

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère d'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE DE KASDI MERBAH

Faculté des hydrocarbures, des énergies renouvelables, des sciences de la terre et de l'univers

Département de Forage et Mécanique des Chantiers Pétroliers



Mémoire

MASTER PROFESSIONNEL

Domaine : Génie pétrolier

Filière : Hydrocarbures

Spécialité : Mécanique des Chantiers Pétroliers

Présenté par : MADAOUI Lamine – MESSAOUDI Mohammed

Thème

Etude numérique de transfert de chaleur d'un écoulement de fluide dans un canal cylindrique

Soutenu publiquement

Le 13 / 06 / 2019

Devant le jury :

D ^r MAMANOU Abdelatif	Président	MCB	UKM Ouargla
D ^r GAREH Salim	Encadreur	MCB	UKM Ouargla
D ^r REZAIGUIA Issam	Examineur	MCA	UKM Ouargla

Année universitaire 2018/2019

Remerciement

*Nous remercions d'abord «**Dieu** » le tout puissant qui nous a aidés et donné le courage, la patience et la santé au cours de notre travail, c'est grâce à lui qu'on a fait ce travail malgré tous les obstacles.*

*Nous tenons à remercier fortement nos chers parents qui sont toujours à nos côtés, nous devons également remercier notre encadreur Mr **S.GAREH**, qui a contribué à l'élaboration de ce modeste travail, avec ses conseils et ses critiques et sa disponibilité qui nous ont permis d'évoluer nos connaissances acquises et de les approfondir.*

Nous adressons aussi nos remerciements les plus sincères aux membres du jury, pour avoir accepté de juger et d'examiner notre travail.

*Nous remercions aussi tous nos **enseignants** pour leurs efforts ainsi que les responsables pédagogiques.*

Enfin nous remercions tous nos amis.

Dédicace

*Je tiens à dédier ce mémoire
A ma chère MÈRE et à mon cher PÈRE que Dieu les
protège et les garde
Pour nous, pour leur soutien permanent durant tout mon
parcourt*

*A ceux qui sont la source de mon inspiration et mon
courage.*

A la famille MADAOUI.

A toute la promo.

A mes amis.

A tous ceux qui me connaissent de prêt ou de loin.

Lamine

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents qui m'ont toujours soutenu.

À mes sœurs et frères.

À toute la famille, grande et petite.

À tous mes amis.

Et toute la promo.

Mohammed

Résumé :

La discrétisation des équations gouvernantes par la méthode des volumes finis permet de les introduire dans un programme numérique exécuté par le microordinateur, qui a la propriété d'une résolution rapide et évite les erreurs de calcul que l'homme peut faire à cause du grand nombre d'opérations. Le présent travail s'est alors porté sur l'étude de transfert de chaleur d'un fluide dans un canal cylindrique par voie de simulation numérique et ceci par usage de la Méthode des Volumes Finis (M.V.F.) avec application sur logiciel MATLAB. Lors de cette étude, nous avons évalué l'influence de la vitesse de fluide et de l'épaisseur de la conduite sur la température.

Mots clés: Transfert de chaleur, Volumes Finis, Matlab, Convection forcée, fluide Newtonien, fluide incompressible.

Abstract :

The discretization of the governing equations by the finite volume method allows to introduce them into a digital program executed by the microcomputer, which has the property of a fast resolution and avoid the calculation errors that the man can do because of the large number of operations. This work then concerns the study of heat transfer of a fluid in a cylindrical channel by numerical simulation and by use of the Finite Volume Method (M.V.F.) with application on MATLAB. During this study, we evaluated the influence of the fluid velocity and the pipe thickness on the temperature

Key words: Heat transfer, finite volume, Matlab, forced convection, Newtonian fluid, incompressible fluid.

ملخص:

تسمح تقسيم المعادلات الحاكمة بطريقة الحجم المحدود بإدخالها في برنامج رقمي ينفذه الحواسيب الصغيرة، والذي يمتلك خاصية دقة سريعة وتجنب الأخطاء الحسابية التي يمكن أن يقوم بها الانسان بسبب عدد كبير من العمليات . ركز العمل الحالي على دراسة نقل الحرارة للسائل في قناة أسطوانية عن طريق المحاكاة العددية وذلك باستخدام طريقة الحجم المنتهية مع التطبيق على برنامج MATLAB. ومن خلال هذه الدراسة، قمنا بتأثير سرعة المائع و سمك الأنبوب على درجة الحرارة.

الكلمات المفتاحية: نقل الحرارة، الحجم المنتهية، ماتلاب Matlab ، الحمل القصري، السائل النيوتوني، السائل غير قابل لضغط.

Sommaire

Table des matières :

Remerciements.....	I
Dédicace	II
Résumé.....	III
Table de matière.....	IV
Nomenclature.....	V
Liste des Figures.....	VI

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I: Généralité sur le transfert de chaleur

I.1 Introduction	3
I.2 Les différents modes de transfert de chaleur	3
I.2.2 Transfert de chaleur par conduction	3
I.2.1 Le transfert par convection	4
I.2.1.1 Les différents types de convection :	4
I.2.3 Transfert de chaleur par rayonnement	5
I.3 Les types des écoulements.....	6
I.2.1 Ecoulement en régime laminaire	6
I.2.2 Ecoulement en régime turbulent	7
I.4 Les nombres sans dimension	7
I.4.1 Le Nombre de Reynolds	7
I.4.2 Le Nombre de Nusselt	8
I.4.3 Le Nombre de Grachof	8
I.4.4 Le Nombre de Prandtl.....	8
I.4.5 Ecoulement tubulaire	8
I.4.6 Ecoulement plan	9
I.4.6.1 Convection naturelle	9
I.4.6.2 Convection forcée	9
I.4.7 Résistance thermique associé au processus de convection	9
I.5 Écoulement établi et non établi	10
I.5 Couche limite dynamique.....	10
I.6 : Cas de transmission da chaleur à travers un cylindre.....	11
I.7 Conclusion	12

Chapitre II: Méthodes des Volumes Finis

II.1 Introduction	13
II.2 Définition :	13
II.3 Méthodes numériques de discrétisation	13
II.3.1 Méthode des Différences Finis (MDF).....	13
II.3.2 Méthode des Eléments Finis (MEF).....	14
II.3.3 Méthode des Volumes Finis (MVF).....	14
II.4 Principe de la méthode des volumes finis	15
II.4.1 Etapes de résolution avec la méthode des volumes finis.....	17
II.5 Différents types de Grille en volumes finis.....	17
II.5.1 Approche usuelle	17
II.5.2 Approche alternative	17
II.5.3 Autres variantes	17
II.6 Méthodes de Résolution [9]	18
II.6.1 Méthodes itératives.....	18
II.5.1.1 La méthode de Jacobi.....	18
II.6.1.2 Méthode de Gauss Seidel.....	18
II.6 Conclusion.....	19

Chapitre III: Modélisation mathématique

III.1 Introduction.....	20
III.2 problématique	20
III.2.1 Description du phénomène physique à étudier	20
III.3 Equation de problème	21
III.3.1 Equation de continuité.....	21
III.3.2 Equation de mouvement.....	21
III.3.3 L'équation d'énergie	22
III.4 Discrétisation des équations de base de la Méthode des volumes Finis.....	25

Chapitre IV: Résultats et discussions

IV.1 Introduction	32
IV.2 Conclusion.....	48
Conclusion générale.....	49
Références bibliographique.....	

Nomenclature :

Lettres latines :

∂ : Dérivée partielle.

D : diamètre de la conduite (**m**).

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (**m²**).

x : Variable d'espace dans la direction du flux de chaleur (**m**).

T_p : Température de la surface (**°k**).

T_∞ : Température du milieu environnant la surface (**°k**).

V : La vitesse de fluide (**kg/m³**).

d : Diamètre hydraulique de la conduite (**m**).

L : la longueur de la conduite (**m**).

Re ; Nombre de Reynolds.

P : Pression (**Pa**).

U : Composantes de la vitesse suivant la direction x (**m/s**).

v : Composantes de la vitesse suivant la direction y (**m/s**).

w : Composantes de la vitesse suivant la direction z (**m/s**).

P nœud principal considéré du maillage

W : nœud considéré du côté Ouest du nœud P.

w : face Ouest du volume de contrôle considéré.

V_c : Volume de contrôle.

MVF : Méthodes des Volumes finis.

Lettres grecques :

α : Diffusivité thermique (**m².s⁻¹**).

β : Coefficient d'expansion thermique à pression constante, (**K⁻¹**).

φ : Variable dépendante générale

μ : Viscosité dynamique (**kg.m⁻¹.s⁻¹**).

ν : Viscosité cinématique (**m².s⁻¹**).

ρ : Masse volumique (**kg.m⁻³**).

φ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (**w**).

ϵ : Facteur d'émission de la surface (l'émissivité de la surface).

ΔT : Différence de températures entre la surface du solide et la surface libre du fluide.

λ : Coefficient de conductivité thermique.

Liste des figures :

Chapitre I : Généralité sur le transfert de chaleur

Figure I.1 : Principe physique de la convection naturelle.	4
Figure I.2 : Transfert de chaleur par rayonnement.....	5
Figure I.3 : Écoulement laminaire	6
Figure I.4 : Régime turbulent	7
Figure I.5 : Écoulement permanent non établi.....	10
Figure I.6 : Écoulement permanent établi.....	10
Figure I.7 : Écoulement laminaire à l'entrée d'une conduite	10
Figure I.8 : Evolution de l'épaisseur de la couche limite le long de la paroi du tube [3].....	11

Chapitre II: Méthode des Volumes Finis

Figure II.1 : Volume de contrôle typique bidimensionnel.	15
Figure II.2 : Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrelacé.	16

Chapitre III: Modélisation mathématique

Figure III.1 : description de modèle géométrique à étudier.....	20	
Figure III.2 : Coordonnées cylindrique	Figure III.3 : Coordonnée cartésiennes.....	21
Figure III.4 : Volume de contrôle sur un domaine bidimensionnel.....	25	
Figure III.5 : Domaine de calcul couvert par un ensemble de volumes.....	27	
Figure III.6 : Organigramme de notre programme.....	31	

Chapitre IV: Résultats et discussion

Figure IV.1 : Profil des vitesses évaluées numériquement en fonction y , avec différent vitesses d'entrée $U_{moy} = 5 ; 2,5 ; 0,8 ; 0,08$ m/s.	33
Figure IV.2 : Profil de la température en fonction de x, y a) présentation 3D, b) coupures de température $U_{moy} = 5$ m/s.....	34
Figure IV.3 : Profil de la température en fonction de x, y a) présentation 3D, b) coupures de température $U_{moy} = 2,5$ m/s.....	35
Figure IV.4 : Profil de la température en fonction de x, y a) présentation 3D, b) coupures de température $U_{moy} = 0,8$ m/s.....	36
Figure IV.5 : Profil de la température en fonction de x, y a) présentation 3D, b) coupures de température $U_{moy} = 0,08$ m/s.....	37
Figure IV.6 : Profil de la température $T(x,y)$ en fonction de longueur de canal (x) ;.....	39
Figure IV.7 : Profil de la température avec la longueur de canal (x) ;.....	40
Figure IV.8 : Profil de la température avec le facteur géométrique $H/L = 0,25$	41
Figure IV.9 : Profil de la température avec le facteur géométrique $H/L = 0,125$	42
Figure IV.10 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 5$ m/s	44
Figure IV.11 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 2,5$ m/s	45
Figure IV.12 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 0,8$ m/s	46
Figure IV.13 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 0,08$ m/s	47

Introduction générale

Introduction générale

Introduction générale

Les équations régissant le phénomène des écoulements sont des équations différentielles. La modélisation numérique de ces équations par les méthodes numériques, le cas de la méthode des volumes finis, conduit aux solutions numériques par des codes développés pour être exécutés par le micro-ordinateur.

Un développement d'un logiciel numérique pour mettre en évidence l'amélioration des performances dynamiques des conduites sera réalisé à l'aide de l'outil de programmation MATLAB.

La compréhension de l'algorithme du code et l'accouplement entre les équations gouvernantes sous forme d'un programme MATLAB explique clairement les relations physiques et mathématiques entre ces équations pour rapprocher vers une solution avec une erreur acceptable par rapport aux solutions exactes.

Dans ce travail, à aspect essentiellement numérique, nous nous sommes particulièrement intéressés au comportement thermique d'un écoulement de fluide en régime laminaire à l'intérieur des canaux cylindriques.

Dans le présent travail, nous avons fixé l'objectif de traiter le cas de transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide dans une conduite ou un canal cylindrique, en passant par l'aspect théorique ; équations de bases (équation de conservation de la masse ou équation de continuité et équation de conservation de la quantité de mouvement) et la méthode des volumes finis et aussi l'équation d'énergie.

A l'heure actuelle, la disponibilité croissante de la puissance de calcul des ordinateurs dont le coût est décroissant, a permis de développer des outils numériques de simulation, dont la précision et la fiabilité sont déjà fort acceptables ; d'autant que l'on respecte les conditions d'utilisations.

Nous avons organisé notre travail en quatre chapitres plus introduction et conclusion générales :

Dans le premier chapitre, nous allons parler en générale sur le transfert de chaleur et différents types des écoulements.

Introduction générale

Le second chapitre, présente la méthode des volumes finis qui, à notre avis, est susceptible d'apporter des informations concrètes présentant un intérêt pour une modélisation complète du problème.

Ensuite dans le troisième chapitre, nous avons présenté les méthodes numériques de résolution, des équations différentielles aux dérivées partielles ainsi les équations de continuité et du mouvement. Nous avons choisi la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations régissant notre modèle.

Dans le quatrième chapitre, nous discutons les résultats obtenus, en se basant sur l'écoulement d'un fluide dans un canal cylindrique dont les parois sont chaudes.

Enfin nous terminons avec une conclusion.

CHAPITRE I : Généralité sur le transfert de chaleur

I Généralités

I.1 Introduction

Parmi les écoulements internes, qui sont des écoulements délimités par des parois fixes ou mobiles, on trouve les écoulements dans les conduites ou les canaux. Le problème pratique d'ingénierie des fluides: écoulement de différents types de fluides dans les conduits avec différentes formes et de diverses vitesses. Les tuyauteries sont rencontrées dans presque tous les designs de l'ingénierie (mécanique..).

I.2 Les différents modes de transfert de chaleur

I.2.2 Transfert de chaleur par conduction

La conduction est une transmission de chaleur dans la matière sans mouvement qui fait passer la chaleur des zones chaudes vers les zones froides à l'aide de deux mécanismes (vibration moléculaire, diffusion électronique). Elle concerne surtout les solides, mais aussi les liquides et les gaz pour lesquels elle est souvent négligeable par rapport à la convection ou au rayonnement.[1]

La loi fondamentale de la conduction (**Loi de Fourier**) exprime le flux de chaleur transmis dans un milieu de conductivité thermique λ à travers une surface S , elle s'écrit :

$$\varphi = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}(T). \quad (\text{I.1})$$

Le flux de chaleur par conduction est proportionnel au gradient de température.

Sous forme algébrique et suivant la direction x perpendiculaire à la surface S , le flux s'écrit :

$$\varphi = -\lambda S \frac{dt}{dx} \quad (\text{I.2})$$

Où :

λ : Est le coefficient de conductivité thermique du milieu de transmission $^w/m.c.$

φ : Flux de chaleur transmis par conduction (w).

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2).

x : Variable d'espace dans la direction du flux de chaleur (m).

Chapitre I : Généralités sur le transfert de chaleur.

I.2.1 Le transfert par convection

Définition:

Lorsque le transfert de chaleur s'accompagne d'un transfert de masse, il est appelé transfert par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides ou lorsque un fluide circule autour d'un solide. Le transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

La quantité de chaleur échangée par unité de temps dépend de plusieurs paramètres:[1]

- La différence de température entre la paroi et le fluide.
- La vitesse du fluide.
- La capacité thermique massique du fluide.
- La surface d'échange.
- L'état de surface du solide.
- Sa dimension...etc.

I.2.1.1 Les différents types de convection :

Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue :

1-La convection naturelle ou libre:

Dans ce type de convection le mouvement résulte de la variation de la masse volumique du fluide avec la température ; cette variation crée un champ de forces gravitationnelles qui conditionne les déplacements des particules du fluide ; (figure I.1).

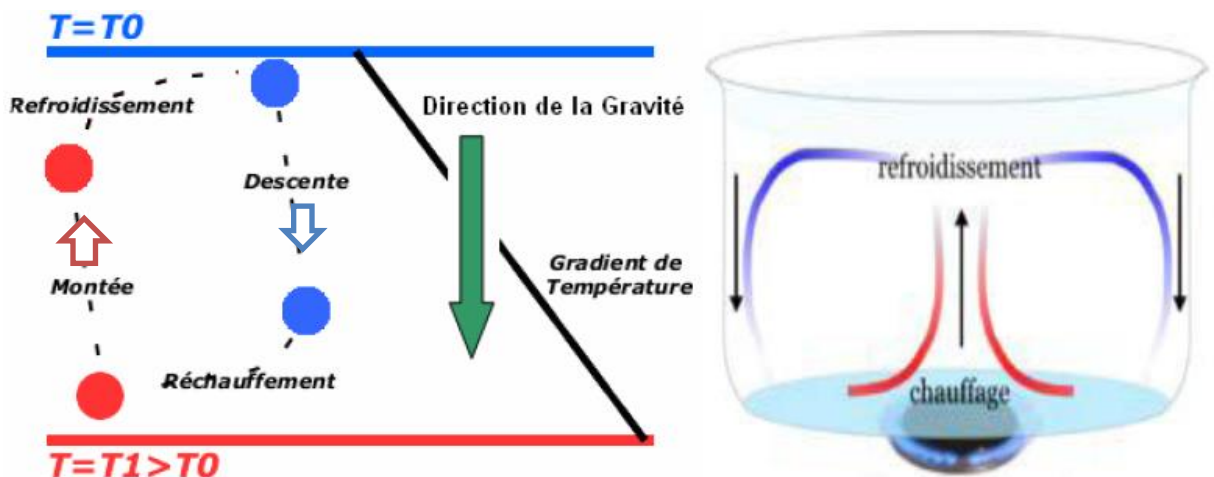


Figure I.1 : Principe physique de la convection naturelle.

Chapitre I : Généralités sur le transfert de chaleur.

2- La convection forcée :

Dans ce type de convection le mouvement est provoqué par un procédé mécanique indépendant des phénomènes thermiques (compresseur, pompe, ventilateur, etc...) ; c'est donc un gradient de pression extérieur qui provoque les déplacements des particules du fluide. L'étude de le transfert de chaleur par convection est donc étroitement liée à celle de l'écoulement des fluides.[2]

3- Loi de newton :

On peut exprimer la quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide à la température T_s et un fluide à la température T_f . Elle s'écrit (loi de newton).

$$Q = hS(T_s - T_f). \quad (I.3)$$

h : Coefficient d'échange par convection dont l'unité est ($w/m^2.c^\circ$). [1]

I.2.3 Transfert de chaleur par rayonnement

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à autre froid sans nécessité de support matériel. C'est donc le seul mode de transfert de chaleur qui peut se propager dans le vide. [1]

Le rayonnement est une vibration électromagnétique qui se transmet dans le vide à la vitesse de lumière (300.000 km/s) On prend en compte le rayonnement entre un solide et les milieux environnement :

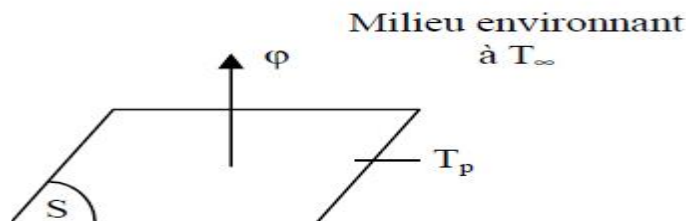


Figure I.2 : Transfert de chaleur par rayonnement

Chapitre I : Généralités sur le transfert de chaleur.

Dans ce cas nous avons la relation :

$$\varphi = \sigma \varepsilon_p (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (\text{I.2})$$

Avec :

φ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (w).

σ : Constante de Stefan ($5.67 \cdot 10^{-8} \text{w m}^{-2} \text{k}^{-4}$).

ε : Facteur d'émission de la surface (l'émissivité de la surface).

T_p : Température de la surface (°k).

T_∞ : Température du milieu environnant la surface (°k).

S : Aire de la surface (m^2).

I.3 Les types des écoulements

I.2.1 Ecoulement en régime laminaire

L'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes.

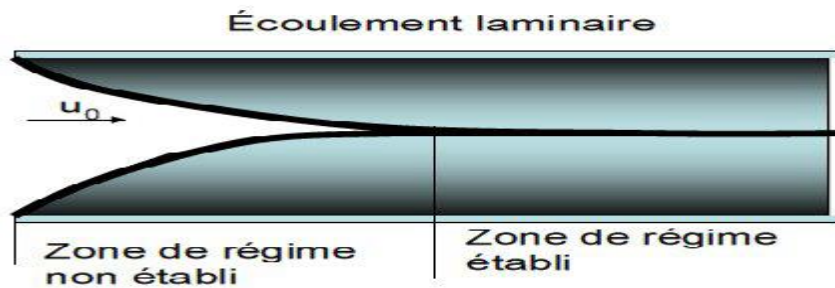


Figure I.3 : Ecoulement laminaire

Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc : Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.

Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.

I.2.2 Écoulement en régime turbulent

L'écoulement n'est pas unidirectionnel

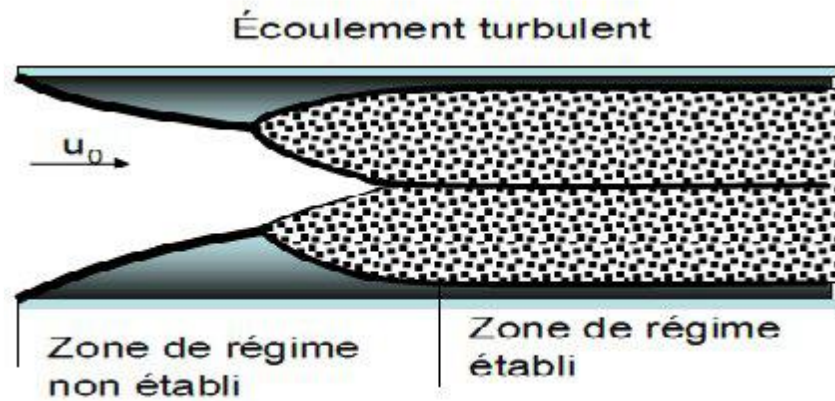


Figure I.4 : Régime turbulent

I.4 Les nombres sans dimension

Ils sont très utiles dans l'étude de la mécanique des fluides et en particulier dans les phénomènes convectifs, ces nombres sont :

I.4.1 Le Nombre de Reynolds

Le passage d'un régime à un autre est caractérisé par le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{V.d}{\nu} \quad (I.3)$$

Où :

d : Diamètre hydraulique de la conduite [m]

V : La vitesse de fluide [kg/m^3]

ν : La viscosité cinématique [m^2/s]

Si $Re > Re_c$ Le Régime dit turbulent.

Si $Re < Re_c$ Le régime dit laminaire.

- $Re < 2300$ Régime laminaire

- $2300 < Re < 10^5$ Régime turbulent (lisse)

- $Re > 10^5$ Régime turbulent (rugueux).

Chapitre I : Généralités sur le transfert de chaleur.

I.4.2 Le Nombre de Nusselt

C'est le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection à une quantité de chaleur échangée par conduction :

$$Nu = \frac{hs\Delta T}{hs\frac{\Delta T}{d}} = \frac{hLc}{\lambda} \quad (I.4)$$

Nu est fonction direct de h, sa connaissance permet de déterminer la valeur de h .

λ : Conductivité thermique de fluide

Lc : longueur caractéristique.

I.4.3 Le Nombre de Grachof

Caractérise la force de viscosité du fluide.

$$Gr = \frac{gLc^3\rho\beta\Delta T}{\mu^2} \quad (I.5)$$

β : Facteur de dilatation volumique du fluide.

g : Accélération de pesanteur.

ρ : Masse volumique.

ΔT : Différence de température.

I.4.4 Le Nombre de Prandtl

Caractérise la distribution des vitesses par rapport à la distribution de la température.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (I.6)$$

μ : Viscosité dynamique.

Cp : Capacité thermique

I.4.5 Ecoulement tubulaire

Nombre de Reynolds critique: $Re_{ec} = 2200$

Généralement les écoulements sont forcées et le régime est turbulent et

$$Nu = 0,023.Pr^{1/3}.Re^{4/3} \quad (I.7)$$

Chapitre I : Généralités sur le transfert de chaleur.

I.4.6 Ecoulement plan

Nombre de Reynold critique : $Re_c = 3.10^5$

I.4.6.1 Convection naturelle [1]

Écoulement laminaire :

$$Nu = 0.479.Gr^{1/4} ; Re < Rec. \quad (I.8)$$

Écoulement turbulent :

$$Nu = 0.13.(Gr.Pr)^{1/3} ; Re > Rec. \quad (I.9)$$

I.4.6.2 Convection forcée

Écoulement laminaire :

$$Nu = 0.66.Pr^{1/3}.Re^{1/2} ; Re < Rec. \quad (I.10)$$

Écoulement turbulent :

$$Nu = 0.036.Pr^{1/3}.Re^{4/5} ; Re > Rec. \quad (I.11)$$

I.4.7 Résistance thermique associé au processus de convection

Dans la relation $\phi = h.S(T_s - T_f)$; ϕ est le flux transféré de la surface T_f vers la surface T_s ou inversement à travers la surface S .

On peut associer à ce transfert thermique par convection une résistance thermique correspondant à la définition : $R = \frac{\Delta s}{\phi}$

$$R_{th} = \frac{(T_s - T_f)}{\phi} = \frac{1}{hs} \quad (I.12)$$

I.5 Écoulement établi et non établi

Dans une première partie de la conduite, l'écoulement évolue le long de celle-ci, il est non établi (Figure I.5). Il faut un certain parcours pour que les caractéristiques cinématiques n'évoluent plus d'une section droite à l'autre, l'écoulement est alors établi (Figure I-6). [3]

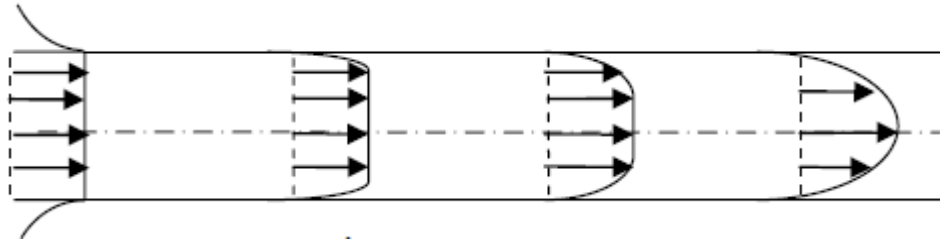


Figure I.5 : Écoulement permanent non établi



Figure I.6 : Écoulement permanent établi.

La distance de l'entrée au point d'établissement s'appelle la longueur d'établissement L_e , et pour un écoulement laminaire elle est donnée par : [4]

$$\frac{L_e}{D} = 0.029Re$$

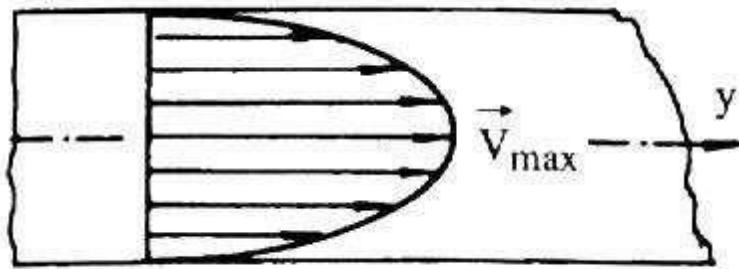


Figure I.7 : Écoulement laminaire à l'entrée d'une conduite

I.5 Couche limite dynamique

Du fait de la viscosité des fluides, toute présence de paroi matérielle implique une évolution relativement forte dans le champ des vitesses. Si l'écoulement est du type externe, c'est-à-dire lorsque les parois n'occupent qu'une petite partie de l'écoulement, les variations ne se font sentir que dans une zone proche des parois, appelée couche limite dynamique. En dehors de cette couche limite, l'écoulement se comporte comme un écoulement de fluide parfait. Dans

Chapitre I : Généralités sur le transfert de chaleur.

les écoulements internes, pour lesquels les parois délimitent une zone d'écoulement relativement faible, tout le champ des vitesses est soumis à des gradients. [5]

L'épaisseur de la couche limite notée δ est définie conventionnellement par la distance à la paroi où la vitesse u atteint la valeur de 99% de la vitesse libre U (Figure (I.8)). Elle est donnée par la relation suivante : [6]

$$\frac{\delta}{D} = \frac{0.9}{\sqrt{Re}}$$

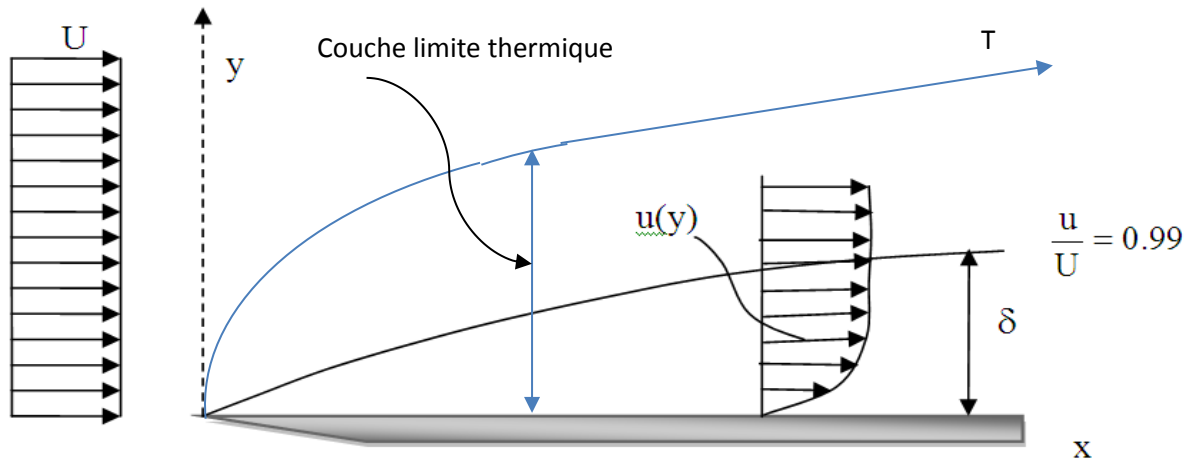


Figure I.8 : Evolution de l'épaisseur de la couche limite le long de la paroi du tube [3]

I.6 : Cas de transmission de chaleur à travers un cylindre

Considérant une conduite transportant de l'eau chaude. On suppose les températures de parois intérieures et extérieures constantes.

Le flux de chaleur est alors radial on peut ramener le problème à un problème à une dimension en coordonnées cylindrique.

L'équation de la chaleur :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\text{On montre facilement que la résistance thermique dans ce cas } R_{th} = \frac{1}{2\pi kL} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{I.14})$$

R_1 et R_2 sont respectivement les rayons intérieur et extérieur de la conduite.

L : la longueur de la conduite.

k : la conductivité thermique du matériau.

$$\text{Le flux échangé entre l'intérieur et extérieur est donc : } \Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \quad (\text{I.15})$$

T_1 et T_2 sont les températures de surface des parois interne et externe de la couche cylindrique.

Chapitre I : Généralités sur le transfert de chaleur.

I.7 Conclusion

Le transfert de chaleur décrit l'échange d'énergie thermique entre les systèmes physiques, en fonction de la température, en dissipant la chaleur.

Ce chapitre nous a permis de faire le point sur les généralités de transfert de chaleur et les différents paramètres qui interviennent dans ce phénomène, tels que les types de la convection, les types des écoulements, le nombre de Reynolds, et les corrélations, à fin de procéder et faciliter l'interprétation et la discussion des résultats.

CHAPITRE II : Méthode Des Volume Finis

Chapitre II : Méthode des volumes finis.

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la présentation et la discrétisation par différentes Méthodes de Volumes Finis de problèmes elliptiques et les différentes méthodes numériques.

II.2 Définition :

La méthode de volumes finis utilise directement les lois de conservation. Elle a été employée pour la première fois par McDonald pour la simulation d'un écoulement à deux dimensions. La méthode de volumes finis discrétise les équations gouvernantes en partageant l'espace physique en nombre de volumes arbitraires de contrôle. La précision de la discrétisation spatiale dépend d'un schéma particulière avec lequel les flux sont évalués. [7]

III.3 Méthodes numériques de discrétisation

Les méthodes numériques de discrétisation consistent à ramener la résolution du système d'équations différentielles dans le domaine d'étude, avec des conditions aux limites appropriés, à celles d'un système d'équations algébriques dont la solution donne l'énergie potentielle et la densité des électrons.

II.3.1 Méthode des Différences Finis (MDF)

La méthode des différences finies, présente une technique de résolution des équations aux dérivées partielles, par l'approximation de dérivées par des différences finies. Cette méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en un nombre déterminé de nœuds et à représenter la fonction recherchée en chacun des nœuds du domaine par un développement limité en série de Taylor. Ainsi, l'équation différentielle est transformée en équation algébrique pour chaque nœud. La résolution du système d'équations algébriques permet d'obtenir la distribution de la fonction étudiée dans le domaine d'étude.

La méthode de différence finie ne permet pas la prise en compte des conditions de passage d'un milieu physique à un autre et des non-linéarités, cela nécessite un traitement spécifique. D'autre part, elle s'adapte mal aux objets de la géométrie complexe à cause de la rigidité du maillage.

Chapitre II : Méthode des volumes finis.

II.3.2 Méthode des Eléments Finis (MEF)

Cette méthode consiste à transformer les équations différentielles sous des formes intégrales basées sur le concept de minimisation d'une quantité (comme l'énergie...), conduisant à la solution exacte. En d'autre terme elle s'agisse de trouver une fonction globale représentant le modèle mathématique dans le domaine étudié.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis consiste à [8] :

- Définir une partition du domaine d'étude c'est-à-dire subdivisé le domaine d'étude en régions élémentaires (Eléments Finis)
- Représenter la fonction inconnue sur chacun de ces éléments par une approximation polynomiale.
- Construire les formes intégrales.
- Minimiser l'intégrale.
- Une organisation matricielle des calculs.
- Une résolution du système algébrique.

La MEF est une méthode très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles surtout dans les géométries complexes. Sa mise en œuvre par contre, est assez compliquée et nécessite une place mémoire assez importante.

II.3.3 Méthode des Volumes Finis (MVF)

La méthode des volumes finis est une version spéciale de la méthode des résidus pondérés où la fonction de projection égale à l'unité. Cette méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud principal P. Chaque volume est délimité par : deux interfaces dans le cas monodimensionnel noté (e, w), quatre interfaces dans le cas bidimensionnel (e, w, s, n) et six interfaces dans le cas tridimensionnel (e, w, s, n, t, b). Chaque nœud principal P est limité par des nœuds voisins (E, W) dans le cas monodimensionnel, (E, W, S, N) dans le cas bidimensionnel, et (E, W, S, N, T, B) dans le cas tridimensionnel. L'équation différentielle est intégrée dans chaque volume élémentaire finis. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire l'inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, exponentielle, de puissance etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude. Le résultat de discrétisation donne une équation algébrique qui est constituée par les valeurs nodales. [7]

II.4 Principe de la méthode des volumes finis

Le domaine de calcul est divisé en un certain nombre de volumes élémentaires entourant des points du réseau de maillage. L'équation différentielle qui gouverne le problème est intégrée sur chaque volume de contrôle, vérifiant ainsi le principe de conservation à la proximité des points ou nœuds du réseau de maillage discret. Le résultat est l'équation de discrétisation qui contient les valeurs de ϕ dans le domaine étudié. L'équation de discrétisation obtenue de cette manière exprime le principe de conservation de ϕ dans un volume infinitésimal de contrôle.

La méthode des volumes finis est aussi une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équation algébriques, qui peuvent être résolus numériquement elle consiste à intégrer les équations de transport ou aux dérivées partielles (EDP) sur chaque volume de contrôle, couvrant ainsi tout le domaine physique. Pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (V_c).

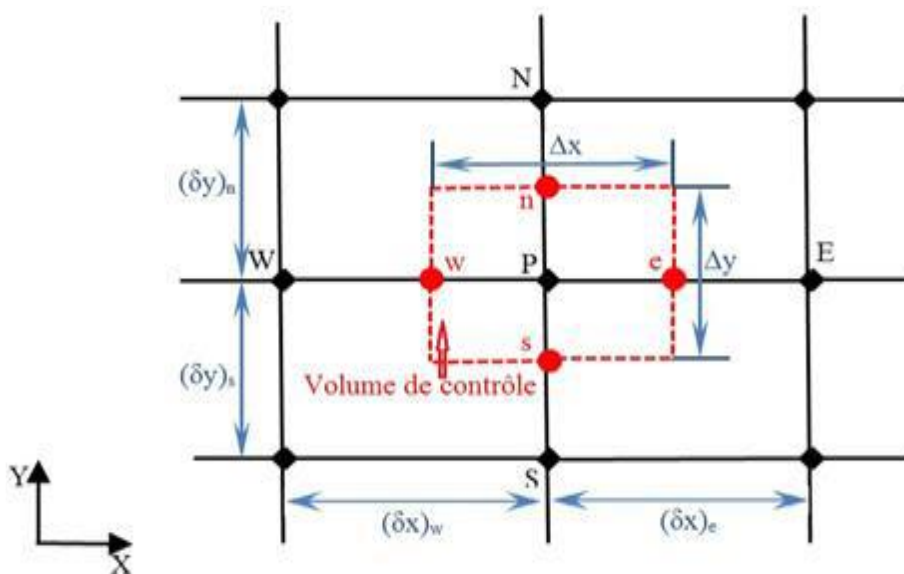


Figure II.1 : Volume de contrôle typique bidimensionnel.

- **Volume de contrôle typique :**

Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires. Les faces de ce volume sont localisées au point e, w, n, s.

Avec p le centre du volume de contrôle. E, W, N, S, sont les centres des volumes de contrôle adjacents. (Figure II.1)[10]

Chapitre II : Méthode des volumes finis.

Pour un nœud principal P, les points E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôle adjacents, situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud du point P. Le volume de contrôle P est montré par les lignes discontinues, et ces faces sont localisées aux points e et w dans la direction x, n et s dans la direction Y.

La subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinales et transversales dont l'intersection présente un nœud, où on trouve la variable P et les composantes u et v du vecteur de vitesse qui se trouve au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents qui se séparent par les incréments de distance (Δy , Δx , δ_{yn} , δ_{ys} , δ_{xw} , δ_{xe}) sont définis sur la (Figure II.1). Les scalaires ϕ sont stockés au nœud central. Les composantes de vitesse u et v sont stockées dans des nœuds décalés (Figure II.2). L'emploi de tels maillages entrelacés permet de calculer les gradients de pression dans les équations de quantité de mouvement, sans interpolation des pressions et le calcul des flux convectifs dans les équations sans interpolations des vitesses, cette technique nous permet d'éviter l'instabilité [11]. Dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.

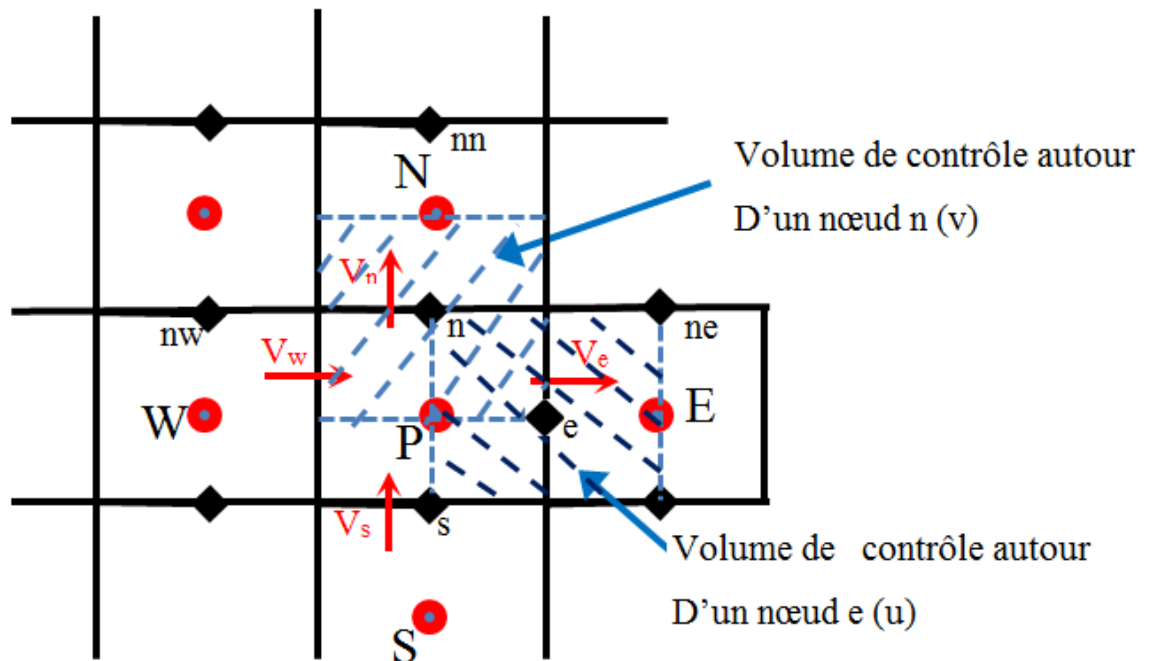


Figure II.2 : Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrelacé.

- **Volume de contrôle décalé**

On peut utiliser ce type de volume de contrôle pour calculer les vitesses u et v (Figure II.2). [10]

Chapitre II : Méthode des volumes finis.

II.4.1 Etapes de résolution avec la méthode des volumes finis

- Définir l'équation du phénomène.
- Discrétisation du domaine (subdivision du domaine en volumes élémentaires)
- Intégration de l'équation sur chaque volume de contrôle (théorème de Gauss)
- Traitement des conditions aux limites.
- Formation du système d'équation algébrique résultant et sa résolution.
- Présentation des résultats (comparaison avec la solution analytique ou à l'expérience).

➤ **Avantages**

- 1. Assure une discrétisation *conservative localement et globalement*
- Masse, moment et énergie conservés sous forme discrétisée
- Conservation globale : retrouvée lorsqu'on somme les équations sur toutes les CVs
- Somme des intégrales de surface = 0
- Locale/Globale conservation peut être obtenue avec DF mais naturelle/directe dans formulation VF.
- 2. Ne nécessite pas de transformation de coordonnées pour être appliqué sur des maillages irréguliers.

II.5 Différents types de Grille en volumes finis

II.5.1 Approche usuelle

- CV définis par les coordonnées des nœuds du maillage
- Assignation du nœud au centre du CV

Avantage: la valeur moyenne sur le CV donne une approximation de la valeur au nœud centrale au second ordre.

II.5.2 Approche alternative

- Définir d'abord la position du nœud central
- Construire les CV autour de ces nœuds tels que les interfaces entre les cellules soient au milieu des nœuds.

Avantage: Approximations centrées des dérivés (flux) aux frontières sont plus précises.

II.5.3 Autres variantes

Structuré

- Tous les points du maillage sont à l'intersection de 2/3 lignes (2D/3D)

Chapitre II : Méthode des volumes finis.

Non Structuré

- Les mailles sont des triangles ou des quadrilatères en 2D, des tétraèdres ou des pyramides en 3D
- Les cellules sont identifiées par leur numéro et ne peuvent être identifiées par leurs coordonnées indicielles (i, j, k).

Remarques

Le principe des volumes finis est le même quel que soit le type de grille.

Les seuls changements sont les relations entre les positions des nœuds sur la grille et les précisions des approximations.

II.6 Méthodes de Résolution [9]

II.6.1 Méthodes itératives

On utilise les méthodes itératives pour les matrices d'ordre élevé, comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse), qui font passer l'inconnue estimée $X^{(k)}$ à une autre estimée $X^{(k+1)}$, s'il y a convergence, la solution ne pouvait être atteinte qu'après un nombre d'itérations. Parmi ces méthodes, nous citons :

II.5.1.1 La méthode de Jacobi

Elle est basée sur la transformation du système $[A][X]=[B]$ en :

$$X_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j^k] / a_{ij} \quad ; \quad (i \neq j), i = 1, \dots, n \quad (\text{II.1})$$

On estime une valeur arbitraire initial X_1^0 pour (K =0), le calcul sera arrêté si :

$|X_i^{(k+1)} - X_i^k| < \varepsilon$, dans le cas d'une précision absolue et $\frac{|X_i^{(k+1)} - X_i^k|}{X_i^k} < \varepsilon$, dans le cas d'une précision relative.

ε : Précision imposée par l'utilisateur.

II.6.1.2 Méthode de Gauss Seidel

La méthode de Gauss Seidel est une méthode itérative de résolution d'un système linéaire (de dimension finie) de la forme $Ax = b$, ce qui signifie qu'elle génère une suite qui converge vers une solution de cette équation, lorsque celle-ci en a une et lorsque des conditions de convergence sont satisfaites (par exemple lorsque A est symétrique définie positive). L'algorithme suppose que la diagonale de A est formée d'éléments non nuls.

Chapitre II : Méthode des volumes finis.

Le principe de cette méthode peut s'étendre à la résolution de systèmes d'équations non linéaires et à l'optimisation, mais avec des conditions d'efficacité moins claires. En optimisation, l'utilité de cette approche dépendra beaucoup de la structure du problème.

Elle consiste à transformer le système $[A][X] = [B]$ en :

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k+1)} \frac{[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^k]}{a_{in}} \quad (\text{II. 2})$$

Avec $i=1, \dots, n$

En donnant aux inconnues X_i^k des valeurs arbitraires initiales X_i^0 (pour $k = 0$)

Le processus sera arrêté si:

$|X_i^{(k+1)} - X_i^k| < \varepsilon$, dans le cas d'une précision absolue et $\frac{|X_i^{(k+1)} - X_i^k|}{X_i^k} < \varepsilon$, dans le cas d'une précision relative.

ε : Précision imposée par l'utilisateur.

II.6 Conclusion

La méthode des volumes finis est une méthode numérique qui permet d'approcher la solution d'une équation différentielle régissant un phénomène donnée.

Nous avons adopté la MVF, puisque qu'elle est facile à concevoir contrairement à la MEF et à implémenter surtout avec des géométries présentant la variation de quelques paramètres physiques à savoir la permittivité et la masse effectives.

CHAPITRE III : Modélisation mathématique

Chapitre III : modélisation mathématique

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation des écoulements laminaires, incompressibles, permanents, visqueux et newtoniens dans une conduite horizontale. Le point de départ de toute simulation numérique d'écoulement repose sur la formulation préalable des principes fondamentaux de la masse et de la quantité de mouvement.

III.2 problématique

Les transferts thermiques entre fluide et paroi revêtent une grande importance dans plusieurs de domaines tels que: la mécanique des fluides, l'énergie solaire, les systèmes d'isolation, ainsi que dans la conception des échangeurs de chaleur. La forme des parois délimitant le domaine d'étude est variable, les parois peuvent être constituées par des conduits cylindriques à section constante. Les études théoriques consistent à décrire l'écoulement et les transferts de chaleur en résolvant numériquement l'équation de la chaleur et on choisira le régime d'écoulement est simple (établie). Dans notre travail, nous étudions les transferts thermiques par convection forcée dans un conduit horizontal parcouru par un fluide à l'ambiante.

III.2.1 Description du phénomène physique à étudier

La figure (III-1) montre canal cylindrique à parois chaudes, de longueur L et de diamètre D , traversée par un écoulement du fluide qui entre avec une température d'entrée T_e .

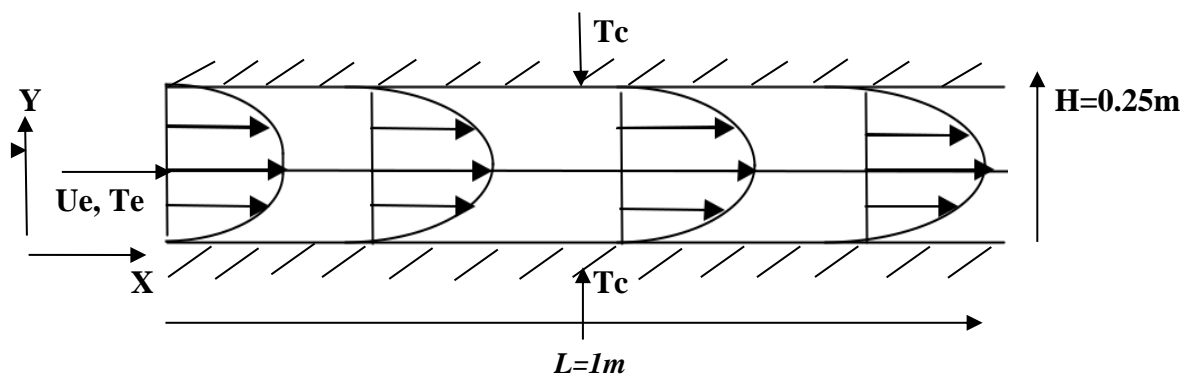


Figure III.11 : description de modèle géométrique à étudier

Les donnée et dimensions :

$H = 0.25\text{m}$; $L = 1\text{m}$; $T_c = 140^\circ\text{c}$; $T_e = 25^\circ\text{c}$; $U_e = 5, 2.5, 0.8 \text{ et } 0.08 \text{ m/s}$; $\alpha = 14.29 \cdot 10^{-6}$.

III.3 Equation de problème

L'application des principes généraux de la physique nous permet d'établir les différentes équations nécessaires à la résolution du problème considéré dans cette étude.

Tant qu'on est sous forme bidimensionnelle, on peut donc utiliser les coordonnées cartésiennes.

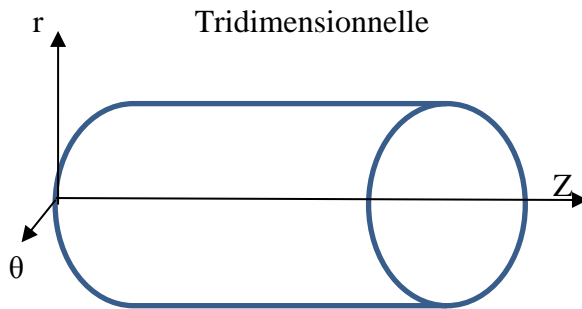


Figure III.4 : Coordonnées cylindrique

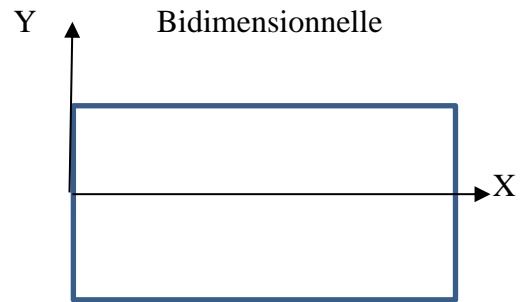


Figure III.5 : Coordonnée cartésiennes

III.3.1 Equation de continuité

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0 \quad (\text{III. 1})$$

Cette équation exprime la conservation de la masse.

Sous forme développée :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (\text{III. 2})$$

u, v et w sont les composantes de la vitesse respectivement suivant les directions x, y et z.

Donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (\text{III. 3})$$

III.3.2 Equation de mouvement

$$\rho \left[\frac{dU_i}{dt} + u_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} \right) \quad (\text{III. 4})$$

Sous forme développée et suivant les différentes directions l'équation de mouvement s'écrit :

Chapitre III : modélisation mathématique

Suivant x :

$$\rho \left[\frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \phi_u \quad (\text{III. 4. a})$$

Suivant y:

$$\rho \left[\frac{dv}{dt} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \phi_v \quad (\text{III. 4. b})$$

Suivant z :

$$\rho \left[\frac{dw}{dt} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \phi_w \quad (\text{III. 4. c})$$

III.3.3 L'équation d'énergie

L'équation d'énergie bidimensionnelle :

$$\rho \text{ cp} \left[\frac{dT}{dt} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \phi_T \quad (\text{III. 5})$$

Hypothèses

- La configuration de l'écoulement est prise bidimensionnelle ($w=0$).
- L'écoulement est permanent (stationnaire) $\frac{d}{dt} = 0$
- L'écoulement est incompressible ($\rho = cst$).
- Sans source (le reste) $\phi_u = \phi_v = \phi_T = 0$
- Vitesse verticale $V = 0$
- Régime établi par rapport à le sens de l'écoulement ($\frac{du}{dx} = 0$).

Donc les équations simplifiées régissant le phénomène d'écoulement seront comme suit:

a) Equation de continuité

En tenant compte des hypothèses précédentes, l'équation de continuité (III.1) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial X_i} (\rho U_i) = 0$$

Sous forme développée:

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \quad (\text{III. 6})$$

Chapitre III : modélisation mathématique

b) Equation de mouvement

En tenant compte des hypothèses précédentes, l'équation (III.4) de mouvement se réduit à:

$$\rho \left[u_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} \right) \quad (\text{III. 7})$$

Sous forme développée :

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{III. 8})$$

$$\rho c_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 9})$$

$$\text{On pose ; } \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 10})$$

On a :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 11})$$

Donc ;

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = c_1 ; \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = c_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = c_1 \Rightarrow \int d \left(\frac{du}{dy} \right) = \int c_1 dy$$

$$\int \frac{du}{dy} = \int c_1 y + c_2 \quad (\text{III. 12})$$

$$\int du = \int c_1 y + c_2 \int dy$$

Donc :

$$u = \frac{c_1}{2} y^2 + c_2 y + c_3 \quad (\text{III. 13})$$

On va mettre ;

$$y = 0$$

$$U_{(0)} = U_{max} = \frac{c_1}{2} (0) + c_2(0) + c_3$$

Chapitre III : modélisation mathématique

On trouve ;

$$U_{(0)} = U_{max} = \frac{3}{2}U_e \Rightarrow c_3 = \frac{3}{2}U_e \quad (III. 14)$$

En posant ; $y = h$ dans (III.13) :

$$U_{(h)} = 0 = \frac{c_1}{2} (h^2) + c_2(h) + \frac{3}{2}U_e$$

D'où :

$$\left[\frac{c_1}{2} h + c_2 \right] = -\frac{3}{2h}U_e \quad (III. 15)$$

Ensuite on met $y = -h$

$$U_{(-h)} = 0 = \frac{c_1}{2} (h^2) - c_2(h) + \frac{3}{2}U_e$$

On trouve :

$$\left[\frac{c_1}{2} h - c_2 \right] = -\frac{3}{2h}U_e$$

On additionnant : (III. 14) + (III. 15)

$$2 \frac{c_1}{2} h = 2 \left(-\frac{3}{2h}U_e \right) \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{h^2}U_e \quad (III. 16)$$

$$\left[\frac{-\frac{3}{h^2}U_e}{2} h - c_2 \right] = -\frac{3}{2h}U_e \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{2h}U_e + \frac{3}{2h}U_e \quad (III. 17)$$

$$c_2 = 0$$

Donc l'équation (III .13) devient ;

$$U_{(y)} = \frac{y^2}{2} \left[-\frac{3}{h^2}U_e \right] + \frac{3}{2}U_e \quad (III. 18)$$

Donc :

$$U_{(y)} = \frac{-3}{2} \left(\frac{y^2}{h^2}U_e \right) + \frac{3}{2}U_e \Rightarrow U_{(y)} = \frac{3}{2}U_e \left[1 - \frac{y^2}{h^2} \right] \quad (III. 19)$$

Chapitre III : modélisation mathématique

❖ Les Condition aux limites

($y = 0$ et $y = h$) et $0 \leq x \leq L$

- Paroi supérieur et inférieure

$$T = T_e ; U = v = 0$$

- $X=0, 0 \leq y \leq H$

$$T = T_e ; U = U_e ; v = 0$$

- $x = L, 0 \leq y \leq H$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_L = 0 \quad ; \text{c-à-d } T_N = T_{N-1}$$

III.4 Discrétisation des équations de base de la Méthode des volumes Finis

Une partie d'un réseau de maillage bidimensionnel est montrée dans la figure (III-3). Pour le point P du réseau, les points E et W (dénnotant l'East et le West) sont ses voisins suivant la direction de (x), alors que N et S (dénnotant le North et le South) sont ses voisins suivant la direction de (y). Le volume de contrôle autour de P est limité par des lignes pointées.

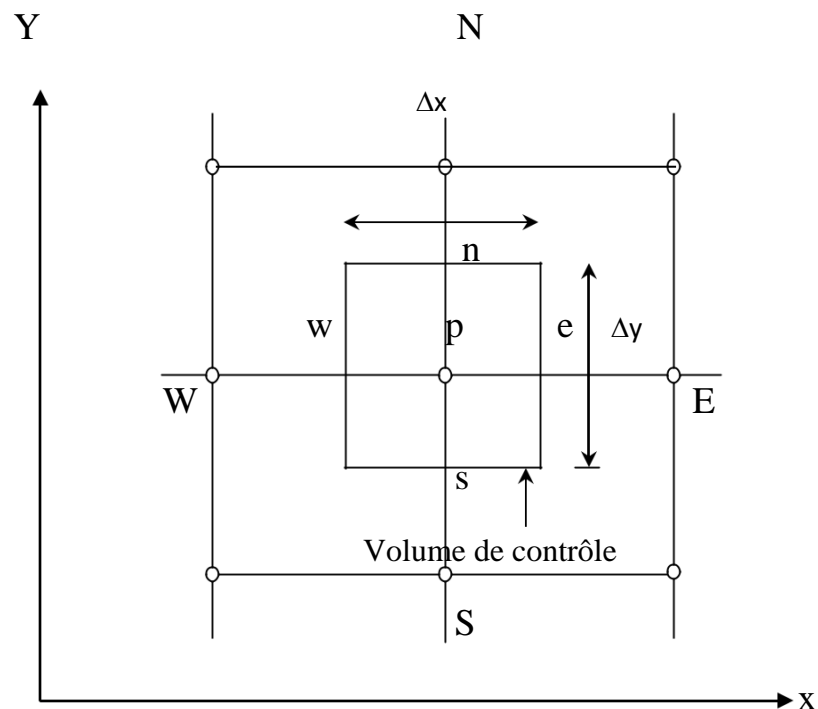


Figure III.6 : Volume de contrôle sur un domaine bidimensionnel

Chapitre III : modélisation mathématique

On définit un domaine de calcul bidimensionnel, par un maillage constitué d'un réseau de points P_{ij} . Autour de chaque point on définit un volume élémentaire (Voir figure (III-4)), sur lequel on fait l'intégration de l'équation(III.10)

L'intégration de l'équation (III.10) sans terme source S , sur le volume de contrôle représenté sur la figure (III-3).

$$\int_v \left[u \frac{\partial T}{\partial x} \right] dv = \int_v \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dv \quad (III. 20)$$

$$\Delta x \Delta y (\Delta z) = 1 \quad ; \quad dv = dx dy dz$$

$$\int_v = \int_w \int_s^e ;$$

$$\int_w \int_s^e \left(u \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx dy = \int_w \int_s^e \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx dy + \int_w \int_s^e \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (III. 21)$$

On met :

$$\text{L'équation(1):} \quad \int_w \int_s^e \left(u \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx dy \quad (III. 21.1)$$

$$\text{L'équation(2):} \quad \int_w \int_s^e \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx dy \quad (III. 21.2)$$

$$\text{L'équation(3):} \quad \int_w \int_s^e \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (III. 21.3)$$

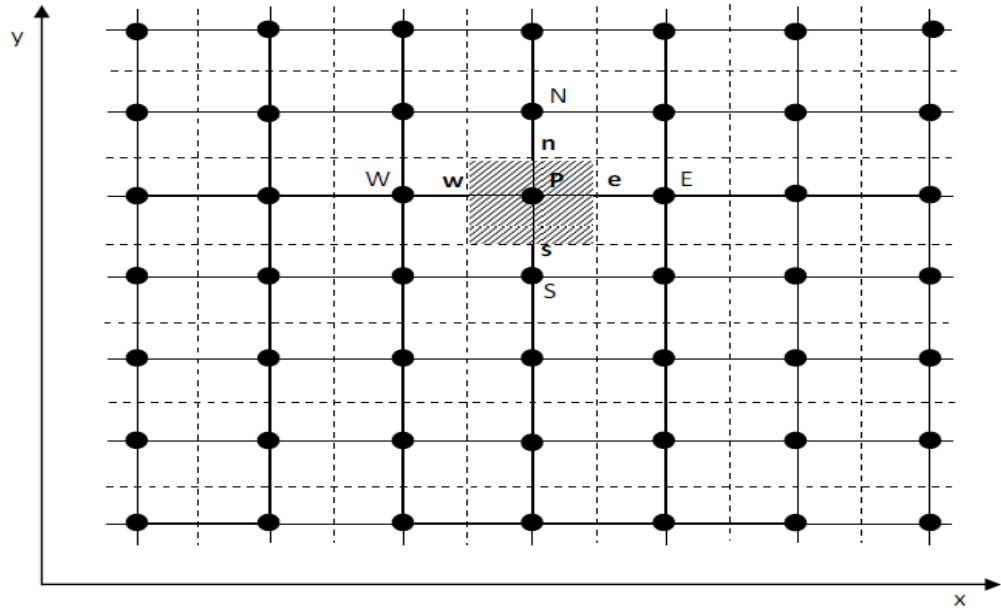


Figure III.7 : Domaine de calcul couvert par un ensemble de volumes

Donc l'équation (1) :

$$\int_w^e \int_s^n u \frac{dt}{dx} dx dy = u \int_w^e \int_s^n (dx) dy = u \int_w^e \left(\int_s^n dy \right) dt \quad (\text{III. 22})$$

$$\Rightarrow u \int_s^n dt = u [y_n - y_s] [T|_w^e]$$

$$u \int_s^n dt = u [y_n - y_s] [T_e - T_w] \quad (\text{III. 23})$$

$$u \int_s^n dt = u \Delta y [T_e - T_w]$$

On a :

$$T_w = \frac{T_{p+} + T_W}{2} ; T_e = \frac{T_{p+} + T_E}{2}$$

$$u \int_s^n dt = \frac{u \Delta y}{2} [T_{p+} + T_E] - [T_{p+} + T_W]$$

Chapitre III : modélisation mathématique

D'où :

$$u|_s^n \int_w^e dt = \frac{u\Delta y}{2} [T_E - T_W] \quad (\text{III. 24})$$

$$\text{L'équation(2):} \quad \int_w^e \int_s^n \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx dy$$

$$\Rightarrow \int_w^e \int_s^n \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy = \alpha \Delta y \int_w^e \partial \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\alpha \Delta y \left[\frac{dT}{dx} \Big|_w^e \right] = \alpha \Delta y \left[\frac{dT}{dx} \Big|_e - \frac{dT}{dx} \Big|_w \right] \quad (\text{III. 25})$$

On a :

$$\frac{dT}{dx} \Big|_e = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{dT}{dx} \Big|_w = \frac{T_P - T_W}{\Delta x}$$

Donc :

$$\alpha \Delta y \left[\frac{dT}{dx} \Big|_w^e \right] = \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} [(T_E - T_P) - (T_P - T_W)]$$

$$\alpha \Delta y \left[\frac{dT}{dx} \Big|_w^e \right] = \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} [T_E + T_W - 2T_P] \quad (\text{III. 26})$$

$$\text{L'équation(3):} \quad \int_w^e \int_s^n \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$\int_w^e \int_s^n \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = \alpha \Delta x \int_s^n \partial \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\alpha \Delta x \left[\frac{dT}{dy} \Big|_s^n \right] = \alpha \Delta x \left[\frac{dT}{dy} \Big|_n - \frac{dT}{dy} \Big|_s \right] \quad (\text{III. 27})$$

On a :

$$\frac{dT}{dy} \Big|_n = \frac{T_N - T_P}{\Delta y} \quad ; \quad \frac{dT}{dy} \Big|_s = \frac{T_P - T_S}{\Delta y}$$

Chapitre III : modélisation mathématique

$$\alpha \Delta x \left[\frac{dT}{dy} \Big|_s^n \right] = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} [T_{N+} T_S - 2T_P] \quad (\text{III. 28})$$

Donc l'équation (III.22) devient :

$$\frac{u\Delta y}{2} [T_E - T_W] = \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} [T_{E+} T_W - 2T_P] + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} [T_{N+} T_S - 2T_P]$$

$$\alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} [T_{E+} T_W - 2T_P] + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} [T_{N+} T_S - 2T_P] + \frac{u\Delta y}{2} [T_W - T_E] = 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} T_P \left[-2\alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} - 2\alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] + T_E \left[\alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{u\Delta y}{2} \right] + T_W \left[\alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{u\Delta y}{2} \right] \\ + T_N \left[\alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] + T_S \left[\alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III. 29})$$

En faisant correspondre :

$$a_P = -2\alpha \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \quad (\text{III. 29.1})$$

$$a_W = \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{u\Delta y}{2} \quad (\text{III. 29.2})$$

$$a_E = \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{u\Delta y}{2} \quad (\text{III. 29.3})$$

$$a_N = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (\text{III. 29.4})$$

$$a_S = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (\text{III. 29.5})$$

D'où :

$$(\text{III. 29}) \Rightarrow a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S$$

Chapitre III : modélisation mathématique

Donc :

$$T_P = [a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S] / a_P \quad (\text{III.30})$$

D'où :

$$\Rightarrow T_{(i,j)} = [a_E T_{(i+1,j)} + a_W T_{(i-1,j)} + a_N T_{(i,j+1)} + a_S T_{(i,j-1)}] / a_P \quad (\text{III.31})$$

La Figure III.6 représente l'organigramme de notre programmation avec Matlab du problème proposé, toujours on utilise le type d'organigramme, puisque avec le logiciel on peut écrire notre code en Matlab avec toutes les données et les conditions aux limites.

On peut expliquer l'organigramme de la Figure III.6 ; comme suivant :

Etape 1 : écrire les donnée directement en programme Matlab ($T_e, T_c, U_e ; H, L, \Delta x, \Delta y, \alpha, ebs$).

Etape 2 : il faut calculer l'équation analytique de la vitesse $U_{i,j}$.

Etape 3 : on doit calculer les coefficients de l'équation d'énergie discrétisée a_E, a_n, a_w, a_s

Etape 4 : Faire une boucle de l'itération.

- Calculer l'équation d'énergie (comme indique dans l'organigramme).

Etape 5 : il faut faire le test de la convergence $|T^\infty - T| \leq ebs$;

- Si le test réalisé donc on atteint les résultats.
- Si non, on retourne à l'étape 4.

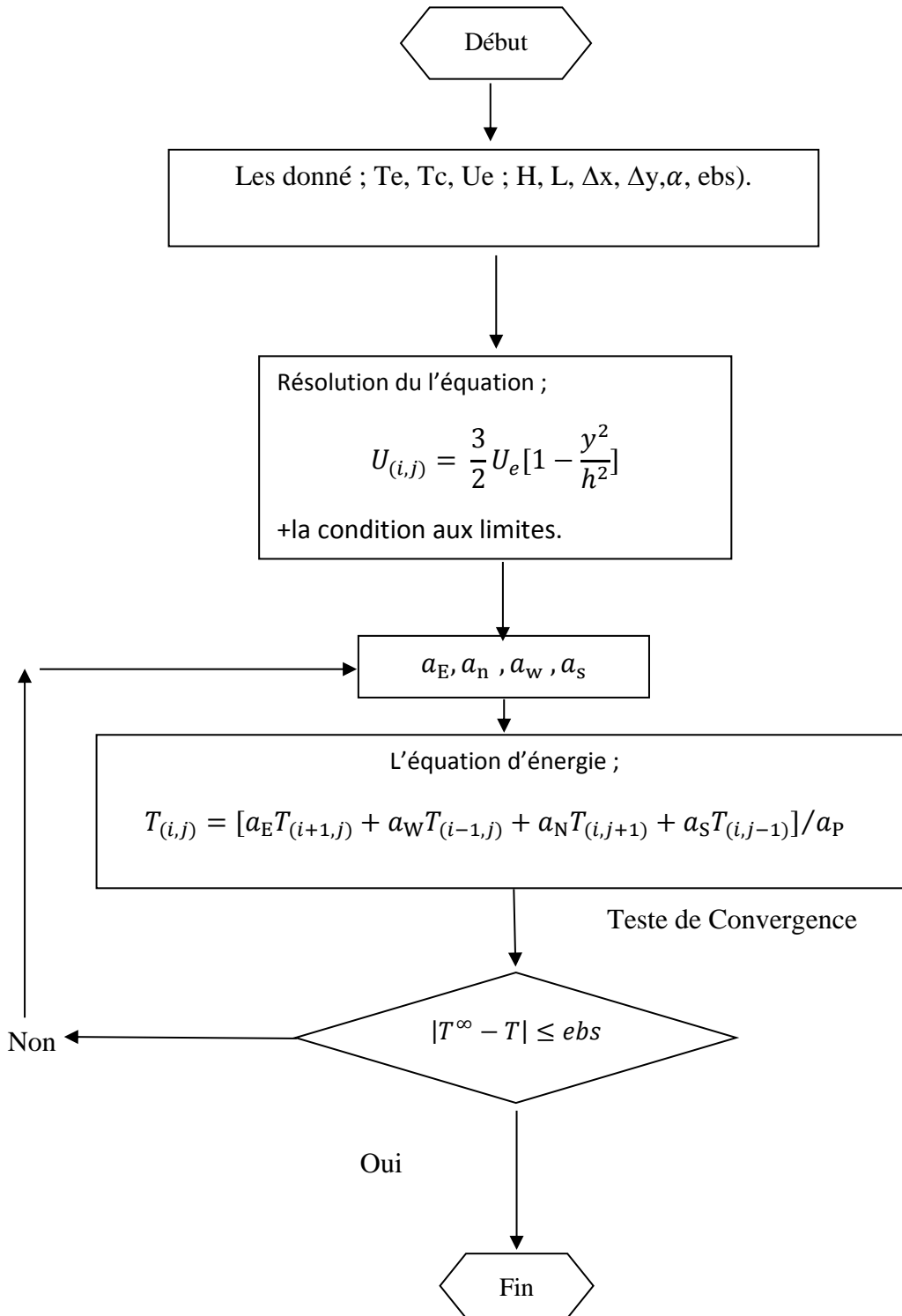


Figure III.8 : Organigramme de notre programme

CHAPITRE IV : Résultats et discussions

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons étudié les transformations thermiques dans un canal cylindrique, avec un changement de vitesse du fluide et facteur géométrique

On a utilisé le programme MATLAB, pour Assurer l'exactitude et la clarté des graphiques.

Commentaires :

La figure IV .1, montre l'évolution numérique de profile de la vitesse $U(x,y)$, on remarque lorsque la vitesse d'entrée U_{moy} augmente, les valeur des vitesse augmentent.

Les figures IV.2, 3,4 et 5, montrent l'évolution thermique dans un canal bidimensionnelle avec différentes vitesse d'entrée moyenne $U_{moy}= 5 ; 2,5 ; 0,8$ et $0,08\text{m/s}$.

Nous avons utilisés plusieurs type de perpétuation graphique en MATLAB, pour éclaircir la distribution de la température dans le canal étudié, Par exemple ; la présentation 3D (figure IV 2a, 3a, 4a, 5a) montrent l'évolution de champ thermique eu fonction x, y ; c-à.-d on peut connaitre et voir la température $T(x, y)$ de chaque point dans le canal étudié.

Par contre la présentation 2D (figure IV 2b, 3b, 4b, 5b) on peut savoir la distribution de la température unidimensionnelle (en fonction de y seulement).En Plus l'avantage la présentation 2D, Nous donne la valeur numérique directe de la température.

Dans les figures IV.2a, 3a, 4a, 5a dont le profil de la température est en fonction de (x, y) , on remarque que variation de la température est presque nulle au milieu de la conduite quand la vitesse d'entrée égale a 5m/s , à $U_{moy}= 2.5$ la Température augment légèrement, quand la vitesse d'entrée diminue, on voie clairement que la température augmente progressivement. C'est le cas dans la figure IV.5a ; la température atteint son maximum juste avant la sortie du fluide ; lorsque la vitesse moyenne égale à 0.08m/s .

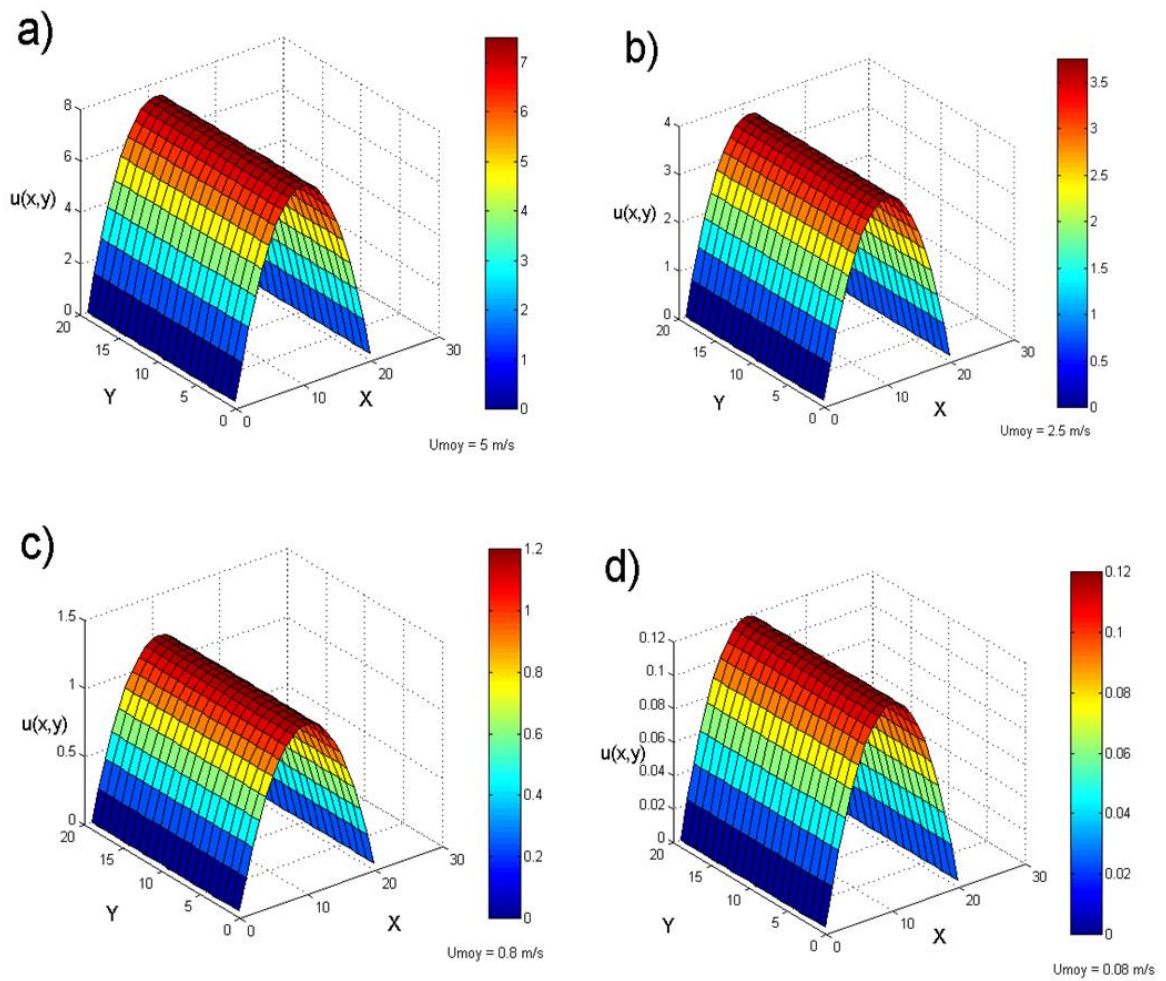


Figure VI.9 : Profile des vitesses évaluées numériquement en fonction y , avec différentes vitesses d'entrée $U_{moy} = 5 ; 2,5 ; 0,8 ; 0,08 \text{ m/s}$.

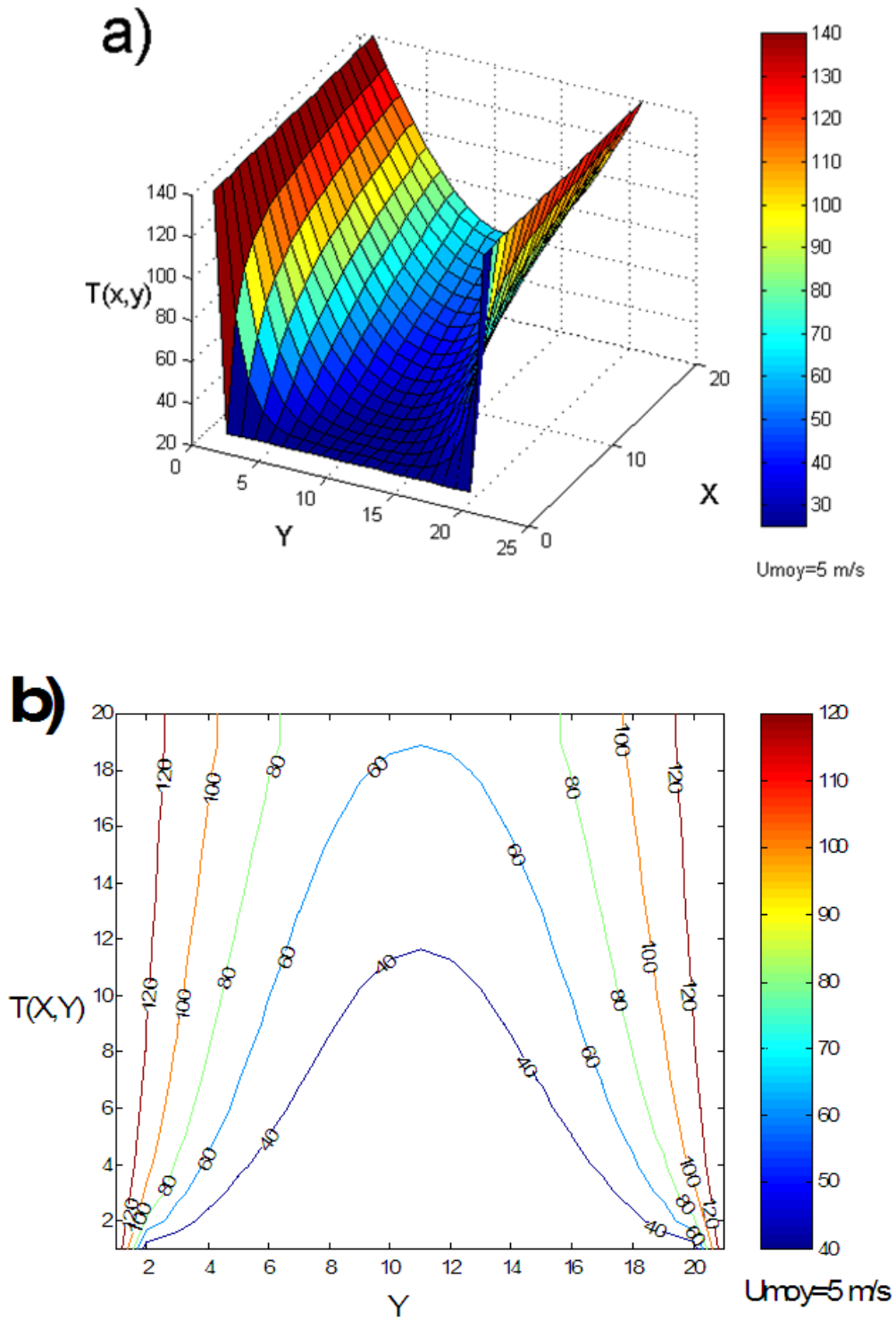


Figure IV.10 : Profile de la température en fonction de x, y a) présentation 3D, b) coupures de température $U_{moy} = 5 \text{ m/s}$

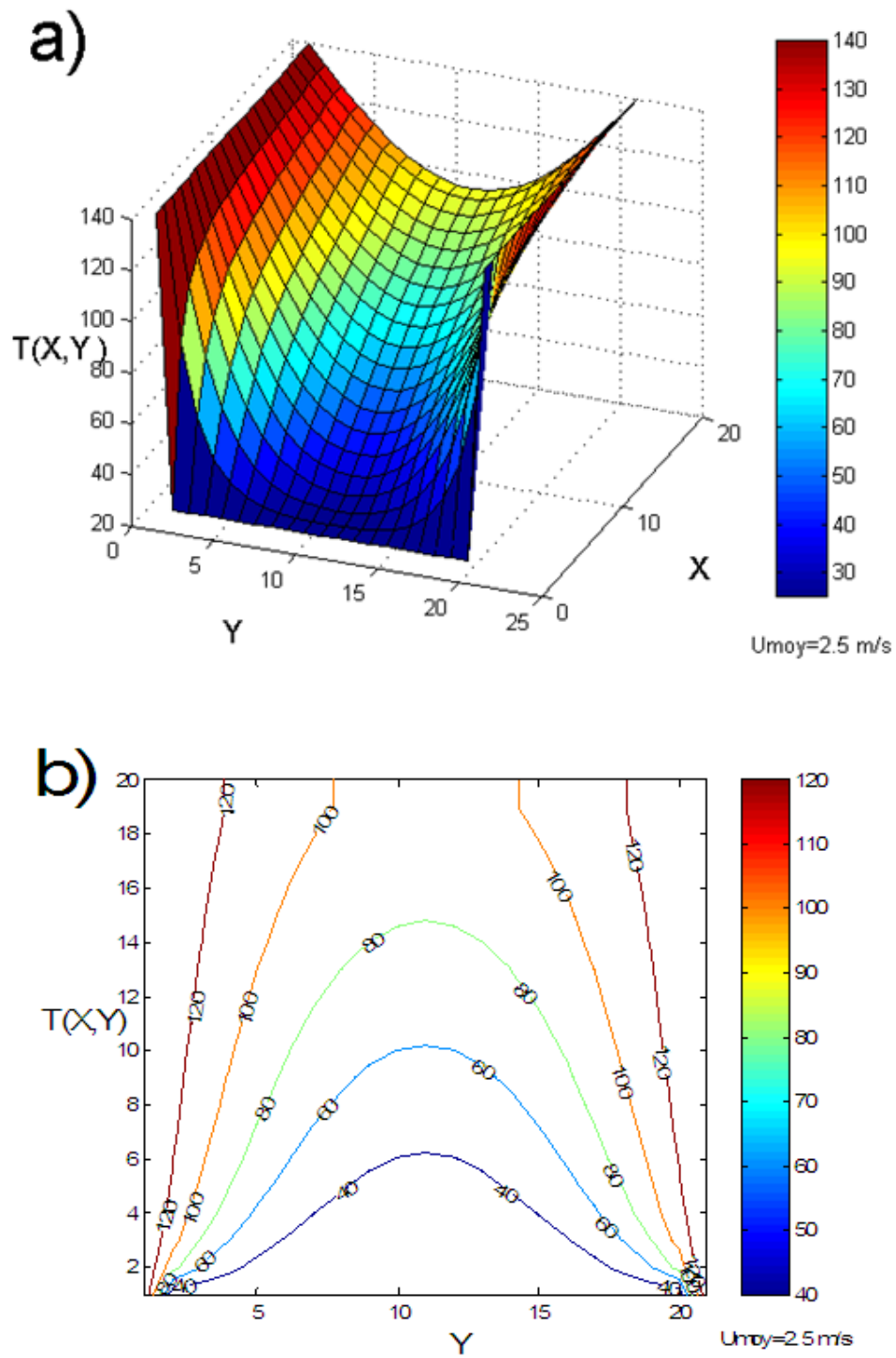
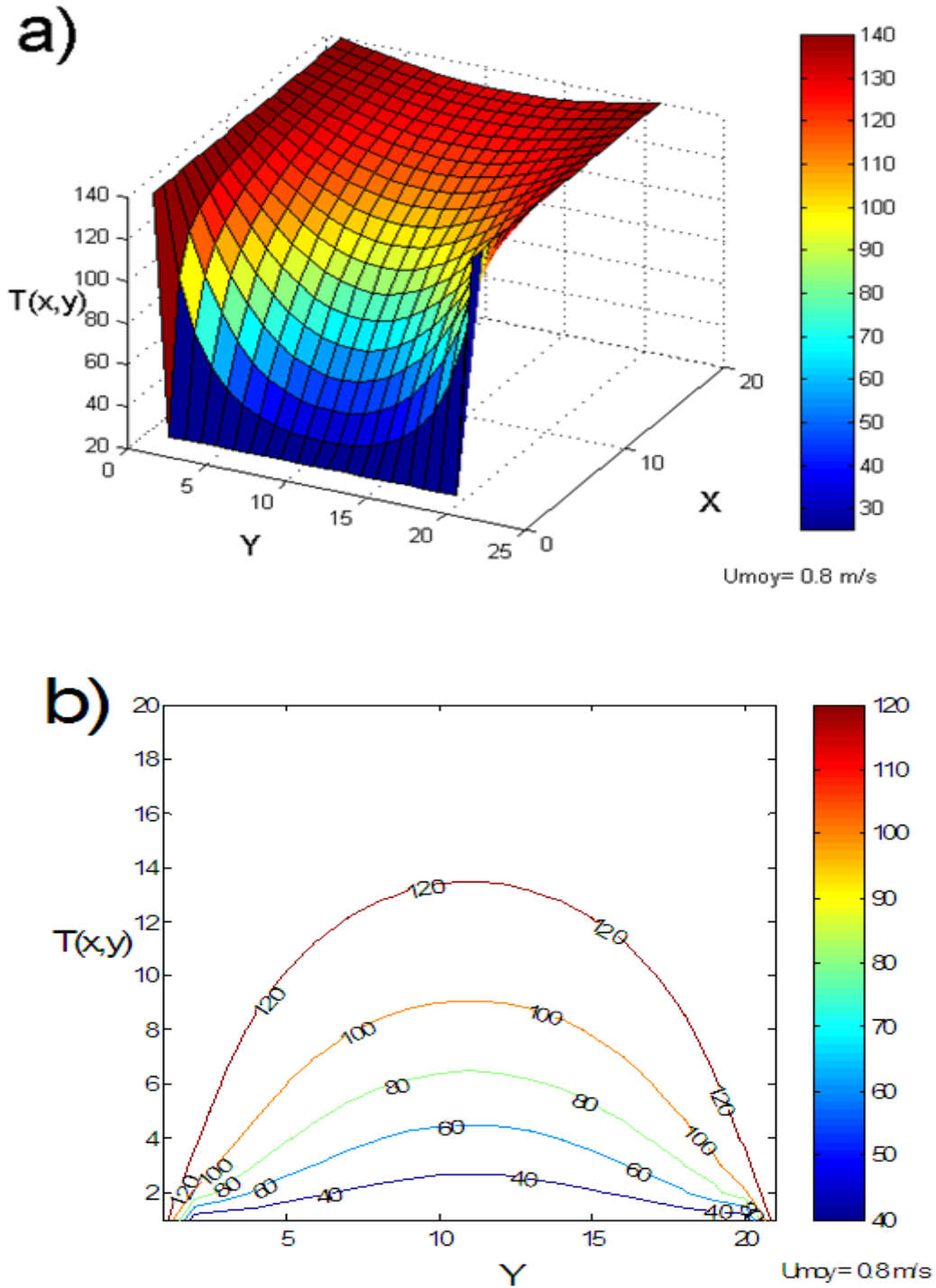


Figure IV.11 : Profile de la température en fonction de x, y a) présentation 3D, b) coupures de température $U_{moy} = 2,5 \text{ m/s}$



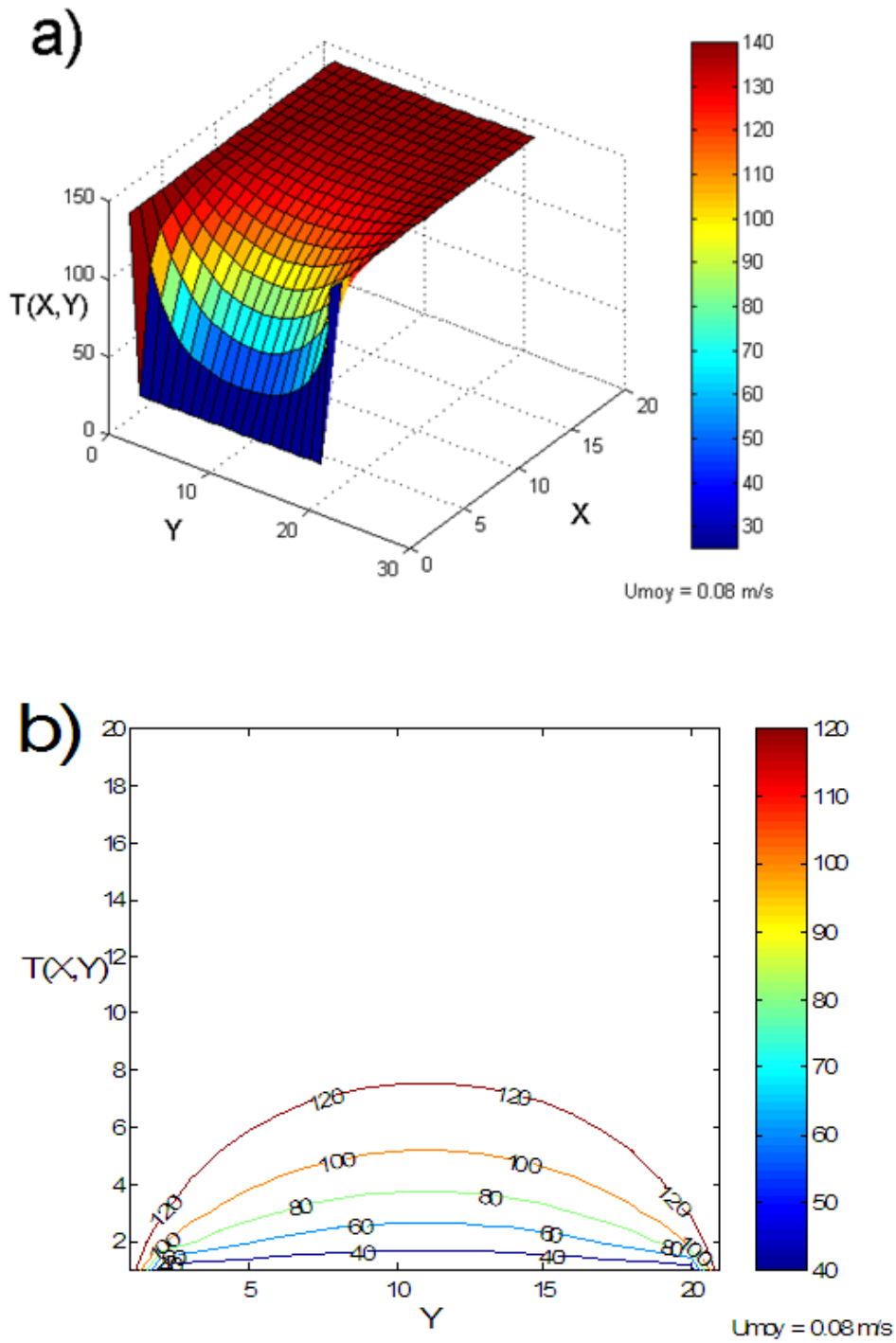


Figure IV.13 : Profile de la température en fonction de x, y a) présentation 3D, b) coupures de température $U_{moy} = 0,08$ m/s

Chapitre IV : Résultats et discussions

Commentaires :

La figure IV.6 représente le profil de la température en fonction de la longueur de la conduite (x) ; bien sur cette évolution est calculée avec différentes position $y= 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ;$ et $0,98$. Par exemple à la figure IV.6, on trace l'évolution de champ thermique à vitesse d'entrée $U_{moy} = 5$ m/s, donc selon cette figure on peut dire que les points qui sont dans le milieu au près de milieu de canal ont des températures de valeur loin que la température des parois ($y=0,5 ; 0,6 ;$ et $0,7$) c.à.d. l'échange thermique est très fiable surtout à vitesses d'entrée $U_{moy} = 5$ m/s.

Par contre dans le figure IV.6, on constate que la température des points de centre du canal presque égale à T_p (température de la paroi extérieur du canal), c.à.d. avec petite vitesse d'entrée $U_{moy} = 0,08$ m/s. on trouve le changé thermique entre les parois chaudes et le fluide caloporteur étudié est important.

La figure IV.7, illustre le profil de la température en fonction aux différentes vitesses d'entrée ; on constate que chaque fois la vitesse d'entrée diminuée la température de fluide augmente, c.à.d. le changé thermique sera important, surtout à la vitesse $U_{moy} = 0,08$ m/s.

Les figures IV.8, et 9 montrent l'évolution et champ thermique à facteur géométrique $H/L=0,25$ et $H/L=0,125$ respectivement. On remarque quand on diminue le facteur géométrique la température augment jusqu'à atteindre les 140°C .

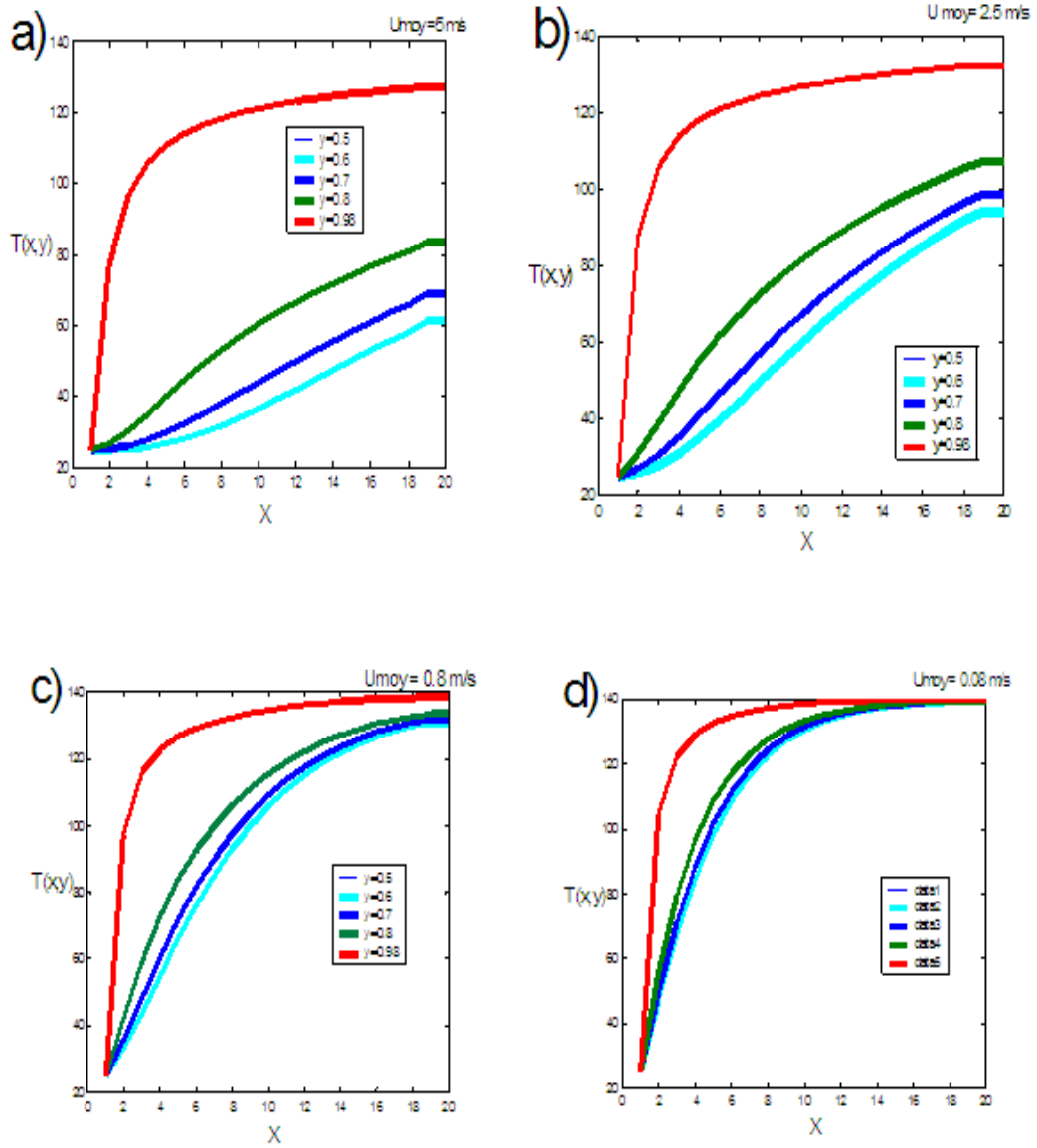


Figure IV.14 : Profile de la température $T(x,y)$ en fonction de longueur de canal (x) ;
aux différent position, $y=0,5$; $0,6$ $0,7$ $0,8$ et $0,98$

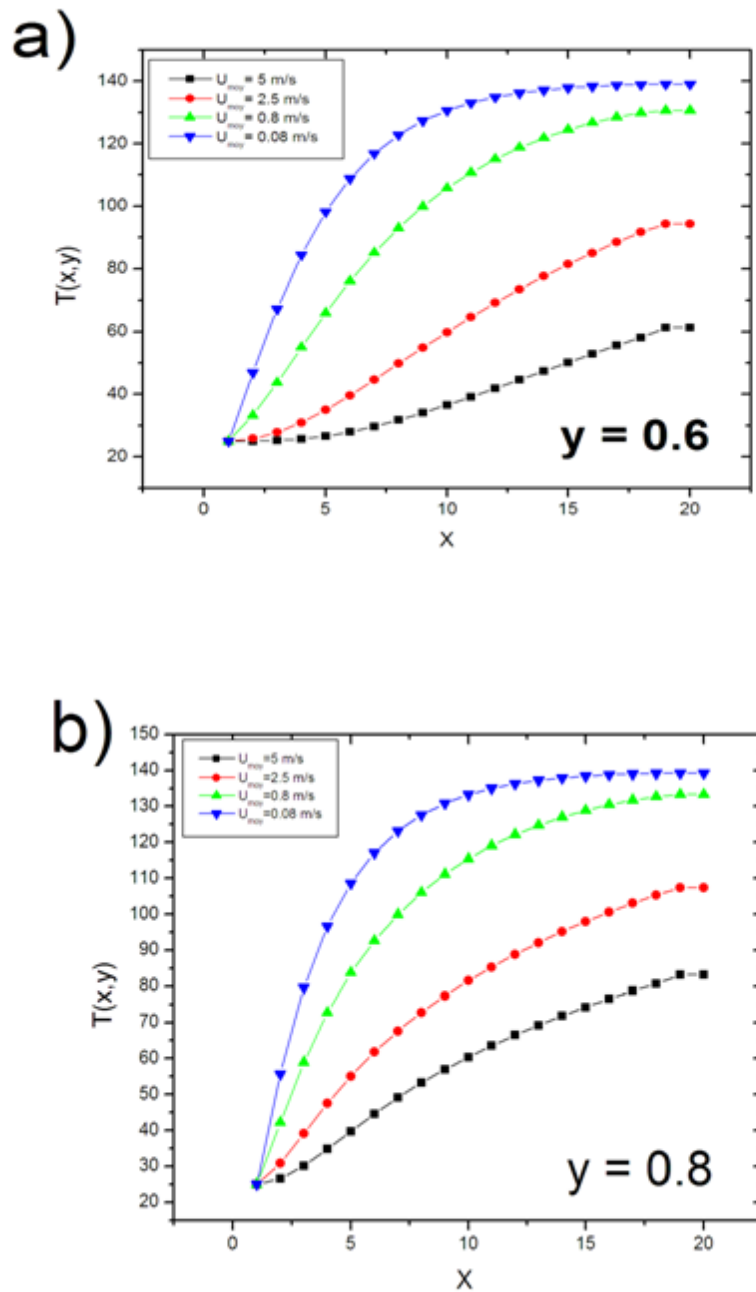


Figure IV.15 : Profile de la température avec la longueur de canal (x) ;
aux différent vitesse d'entrée $U_{moy} = 5 ; 2,5 ; 0,8 ; 0,08$ m/s

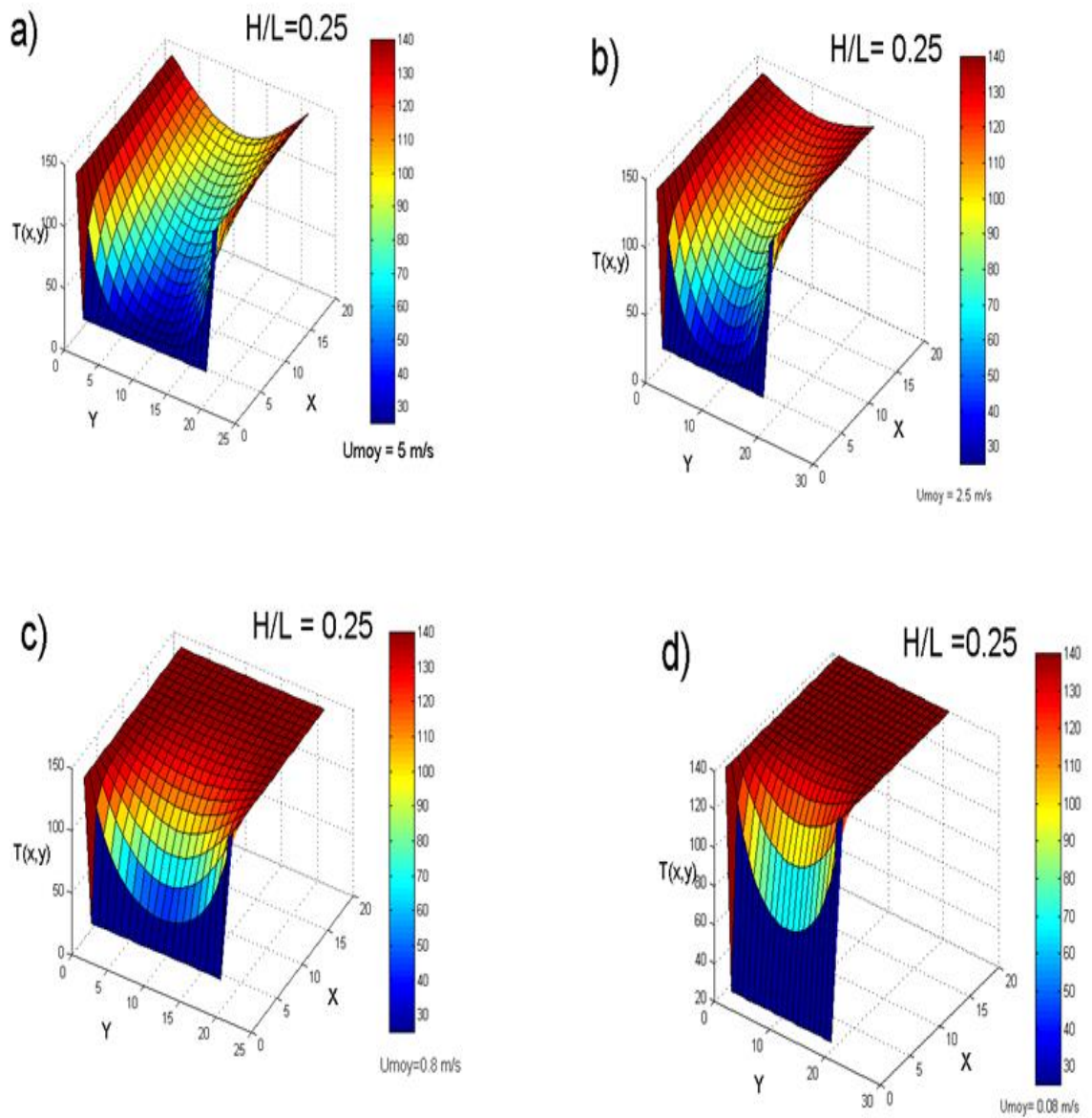


Figure IV.16 : Profil de la température avec le facteur géométrique $H/L = 0,25$

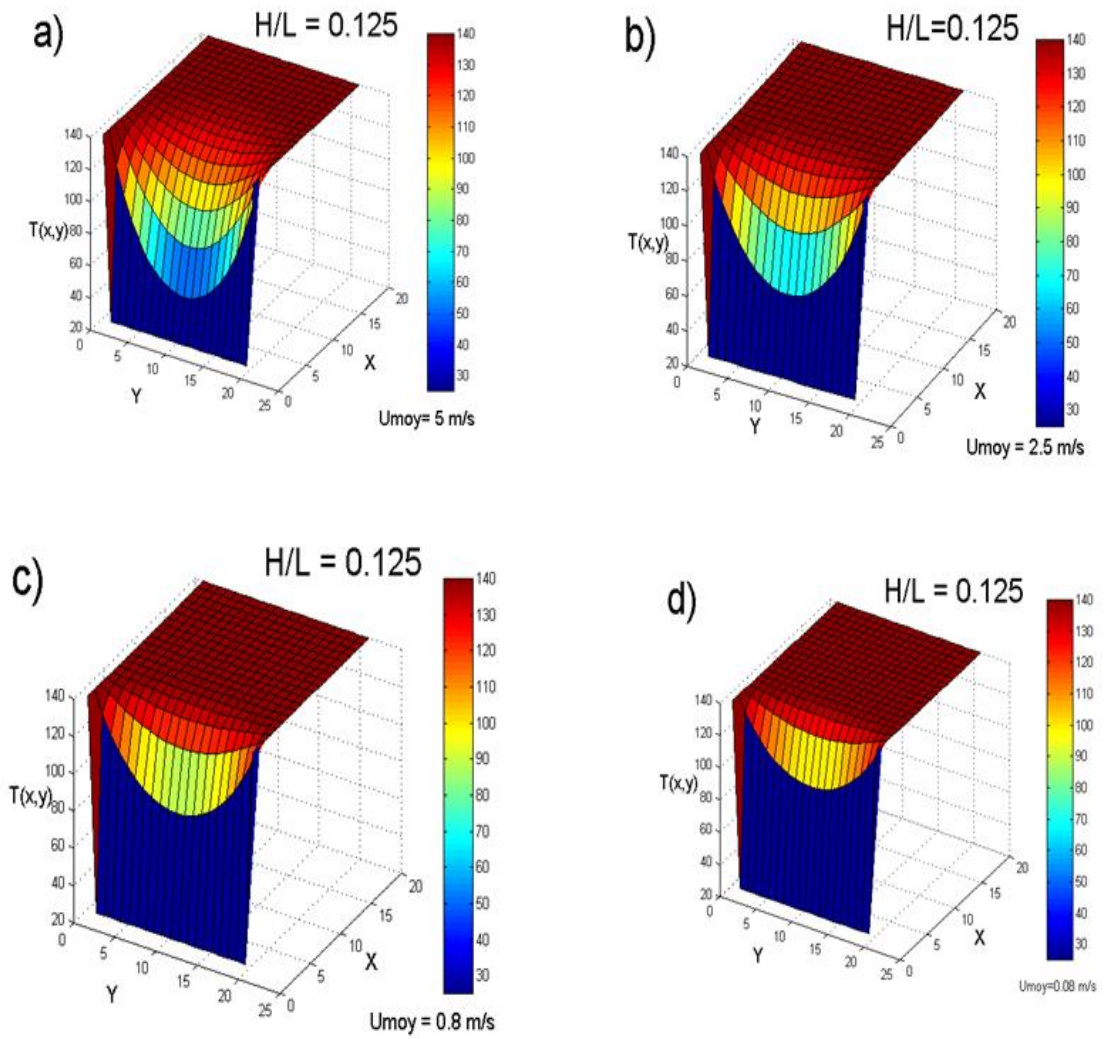


Figure IV.17 : Profile de la température avec le facteur géométrique $H/L = 0,125$

(

Chapitre IV : Résultats et discussions

Commentaires :

Les figure IV, 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; et 13 montrent la comparaison en 3D entre les champs thermique du canal étudié avec les différents facteurs géométrique $H/L = 0,5 ; 0,25 ; 0,125$.

Par exemple selon la figure IV, 10 a, b et c on peut dire que l'échange thermique entre les parois chaudes et le fluide étudié sera plus grand lorsque l'épaisseur du canal est étroit c.à.d. $H/L = 0,125$.

Si on fait une comparaison directe entre la figure IV, 10 a, et c ; alors dans la figure IV.10a, le fluide a une température d'entre presque faible $T_e = 25^\circ\text{C}$ (comparant a $T_c = 140^\circ\text{C}$) et la paroi du canal ont température chaudes $T = 140^\circ\text{C}$; le change thermique au début de canal est presque nul, et un peu dans le centre de canal par contre à facteur $H/L = 0,125$; on voie que l'échange thermique sera important presque au début de canal.

On peut constater la même interprétation selon les figures IV.10, 11,12 et IV.13.

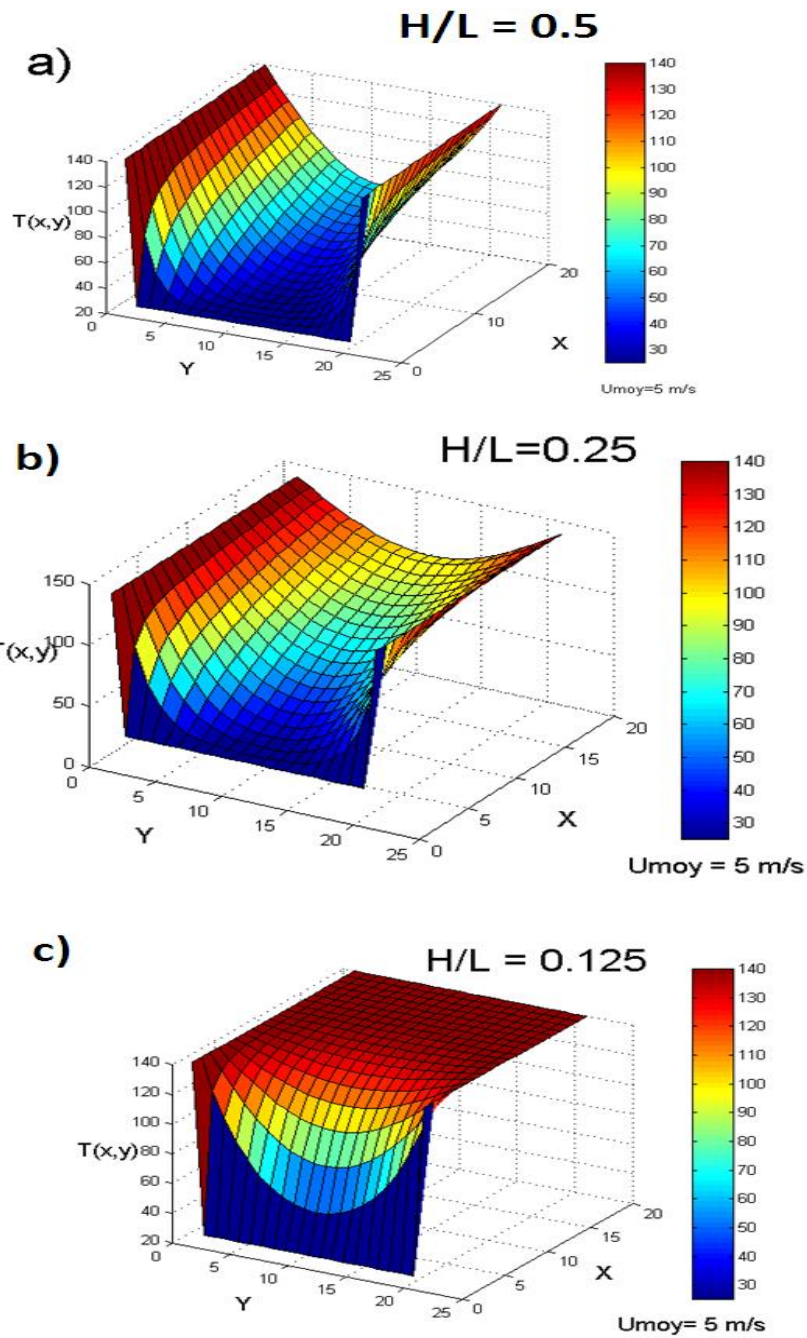


Figure IV.18 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 5$ m/s

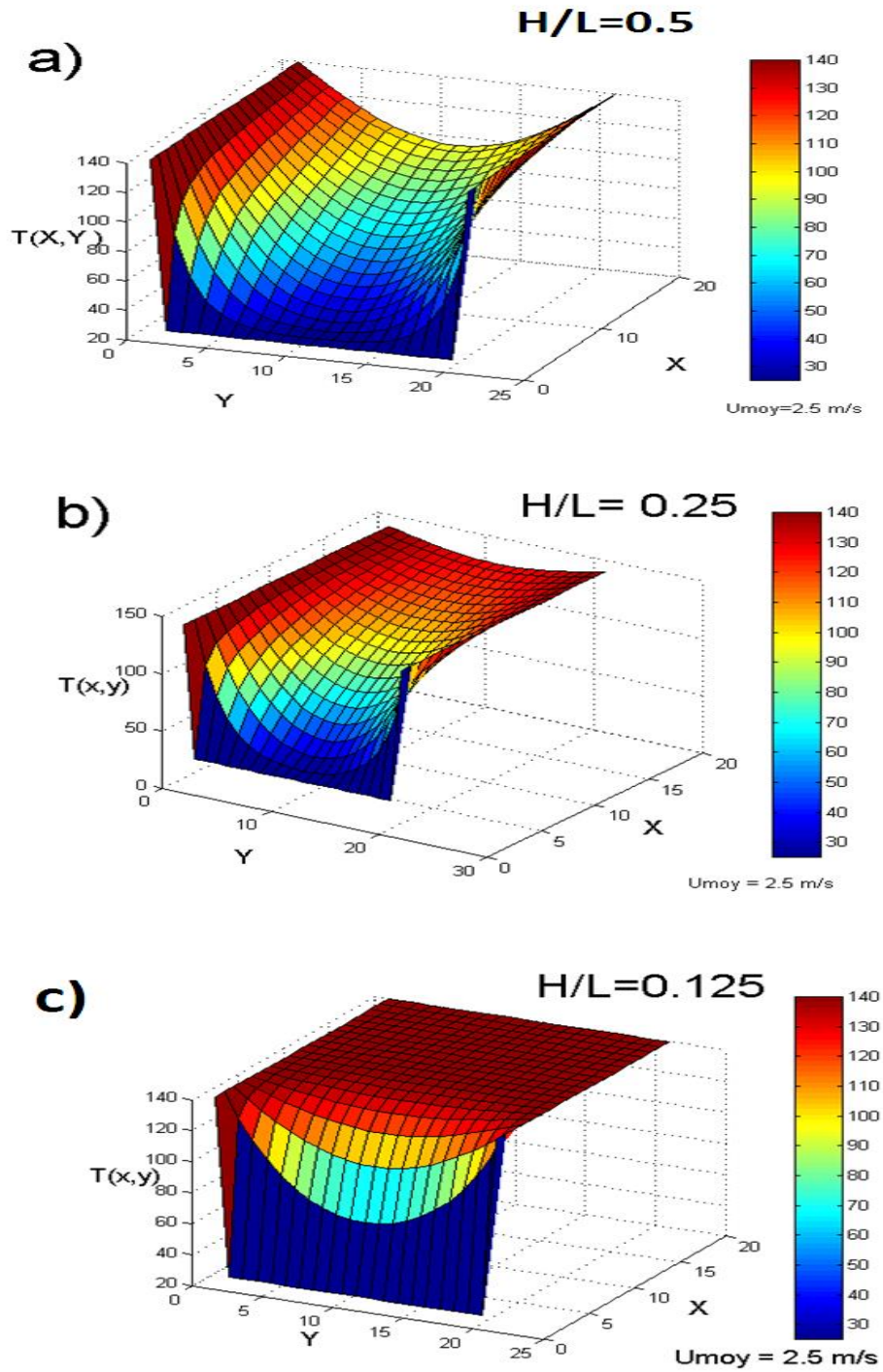


Figure IV.19 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 2,5$ m/s

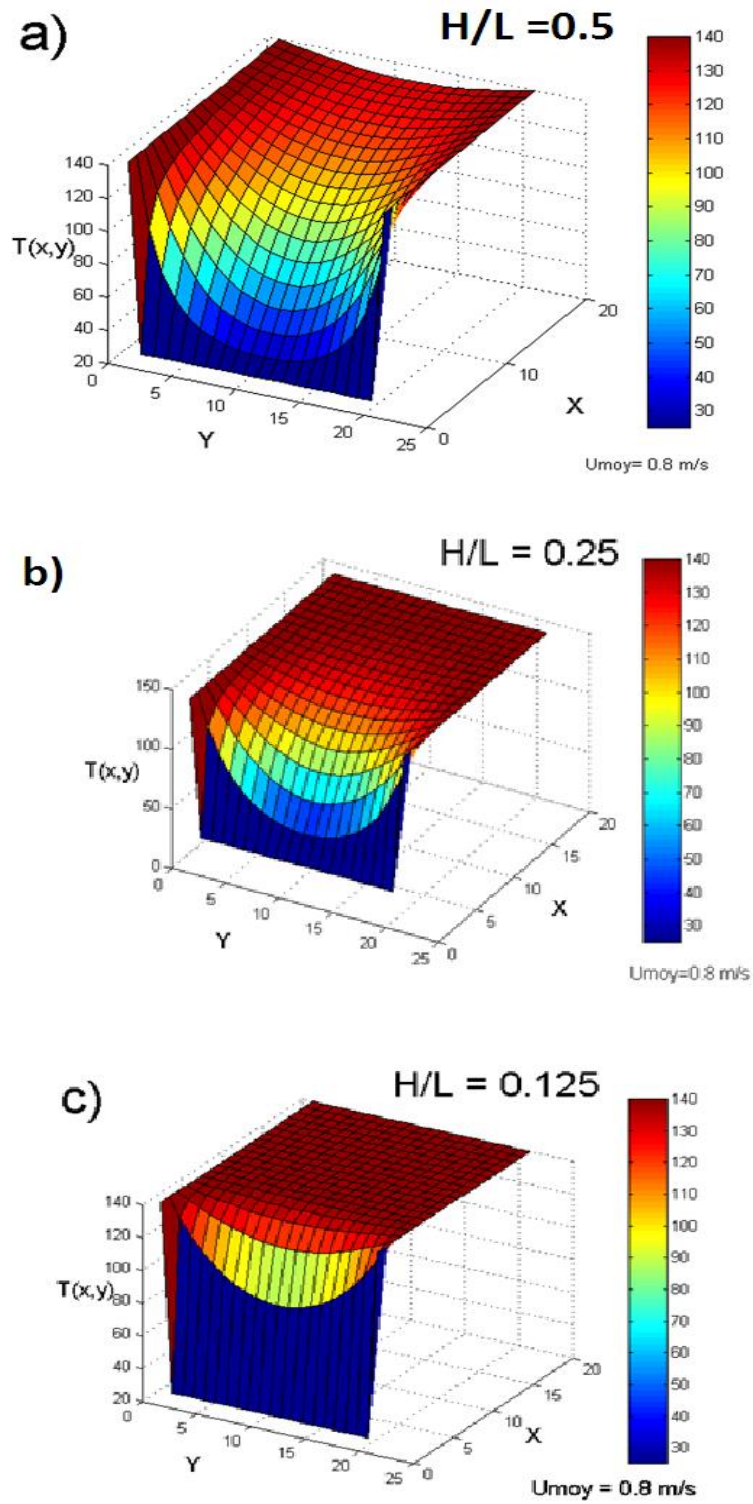


Figure IV.20 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 0,8 \text{ m/s}$

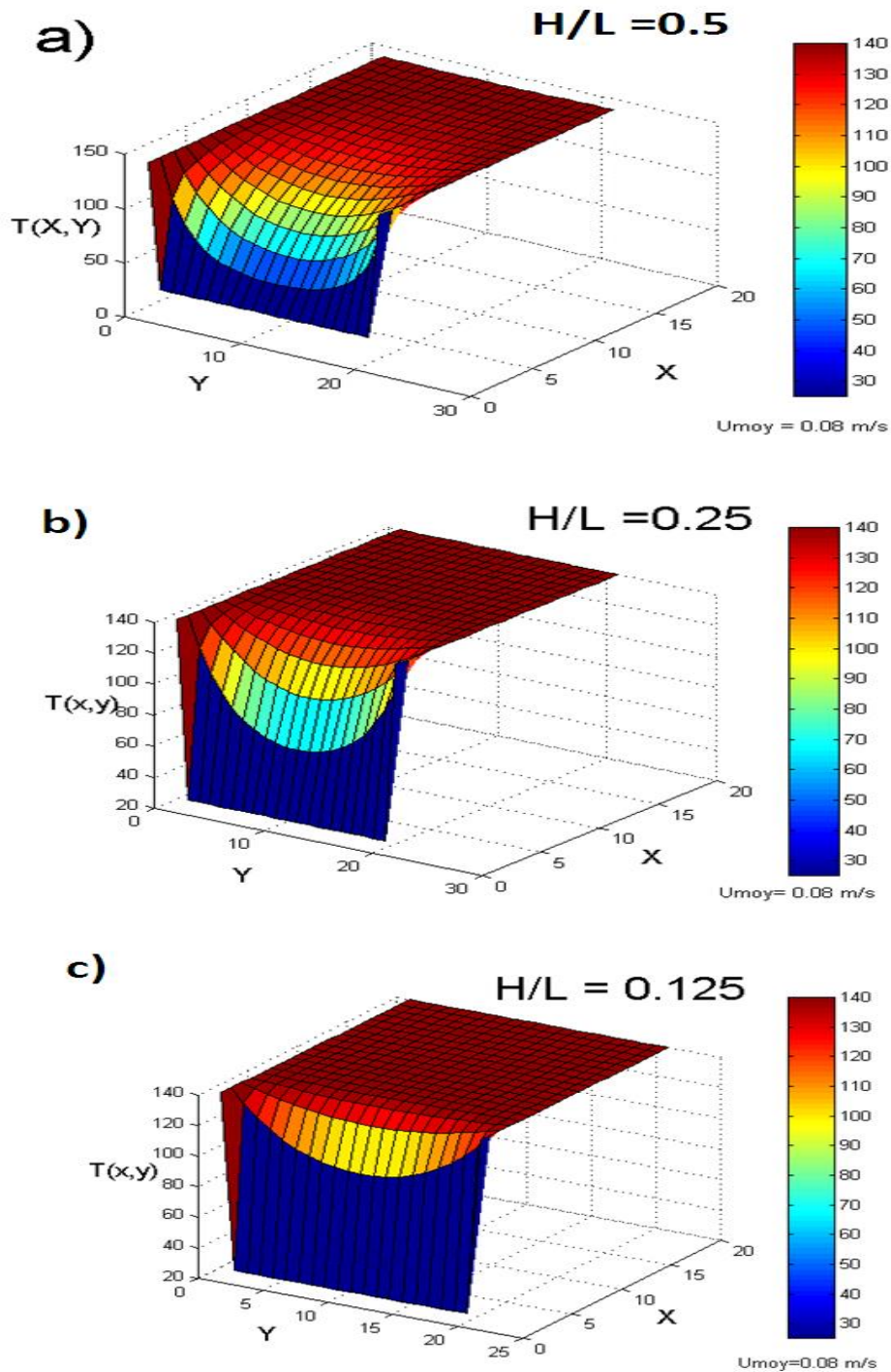


Figure IV.21 : Présentation d'une comparaison entre le champ thermique calculé ou le facteur géométrique H/L ; différent et $U_{moy} = 0,08$ m/s

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.2 Conclusion

Dans ce chapitre on constate que ; pour avoir une température importante dans le canal on doit diminuer la vitesse d'entrée ainsi que l'épaisseur ou autrement dit H/L soit petit.

Conclusion générale

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons modélisé le transfert de chaleur d'un écoulement de fluide dans un canal cylindrique.

Au cours de ce travail, nous avons élaboré un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis pour résoudre l'équation de l'énergie où l'écoulement laminaire, stationnaire dans une conduite cylindrique, dont les parois sont chaudes.

La visualisation de la configuration de transfert thermique de l'écoulement du fluide en régime laminaire à l'intérieur d'une conduite a montré que :

- *Selon la vitesse* : le champ thermique est très faible quand on augmente la vitesse d'entrée et important quand la vitesse du fluide est petite.
- *Selon H/L* : Quand on diminue l'épaisseur de la conduite on constate que la température atteint son maximum.

Lors de cette étude, nous avons évalué l'influence de la vitesse et de l'épaisseur de la conduite sur la température du fluide.

Les perspectives à suggérer est d'étudier l'écoulement en régime non établi en utilisant les équations Navier stokes.

Recherche bibliographique

Recherche bibliographique

- [1] **Bejan A.**, "Heat transfer handbook", Department of Mechanical Engineering and Materials Science Duke University
- [2] **Luna N., Mendez F.**, "Forced convection on a heated horizontal flat plate with finite thermal conductivity in a non-Darcian porous medium", International Journal of thermal sciences, 2004.
- [3] **Christophe PATARIN**, « Simulation numérique du détachement et de l'écoulement d'un jet en sortie d'un injecteur de turbine Pelton », Projet de fin d'études, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2003.
- [4] **C. David Wilcox**, « Turbulence Modeling for CFD » ; DCW Industries, Inc. ; La Cañada, California 91011 ; November 1994.
- [5] **CHALMERS, SWEDEN**, « A study of turbulators geometry to increase the heat transfer coefficient for a flat plate », A report in MTF 112, Convective Heat Transfer, XA805, 2004.
- [6] **Jean.GOSSE** Mécanique des fluides. hb Techniques de l'ingénieur, traité science.
- [7] **DJADEL, Karim** « Anisotropie Laplacien Navier-Stokes, Équations de Singularités Volumes finis, Méthodes de Équations différentielles elliptiques » thèse, Lille 1, 2005
- [8] **J. BLAZEK ET AL**, « Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications », ELSEVIER, First edition, 2001.
- [9] **D. Pastre**, Méthodes numérique 2001/2002, Université René Descartes ,France.
- [10] **SASSANE Nadjette**, "Modélisation du transfert de chaleur lors de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une paroi poreuse ", l'Université 20 Août 55, Skikda.
- [11] **S.V.PATANKAR**, "Numerical heat transfer and fluid flow", McGraw-Hill, (1980).
- [12]: **K. DHINSA, C. BAILEY, K. PERICLEOUS**, "Investigation into the Performance of Turbulence Models for Fluid Flow and Heat Transfer Phenomena in Electronic Applications", 20th IEEE SEMI-THRM Symposium.
- [13] **F. M. White**, *Fluid Mechanics*. 4th edition. WCB McGraw-Hill, New York, NY, 1998.
- [14] **J-P Beaudry, J-C Rolland**, Mécanique Des Fluides Appliquée, 2ème édition, BERGER, Canada
- [15] **G.K. Batchelor**, *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1970.
- [16] **T.Icoz et Y.Jaluria**. (2005) "Numerical simulation of boundary conditions and the onset of instability in natural convection due to protruding thermal sources in an open rectangular channel" *Numerical heat transfer*.
- [17] Cours matlab, www.lkb.upmc.fr, site internet.