رقم الترتيب:..........
رقم التسلسل:..........

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة و تحليل عددي

من إعداد الطالبة : شيماء قسوم

الموضوع

حول الحساب الكسري المحلي وتطبيقاته

نوقشت يوم 2020/09/30 من طرف لجنة المناقشة :

عباسي حسين	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
معمري محمد	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
بوعاد عيسى	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
بن الشيخ عبد الكريم	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السنة الجامعية: 2020/2019

شكر وعرفان

الحمد لله والصلاة والسلام على من لا نبي بعده وعلى آله وصحبه ومن والاه. . . وبعد :

يطيب لي في هذا المقام أن أحمد الله الذي أعانني على إتمام هذا العمل المتواضع، وأتقدم بجزيل الشكر والعرفان إلى أستاذي الفاضل الدكتور "بن الشيخ عبد الكريم" لقبوله الإشراف على مراحل إنجاز هذه المذكرة، وكذا على منحي الكثير من وقته وجهده، والذي لم يبخل علينا بنصائحه وتوجيهاته القيمة لإثراء هذا العمل، وجزاه الله عنا كل خير.

كما لا يفوتني أن أتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير لأعضاء اللجنة المناقشة المكونة من الأستاذ الدكتور "عباسي حسين" والأستاذ الدكتور "معمري محمد" إضافة إلى الأستاذ الدكتور "بوعاد عيسى" لقبولهم تصحيح ومناقشة هذه الأطروحة حتى تخرج في أفضل صورة.

والشكر موصول إلى السيد رئيس القسم "مفلاح مبروك" دون أن أنسى شكر جميع الأساتذة الذين أشرفوا على تدريسي وصقل مهاراتي طيلة مشواري الدراسي، وأخص بالذكر معلمي بالإبتدائي السيد "عبد الرزاق *(أحمد)* بن دلالي".

✍ شيماء

شكر وعرفان

إهـــداء

إلى من أدين لهم بالفضل العظيم بعد الله عز وجل:

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة، ونصح الأمة، إلى نبي الرحمة

سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار، إلى من علمني العطاء بدون انتظار

إلى "أبي" العزيز أطال الله في عمره

إلى نبع الحنان ورمز التضحية والعطاء، إلى من أنارت بوجودها أيامي

إلى "أمي" الغالية متعها الله بالصحة والعافية

إلى من كانوا سندا لي وقاسموني أفراحي أحزاني

إلى "إخوتي" و"أخواتي" حفظهم الله ورعاهم وسدد بالخير خطاهم

إلى قلوب جميلة سكنت قلبي وأنارت دربي برفقتها

إلى "صديقاتي" الغاليات

إليكم أهدي هذا العمل المتواضع

شيماء

دليل الترميزات

الرمز	مدلوله
${}_{x_0}D_x^{\alpha}$	مؤثر الإشتقاق الكسري المحلي
$D_{y,-\sigma}^{\alpha}$	مؤثر الإشتقاق لـ Riemann-Liouville
d^{α}	مؤثر التفاضل الكسري المحلي
${}_{x_0}I_x^{(\alpha)}$	مؤثر التكامل الكسري المحلي
C_{α}	الإستمرار الكسري المحلي
$\Gamma(n)$	الدالة غاما
$E_{\alpha}(x^{\alpha})$	دالة Mittag-Leffler
F_{α}	مؤثر تحويل فورييه
F_{α}^{-1}	مؤثر تحويل فورييه العكسي
L_{α}	مؤثر تحويل لابلاس
L_{α}^{-1}	مؤثر تحويل لابلاس العكسي
LFS_{α}	تحويل سومودو الكسري المحلي
LFS_{α}^{-1}	تحويل سومودو الكسري المحلي العكسي
$\mathcal{C}$	مجموعة كانتور
$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعية
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{Z}$	مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية
i	عدد تخيلي
$Re(s)$	الجزء الحقيقي للعدد المركب s
S_G^{α}	دالة درجية معرفة على الفراكتال G
γ^{α}	دالة الكتلة

قائمة الأشكال

الفهرس

مقدمة

حساب التفاضل والتكامل الكسري المحلي هو أحد فروع التحليل الرياضياتي التي تم استخدامها لنمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية.

ولقد حظي في السنوات الأخيرة بالكثير من الإهتمام وتم التحقيق فيه بشكل مكثف من قبل العديد من الباحثين [1]، حيث لعب دورا مهما في وصف عدة ظواهر من العالم الحقيقي وفي مجالات مختلفة [2, 29]، مثل الميكانيك، الفيزياء، النانوتكنولوجيا، الهندسة الحيوية، معالجة الإشارات، الإقتصاد ونظرية التحكم وغيرها من المجالات الهندسية الأخرى [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

يتم تعريف الحساب الكسري المحلي على الـ Fractals أو الكسيريات، وهي عبارة عن نمط هندسي يتكرر على مستويات تتزايد في الصغر مؤدية إلى أشكال مشابهة للشكل الأم، والتي اقترحها Mandelbrot في سبعينيات القرن الماضي [10, 11]، وكان أول من اقترح هذا المفهوم هو Kolwankar و Gangal، وذلك إستنادا إلى تعريف المشتق الكسري لـ Riemann-Liouville [12, 13].

ومن أهم الدراسات والأبحاث التي تمت في هذا المجال في السنوات الأخيرة نجد:

نظرية Maxwell على مجموعات Cantor التي تمت مناقشتها في [14]، كما تم مناقشة مبدأ عدم اليقين لـ Heisenberg ضمن سلاسل فوربيه الكسرية المحلية في [15]، وفي [16] تم تطوير طريقة سلاسل Neumann جديدة لحل مجموعة من معادلات Fredholm و Volterra التكاملية الكسرية المحلية، كما تم دراسة معادلة Helmhotz ومعادلة الإنتشار باستعمال مؤثر الإشتقاق الكسري المحلي المعرف على مجموعة كانتور في [17]، في [18] تم استعمال تحويل المويجات المتقطع بواسطة مؤثرات كسرية محلية وتطبيقه في معالجة الإشارات على مجموعة كانتور، كما تم إجراء مقارنة بين طريقة التكرار الكسري المحلي وطريقة الفصل أو التجزئة التي يمكن تطبيقها على معادلة الموجة في [19]، وفي [20] تم استعمال طريقة التكرار الكسري المحلي المتباين لحل معادلات الموجة ومعادلات الإنتشار الجزئي، كما استعملت طريقة التحويل الكسري العقدي للتحقق من معادلات النقل في الوسط المسامي الكسيري في [21].

وتكمن أهمية هذا الموضوع في قدرته على التعامل بشكل دقيق مع الدوال غير القابلة للتفاضل مقارنة مع الحساب الكلاسيكي الذي عجز عن ذلك، ومنه كان الحساب الكسري المحلي من أفضل المرشحين لحل هذه المشكلة [22].

ومن هنا جاء اختيارنا لهذا الموضوع بالذات لدراسته.

إن الهدف من هذه المذكرة، هو إعطاء أهم المفاهيم والتعاريف المتعلقة بالتفاضل والتكامل الكسري المحلي وبعض تطبيقاته.

كتبت هذه المذكرة باللغة العربية ببرنامج *LATEX* ، وتتألف من مقدمة عامة وثلاث فصول وقائمة مراجع رتبت حسب الإستعمال، وفيما يلي تفاصيل ما تشتمل عليه الفصول الثلاث:

الفصل الأول

هو فصل تمهيدي بعنوان دراسة مرجعية ومفاهيم أساسية، قدمنا فيه تعريف للتابع غاما ودالة Mittag-Leffler ، كما رأينا تعريف الـ Fractals وتعريف مجموعة Cantor التي ستتم التطبيقات عليها وبعض التعاريف الأخرى، ثم تطرقنا إلى تعريف المشتق والتفاضل الكسري المحلي وبعض خواصه والنظريات المتعلقة به، ثم التكامل الكسري المحلي وبعض الخواص والمبرهنات الخاصة به.

الفصل الثاني

تضمن دراسة مختصرة للمعادلات التفاضلية، حيث تطرقنا فيه إلى تعريف التفاضل الكسري المحلي التام، المشتق الجزئي الكسري المحلي، الإشتقاق الكسري المحلي من رتب عليا، والمشتق الكسري المحلي للدوال المركبة، ثم تناولنا سلاسل وتحويل فوربيه، تحويل لابلاس وتحويل سومودو وتحويلاتها العكسية وبعض خواصها كل ذلك بالمفهوم الكسري المحلي.

الفصل الأخير

والذي كان عبارة عن تطبيق لما رأيناه في الفصلين السابقين، حيث قمنا بتحليل معادلة الموجة الكسورية باستعمال سلاسل فورييه الكسرية المحلية، كما طبقنا هذه الأخيرة، تحويل فورييه الكسري المحلي، وتحويل لابلاس الكسري المحلي لحل بعض المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، وفي الأخير استعملنا تحويل سومودو الكسري المحلي لحل بعض مسائل القيمة الإبتدائية ، حيث كانت كل هذه التطبيقات على مجموعة كانتور.

الفصل الأول
دراسة مرجعية ومفاهيم أساسية

قائمة المحتويـــــات

1.1 لمحة في الحساب الكسري المحلي

لقد تم طرح مفهوم الحساب الكسري المحلي لأول مرة من قبل "Kolwankar" و "Gangal" ، وذلك بناءً على تعريف المشتق الكسري لـ "Riemann-Liouvill"، ويتم تعريفه على الـ Fractals (نمط هندسي متكرر)، التي اقترحها العالم "Mandelbrot" في السبعينيات من القرن الماضي، والذي وضع لها مجموعة من المسلمات التي تختص بها دون غيرها من الأشكال الهندسية، حيث تم تطبيقه في عدة ميادين خاصة الفيزياء والهندسة، وعليه سنتطرق في هذا الفصل إلى تعريف بعض الدوال الخاصة بالحساب الكسري المحلي، ونشير إلى أنه توجد عدة تعاريف للإشتقاق والتكامل الكسري المحلي سنذكر أهمها.

1.1.1 دوال خاصة

1.1.1.1 الدالة غاما:

تعريف 1.1.1 [23, 24]
الدالة غاما من أحد الدوال الأساسية للحساب الكسري المحلي ، وتسمى دالة غاما لأولر، وهي عبارة عن تعميم للدالة عاملي $(n!)$، حيث تعطى بدلالة التكامل بالشكل التالي :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,\ x \in \mathbb{R}.$$

خواص 1.1.1

❶ خاصية التتابع :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),\ \forall n \neq 0$$

❷ خاصية التسلسل : إذا كان n عددا صحيحا موجبا فان :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

❸ خاصية التكرار :

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)$$

❹

$$\Gamma(1-n)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$$

❺

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2^{(1-n)}(n-1)!\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

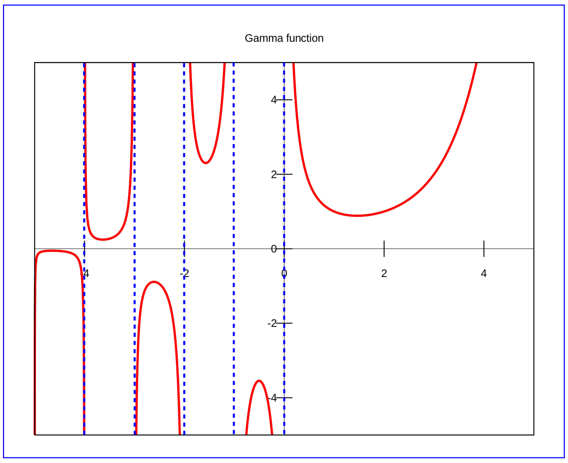
❻ $\Gamma(n)$ دالة متناقصة من أجل $0 < n \leq 1$.

ملاحظات 1.1.1

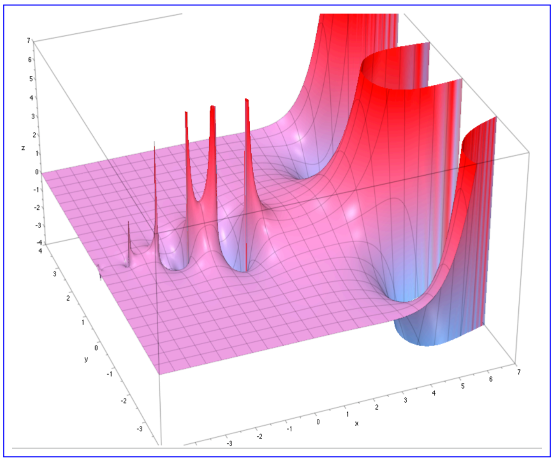
* $\Gamma(0) = +\infty$ * $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ * $\Gamma(1) = 1$

مثال 1.1.1

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{2-1}e^{-x}dx\\ &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}dx\\ &= \lim_{M\to\infty}\Big[-xe^{-x}-e^{-x}\Big]_0^M\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{-M}{e^M}-\frac{1}{e^M}+0+e^0\right)=1\end{aligned}$$



شكل 1.1: منحنى بياني للدالة غاما -$2D$-



شكل 2.1: تمثيل بياني للدالة غاما -$3D$-

2.1.1.1 دالة *Mittag-Leffler*:

تعريف 2.1.1 [25, 26]
دالة *Mittag-Leffler* هي أيضا من الدوال الأساسية في الحساب الكسري المحلي، والمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية، وهي عبارة عن تعميم للدالة الأسية (e^x)، حيث تعطى بدلالة المجموع بالشكل التالي:

① - في حالة وسيط واحد:

$$E_\alpha(x^\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)},\ x\in\mathbb{R},0<\alpha\leq 1.$$

② - في حالة وسيطين:

$$E_\alpha(\beta,x^\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(\beta+k\alpha)},\ \beta,x\in\mathbb{R},0<\alpha\leq 1.$$

نتائج 1.1.1 [26]

-1 $$E_{1,1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

-2 $$E_{1,2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^x-1}{x}$$

-3 $$E_{1,3}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

وبصفة عامة: $E_{1,m}(x)=\frac{1}{x^{m-1}}\left[e^x-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{x^k}{k!}\right]$.

خواص 2.1.1 [25]

❶ $E_\alpha(x^\alpha)E_\alpha(y^\alpha)=E_\alpha(x^\alpha+y^\alpha)$

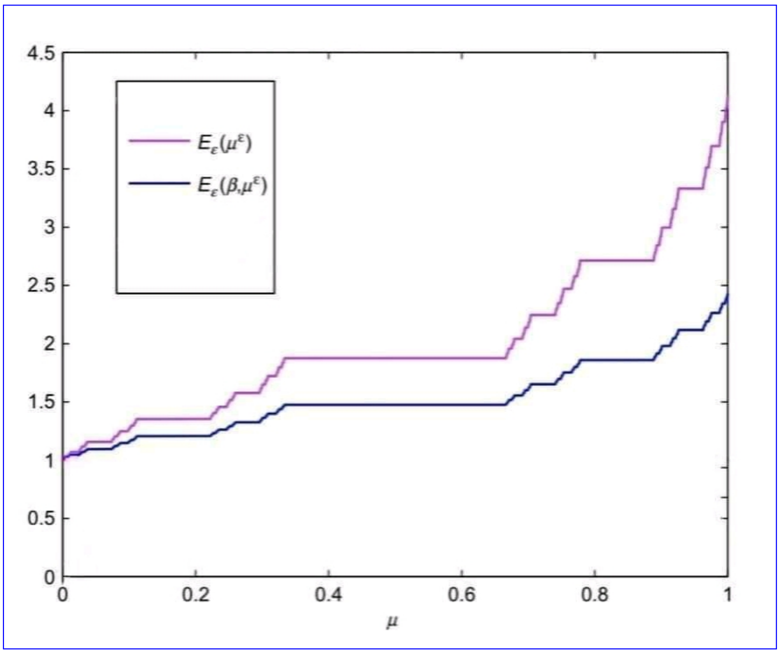
❷ $E_\alpha(x^\alpha)E_\alpha(-y^\alpha)=E_\alpha(x^\alpha-y^\alpha)$

❸ $E_\alpha(x^\alpha)E_\alpha(i^\alpha y^\alpha)=E_\alpha(x^\alpha+i^\alpha y^\alpha)$ ، i عدد تخيلي.

❹ $E_\alpha(i^\alpha x^\alpha)E_\alpha(i^\alpha y^\alpha)=E_\alpha(i^\alpha x^\alpha+i^\alpha y^\alpha)$

❺ $[E_\alpha(x^\alpha+i^\alpha y^\alpha)]^n=E_\alpha(n^\alpha x^\alpha+n^\alpha i^\alpha y^\alpha)$ ، n عدد طبيعي.

❻ $E_\alpha(i^\alpha x^\alpha)=\cos_\alpha(x^\alpha)+i^\alpha\sin_\alpha(x^\alpha)$



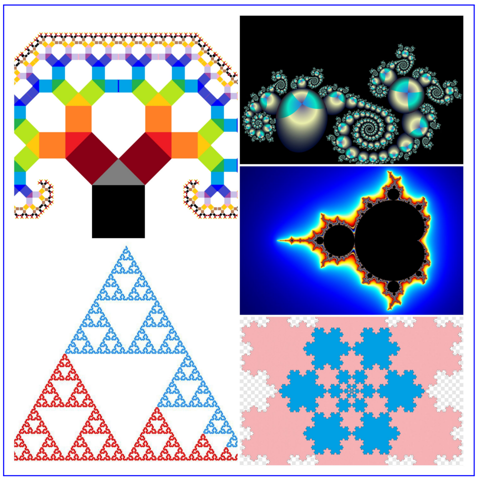
شكل 3.1: منحنى بياني لدالة *Mittag-Leffler* من أجل $\varepsilon=\ln 2/\ln 3$ و $\beta=2$

2.1.1 تعاريف عامة

1.2.1.1 تعريف الفراكتال:

تأتي كلمة *Fractal* (الكسيرية) من الفعل اللاتيني "*Franger*" والذي يعني يفتت أو يكسر، حيث أطلقها العالم البولندي "*Benoit Mandelbrot*" لتصف بعض الظواهر الطبيعية والأشكال معقدة التركيب، مثل الأشرطة الساحلية، الجبال، الغيوم والأشجار...، وهي عبارة عن نمط هندسي يتكرر على مقاييس تتزايد في الصغر (البعد الفراكتالي) مؤدية إلى أشكال وأسطح غير منتظمة لايمكن تمثيلها من خلال خصائص الهندسة الأقليدية، وذلك بتكرار معادلات غير خطية، ومن أشهر الفراكتالات نجد:
مجموعة *Cantor*، مجموعة *Mandelbrot*، مجموعة *Julia*، شجرة *Pythagoras*، مثلث *Sierpinski*، منحنى *Koch*...[11].

شكل 4.1: نماذج لفراكتالات طبيعية



شكل 5.1: نماذج لفراكتالات رياضية

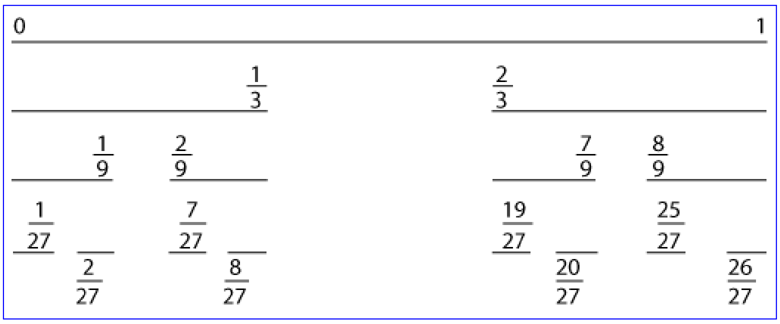
2.2.1.1 تعريف مجموعة *Cantor*:

مجموعة كانتور اخترعها عالم الرياضيات الإيرلندي "*Henry Smith*"، وكتب عنها وفصلها عالم الرياضيات الألماني "*George Cantor*"، ونحصل عليها كما يلي:[27]
نأخذ المجال المغلق $[0,1]$ ولنقم بتقسيمه إلى ثلاثة أجزاء متساوية، ثم نزيل منه المجال المفتوح $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$، نكرر نفس العملية مع المجالين المتبقيين، أي نقسم كل مجال إلى ثلاث مجالات متساوية ثم نزيل المجال الأوسط أي $]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[$ و $]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[$، نكرر هذه العملية عدد غير منته من المرات، ومنه نحصل على مجموعة كانتور القياسية، وهي مجموعة غير منتهية من النقاط حيث عدد المجالات المحذوفة في كل خطوة وأطوالها عبارة عن متتالية هندسية مجموعها 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1$$

إذن مجموعة كانتور معرفة بالشكل التالي:

$$\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$$



شكل 6.1: رسم توضيحي لمجموعة كانتور

خواص 3.1.1

❶ مجموعة كانتور غير قابلة للعد.

❷ قياس مجموعة كانتور معدوم.

❸ مجموعة كانتور لاتملك نقاط داخلية أو نقاط معزولة.

❹ مجموعة كانتور محدودة ومغلقة ومنه فهي مجموعة متراصة.

تعريف 3.1.1 [28][الإستمرار الكسري المحلي]
إذا كانت الدالة $f(x)$ تحقق:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^{\alpha} \tag{1.1}$$

حيث: $|x - x_0| < \delta$ من أجل: $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_+^*$، فإنه نقول أن $f(x)$ مستمرة كسريا محليا عند النقطة $x = x_0$ ونكتب: $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

إذا حققت الدالة $f(x)$ الشرط (1.1) من أجل: $x \in (a,b)$، فإنه نقول أن $f(x)$ مستمرة كسريا محليا على المجال (a,b) ونكتب: $f(x) \in C_{\alpha}(a,b)$.

تعريف 4.1.1 [29, 30]
يقترح كل من "*Kolwankar*" و"*Gangal*" الصيغة التالية لتعريف الإشتقاق الكسري المحلي:

$${}_{x_0}D_x^{\alpha} g(x) = \frac{d^{\alpha} g(x)}{dx^{\alpha}} \Big|_{x=x_0} =: \lim_{x \to x_0} \frac{d^{\alpha}\big(g(x) - g(x_0)\big)}{d(x-x_0)^{\alpha}}, 0 < \alpha \leq 1. \tag{2.1}$$

حيث: α أس "*Hölder*" لدالة معرفة على مجموعة كانتور.

كما يعرفان التكامل الكسري المحلي بالصيغة التالية:

$${}_aI_b^{(\alpha)} g(x) = \lim_{M \to \infty} \sum_{i=0}^{M-1} g(x_i) \frac{d^{-\alpha} \mathbf{1}_{dx_i}(x)}{d(x_{i+1} - x_i)} \quad , i = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{3.1}$$

حيث: $\mathbf{1}_{dx_i}(x)$ هي دالة الوحدة المعرفة على المجال $[x_i, x_{i+1}]$.

تعريف 5.1.1 [30]
استعمل "Jumarie" تعميم سلاسل تايلور لتعريف المشتق الكسري المحلي والمعطى بالصيغة التالية:

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha}g(x)=\frac{d^{\alpha}g(x)}{dx^{\alpha}}\Big|_{x=x_0}=:\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{\alpha}\left[g(x)-g(x_0)\right]}{h^{\alpha}}. \tag{4.1}$$

حيث:

$$\Delta^{\alpha}g(x)=\sum_{t=0}^{\infty}(-\mathbf{1})^t\binom{\alpha}{t}g\Big(x+(\alpha-t)h\Big),\ 0<\alpha\leq 1.$$

و:

$$\binom{\alpha}{t}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+t)\Gamma(1+\alpha-t)}.$$

كما يعرف التكامل الكسري المحلي كالآتي:

$$ {}_0I_x^{(\alpha)}g(x)=\int_0^x g(t)(dt)^{\alpha}=:\alpha\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}g(t)dt,\ 0<\alpha\leq 1. \tag{5.1}$$

ملاحظة:

هذا الترميز للإشتقاق والتكامل الكسري المحلي يتعامل مع الدوال غير القابلة للتفاضل، ويسمى بالحساب الكسري المعدل.

تعريف 6.1.1 [30]
يقدم كل من "Parvate" و"Gangal" التعريف التالي للمشتق الكسري المحلي:

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha}g(x)=\frac{d^{\alpha}g(x)}{dx^{\alpha}}\Big|_{x=x_0}=:G-\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{S_G^{\alpha}(x)-S_G^{\alpha}(x_0)}, \tag{6.1}$$

حيث: $G-\lim\limits_{x\to x_0}$ هي ترميز لنهاية $g(x)$ من خلال نقاط مجموعة الفراكتال G.

و: $S_G^{\alpha}(x)-S_G^{\alpha}(x_0)=\gamma^{\alpha}\left[G,x_0,x\right]=\dfrac{(x-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$

كما يعرفان التكامل الكسري المحلي بالصيغة التالية:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)}g(x)=\int_a^b g(x)d_G^{\alpha}x=\sum_{j=0}^{M-1}g(x_j)\Big(S_G^{\alpha}(x_{j+1})-S_G^{\alpha}(x_j)\Big),\ 0<\alpha\leq 1. \tag{7.1}$$

تعريف 7.1.1 [30]
اقترح كل من "Adda" و"Cresson" التعريف التالي للمشتق الكسري المحلي:

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha}f(x)=\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\Big|_{x=x_0}=:G-\lim_{x\to x_0^{\sigma}}D_{y,-\sigma}^{\alpha}\left[\sigma\big(f-f(x_0)\big)(x)\right], \tag{8.1}$$

حيث: $\sigma=\pm$ و $D_{y,-\sigma}^{\alpha}$ مؤثر الإشتقاق لـ "Riemann-Liouville" والذي يعطى بالشكل التالي:

$$D_{y,-\sigma}^{\alpha}f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(y)dy,\ 0<\alpha<1$$

تعريف 8.1.1 [30]
يقترح كل من "*Gao*"،"*Yang*" و"*Kang*" من خلال التعاريف السابقة هذا الترميز للمشتق الكسري المحلي:

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha} g(x) = \frac{d^{\alpha} g(x)}{dx^{\alpha}} \Big|_{x=x_0} =: \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta^{\alpha}\left[g(x) - g(x_0)\right]}{(x - x_0)^{\alpha}} \tag{9.1} $$

حيث: $\Delta^{\alpha}\left[g(x) - g(x_0)\right] \cong \Gamma(1+\alpha)\left[g(x) - g(x_0)\right]$

كما عرفوا التكامل الكسري المحلي كالآتي:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)} g(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_a^b g(t)(dt)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{M-1} g(t_i)(\Delta t_i)^{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1, $$

حيث: $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$; $\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_i\}$ من أجل $0 < \alpha \leq 1$.

و: $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, M-1$; $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_M = b$ تجزئة للمجال $[a, b]$.

2.1 المشتق الكسري المحلي

تعريف 1.2.1 [30]
لتكن $g(x) \in C_{\alpha}[a, b]$ حيث: $0 < \alpha \leq 1$، $\delta > 0$ و $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$، إذا كانت النهاية:

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha} g(x) =: \lim_{x \to x_0} \frac{\Gamma(1+\alpha)\left[g(x) - g(x_0)\right]}{(x - x_0)^{\alpha}} \tag{10.1} $$

موجودة ومنتهية نقول أن $g(x)$ تقبل مشتق كسري محلي من الرتبة α عند النقطة $x = x_0$ ونكتب:

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha} g(x) = \frac{d^{\alpha} g(x)}{dx^{\alpha}} \Big|_{x=x_0} = g^{(\alpha)}(x_0). $$

1.2.1 المشتق الكسري المحلي من اليمين-اليسار

تعريف 2.2.1 [30]
لتكن $g(x) \in C_{\alpha}[a, b]$ حيث: $0 < \alpha \leq 1$، $\delta > 0$ و $x \in (x_0, x_0 + \delta)$، إذا كانت النهاية:

$$ {}_{x_0^+}D_x^{\alpha} g(x) =: \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Gamma(1+\alpha)\left[g(x) - g(x_0^+)\right]}{(x - x_0^+)^{\alpha}}, \tag{11.1} $$

موجودة ومنتهية نقول أن $g(x)$ تقبل مشتق كسري محلي من اليمين من الرتبة α عند النقطة $x = x_0$ ونكتب:

$$ {}_{x_0^+}D_x^{\alpha} g(x) = \frac{d^{\alpha} g(x)}{dx^{\alpha}} \Big|_{x=x_0^+} = g^{(\alpha)}(x_0^+). $$

تعريف 3.2.1 [30]
لتكن $g(x) \in C_{\alpha}[a,b]$ حيث: $0 < \alpha \leq 1$، $\delta > 0$ و $x \in (x_0 - \delta, x_0)$، إذا كانت النهاية:

$$_{x_0^-}D_x^{\alpha} g(x) =: \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Gamma(1+\alpha)\big[g(x) - g(x_0^-)\big]}{(x - x_0^-)^{\alpha}}, \tag{12.1}$$

موجودة ومنتهية نقول أن $g(x)$ تقبل مشتق كسري محلي من اليسار من الرتبة α عند النقطة $x = x_0$ ونكتب:

$$_{x_0^-}D_x^{\alpha} g(x) = \frac{d^{\alpha} g(x)}{dx^{\alpha}} \underset{x=x_0^-}{|} = g^{(\alpha)}(x_0^-).$$

قضية 1.2.1 [30]
إذا كان $_{x_0^-}D_x^{\alpha} g(x)$ و $_{x_0^+}D_x^{\alpha} g(x)$ موجودين وكان $_{x_0^-}D_x^{\alpha} g(x) =_{x_0^+} D_x^{\alpha} g(x)$ فإن:

$$_{x_0^-}D_x^{\alpha} g(x) =_{x_0^+} D_x^{\alpha} g(x) =_{x_0} D_x^{\alpha} g(x). \tag{13.1}$$

2.2.1 تزايد دالة

تعريف 4.2.1 [30]
تزايد دالة $g(x)$ معرف كما يلي:

$$\Delta^{\alpha} g(x) = g^{(\alpha)}(x)(\Delta x)^{\alpha} + \chi(\Delta x)^{\alpha}, \tag{14.1}$$

حيث: Δx هي تزايد x و $\chi \to 0$ لما $\Delta x \to 0$ أي: $\left(\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \chi = 0\right)$ من أجل $0 < \alpha \leq 1$.

3.2.1 التفاضل الكسري المحلي

تعريف 5.2.1 [29]
يعرف التفاضل الكسري المحلي للدالة $g(x)$ كالآتي:

$$d^{\alpha} g = g^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}, \ 0 < \alpha \leq 1.$$

إذا وجدت أي نقطة $x_0 \in (a,b)$ بحيث:

$$\frac{d^{\alpha} g(x)}{dx^{\alpha}} \underset{x=x_0}{|} = g^{(\alpha)}(x_0). \tag{15.1}$$

فإن: $D_{\alpha}(a,b)$ تسمى α-مجموعة مشتق كسري محلي.

قضية 2.2.1 [31]
إذا كانت $g \in D_{\alpha}(a,b)$ فإن: $g \in C_{\alpha}(a,b)$.

البرهان 2.1.1
من (14.1) و (15.1) لدينا:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\alpha} g(x) &= g^{(\alpha)}(x)(\Delta x)^{\alpha} + \chi(\Delta x)^{\alpha}, \\
g(x) - g(x_0) &= g^{(\alpha)}(x)(x - x_0)^{\alpha} + \chi(x - x_0)^{\alpha}, \\
\big|g(x)\big| &= \Big|g^{(\alpha)}(x)(x - x_0)^{\alpha} + \chi(x - x_0)^{\alpha} + g(x_0)\Big|.
\end{aligned}$$

وبتطبيق النهاية على الطرفين لما $x \to x_0$ نجد:

$$\lim_{x\to x_0} \left|g(x)\right| = \left|g(x_0)\right|$$

خواص 1.2.1 [30]

❏ لتكن $f, g, h \in D_\alpha(a,b)$ أي دوال تقبل تفاضل كسري محلي على (a,b).
إذن لدينا الخواص التالية:

$$\frac{d^\alpha\big(h(x)+f(x)\big)}{dx^\alpha} = \frac{d^\alpha\big(h(x)\big)}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha\big(f(x)\big)}{dx^\alpha}, \tag{16.1}$$

$$\frac{d^\alpha\big(h(x)f(x)\big)}{dx^\alpha} = f(x)\frac{d^\alpha\big(h(x)\big)}{dx^\alpha} + h(x)\frac{d^\alpha\big(f(x)\big)}{dx^\alpha}, \tag{17.1}$$

$$\frac{d^\alpha\left(\dfrac{h(x)}{f(x)}\right)}{dx^\alpha} = \frac{f(x)\dfrac{d^\alpha\big(h(x)\big)}{dx^\alpha} + h(x)\dfrac{d^\alpha\big(f(x)\big)}{dx^\alpha}}{f^2(x)},\ \ f(x)\neq 0, \tag{18.1}$$

$$\frac{d^\alpha\big(c\,h(x)\big)}{dx^\alpha} = c\,\frac{d^\alpha\big(h(x)\big)}{dx^\alpha}, c \text{ ثابت } . \tag{19.1}$$

❏ إذا كان: $g(x) = \big(h\circ f\big)(x)$ فإن:

$$\frac{d^\alpha g(x)}{dx^\alpha} = h^\alpha\big(f(x)\big)\big(f^{(1)}(x)\big)^\alpha. \tag{20.1}$$

نتائج 1.2.1

-1 $\dfrac{d^\alpha x^{k\alpha}}{dx^\alpha} = \dfrac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma\big(1+(k-1)\alpha\big)}x^{(k-1)\alpha}$

-2 $\dfrac{d^\alpha E_\alpha\big((c\,x)^\alpha\big)}{dx^\alpha} = c^\alpha E_\alpha\big((c\,x)^\alpha\big)$ ، c ثابت.

-3 $\dfrac{d^\alpha E_\alpha(x^{2\alpha})}{dx^\alpha} = (2x)^\alpha E_\alpha(x^{2\alpha})$

-4 $\dfrac{d^\alpha E_\alpha(x^\alpha)}{dx^\alpha} = E_\alpha(x^\alpha)$

-5 $\dfrac{d^\alpha \sin_\alpha(x^\alpha)}{dx^\alpha} = \cos_\alpha(x^\alpha)$

-6 $\dfrac{d^\alpha \cos_\alpha(x^\alpha)}{dx^\alpha} = -\sin_\alpha(x^\alpha)$

4.2.1 2α-مشتق كسري محلي والإشتقاق من رتب عليا

تعريف 6.2.1 [30]
يعرف 2α -مشتق كسري محلي لدالة $g(x)$ من أجل $0<\alpha\leq 1$ كالآتي:

$$D_x^{2\alpha}\left[g(x)\right]=\left(D_x^{\alpha}.D_x^{\alpha}\right)g(x)=\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left[\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}g(x)\right]=g^{(2\alpha)}(x). \tag{21.1}$$

و بطريقة مماثلة نعرف $k\alpha$-مشتق كسري محلي:

$$\begin{aligned} D_x^{k\alpha}\left[g(x)\right]&=\underbrace{\left(D_x^{\alpha}.D_x^{\alpha}.D_x^{\alpha}\dots D_x^{\alpha}\right)}_{k \text{ مرة}}g(x)\\ &=g^{(k\alpha)}(x). \end{aligned} \tag{22.1}$$

5.2.1 مبرهنات حول الإشتقاق الكسري المحلي

مبرهنة 1.1.1 [30][نظرية رول]
لتكن $g\in C_{\alpha}[a,b]$ و$g\in D_{\alpha}(a,b)$، إذا كان: $g(a)=g(b)$ فإنه توجد نقطة $t\in(a,b)$ تحقق:

$$g^{\alpha}(t)=0,\ \ \alpha\in(0,1]. \tag{23.1}$$

البرهان 2.2.1

- **الحالة ①:**
إذا كانت $g(x)=0$ على المجال $[a,b]$ فإنه: $\forall x\in(a,b)$ لدينا: $g^{(\alpha)}(x)=0$.

- **الحالة ②:**
إذا كانت $g(x)\neq 0$ على المجال $[a,b]$، وبما أن $g(x)$ مستمرة على مجال متراص فإنه توجد نقطتين تدرك فيهما $g(x)$ حديها الأعلى والأدنى، نرمز لهما بـ M و m على الترتيب.
بما أن $g(x)\neq 0$ فإنه على الأقل M أو m تختلف عن الصفر.
نفرض $m\neq 0$ و $g(t)=m$، في هذه الحالة يكون: $g(t+\Delta x)\geq g(t)$.

✍ إذا كان: $\Delta x>0$ فإن:

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)\left[g(t+\Delta x)-g(t)\right]}{(\Delta x)^{\alpha}}\geq 0.$$

و

$$\lim_{(\Delta x)\to 0^+}\frac{\Gamma(1+\alpha)\left[g(t+\Delta x)-g(t)\right]}{(\Delta x)^{\alpha}}\geq 0.$$

✍ إذا كان: $\Delta x<0$ فإن:

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)\left[g(t+\Delta x)-g(t)\right]}{(\Delta x)^{\alpha}}\leq 0.$$

و

$$\lim_{(\Delta x)\to 0^-}\frac{\Gamma(1+\alpha)\left[g(t+\Delta x)-g(t)\right]}{(\Delta x)^{\alpha}}\leq 0.$$

وبما أن: $g \in D_\alpha(a,b)$ فإن: $_{x_0^+}D_x^\alpha g(x) =_{x_0^-} D_x^\alpha g(x)$، وهذا صحيح إلا إذا كان المشتق من اليمين يساوي المشتق من اليسار ويساوي الصفر.
ومنه: $g^{(\alpha)}(t) = 0$.

✓ بطريقة مماثلة لما نأخذ: $M \neq 0$ نجد: (23.1).

مبرهنة 2.2.1 [29][نظرية القيم المتوسطة]
لتكن $g \in C_\alpha[a,b]$ و$g \in D_\alpha(a,b)$، ومنه توجد نقطة $\varphi \in (a,b)$ تحقق:

$$g(b) - g(a) = \frac{g^{(\alpha)}(\varphi)(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \alpha \in (0,1] \tag{24.1}$$

البرهان 2.3.1
نعرف الدالة $G(x)$ كالآتي:

$$G(x) = \Gamma(1+\alpha)\Big\{\big[g(x)-g(a)\big] - \big[g(b)-g(a)\big]\frac{(x-a)^\alpha}{(b-a)^\alpha}\Big\},\ \alpha \in (0,1] \tag{25.1}$$

لدينا: $G(a) = 0$ و $G(b) = 0$.
بتطبيق المبرهنة (1.1.1) على الدالة $G(x)$ نجد:

$$G^{(\alpha)}(\varphi) = g^{(\alpha)}(\varphi) - \frac{\Gamma(1+\alpha)\big[g(b)-g(a)\big]}{(b-a)^\alpha} = 0,\ a < \varphi < b, \tag{26.1}$$
$$g^{(\alpha)}(\varphi) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\big[g(b)-g(a)\big]}{(b-a)^\alpha},$$

ومنه نحصل على (24.1).

مبرهنة 3.3.1 [30][تعميم كوشي لنظرية القيم المتوسطة]
لتكن $f(x), h(x) \in C_\alpha[a,b]$ و $f(x), h(x) \in D_\alpha(a,b)$.
إذا كان: $f(a) \neq f(b)$ فإنه توجد نقطة $m \in (a,b)$ تحقق:

$$\frac{h(b)-h(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{h^{(\alpha)}(m)}{f^{(\alpha)}(m)}. \tag{27.1}$$

البرهان 2.4.1
نعرف الدالة $H(x)$ كالتالي:

$$H(x) = \Gamma(1+\alpha)\big[h(x)-h(a)\big] - \frac{\Gamma(1+\alpha)\big[h(b)-h(a)\big]}{f(b)-f(a)}\big[f(x)-f(a)\big]. \tag{28.1}$$

لدينا: $H(a) = 0$ و $H(b) = 0$.
بتطبيق المبرهنة (1.1.1) على الدالة $H(x)$ نجد: $H^{(\alpha)}(m) = 0, a < m < b$

$$H^{(\alpha)}(m) = h^{(\alpha)}(m) - \frac{\big[h(b)-h(a)\big]}{\big[f(b)-f(a)\big]}f^{(\alpha)}(m) = 0$$

ومنه نحصل على (27.1).

مبرهنة 4.4.1 [30][قاعدة لوبيطال]
لتكن $g(x),h(x)\in C_\alpha[a,b]$ و $g(x),h(x)\in D_\alpha(a,b)$.

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$ ، L عدد حقيقي أو $\pm\infty$.

إذا كان: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g^\alpha(x)}{h^\alpha(x)}=L$ فإن: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=L$ أيضا.

3.1 التكامل الكسري المحلي

تعريف 1.3.1 [28]
لتكن $g(x)\in C_\alpha[a,b]$، التكامل الكسري المحلي للدالة $g(x)$ يعطى بالعلاقة:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)}g(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b g(t)(dt)^\alpha=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=0}^{M-1}g(t_k)(\Delta t_k)^\alpha, \qquad (29.1)$$

حيث: $0<\alpha\le 1$، $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$ و $\Delta t=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\ldots,\Delta t_k,\ldots\}$.

و $[t_k,t_{k+1}]$، $k=0,1,2,\ldots,M-1$ و $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_M=b$ تجزئة للمجال $[a,b]$.

ملاحظات 3.1.1 [28]

* إذا كان: $a=b$ فإن: ${}_aI_b^{(\alpha)}g(x)=0$
* إذا كان: $a<b$ فإن: ${}_aI_b^{(\alpha)}g(x)=-{}_bI_a^{(\alpha)}g(x)$
* إذا كان: $\alpha=0$ فإن: ${}_aI_b^{(\alpha)}g(x)=g(x)$

خواص 1.3.1 [29, 30]
لتكن $g(x),h(x)\in C_\alpha[a,b]$ و k ثابت، لدينا الخواص التالية:

❶ ${}_aI_b^{(\alpha)}\left[g(x)\pm h(x)\right]={}_aI_b^{(\alpha)}g(x)\pm{}_aI_b^{(\alpha)}h(x)$

❷ ${}_aI_b^{(\alpha)}\left[k\,g(x)\right]=k\,{}_aI_b^{(\alpha)}\left[g(x)\right]$

❸ إذا كانت: $g(x)=c$ فإن: ${}_aI_b^{(\alpha)}c=\dfrac{c(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ ، (c ثابت).

❹ إذا كانت: $g(x)\ge 0$ فإن: ${}_aI_b^{(\alpha)}g(x)\ge 0$ ، $(b>a)$.

❺ إذا كانت: $g(x)\ge h(x)$ فإن: ${}_aI_b^{(\alpha)}g(x)\ge{}_aI_b^{(\alpha)}h(x)$ ، $(b>a)$.

❻ M_g (m_g) قيمة كبرى (قيمة صغرى) لـ $g(x)$ على المجال $[a,b]$، لدينا:

$$M_g\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\ge{}_aI_b^{(\alpha)}g(x)\ge m_g\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ (b>a).$$

❼ إذا كان: $a<k<b$ فإن: ${}_aI_b^{(\alpha)}g(x)={}_aI_k^{(\alpha)}g(x)+{}_kI_b^{(\alpha)}g(x)$.

1.3.1 مبرهنات حول التكامل الكسري المحلي

مبرهنة 1.1.1 [30][نظرية القيم المتوسطة]
إذا كان $g(x) \in C_\alpha[a,b]$ فإنه توجد نقطة $t \in (a,b)$ تحقق:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)} g(x) = g(t)\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{30.1} $$

البرهان 3.1.1
لتكن $g(x) \in C_\alpha[a,b]$ و M_g (m_g) قيمها الحدية الكبرى (الصغرى) على التوالي على المجال $[a,b]$، لدينا:

$$ M_g\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \geq \ {}_aI_b^{(\alpha)} g(x) \geq m_g\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} $$

ومنه:

$$ m_g \leq \underbrace{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\ {}_aI_b^{(\alpha)} g(x)}_{g(t)} \leq \ M_g,\ t \in (a,b). $$

إذن توجد نقطة $t \in (a,b)$ تحقق المتراجحة أعلاه.
ومنه نحصل على (30.1).

مبرهنة 2.2.1 [30]
إذا كان $g(x) = h^\alpha(x) \in C_\alpha[m,n]$ فإن:

$$ {}_mI_n^{(\alpha)} g(x) = h(n) - h(m). \tag{31.1} $$

البرهان 3.2.1
نضع: ${}_mI_x^{(\alpha)} g(x) = \Pi(x)$ و $g(x) = h^\alpha(x) \in C_\alpha[m,n]$
ولدينا:

$$ \frac{d^\alpha \Pi(x)}{dx^\alpha} = g(x),\ a < x < b. \tag{32.1} $$

نطبق العلاقة: (32.1) على $\Pi(x) - h(x)$ نجد:

$$ \begin{aligned} \frac{d^\alpha\big(\Pi(x) - h(x)\big)}{dx^\alpha} &= \frac{d^\alpha\big(\Pi(x)\big)}{dx^\alpha} - \frac{d^\alpha\big(h(x)\big)}{dx^\alpha} \\ &= g(x) - g(x) = 0. \end{aligned} $$

ومنه نستنتج:

$$ \Pi(x) - h(x) = c, $$

$$ \left.\begin{aligned} \Pi(n) &= h(n) + c \\ \Pi(m) &= h(m) + c \end{aligned}\right\} \Pi(n) - \Pi(m) = h(n) - h(m), $$

$$ {}_mI_n^{(\alpha)} g(x) = \Pi(n) - \Pi(m) = h(n) - h(m). $$

مبرهنة 3.3.1 [29]
لتكن $h(x) \in C_1[a,b]$, $(g \circ h)(s) \in C_\alpha\big[h(a), h(b)\big]$، ومنه لدينا:

$$ {}_{h(a)}I_{h(b)}^{(\alpha)} g(x) = {}_a I_b^{(\alpha)} \big(g \circ h\big)(s) \big[h'(s)\big]^\alpha \qquad (33.1)$$

مبرهنة 4.4.1 [30][التكامل بالتجزئة]
لتكن $g(x), h(x) \in D_\alpha(a,b)$ و $g^{(\alpha)}(x), h^{(\alpha)}(x) \in C_\alpha[a,b]$، ومنه لدينا:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)} g(t)h^\alpha(t) = \Big[g(t)h(t)\Big]_b^a - {}_aI_b^{(\alpha)} g^{(\alpha)}(t)h(t) \qquad (34.1)$$

البرهان 3.3.1
نعلم أن:

$$ \frac{d^\alpha\big[g(t)h(t)\big]}{dt^\alpha} = g^{(\alpha)}(t)h(t) + g(t)h^{(\alpha)}(t), \qquad (35.1)$$

ومنه:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)} \left\{ \frac{d^\alpha\big[g(t)h(t)\big]}{dt^\alpha} \right\} = \Big[g(t)h(t)\Big]_a^b. \qquad (36.1)$$

من (35.1) و (36.1) نجد:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)} \Big\{ g^{(\alpha)}(t)h(t) + g(t)h^{(\alpha)}(t) \Big\} = \Big[g(t)h(t)\Big]_a^b, $$
$$ {}_aI_b^{(\alpha)} \Big\{ g^{(\alpha)}(t)h(t) \Big\} + {}_a I_b^{(\alpha)} \Big\{ g(t)h^{(\alpha)}(t) \Big\} = \Big[g(t)h(t)\Big]_a^b. $$

ومنه نستنتج أن:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)} \Big\{ g(t)h^{(\alpha)}(t) \Big\} = \Big[g(t)h(t)\Big]_a^b - {}_a I_b^{(\alpha)} \Big\{ g^{(\alpha)}(t)h(t) \Big\}. $$

2.3.1 التكامل الكسري المحلي غير المحدود

تعريف 2.3.1
لتكن $g(x), h(x)$ دالتين مستمرتين كسريا محليا معرفتين على المجال (a,b).
إذا كان: $h^{(\alpha)}(x) = g(x)$ من أجل كل: $x \in (a,b)$ فإن:
$h(x)$ تسمى دالة أصلية كسرية محلية للدالة $g(x)$ على المجال (a,b).

تعريف 3.3.1 [29]
يعرف التكامل الكسري المحلي غير المحدود لدالة $g(x)$ على المجال (a,b) بـ:

$$ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int g(x)(dx) = h(x) + C, \ (C \text{ ثابت }). \qquad (37.1)$$

1.2.3.1 التكامل الكسري المحلي لبعض الدوال المألوفة

من أجل C ثابت لدينا: [29]

★ $$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int E_\alpha(x^\alpha)(dx)^\alpha = E_\alpha(x^\alpha)+C$$

★ $$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int x^{k\alpha}(dx)^\alpha = \frac{\Gamma(1+k\alpha)x^{(k+1)\alpha}}{\Gamma\big(1+(k+1)\alpha\big)}+C$$

★ $$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int \sin_\alpha(x^\alpha)(dx)^\alpha = -\cos_\alpha(x^\alpha)+C$$

★ $$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int \cos_\alpha(x^\alpha)(dx)^\alpha = \sin_\alpha(x^\alpha)+C$$

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية، سلاسل وتحويل فورييه، تحويل لابلاس وتحويل سومودو

قائمة المحتويـــــــات

في هذا الفصل سنقوم بدراسة المعادلات التفاضلية، سلاسل وتحويل فوريه، تحويل لابلاس وتحويل سومودو وتحويلاتها العكسية بالمفهوم الكسري المحلي.

1.2 المعادلات التفاضلية الكسرية المحلية

تعريف 1.1.2 [29]
لتكن $m(x), n(x)$ دالتين معرفتين على جزء من المجال (a,b)، المساواة المعرفة بالشكل التالي:

$$\frac{d^\alpha g(x)}{dx^\alpha} + m(x)g(x) = n(x),\ 0 < \alpha \leq 1 \tag{1.2}$$

تسمى α-معادلة تفاضلية كسرية محلية للدالة $g(x)$.

نظرية 1.1.2 [29]
نموذج "*Mittag-Leffler*" المطور للمعادلة التفاضلية الكسرية المحلية العادية:

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + ty = 0,\ t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

وحلها يعطى كالآتي:

$$y(x) = y_0 E_\alpha(-tx^\alpha). \tag{3.2}$$

البرهان 1.1.2
بمكاملة طرفي المعادلة (2.2) بالنسبة لـ x نجد:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = -ty\ \Rightarrow \frac{d^\alpha y}{y} = -tdx^\alpha,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int \frac{d^\alpha y}{y} &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int -t(dx)^\alpha, \\ \ln_\alpha y &= -tx^\alpha + c, \\ y(x) &= E_\alpha(-tx^\alpha + c), \\ y(x) &= C.E_\alpha(-tx^\alpha). \end{aligned}$$

بأخذ: $C = y(0) = y_0$ نجد: (3.2).

نظرية 1.2.2 [29]
لتكن $m(x)$ دالة مستمرة كسريا محليا على المجال (a,b) و $t > 0$، المعادلة التفاضلية الكسرية المحلية التالية:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + ty = m(x) \tag{4.2}$$

تملك حلول ذات وسيط واحد معرفة بالشكل:

$$y(x) = E_\alpha(-tx^\alpha)\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int m(x)E_\alpha(tx^\alpha)(dx)^\alpha + c\right] \tag{5.2}$$

البرهان 1.2.2
بضرب طرفي المعادلة (4.2) في عامل التكميل $E_\alpha(tx^\alpha)$ نجد:

$$\underbrace{E_\alpha(tx^\alpha)\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}+tE_\alpha(tx^\alpha)y}_{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[E_\alpha(tx^\alpha)y\right]}=m(x)E_\alpha(tx^\alpha). \tag{6.2}$$

باستعمال تعريف التكامل غير المحدود نجد:

$$E_\alpha(tx^\alpha)y=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int m(x)E_\alpha(tx^\alpha)(dx)^\alpha+c. \tag{7.2}$$

من (7.2) نجد:

$$y(x)=E_\alpha(-tx^\alpha)\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int m(x)E_\alpha(tx^\alpha)(dx)^\alpha+c\right]$$

تعريف 2.1.2 [29]
إذا كانت $m(x),n(x)$ معرفتين على المجال (a,b) فإن المعادلة التالية:

$$\frac{d^{2\alpha}g(x)}{dx^{2\alpha}}+m(x)\frac{d^\alpha g(x)}{dx^\alpha}+n(x)g(x)=r(x),\ 0<\alpha\leq 1. \tag{8.2}$$

تسمى 2α-معادلة تفاضلية كسرية محلية بدلالة المتغير $g(x)$.

نظرية 1.3.2 [29]
ليكن m و t معاملين ثابتين. المعادلة الكسرية المحلية التالية:

$$\frac{d^{2\alpha}g(x)}{dx^{2\alpha}}+m\frac{d^\alpha g(x)}{dx^\alpha}+tg(x)=0. \tag{9.2}$$

تملك مجموعة حلول ذات وسيطين اثنين:

☜ إذا كان: $\underline{m^2-4t\geq 0}$:

$$g(x)=kE_\alpha\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4t}}{2}x^\alpha\right)+lE_\alpha\left(\frac{-m+\sqrt{m^2-4t}}{2}x^\alpha\right),\ (k,l\ \text{ثابتين}). \tag{10.2}$$

☜ إذا كان: $\underline{m^2-4t<0}$:

$$g(x)=kE_\alpha\left(\frac{m+i^\alpha\sqrt{m^2-4t}}{2}x^\alpha\right)+lE_\alpha\left(\frac{-m+i^\alpha\sqrt{m^2-4t}}{2}x^\alpha\right),\ (k,l\ \text{ثابتين}). \tag{11.2}$$

البرهان 1.3.2
أنظر [29]

2.2 التفاضل الكسري المحلي التام

1.2.2 المشتق الكسري المحلي الجزئي

تعريف 1.2.2 [29]
لتكن $g(x,y)$ دالة غير قابلة للتفاضل معرفة على ساحة D، المشتق الكسري المحلي لـ $g(x,y)$ بالنسبة لـ x (على التوالي y) معرف كالآتي:

$$\frac{\partial^\alpha g(x,y)}{\partial x^\alpha}\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta^\alpha\left[g(x,y)-g(x_0,y)\right]}{(x-x_0)^\alpha}, \tag{12.2}$$

حيث: $\Delta^\alpha\left[g(x,y)-g(x_0,y)\right] \cong \Gamma(1+\alpha)\Delta\left[g(x,y)-g(x_0,y)\right]$

نفس الشيء بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial^\alpha g(x,y)}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=y_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{\Delta^\alpha\left[g(x,y)-g(x,y_0)\right]}{(y-y_0)^\alpha}, \tag{13.2}$$

حيث: $\Delta^\alpha\left[g(x,y)-g(x,y_0)\right] \cong \Gamma(1+\alpha)\Delta\left[g(x,y)-g(x,y_0)\right]$

2.2.2 المشتق الكسري المحلي الجزئي من رتب عليا

تعريف 2.2.2 [32]
لتكن $f(x,y)$ دالة تقبل مشتقات جزئية عند كل نقطة (x,y) على الساحة D، لدينا:

$$\frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial x^\alpha} \text{ و } \frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial y^\alpha}$$

هما نفس الدالتين بدلالة x و y.
2α-مشتق كسري محلي يعطى بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial^{2\alpha} f(x,y)}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = f^{2\alpha}_{x^2}(x,y),\\
\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial y^\alpha} &= \frac{\partial^{2\alpha} f(x,y)}{\partial y^\alpha \partial y^\alpha} = f^{2\alpha}_{y^2}(x,y),\\
\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial y^\alpha} &= \frac{\partial^{2\alpha} f(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\alpha} = f^{2\alpha}_{xy}(x,y),\\
\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial^{2\alpha} f(x,y)}{\partial y^\alpha \partial x^\alpha} = f^{2\alpha}_{yx}(x,y).
\end{aligned}$$

✎ إذا كان k عدد طبيعي:

$$\underbrace{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\cdots\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}}_{k \text{ مرة}} f(x,y) = \frac{\partial^{k\alpha} f(x,y)}{\underbrace{\partial x^\alpha\cdots\partial x^\alpha}_{k \text{ مرة}}} = f^{k\alpha}_{x^k}(x,y).$$

✎ إذا كان k و l عددين طبيعيين:

$$\underbrace{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\cdots\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}}_{k \text{ مرة}}\underbrace{\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\cdots\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}}_{l \text{ مرة}} f(x,y)=\frac{\partial^{(k+l)\alpha}f(x,y)}{\underbrace{\partial x^\alpha\cdots\partial x^\alpha}_{k \text{ مرة}}\underbrace{\partial y^\alpha\cdots\partial y^\alpha}_{l \text{ مرة}}}=f^{(k+l)\alpha}_{x^k y^l}(x,y).$$

خاصية 1.2.2 [32]
إذا كان $f^{2\alpha}_{xy}(x,y)$ و $f^{2\alpha}_{yx}(x,y)$ مستمرين كسريا محليا على ساحة D فإن:

$$f^{2\alpha}_{xy}(x,y)=f^{2\alpha}_{yx}(x,y). \tag{14.2}$$

نظرية 2.1.2 [29]
إذا كانت $g(x,y)$ دالة α-تفاضل كسري محلي عند النقطة (x,y)، فإن المشتقين الجزئيين:

$$\frac{\partial^\alpha g(x,y)}{\partial x^\alpha},\ \frac{\partial^\alpha g(x,y)}{\partial y^\alpha}$$

موجودين و مستمرين كسريا محليا، حيث تفاضل $g(x,y)$ الكسري المحلي التام عند النقطة (x,y) يعطى بالعلاقة:

$$d^\alpha g=\frac{\partial^\alpha g(x,y)}{\partial x^\alpha}(dx)^\alpha+\frac{\partial^\alpha g(x,y)}{\partial y^\alpha}(dy)^\alpha. \tag{15.2}$$

نظرية 2.2.2 [29]
إذا كانت الدالة $g(x,y,z)$ تقبل α-تفاضل كسري محلي عند النقطة (x,y,z) فإن مشتقاتها الجزئية الكسرية المحلية:

$$\frac{\partial^\alpha g(x,y,z)}{\partial x^\alpha},\frac{\partial^\alpha g(x,y,z)}{\partial y^\alpha},\frac{\partial^\alpha g(x,y,z)}{\partial z^\alpha}$$

موجودة ومستمرة، وتفاضل $g(x,y,z)$ الكسري المحلي التام عند النقطة (x,y,z) يعطى بالشكل:

$$d^\alpha g=\frac{\partial^\alpha g(x,y,z)}{\partial x^\alpha}(dx^\alpha)+\frac{\partial^\alpha g(x,y,z)}{\partial y^\alpha}(dy^\alpha)+\frac{\partial^\alpha g(x,y,z)}{\partial z^\alpha}(dz^\alpha). \tag{16.2}$$

3.2.2 المشتق الكسري المحلي للدوال المركبة

نظرية 2.3.2 [29]
لتكن $g=g(x,y)$ ومشتقيها الكسريين المحليين $g^{(\alpha)}_x(x,y)$ و $g^{(\alpha)}_y(x,y)$ مستمرين كسريا محليا، $x=x(t)$ و $y=y(t)$ هما تفاضل الدالة نفسها بالنسبة لـ t.
نضع: $G(t)=g\big(x(t),y(t)\big)$ ومنه التفاضل الكسري المحلي $\frac{d^\alpha G}{dt^\alpha}$ يعطى بالعلاقة:

$$\frac{d^\alpha G}{dt^\alpha}=\frac{d^\alpha g}{dx^\alpha}\left(\frac{dx}{dt}\right)^\alpha+\frac{d^\alpha g}{dy^\alpha}\left(\frac{dy}{dt}\right)^\alpha. \tag{17.2}$$

البرهان 2.1.2
بما أن $g=g(x,y)$ ومشتقيها الكسريين المحليين $g_x^{(\alpha)}(x,y)$ و $g_y^{(\alpha)}(x,y)$ مستمرين كسريا محليا.
فإنه لدينا العبارة التالية:

$$\Delta^\alpha g = g_x^{(\alpha)}(x,y)(\Delta x)^\alpha + g_y^{(\alpha)}(x,y)(\Delta y)^\alpha + \varepsilon_1(\Delta x)^\alpha + \varepsilon_2(\Delta y)^\alpha.$$

لما: $\Delta x \longrightarrow 0$ و $\Delta y \longrightarrow 0$ لدينا:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^\alpha \longrightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^\alpha \text{ و } \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^\alpha \longrightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^\alpha.$$

لما: $\Delta t \longrightarrow 0$ لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha G}{dt^\alpha} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta^\alpha G}{(\Delta t)^\alpha} = g_x^{(\alpha)}(x,y)\left(\frac{dx}{dt}\right)^\alpha + g_y^{(\alpha)}\left(\frac{dy}{dt}\right)^\alpha \\ &= \frac{d^\alpha g}{dx^\alpha}\left(\frac{dx}{dt}\right)^\alpha + \frac{d^\alpha g}{dy^\alpha}\left(\frac{dy}{dt}\right)^\alpha.\end{aligned}$$

3.2 سلاسل فوريه الكسرية المحلية

1.3.2 الشكل المثلثي الكسري لسلاسل فوريه الكسرية المحلية

تعريف 1.3.2 [29]
لتكن $f(x)$ دالة دورية، دورها 2π، $m\in\mathbb{Z}$، سلسلة فوريه الكسرية المحلية للدالة $f(x)$ يعبر عنها بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(a_m\cos_\alpha(mx)^\alpha + b_m\sin_\alpha(mx)^\alpha\Big). \tag{18.2}$$

حيث تعطى معاملات فوريه بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}a_m &= \frac{1}{\pi^\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos_\alpha(mx)^\alpha(dx)^\alpha,\\ b_m &= \frac{1}{\pi^\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin_\alpha(mx)^\alpha(dx)^\alpha.\end{aligned} \tag{19.2}$$

2.3.2 تعميم الأشكال المثلثية الكسرية لسلاسل فوريه الكسرية المحلية

تعريف 2.3.2 [29]
لتكن $f(x)$ دالة دورية، دورها $2k$، $m\in\mathbb{Z}$، سلسلة فوريه الكسرية المحلية للدالة $f(x)$ يعبر عنها بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos_\alpha\frac{\pi^\alpha(mx)^\alpha}{k^\alpha} + b_m\sin_\alpha\frac{\pi^\alpha(mx)^\alpha}{k^\alpha}\right). \tag{20.2}$$

حيث تعطى معاملات فوريه بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}a_m &= \frac{1}{k^\alpha}\int_{-k}^{k} f(x)\cos_\alpha\frac{\pi^\alpha(mx)^\alpha}{k^\alpha}(dx)^\alpha,\\ b_m &= \frac{1}{k^\alpha}\int_{-k}^{k} f(x)\sin_\alpha\frac{\pi^\alpha(mx)^\alpha}{k^\alpha}(dx)^\alpha.\end{aligned} \tag{21.2}$$

4.2 تحويل فوريه الكسري المحلي

تعريف 1.4.2 [33]
لتكن $f(x) \in C_\alpha(-\infty,\infty)$، تحويل فوريه الكسري المحلي من الرتبة α للدالة $f(x)$ معرف كما يلي:

$$F_\alpha\{f(x)\} = f_\omega^{F,\alpha}(\omega) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(-i^\alpha\omega^\alpha x^\alpha)f(x)(dx)^\alpha. \tag{22.2}$$

تعريف 2.4.2 [33]
يعرف تحويل فوريه العكسي الكسري المحلي للدالة $f(x)$ بالشكل التالي:

$$f(x) = F_\alpha^{-1}(f_\omega^{F,\alpha}(\omega)) := \frac{1}{(2\pi)^\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(i^\alpha\omega^\alpha x^\alpha)f_\omega^{F,\alpha}(\omega)(d\omega)^\alpha. \tag{23.2}$$

لازمة 4.1.2 [33]
إذا كانت: $f(x), g(x) \in C_\alpha(-\infty,\infty)$ و $F_\alpha\{f(x)\} = f_\omega^{F,\alpha}(\omega)$ ،$F_\alpha\{g(x)\} = g_\omega^{F,\alpha}(\omega)$ و a, b ثابتين فإن:

$$F_\alpha\{af(x)+bg(x)\} = aF_\alpha\{f(x)\} + bF_\alpha\{g(x)\}. \tag{24.2}$$

لازمة 4.2.2 [33]
لتكن: $f(x) \in C_\alpha(-\infty,\infty)$، و $F_\alpha\{f(x)\} = f_\omega^{F,\alpha}(\omega)$، إذا كان: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ فإن:

$$F_\alpha\{f^{(\alpha)}(x)\} = i^\alpha\omega^\alpha F_\alpha\{f(x)\}. \tag{25.2}$$

5.2 تحويل لابلاس الكسري المحلي

تعريف 1.5.2 [33]
لتكن $f(x) \in C_\alpha(-\infty,\infty)$، يعرف تحويل لابلاس الكسري المحلي من الرتبة α للدالة $f(x)$ على النحو التالي:

$$L_\alpha\{f(x)\} = f_s^{L,\alpha}(s) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\infty} E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha)f(x)(dx)^\alpha,\ 0<\alpha\leq 1. \tag{26.2}$$

تعريف 2.5.2 [33]
يعرف تحويل لابلاس العكسي الكسري المحلي للدالة $f(x)$ بالشكل التالي:

$$f(x) = L_\alpha^{-1}\{f_s^{L,\alpha}(s)\} = \frac{1}{(2\pi)^\alpha}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} E_\alpha(s^\alpha x^\alpha)f_s^{L,\alpha}(s)(ds)^\alpha,\ 0<\alpha\leq 1. \tag{27.2}$$

حيث: $s^\alpha = \beta^\alpha + i^\alpha\infty^\alpha$, $Re(s) = \beta > 0$ و i عدد تخيلي.

لازمة 5.1.2 [33]
لتكن: $f(x) \in C_\alpha(-\infty,\infty)$، و $L_\alpha\{f(x)\} = f_s^{L,\alpha}(s)$، إذا كان: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ فإن:

$$L_\alpha\{f^{(\alpha)}(x)\} = s^\alpha L_\alpha\{f(x)\}. \tag{28.2}$$

خواص 1.5.2 [34]

❶ $$L_\alpha\{af(x)+bg(x)\}=af_s^{L,\alpha}(s)+bg_s^{L,\alpha}(s)$$

❷ $$L_\alpha\{E_\alpha(c^\alpha x^\alpha)f(x)\}=f_s^{L,\alpha}(s-c)$$

❸ $$L_\alpha\{f^{(k\alpha)}(x)\}=s^{k\alpha}f_s^{L,\alpha}(s)-s^{(k-1)\alpha}f(0)-s^{(k-2)\alpha}f^{(\alpha)}(0)-\cdots-f^{\left((k-1)\alpha\right)}(0)$$

❹ $$L_\alpha\{E_\alpha(a^\alpha x^\alpha)\}=\frac{1}{s^\alpha-a^\alpha}$$

❺ $$L_\alpha\{\sin_\alpha(a^\alpha x^\alpha)\}=\frac{a^\alpha}{s^{2\alpha}+a^{2\alpha}}$$

❻ $$L_\alpha\{x^{k\alpha}\}=\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{s^{(k+1)\alpha}}$$

6.2 تحويل سومودو الكسري المحلي

يمكننا تعريف مؤثر تحويل جديد كما يلي:[35]

$$\begin{aligned}&LFS_\alpha: f(x)\to F(t),\\ &LFS_\alpha\{f(x)\}=LFS_\alpha\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{ak}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(1+k\alpha)a_kz^{ak}\end{aligned}\tag{29.2}$$

مثال 1.6.2

✧ $$LFS_\alpha\{E_\alpha(i^\alpha x^\alpha)\}=\sum_{k=0}^{\infty}i^{\alpha k}z^{\alpha k}$$

✧ $$LFS_\alpha\left\{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\}=z^\alpha$$

تعريف 1.6.2 [35]
يعرف تحويل سومودو الكسري المحلي من الرتبة α لدالة $f(x)$ كما يلي:

$$LFS_\alpha\{f(x)\}=F_\alpha(z)=:\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty E_\alpha(-z^{-\alpha}x^\alpha)\frac{f(x)}{z^\alpha}(dx)^\alpha,\ 0<\alpha\le 1\tag{30.2}$$

في حين يعطى تحويله العكسي كالآتي:

$$LFS_\alpha^{-1}\{F_\alpha(z)\}=f(x),\ 0<\alpha\le 1\tag{31.2}$$

خاصية 1.6.2 [35]
إذا كان: $LFS_\alpha\{f(x)\}=F_\alpha(z)$ و $LFS_\alpha\{g(x)\}=G_\alpha(z)$ فإن:

$$LFS_\alpha\{f(x)+g(x)\}=F_\alpha(z)+G_\alpha(z).\tag{32.2}$$

إذن مؤثر تحويل سومودو الكسري المحلي هو مؤثر خطي.

خاصية 2.6.2 [35][ثنوي لابلاس-سومودو الكسري المحلي]
إذا كان: $LFS_\alpha\{f(x)\} = F_\alpha(z)$ و $L_\alpha\{f(x)\} = f_s^{L,\alpha}$ فإن:

$$LFS_\alpha\{f(x)\} = \frac{1}{z^\alpha}L_\alpha\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \tag{33.2}$$

$$L_\alpha\{f(x)\} = \frac{LFS_\alpha\{f(1/s)\}}{s^\alpha} \tag{34.2}$$

نظرية 6.1.2 [35][تحويل سومودو الكسري المحلي للمشتق الكسري المحلي]
إذا كان: $LFS_\alpha\{g(x)\} = G_\alpha(z)$، فإن تحويل سومودو الكسري المحلي للمشتق الكسري المحلي يعطى بالشكل التالي:

$$LFS_\alpha\left\{\frac{d^\alpha g(x)}{dx^\alpha}\right\} = \frac{G_\alpha(z) - g(0)}{z^\alpha} \tag{35.2}$$

البرهان 6.1.2
نضع: $\frac{d^\alpha g(x)}{dx^\alpha} = H(x)$. من (33.2) والخاصية التالية لتحويل لابلاس:

$$L_\alpha\{f^{(\alpha)}(x)\} = s^\alpha L_\alpha\{f(x)\} - f(0).$$

لدينا:

$$LFS_\alpha\{H(x)\} = \frac{L_\alpha\{H(1/x)\}}{z^\alpha}$$

ومنه:

$$L_\alpha\{H(1/x)\} = L_\alpha\{g(1/x)\}/z^\alpha - g(0),$$

وعليه فإن:

$$\begin{aligned} LFS_\alpha\{H(x)\} &= \frac{L_\alpha\{H(1/x)\}}{z^\alpha} = \frac{L_\alpha\{g(1/x)\}/z^\alpha - g(0)}{z^\alpha} \\ &= \frac{G_\alpha(z) - g(0)}{z^\alpha} \end{aligned} \tag{36.2}$$

وبصفة عامة لدينا:

$$LFS_\alpha\left\{\frac{d^{n\alpha} g(x)}{dx^{n\alpha}}\right\} = \frac{1}{z^{n\alpha}}\left[G_\alpha(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{k\alpha} g^{(k\alpha)}(0)\right].$$

نظرية 6.2.2 [35][تحويل سومودو الكسري المحلي للتكامل الكسري المحلي]
إذا كان: $LFS_\alpha\{g(x)\} = G_\alpha(z)$، فإن:

$$LFS_\alpha\{{}_0I_x^{(\alpha)} g(x)\} = z^\alpha G_\alpha(z) \tag{37.2}$$

البرهان 6.2.2

لدينا: $\frac{1}{s^\alpha}L_\alpha\{g(x)\} = L_\alpha\{{}_0I_x^{(\alpha)}g(x)\}$، ومن (33.2) نجد:

$$LFS_\alpha\{h(x)\} = \frac{1}{z^\alpha}L_\alpha\left\{h\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = L_\alpha\left\{g\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = z^\alpha G_\alpha z \tag{38.2}$$

حيث: $h(x) =_0 I_x^{(\alpha)}g(x)$

نظرية 6.3.2 [35][الإلتفاف الكسري المحلي]

إذا كان: $LFS_\alpha\{h(x)\} = H_\alpha(z)$ و $LFS_\alpha\{g(x)\} = G_\alpha(z)$ فإن:

$$LFS_\alpha\{g(x) * h(x)\} = z^\alpha G_\alpha(z)H_\alpha(z), \tag{39.2}$$

حيث:

$$g(x) * h(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty g(t)h(x-t)(dt)^\alpha \tag{40.2}$$

البرهان 6.3.2

باستعمال الخاصية التالية: $L_\alpha\{g(x) * h(x)\} = g_s^{L,\alpha}(s)h_s^{L,\alpha}(s)$ و (33.2) لدينا:

$$\begin{aligned} LFS_\alpha\{g(x) * h(x)\} &= \frac{L_\alpha\{g(x) * h(x)\}}{z^\alpha} \\ &= \frac{L_\alpha\{g(1/x)\}L_\alpha\{h(1/x)\}}{z^\alpha} \\ &= z^\alpha G_\alpha(z)H_\alpha(z) \end{aligned} \tag{41.2}$$

حيث:

$H_\alpha(z) = \frac{L_\alpha\{h(1/x)\}}{z^\alpha}$ و $G_\alpha(z) = \frac{L_\alpha\{g(1/x)\}}{z^\alpha}$.

الفصل الثالث

تطبيقات الحساب الكسري المحلي

قائمة المحتويـــــــات

في هذا الفصل سنطبق ما درسناه في الفصلين الأول والثاني، وذلك بأخذ بعض الأمثلة لتطبيقات الحساب الكسري المحلي في حل معادلة الموجة، المعادلات تفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الجزئية ومسائل القيمة الإبتدائية.

ملاحظة:

فيما يلي، كل التطبيقات ستكون على مجوعة كانتور.

1.3 تحليل معادلة الموجة الكسورية باستعمال سلاسل فوريه الكسرية المحلية

نعرف معادلة الموجة بالشكل التالي: [36]

$$\frac{\partial^{2\alpha}W(x,t)}{\partial t^{2\alpha}}-\frac{\partial^{\alpha}W(x,t)}{\partial t^{\alpha}}-\frac{\partial^{2\alpha}W(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}=0, \tag{1.3}$$

حيث يعطى الشرط الإبتدائي والشروط الحدية كالآتي:

$$\begin{cases} W(0,t)=W(r,t)=\dfrac{\partial^{\alpha}W(r,0)}{\partial x^{\alpha}}=0,\\ W(x,0)=f(x),\\ \dfrac{\partial^{\alpha}W(x,0)}{\partial t^{\alpha}}=g(x). \end{cases} \tag{2.3}$$

إذا وجد حل خاص للمعادلة (1.3) يكتب على الشكل:

$$W(x,t)=\mu(x)U(t). \tag{3.3}$$

فإنه نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} \mu^{(2\alpha)}(x)+\lambda^{2\alpha}\mu=0,\\ U^{(2\alpha)}+U^{(\alpha)}+\lambda^{2\alpha}U=0. \end{cases} \tag{4.3}$$

حيث تعطى الشروط الحدية بالشكل التالي:

$$\mu(0)=\mu^{(\alpha)}(r)=0$$

المعادلة (1.3) تقبل الحل التالي:

$$\mu(x)=c_1\cos_{\alpha}\lambda^{\alpha}x^{\alpha}+c_2\sin_{\alpha}\lambda^{\alpha}x^{\alpha},\ (c_1,c_2\ \text{ثابتين}). \tag{5.3}$$

في (5.3)، من أجل $x=0$ و $x=r$ نجد:

$$\begin{aligned}\mu(0)&=c_1=0,\\ \mu(r)&=\mu(x)\Big|_{x=r}=c_2\sin_{\alpha}\lambda^{\alpha}r^{\alpha}=0.\end{aligned}$$

واضح أن: $c_2 \neq 0$، وإلا فإنه: $\mu(x) = 0$.
نضع: $\lambda_n^\alpha r^\alpha = n^\alpha \pi^\alpha$، حيث: n عدد طبيعي.
ومنه نجد:

$$\begin{aligned}\mu_n(x) &= \sin_\alpha \lambda_n^\alpha x^\alpha \\ &= \sin_\alpha n^\alpha \Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha,\ (n = 1, 2, 3, \ldots)\end{aligned}$$

من أجل: $\lambda^\alpha = \lambda_n^\alpha$ و $\vartheta > 0$، (4.3) تعني التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_\alpha\Big(-\frac{t^\alpha}{2}\Big)\big(A_n \cos_\alpha \vartheta t^\alpha + B_n \sin_\alpha \vartheta t^\alpha\big), \tag{6.3}$$

حيث:

$$\vartheta = \frac{\sqrt{4(n\pi/r)^{2\alpha} - 1}}{2}.$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\begin{aligned}W_n(x,t) &= \mu(x) U_n(x) \\ &= A_n \cos_\alpha \vartheta \Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha E_\alpha\Big(-\frac{t^\alpha}{2}\Big) + B_n \sin_\alpha \vartheta \Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha E_\alpha\Big(-\frac{t^\alpha}{2}\Big).\end{aligned} \tag{7.3}$$

نفرض سلسلة فورييه الكسرية المحلية لـ (1.3) كالآتي:

$$\begin{aligned}W(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_\alpha\Big(-\frac{t^\alpha}{2}\Big)\big(A_n \cos_\alpha \vartheta t^\alpha + B_n \sin_\alpha \vartheta t^\alpha\big)\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha.\end{aligned} \tag{8.3}$$

ومنه:

$$\frac{\partial^\alpha W(x,t)}{\partial t^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^\alpha W_n(x,t)}{\partial t^\alpha}.$$

حيث:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha W_n(x,t)}{\partial t^\alpha} &= -\frac{1}{2} E_\alpha\Big(-\frac{t^\alpha}{2}\Big)\big(A_n \cos_\alpha \vartheta t^\alpha + B_n \sin_\alpha \vartheta t^\alpha\big) \sin_\alpha n^\alpha \Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha \\ &+ \vartheta E_\alpha\Big(-\frac{t^\alpha}{2}\Big)\big(-A_n \sin_\alpha \vartheta t^\alpha + B_n \cos_\alpha \vartheta t^\alpha\big) \sin_\alpha n^\alpha \Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha.\end{aligned}$$

و: $\vartheta = \dfrac{\sqrt{4(n\pi/r)^{2\alpha} - 1}}{2}$
وبأخذ عين الإعتبار (8.3) و (2.3) نحصل على:

$$\begin{aligned}W(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x,0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin_\alpha n^\alpha \Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha = f(x).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^\alpha W(x,0)}{\partial t^\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{1}{2}A_n+\vartheta B_n\Big)\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha=g(x). \tag{9.3}$$

ومنه نستنتج أن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta B_n\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha&=g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha\\&=g(x)+\frac{1}{2}f(x).\end{aligned} \tag{10.3}$$

نعرف الدالة $F(x)$ كالتالي:

$$F(x)=g(x)+\frac{1}{2}f(x).$$

باستعمال (9.3) نجد أن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha&=f(x),\\ \sum_{n=1}^{\infty}\vartheta B_n\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha&=F(x)\end{aligned}$$

حيث تعطى معاملات فورييه الكسرية المحلية لهذه الدالة على الترتيب كما يلي:

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1/\Gamma(1+\alpha)\int_0^r f(x)\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha(dx)^\alpha}{1/\Gamma(1+\alpha)\int_0^r \sin_\alpha^2 n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha(dx)^\alpha},\ (n=0,1,2,\dots)\\ \vartheta B_n&=\frac{1/\Gamma(1+\alpha)\int_0^r F(x)\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha(dx)^\alpha}{1/\Gamma(1+\alpha)\int_0^r \sin_\alpha^2 n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha(dx)^\alpha},\ (n=0,1,2,\dots)\end{aligned} \tag{11.3}$$

حيث:

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^r \sin_\alpha^2 n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha(dx)^\alpha=\frac{r^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}.$$

ومنه نستنتج أن:

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{2\int_0^r f(x)\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha(dx)^\alpha}{r^\alpha}\\ B_n&=\frac{2\int_0^r F(x)\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha(dx)^\alpha}{\vartheta r^\alpha}.\end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على حل (1،3) كالآتي:

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(x,t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}E_\alpha\Big(-\frac{t^\alpha}{2}\Big)\big(A_n\cos_\alpha\vartheta t^\alpha+B_n\sin_\alpha\vartheta t^\alpha\big)\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{r}\Big)^\alpha$$

ملاحظة:

فيما يلي، سنرمز إختصارا بـ:

✔ م،ت،ع=: المعادلات التفاضلية العادية،

✔ م،ت،ج=: المعادلات التفاضلية الجزئية.

2،3 حل (م،ت،ع) و (م،ت،ج) باستعمال سلاسل فورييه الكسرية المحلية

مثال 1،2،3 [33]

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية المحلية العادية التالية:

$$\frac{d^{2\alpha}y}{dx^{2\alpha}}+y=\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ x\in(0,\pi). \tag{12،3}$$

والشرطين الإبتدائيين التاليين:

$$y(0)=0,\ y(\pi)=0. \tag{13،3}$$

باستعمال: (18،2) و (19،2) يمكننا كتابة $x^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$ بالشكل التالي:

$$\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin_\alpha(n^\alpha x^\alpha),\ x\in(0,\pi). \tag{14،3}$$

حيث:

$$b_n=\frac{1}{\pi^\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin_\alpha(n^\alpha x^\alpha)(dx)^\alpha=-\frac{1}{n^\alpha}\frac{(2\pi)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{15،3}$$

كما يمكننا كتابة $y(x)$ بالشكل التالي:

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin_\alpha(n^\alpha x^\alpha),\ x\in(0,\pi). \tag{16،3}$$

ومنه:

$$\frac{d^{2\alpha}y}{dx^{2\alpha}}=-\sum_{n=1}^{\infty}B_n n^{2\alpha}\sin_\alpha(n^\alpha x^\alpha),\ x\in(0,\pi). \tag{17،3}$$

بتعويض: (14،3)-(17،3) في (12،3) نجد:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}B_n\pi^{2\alpha}\sin_\alpha(n^\alpha x^\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin_\alpha(n^\alpha x^\alpha)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\frac{(2\pi)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin_\alpha(n^\alpha x^\alpha). \tag{18،3}$$

بمطابقة المعاملات لنفس الحدود في السلسلتين، ومن (18.3) نستنتج:

$$(1-n^{2\alpha})B_n = -\frac{1}{n^{\alpha}}\frac{(2\pi)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\ n=1,2,3,\dots \tag{19.3}$$

من (19.3) لدينا:

$$B_n = \frac{(2\pi)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)n^{\alpha}(n^{2\alpha}-1)}. \tag{20.3}$$

ومنه:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)n^{\alpha}(\pi^{2\alpha}-1)}\sin_{\alpha}(n^{\alpha}\pi^{\alpha}). \tag{21.3}$$

مثال 2.2.3 [33]

نعتبر معادلة لابلاس الكسرية المحلية التالية:

$$\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y)}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}u(x,y)}{\partial y^{2\alpha}} = 0. \tag{22.3}$$

والشروط الحدية تعطى كالآتي:

$$\begin{cases} u(x,0) = E_{\alpha}(x^{\alpha}), \\ u(0,y) = u(L,y) = 0, \\ \dfrac{\partial^{\alpha}u(L,0)}{\partial x^{\alpha}} = E_{\alpha}(x^{\alpha}), \\ \dfrac{\partial^{\alpha}u(L,y)}{\partial x^{\alpha}} = 0. \end{cases} \tag{23.3}$$

يمكننا إيجاد حل خاص يكتب على الشكل التالي:

$$u(x,y) = XY \tag{24.3}$$

ومنه لدينا:

$$X^{(2\alpha)}Y = -XY^{(2\alpha)} \tag{25.3}$$

نقوم بفصل المتغيرات، ومنه نجد:

$$\frac{Y^{(2\alpha)}}{Y} = -\frac{X^{(2\alpha)}}{X} = -\lambda^{2\alpha}. \tag{26.3}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$X^{(2\alpha)} + \lambda^{2\alpha}X = 0. \tag{27.3}$$

$$Y^{(2\alpha)} - \lambda^{2\alpha}Y = 0. \tag{28.3}$$

مع الشروط الحدية:

$$u(0) = u^{(\alpha)}(L) = 0 \tag{29.3}$$

ومنه الحل غير القابل للتفاضل للمعادلة (29.3) يصبح:

$$u(x) = C_1 \cos_\alpha \lambda^\alpha x^\alpha + C_2 \sin_\alpha \lambda^\alpha x^\alpha, \ (C_1, C_2 \text{ ثوابت}) \tag{30.3}$$

من أجل: $x = 0$ و $x = L$ نستنتج أن:

$$u(0) = C_1 = 0, \tag{31.3}$$
$$u(L) = u(x)\mid_{x=L} = C_2 \sin_\alpha \lambda^\alpha L^\alpha = 0. \tag{32.3}$$

نفرض أن: $C_2 \neq 0$، نلاحظ أن:

$$\lambda_n^\alpha L^\alpha = n^\alpha \pi^\alpha, \ (n \text{ عدد طبيعي}). \tag{33.3}$$

إذن:

$$\lambda_n^\alpha = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha. \tag{34.3}$$

$$X_n(x) = \sin_\alpha \lambda_n^\alpha x^\alpha = \sin_\alpha n^\alpha \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha = 0. \tag{35.3}$$

من أجل: $\lambda^\alpha = \lambda_n^\alpha$ المعادلة (30.3) تصبح:

$$Y_n(y) = A_n \cos_\alpha \lambda_n^\alpha y^\alpha + B_n \sin_\alpha \lambda_n^\alpha y^\alpha. \tag{36.3}$$

وبالتالي:

$$u_n(x,y) = \left(A_n \cos_\alpha \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha y^\alpha + B_n \sin_\alpha \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha y^\alpha\right) \sin_\alpha n^\alpha \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha. \tag{37.3}$$

وباستعمال سلاسل فوريه نستنتج أن:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos_\alpha \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha y^\alpha + B_n \sin_\alpha \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha y^\alpha\right) \sin_\alpha n^\alpha \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha. \tag{38.3}$$

نفرض أن:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin_\alpha n \left(\frac{\pi x}{L}\right)^\alpha \\ &= E_\alpha(x^\alpha). \end{aligned} \tag{39.3}$$

و:

$$\frac{\partial^\alpha u(L,0)}{\partial x^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(-A_n\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha \sin_\alpha\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha y^\alpha + B_n\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha \cos_\alpha\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha y^\alpha\Big)\sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha |_{y=0}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha \sin_\alpha n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha = E_\alpha(x^\alpha). \tag{40.3}$$

بتطبيق سلاسل فوريه الكسرية المحلية نستنتج:

$$\Gamma(1+\alpha)_0 I_L\Big\{\sin_\alpha^2 n^\alpha\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)^\alpha\Big\} = \frac{L^\alpha}{2}. \tag{41.3}$$

حيث تعطى معاملات فوريه كالآتي:

$$A_n = \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{L^\alpha}\, {}_0I_L\Big(E_\alpha(x^\alpha)\sin_\alpha\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big]\Big). \tag{42.3}$$

$$B_n = \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{a^\alpha\lambda_n^\alpha L^\alpha}\, {}_0I_L\Big(E_\alpha(x^\alpha)\sin_\alpha\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big]\Big). \tag{43.3}$$

من (30.3) و (38.3) نجد الشكل التالي:

$$u_n(x,y) = \Big\{A_n\cos_\alpha\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha y^\alpha\Big] + B_n\sin_\alpha\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha y^\alpha\Big]\Big\}\sin_\alpha\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big]. \tag{44.3}$$

حيث:

$$A_n = \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{L^\alpha}\, {}_0I_L\Big(E_\alpha(x^\alpha)\sin_\alpha\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big]\Big)$$
$$= \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{L^\alpha}\,\frac{E_\alpha(x^\alpha)\Big[\sin_\alpha\Big(\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big) - \Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha\cos_\alpha\Big(\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big)\Big] + \Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha}{1+\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^{2\alpha}} \tag{45.3}$$

و:

$$B_n = \frac{(n\pi)^\alpha\Gamma(1+\alpha)}{2}\, {}_0I_L\Big(E_\alpha(x^\alpha)\sin_\alpha\Big[\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big]\Big)$$
$$= \frac{(n\pi)^\alpha\Gamma(1+\alpha)}{2}\,\frac{E_\alpha(x^\alpha)\Big[\sin_\alpha\Big(\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big) - \Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha\cos_\alpha\Big(\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha x^\alpha\Big)\Big] + \Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^\alpha}{1+\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^{2\alpha}} \tag{46.3}$$

ومنه:

$$u_n(x,y)=\left(A_n\cos_\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha y^\alpha+B_n\sin_\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha y^\alpha\right)\sin_\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha x^\alpha$$
$$=\frac{\Gamma(1+\alpha)E_\alpha(x^\alpha)\left[\sin_\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha x^\alpha\right)-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha\cos_\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha x^\alpha\right)\right]+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha}{1+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2\alpha}}\times \tag{47.3}$$
$$\sin_\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha x^\alpha\right)\left[\frac{2}{L^\alpha}\cos_\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha+\frac{(n\pi)^\alpha}{2}\sin_\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha y^\alpha\right].$$

من (47.3) نستنتج أن حل سلسلة فوريه الكسرية المحلية يكون كالآتي:

$$u(x,y)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_\alpha(x^\alpha)\left[\sin_\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha x^\alpha\right)-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha\cos_\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha x^\alpha\right)\right]+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha}{1+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2\alpha}}\times \tag{48.3}$$
$$\Gamma(1+\alpha)\sin_\alpha\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha x^\alpha\right)\left[\frac{2}{L^\alpha}\cos_\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha+\frac{(n\pi)^\alpha}{2}\sin_\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha y^\alpha\right]$$

3.3 حل (م.ت.ع) و (م.ت.ج) باستعمال تحويل فوريه الكسري المحلي

مثال 1.3.3 [33]
نعتبر المعادلة التفاضلية العادية التالية:

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}+u(t)=\delta_\alpha(t),\ t>0. \tag{49.3}$$

حيث:

$$_{-\infty}I_{\infty}^{(\alpha)}\delta_\alpha(t)=1,$$

$$u(0)=1.$$

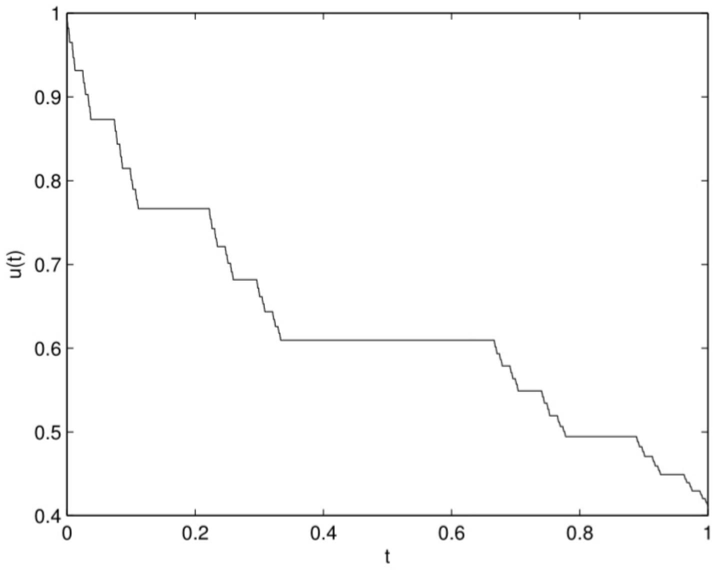
من (25.2) و (49.3) نجد:

$$u_\omega^{F,\alpha}(\omega)=\frac{1}{i^\alpha\omega^\alpha+1}. \tag{50.3}$$

بتطبيق تحويل فوريه العكسي على (50.3) نجد:

$$u(t)=E_\alpha(-t^\alpha). \tag{51.3}$$

والحل موضح في الشكل (1.3) أدناه.



شكل 1.3: منحنى (51.3) من أجل $\alpha = \ln 2/\ln 3$

مثال 2.3.3 [33]
نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية المحلية التالية:

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{\alpha}}u(x,t) + \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{\alpha}}u(x,t) = 0,\ t > 0. \tag{52.3}$$

حيث:

$$u(x,0) = E_{\alpha}(-x^{\alpha}),$$

$$_{-\infty}I_{\infty}^{(\alpha)}\delta_{\alpha}(t) = 1.$$

من (25.2) و (52.3) لدينا:

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{\alpha}}u_{\omega}^{F,\alpha}(\omega,t) + i^{\alpha}\omega^{\alpha}u_{\omega}^{F,\alpha}(\omega,t) = 0, \tag{53.3}$$

و:

$$u_{\omega}^{F,\alpha}(\omega,0) = \frac{1}{1+i^{\alpha}\omega^{\alpha}}. \tag{54.3}$$

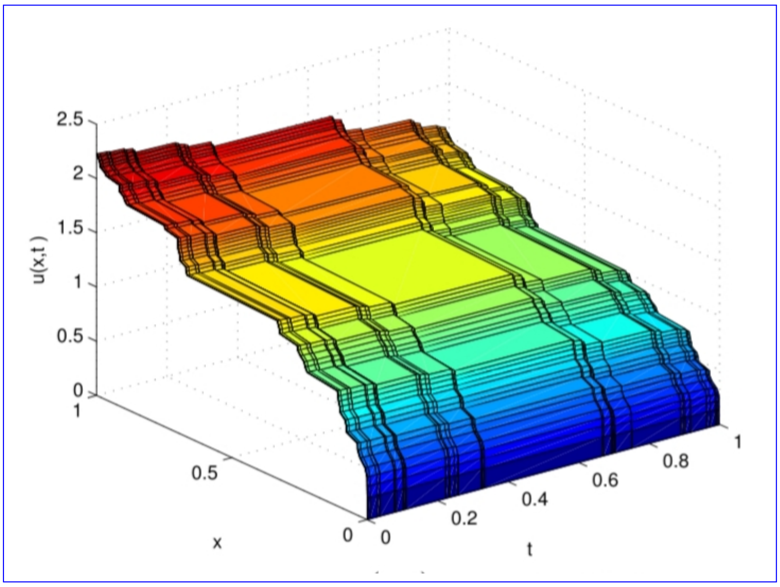
من (53.3) و (54.3) لدينا:

$$u_{\omega}^{F,\alpha}(\omega,t) = \frac{1}{1+i^{\alpha}\omega^{\alpha}}E_{\alpha}(-i^{\alpha}\omega^{\alpha}t^{\alpha}). \tag{55.3}$$

بتطبيق تحويل فورييه العكسي الكسري المحلي على (55.3) نجد:

$$u(x,t) = E_{\alpha}(-x^{\alpha})E_{\alpha}(t^{\alpha}). \tag{56.3}$$

والحل موضح في الشكل (2.3) أدناه.



شكل 2.3: منحنى (56.3) من أجل $\alpha = \ln 2 / \ln 3$

4.3 حل (م.ت.ع) و (م.ت.ج) باستعمال تحويل لابلاس الكسري المحلي

مثال 1.4.3 [33]
نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^{\alpha}u(t)}{dt^{\alpha}} - u(t) = 1, \ t > 0. \tag{57.3}$$

والشرط الإبتدائي:

$$u(0) = 1.$$

بتطبيق (28.2) على (57.3) نجد:

$$s^{\alpha}u_s^{L,\alpha}(s) - x(0) - u_s^{L,\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}}. \tag{58.3}$$

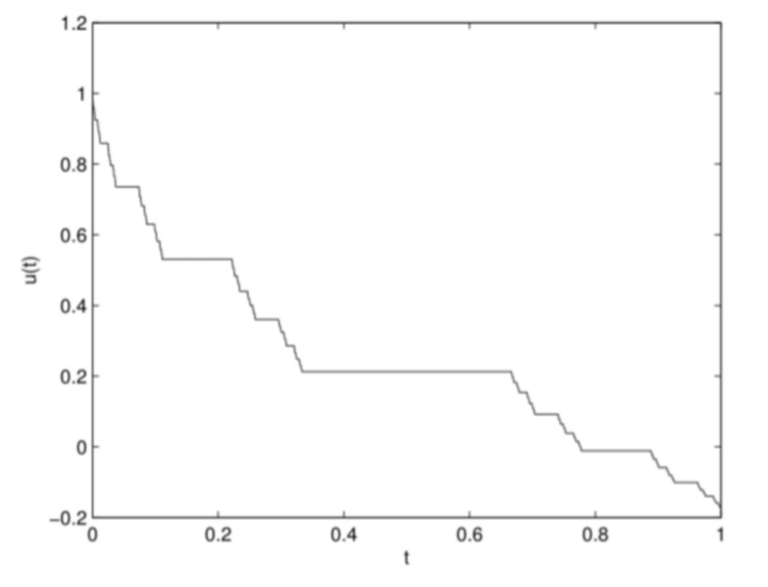
من (58.3) لدينا:

$$u_s^{L,\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}-1} + \frac{1}{s^{\alpha}(s^{\alpha}-1)}. \tag{59.3}$$

باستعمال (27.2)، حل المعادلة (57.3) يمكن كتابته كما يلي:

$$u(t) = 2E_{\alpha}(t^{\alpha}) - 1. \tag{60.3}$$

والحل موضح في الشكل (3.3) أدناه.



شكل 3.3: منحنى (60.3) من أجل $\alpha = \ln 2/\ln 3$

مثال 2.4.3 [33]
نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{\alpha}\partial x^{\alpha}}u(x,t) = -\sin_{\alpha}(t^{\alpha}),\ t>0. \tag{61.3}$$

والشرطين الحديين الإبتدائيين التاليين:

$$u(x,0) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},$$

$$u(0,t) = 0.$$

باستعمال (28.2) نجد:

$$\frac{d^{\alpha}u_s^{L,\alpha}(x,s)}{dx^{\alpha}} = \frac{s^{\alpha}}{s^{2\alpha}+1},$$

$$u_s^{L,\alpha}(0,s) = 0. \tag{62.3}$$

ومنه لدينا:

$$u_s^{L,\alpha}(x,s) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{s^{\alpha}}{s^{2\alpha}+1} + A,\ (A \text{ ثابت}) \tag{63.3}$$

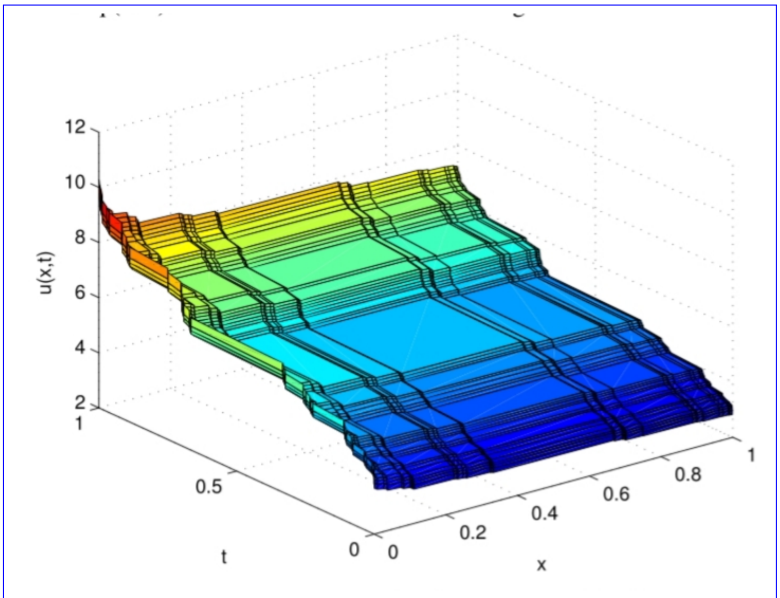
من (62.3)، (63.3) تصبح:

$$u_s^{L,\alpha}(x,s) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{s^{\alpha}}{s^{2\alpha}+1}. \tag{64.3}$$

ومنه الحل غير القابل للتفاضل للمعادلة (61.3) يكون كالآتي:

$$u(x,t)=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\cos_{\alpha}(t^{\alpha}). \tag{65.3}$$

والحل موضح في الشكل (4.3) أدناه.



شكل 4.3: منحنى (65.3) من أجل $\alpha=\ln 2/\ln 3$

5.3 حل مسائل القيمة الإبتدائية

في هذا الجزء سنطبق تحويل سومودو الكسري المحلي الذي تطرقنا إليه في الفصل الثاني لحل بعض مسائل القيمة الإبتدائية.

مثال 1.5.3 [35]

نعتبر مسألة القيمة الإبتدائية التالية:

$$\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}=f(x), \tag{66.3}$$

والتي تخضع لشرط القيمة الإبتدائية التالي:

$$f(0)=5. \tag{67.3}$$

بتطبيق تحويل سومودو الكسري المحلي نجد:

$$\frac{F_{\alpha}(z)-f(0)}{z^{\alpha}}=F_{\alpha}(z), \tag{68.3}$$

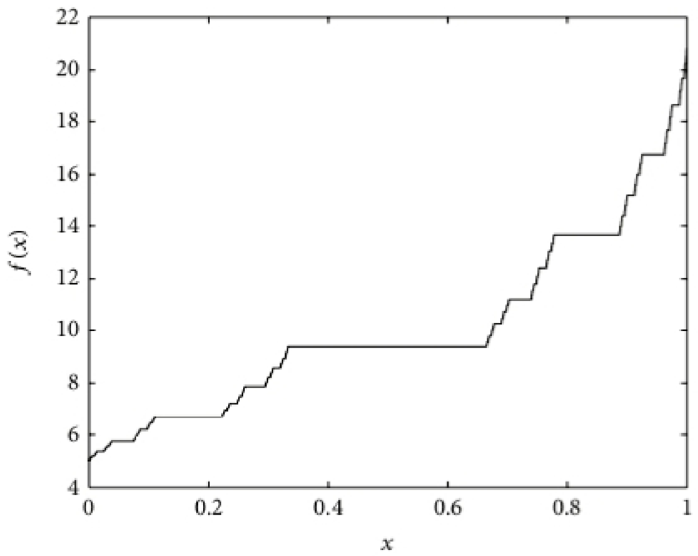
حيث: $LFS_{\alpha}\{f(x)\}=F_{\alpha}(z)$ ، من (68.3) نجد:

$$F_{\alpha}(z)=\frac{5}{1-z^{\alpha}}. \tag{69.3}$$

ومن (69.3) نستنتج أن:

$$f(x) = 5E_\alpha(x^\alpha). \tag{70.3}$$

والحل موضح في الشكل (5.3) أدناه.



شكل 5.3: منحنى (70.3) من أجل $\alpha = \ln 2/\ln 3$

مثال 2.5.3 [35]
نعتبر مسألة القيمة الإبتدائية التالية:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} + f(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{71.3}$$

وشرط القيمة الإبتدائية التالي:

$$f(0) = -1. \tag{72.3}$$

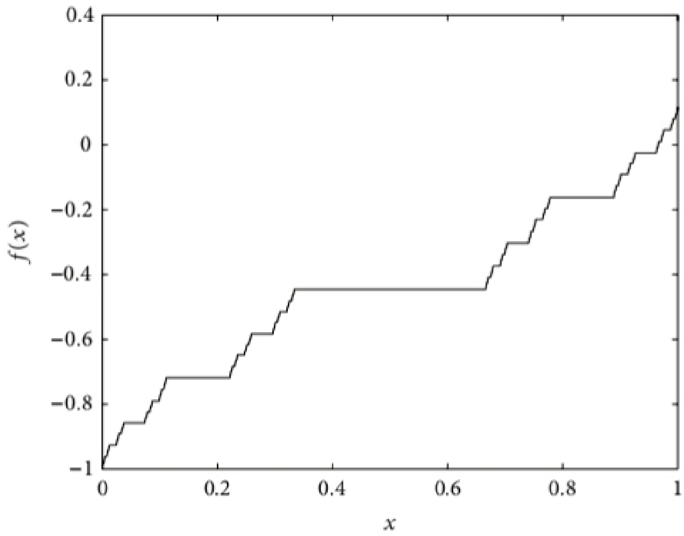
بتطبيق تحويل سومودو الكسري المحلي على (71.3) و (72.3) نجد:

$$\frac{F_\alpha(z) - f(0)}{z^\alpha} + F_\alpha(z) = z^\alpha. \tag{73.3}$$

ومنه: $F_\alpha(z) = z^\alpha - 1$.
إذن الحل غير القابل للتفاضل لـ (71.3) هو:

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 1. \tag{74.3}$$

والموضح في الشكل (6.3) أدناه.



شكل 6.3: منحنى (74.3) من أجل $\alpha = \ln 2/\ln 3$

خاتمة

قدمنا في هذه المذكرة التعاريف والنظريات الأساسية للحساب الكسري المحلي في الفصل الأول، كما استعرضنا باختصار المعادلات التفاضلية، سلاسل وتحويل فورييه، تحويل لابلاس وتحويل سومودو، وتحويلاتها العكسية، كل ذلك بالمفهوم الكسري المحلي في الفصل الثاني، وفي الأخير طبقنا ما درسناه في الفصلين السابقين، حيث رأينا بعض الأمثلة لتطبيقات الحساب الكسري المحلي في إعطاء نتائج جيدة وذلك بتطبيقه على معادلة الموجة، المعادلات التفاضلية العادية والجزئية ومسائل القيمة الإبتدائية.

وختاما نرجوا أن نكون قد وفقنا ولو بالقليل في تسليط الضوء على أهمية هذا الموضوع، آملين أن نفتح بهذا العمل آفاقا جديدة للراغبين في دراسته والتوسع فيه.

ونسأل الله التوفيق والسداد، فإن أصبنا فمن الله تعالى وإن أخطأنا فذلك من أنفسنا والشيطان فلنا شرف المحاولة والتعلم، ولكل شيء إذا ما تم نقصان.

يقول "ويليس كارير": ❀ من الكمال أن تدرك نقصك، ومن النقص أن تظن بأنك كامل ❀

والله من وراء القصد.

المراجع العلمية

[1] S. Wei-Hua, H. Jafari, D. Baleanu, *(2013), "Fractional Complex Transform Method for Wave Equations on Cantor Sets within Local Fractional Differntial Operator", Advances in Difference Equations, 2013:97.*

[2] Y. Yang-Li, Y. Zhao, G.N. Xie, D. Baleanu, X.J. Yang, K. Zhao, *(2014), "Local Fractional Poisson and Laplace Equations with Applications to Electrostatics in Fractal Domain", Advances in Mathematical Physics, vol. 2014,590574.*

[3] T.M. Atanockovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, D. Zorica, *(2014), "Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes", 1 Edition, doi:10.1002/9781118577530.biblio.*

[4] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, *(2010), "Stability of Fractional-Order Nonlinear Dynamic Systems: Lyapunov Direct Method and Generalized Mittag-Leffler Stability", Computers and Mathemtics with Applications 59, 1810-1821.*

[5] D. Baleanu, Z.B. Güvenc, J.A.T. Machado, *(2010), "New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications", Springer.*

[6] R.L. Magin, *(2006), "Fractional Calculus in Bioengineering", Begell House Publishers Inc, U.S, Illustrated Edition.*

[7] R.L. Bagley, *(1983), "Fractional Calculus- A Different Approach to the Analysis of Viscoelasticaly Damped Structers", AIAA Journal, vol:21, no:5.*

[8] I. Podlubny, T. Škovrănek, I. Petrăš, *(2012), "Modeling of the National Economies in State-space: A Fractional Calculus Approach", Economic Modelling, vol:29, Issue 4.*

[9] G.S.F. Frederico, F.M. Torres, *(2008), "Fractional Conservation Laws in Optimal Control Theory", Nonlinear Dynamics, vol:35.*

[10] M.S. Hu, D. Baleanu, X.J. Yang, *(2013), "One-Phase Problems for Discontinuous Heat Transfer in Fractal Media", Mathematical Problems in Engineering and Company, New York, 1 Edition.*

[11] B.B. Mandelbrot, *(1982), "The Fractal Geometry of Nature", W.H. Freeman and Company, New York, 1 Edition.*

[12] X.J. Yang, *(2012), "Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications", World Science, New York.*

[13] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal, *(1996), "Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions", Chaos 6(4).*

[14] Y. Zhao, D. Baleanu, C. Cattani, D.F. Cheng, X.J. Yang, *(2013), "Maxwell's Equations on Cantor Set: A Local Fractional Approach", Advances in High Energy Physics, vol. 2013.686371.*

[15] X.J. Yang, D. Baleanu, J.A.T. Machdo, *(2013), "Mathematical Aspects of the Heisenberg Uncertainty Principale within Local Fractional Fourier Analysis", Boundary Value Problems, 2013-131.*

[16] X.J. Ma, H.M. Srivastava, D. Baleanu, X.J. Yang, *(2013), "A New Neumann Series Methode for solving a Family of Local Fractional Fredholm and Volterra Integral Equations", Mathematical Problems in Engineering, vol. 2013,325121.*

[17] Y.J. Hao, H.M. Srivastava, H. Jafari, X.J. Yang, *(2013), "Helmholtz and Diffusion Equations Associated with Local Fractional Derivative Operators Involving the Cantorian and Cantor-Type Cylindrical Coordinates", Advances in Mathematical Physics, vol. 2013,754248.*

[18] Y. Zhao, D. Baleanu, C. Cattani, D.F. Cheng, X.J. Yang, *(2013), "Local Fractional Discrete Wavelet Transform for Solving Signals on Cantor Set", Mathematical Problems in Engeneering, vol.2013,560932.*

[19] D. Baleanu, J.A.T. Machado, C. Cattani, M.C. Baleanu, X.J. Yang, *(2014), "Local Fractional Variational Iteration and Decomposition Methods for Wave Equation on Cantor Sets within Local Fractional Operators", Abstract and Applied Analysis, vol. 2014,535048.*

[20] X.J. Yang, D. Baleanu, Y. Kahn, S.T. Mohyud-din, *(2014), "Local Fractional Variational Iteration Method for Diffusion and Wave Equations on Cantor Sets", Romanian Journal of Physics, vol. 59.*

[21] X.J. Yang, D. Baleanu, J.H. He, *(2013), "Transport Equations in Fractal Porous Media within Fractional Complex Transform Method", Proceedings of Romanian Academy, Series A, vol.14.*

[22] Y. Zhao, D.F. Cheng, X.J. Yang, *(2013), "Approximation Solutions for Local Fractional Schrödinger Equation in the One-Dimensional Cantorian System", Advances in Mathematical Physics, vol. 2013,291386.*

[23] K.B. Oldham, J. Spanier, *(1974), "The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order", Academic Press Inc.*

[24] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *(1999), "Special Functions", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press.*

[25] X.J. Yang, D. Baleanu, H.M. Srivastava, *"Local Fractional Integral Transforms and Their Applications", Elsevier.*

[26] A.M. Kareem, *"A new Definition of Fractional Derivative and Fractional Integral", KUJSS, Volume 13, Issue 1, March 2018.*

[27] Z. Guo, *"Cantor Set and Its Properties", University of California, Santa Barbara, April 23, 2014.*

[28] X.J. Yang, *(2012), "Local Fractional Integral Equations and Their Applications", ACSA, vol 1, No 4 World Science, US.*

[29] X.J. Yang, *(2011), "Local Fractional Functional Analysis and Its Applications", Asian Academic Publisher Limited, Hong Kong.*

[30] X.J. Yang, *(2012), "A Short Note on Local Fractional Calculus of Function of one Variable", Journal of Applied Library and Information Science, vol.1, no.1.*

[31] F.B. Adda, J. Cresson, *(2000), "Divergence D'échelle et Différentiabilité", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, vol.330(1).*

[32] X.J. Yang, *(2010), "Applications of Local Fractional Calculus to Engineering in Fractal Time-Space: Local Fractional Differntial Equations with Local Fractional Derivative", arXiv:1106.3010.*

[33] X.J. Yang, D. Baleanu, J.A.T. Machado, *"On Analytical Methods for Differntial Equation with Local Fractional Derivative Operators", 26 April 2017.*

[34] H.K. Jassim, C. Ünlü, S.P. Moshokoa, C.M. Khalique, *(2015), "Local Fractional Laplace Variational Iteration Method for Solving Diffusion and Wave Equations on Cantor Sets within Local Fractional Operators", Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015, Article ID 309870.*

[35] H.M. Srivastava, A.K. Golmankhaneh, D. Baleanu, X.J. Yang, *(2014), "Local Fractional Sumudu Transform with Application to IVPs on Cantor Sets", Abstract and Applied Analysis, vol.2014,620529.*

[36] Y. Yang, D. Baleanu, X.J. Yang, *(2013), "Analysis of Fractal Wave Equations by Local Fractional Fourier Series Methode", Advances in Mathematical Physics, vol. 2013,632309.*

ملحق

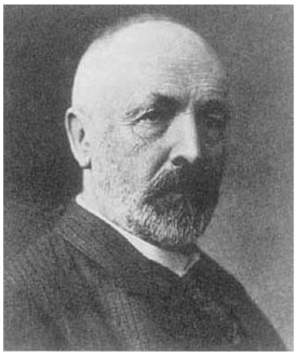
بنوا ماندلبروت

بنوا ماندلبروت (بالفرنسية: *Benoît B. Mandelbrot*)

عالم رياضياتي من أصل بولندي ولد في 20 نوفمبر1924م، عمل بالعديد من المجالات الرياضيتية مثل الفيزياء الرياضية والرياضيات المالية، وأكثر ما يعرف به هو أنه مؤسس علم الهندسة الكسيرية، حيث وضع أهم قواعدها وأسسها، كما ابتكر مجموعة ماندلبرو.

من أشهر أعماله كتاب *The Fractal Geometry of Nature*.

توفي في 14 أكتوبر 2010م عن عمر يناهز 85 سنة.



جورج كانتور

جورج كانتور (بالأنجليزية: *Georg Cantor*)

عالم رياضياتي وفيلسوف من أصل ألماني ولد في 3 مارس1845م، يعتبر واضع نظرية المجموعات الحديثة، كما عرف المجموعات اللانهائية والمتسقة، ونظرية كانتور التي تسلتزم وجود عدد غير منته من اللانهاية، وكذا الأرقام الكمية والترتيبية وطرق الحساب الخاصة بها، ويعرف عن أعماله أنها ذات قيمة فلسفية عالية ولاقت أفكاره معارضة كبيرة من قبل الرياضيين في عصره.

توفي في 6 جانفي 1918م عن عمر يناهز 72 سنة.

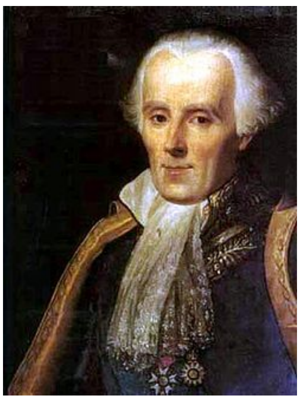
جوزيف فورييه

جوزيف فورييه (بالفرنسية: *Joseph Fourier*)

عالم رياضياتي وفيزيائي من أصل فرنسي ولد في 21 مارس1768م، تتلمذ على يدي جوزيف لوي لاغرانج، ومن أشهر طلبته غوستاف ودريكليه، وبالإضافة إلى كونه رياضياتيا وفيزيائيا فقد كان مؤرخا وعالم آثار وحاكما ومهندسا.

من أبرز أعماله نجد سلاسل وتحويل فورييه ومعادلة الحرارة.

توفي في 16 ماي 1830م عن عمر يناهز 62 سنة.



بيير لابلاس

بيير لابلاس (بالفرنسية: *Pierre-Simon de Laplace*)

عالم رياضياتي وفلكي من أصل فرنسي ولد في 23 مارس1749م، كان لأعماله حول تطور الرياضيات الفلكية فضل كبير، حيث لخص ووسع أعمال سابقيه في هذا المجال في مؤلف مكون من خمس مجلدات بعنوان *Mécanique Céleste*، والذي حول دراسة الهندسة من الطريقة التقليدية إلى طريقة تعتمد على التفاضل والتكامل.

من أبرز أعماله نجد معادلة وتحويل لابلاس ومعامل لابلاس التفاضلي، كما طور الفرضية السديمية في نشأة النظام الشمسي، وكان من الأوائل الذين افترضوا وجود الثقوب السوداء وفكرة الإنهيار الجاذبي.

توفي في 5 مارس 1827م عن عمر يناهز 77 سنة.

جدول 1.3: جدول تحويل فورييه الكسري المحلي لبعض الدوال

الدالة	تحويلها
1	$\dfrac{(2\pi)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\delta_{\alpha}(\omega)$
$\delta_{\alpha}(x)$	1
$\delta_{\alpha}^{(\alpha)}(x)$	$i^{\alpha}\omega^{\alpha}$
$E_{\alpha}(-cx^{2\alpha})$	$\dfrac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{c}}}{\Gamma(1+\alpha)}E_{\alpha}\left[-\frac{1}{c}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha}\right]$
$E_{\alpha}(-x^{2\alpha})$	$\dfrac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1+\alpha)}E_{\alpha}\left[-\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2\alpha}\right]$
$\sin_{\alpha}(c^{\alpha}x^{\alpha})$	$\dfrac{(2\pi)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\dfrac{[\delta_{\alpha}(\omega+c)-\delta_{\alpha}(\omega-c)]}{2i^{\alpha}}$
$\cos_{\alpha}(c^{\alpha}x^{\alpha})$	$\dfrac{(2\pi)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\dfrac{[\delta_{\alpha}(\omega+c)+\delta_{\alpha}(\omega-c)]}{2}$
x^{α}	$\dfrac{(2\pi i)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\delta_{\alpha}^{(\alpha)}(\omega)$

جدول 2.3: جدول تحويل لابلاس الكسري المحلي لبعض الدوال

الدالة	تحويلها
1	$\dfrac{1}{s^{\alpha}}$
$\delta_{\alpha}(x)$	1
$x^{-\frac{\alpha}{2}}$	$\dfrac{\Gamma(1+2\alpha)}{2\Gamma^{3}(1+\alpha)}\left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$
$E_{\alpha}(c^{\alpha}x^{\alpha})$	$\dfrac{1}{s^{\alpha}-c^{\alpha}}$
$\cos_{\alpha}(\eta^{\alpha}x^{\alpha})$	$\dfrac{s^{\alpha}}{s^{2\alpha}+\eta^{2\alpha}}$
$\sin_{\alpha}(\eta^{\alpha}x^{\alpha})$	$\dfrac{\eta^{\alpha}}{s^{2\alpha}+\eta^{2\alpha}}$
$\dfrac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}$	$\dfrac{1}{s^{\alpha(k+1)}}$
$\dfrac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}E_{\alpha}(c^{\alpha}x^{\alpha})$	$\dfrac{1}{(s-c)^{\alpha(k+1)}}$

جدول 3.3: جدول تحويل سومودو الكسري المحلي لبعض الدوال

تحويلها	الدالة
a	a
z^{α}	$\dfrac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$
$\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(1+k\alpha)a_k z^{\alpha k}$	$\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{\alpha k}$
$\dfrac{1}{1-cz^{\alpha}}$	$E_{\alpha}(cx^{\alpha})$
$\dfrac{cz^{\alpha}}{1+c^2z^{2\alpha}}$	$\sin_{\alpha}(cx^{\alpha})$
$\dfrac{1}{1+c^2z^{2\alpha}}$	$\cos_{\alpha}(cx^{\alpha})$

حول الحساب الكسري المحلي وتطبيقاته

الملخص

يعتبر الحساب الكسري المحلي فرعا جديدا من فروع الرياضيات، حيث حظي باهتمام العديد من الباحثين نظرا لأهميته في حل مسائل عجز الحساب الكلاسيكي عن حلها خاصة فيما يتعلق بالدوال غير القابلة للتفاضل، وكذا لإمكانية تطبيقه في نمذجة وحل مشاكل العالم الحقيقي.

إن الهدف من هذه المذكرة هو إعطاء أهم التعاريف والنظريات المتعلقة بالحساب الكسري المحلي، وبيان أهمية هذا الأخير في الحصول على نتائج جيدة وأكثر دقة، من خلال تطبيقه على بعض المعادلات الرياضية والفيزيائية كمعادلة الموجة، (م.ت.ع) و (م.ت.ج) ومسائل القيمة الإبتدائية.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري المحلي، الإشتقاق الكسري المحلي، التكامل الكسري المحلي، سلاسل فورييه، تحويل فورييه، تحويل لابلاس، تحويل سومودو، معادلة الموجة، (م.ت.ع) و (م.ت.ج)، مسائل القيمة الإبتدائية، مجموعة كانتور.

About the local fractional calculus and Its applications

Abstract

The local fractional calculus is a new branch of mathematics, and it has taken a lot of attention of many researchers due to its importance in solving problems of classical calculus inability to solve them, especially with regard to non-differntial functions, as well as its applicability to modeling and solving real-world problems.

The aim of this thesis is to give the most important definitions and theories related to the local fractional calculus, and the importance of the latter in obtaining good and more accurate results by applying it to some mathematical and physical equations, such as wave equation, ODEs and PDEs, initial value problems.

Key words: *Local fractional calculus, local fractional derivative, local fractional integral, wave equation, Fourier series, Fourier transforms, Laplace transforms, Sumudu transforms, ODEs and PDEs, IVP, Cantor set.*

Á propos du calcul fractionnaire local et ses applications

Résumé

Le calcul fractionnaire local est une nouvelle branche des mathématique, car il a attiré l'attention de nombreux chercheurs en raison de son importance dans la résolution de problèmes d'incapacité calcul classique à les résoudre, en particulier en ce qui concerne les fonctions non différentiable, ainsi que de son applicabilité à la modélisation et à la résolution de problèmes du monde réel.

L'objectif de cette thèse est de donner les définitions et les théories les plus importantes liées au calcul fractionnaire local, et l'importance de ce dernier pour obtenir des bons résultats et plus précis en l'appliquant à certaines équations mathématiques et physique, telles que l'équation d'onde, EDOs et EDPs, problèmes de valeur initiale.

Mots clés: *Calcul fractionnaire local, la dérivation fractionnaire local, l'intégration fractionnaire local, l'équation d'onde, séries de Fourier, transformation de Fourier, transformation de Laplace, transformation de Sumudu, EDOs et EDPs, PVI, ensemble de Cantor.*