pi Be^{eB\Theta}}{E}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

لاحظ وجود تأثير وسيط تشوه الفضاء-زمن Θ على مُعدل إنتاج الأزواج .

الخلاصة

عند حساب معدل إنشاء الأزواج في الالكتروديناميك الكمومية غير التبديلية من اجل الجسيمات ذات سبين ½ مع الأخذ بعين الاعتبار تطبيق سيبارغ-ويتين يظهر تأثير غير تبديلية الفضاء-زمن والذي يختفي عند $\Theta \longrightarrow 0$. على عكس النتيجة في [4] التي لم يظهر فيها التأثير بسبب عدم اعتبار تطبيق سيبارغ-ويتين .

المراجع

1. Max Born, Werner Heisenberg, and Pasqual Jordan. On quantum mechanics ii. *Z. Phys*, 35(8-9):557–615, 1926.
2. Paul Adrien Maurice Dirac. The fundamental equations of quantum mechanics. *Proc. R. Soc. Lond.A*, 109(752):642–653, 1925.
3. Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. 1999(09):032, 1999.
4. N Chair and MM Sheikh-Jabbari. Pair production by a constant external field in noncommutative qed.*Physics Letters B*, 504(1-2):141–146, 2001.
5. IS Gradshteyn and IM Ryzhik. Table of integrals, series, and products, cd version 1.0, 1996.
6. Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, Francesco G Tricomi, and Harry Bateman. *Higher transcendental functions*, volume 2. New York McGraw-Hill, 1953.