RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER
EN
MATHÉMATIQUES

OPTION
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

INTITULÉ

Structures géométriques sur les variétés

PAR
Imane HEDDAR

Devant le jury :

Mohamed BOUSSAID	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Mohamed Tayeb BENMOUSSA	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mohamed Amine BAHAYOU	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

Soutenu publiquement le : 01-10-2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :
Mes très chers parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi depuis ma naissance jusqu'aujourd'hui ;
Mon frère Saber et mes sœurs ;
À toute ma famille, source d'espoir et de motivation ;
À Mon encadreur Mohammed Amine Bahayou ;
À tous mes profs ;
À toutes mes amies surtout : Intissar, Salima, Ibtissam, Kholoude, Zineb, Izdihar, Kalthoume et Ikhlass ;
À vous, cher lecteur.

Imane Heddar.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le Grand Dieu le tout puissant de m'avoir aidé à achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à Monsieur **Mohamed Amine BAHAYOU**, mon encadreur, pour le temps qu'il a si généreusement consacré à mon apprentissage. Je le remercie pour la grande liberté qu'il m'a accordée durant la préparation de ce mémoire, tout en me guidant par ses conseils et ses encouragements.

Je souhaite également remercier chaque membre de mon jury d'avoir accepté d'assister la présentation, et pour leur lecture attentive de mon travail en commençant par Monsieur **Mohamed BOUSSAID** de m'avoir honoré par la présidence du jury de mon mémoire. Mes remerciements vont aussi à Monsieur **Mohamed Tayeb BENMOUSSA** qui a accepté la tâche d'examinateur.

Je remercie également mes parents de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les professeurs qui m'ont enseigné et qui par leurs compétences m'ont soutenu dans mon cursus.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des figures

Introduction

Le concept de structure géométrique est une formalisation de la notion de géométrie selon Klein, qui définit la géométrie comme l'étude des invariants d'un espace sous l'action d'un groupe. Ainsi une géométrie est une paire (G, X) où X est une variété différentielle et G un groupe de Lie dont l'action sur X est fidèle.

À partir d'une géométrie (G, X) on peut donner à une variété M de même dimension que X une structure géométrique locale associée, en munissant M d'un atlas de cartes où les cartes sont à valeurs dans X et les changements de cartes sont donnés par des restrictions d'éléments de G. On impose aussi que l'action de G sur X soit analytique, c'est-à-dire que deux éléments de G agissant de la même manière sur un ouvert non vide sont égaux. On appelle alors M une (G, X)-variété.

La donnée d'une (G, X)-structure sur une variété M est équivalente à la donnée d'un couple (D, ρ) où $\rho : \pi_1(M) \to G$ est une représentation du groupe fondamental de M qu'on appelle *holonomie* et D est un difféomorphisme local ρ-équivariant du revêtement universel de M dans X qu'on appelle *développante*. Plus précisément, la classe modulo G pour l'action $g\cdot(D, \rho) = (g\circ D, g\cdot\rho)$ (où l'action sur les représentations est par conjugaison) caractérise la (G, X)-structure.

Le problème principal dans la théorie des (G, X)-structures est de comprendre, étant donnée une variété M, toutes les (G, X)-structures dont on peut munir M. Pour cela on introduit l'ensemble des (G, X)-structures sur M que l'on note $\mathscr{M}_{(G,X)}(M)$. Cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des couples développante/holonomie ou l'ensemble des triplets fibré/connexion/section. Ces ensembles peuvent être munis de topologies naturelles qui sont compatibles avec les différentes identifications.

Le résultat général qui décrit comment une (G, X)-structure dépend localement de son holonomie, s'énonce comme suit :

Théorème

Soit M une variété munie d'une (G, X)-structure V et ρ son holonomie. Alors, pour toute représentation ρ_0 assez proche de ρ (pour la topologie compacte ouverte de $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$) il existe une (G, X)-structure sur M dont ρ_0 est l'holonomie. De plus, pour toute (G, X)-structure W sur M assez proche de V, si les deux structures ont des holonomies conjuguées, alors V et W sont isotopes.

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre sur la notion de structure géométrique, la développante et l'holonomie.

2. Deuxième chapitre, sur la déformation des structures géométriques, sur la notion de G-fibrés et le Théorème d'Ehresmann-Thurston.

3. Une annexe qui regroupe des notions de topologie algébrique et quelques résultats sur l'action d'un groupe de Lie sur une variété.

Nous terminons par une petite bibliographie de la littérature qui traite ce thème plus en détail.

Table des matières

Chapitre

1 Structures géométriques sur les variétés

1.1 (G, X)-structures

Soit X une variété différentielle connexe et G un groupe de Lie agissant fidèlement sur X. En d'autres termes, on identifie G à un sous-groupe du groupe $\mathsf{Diff}(X)$ des difféomorphismes de X. On suppose que G satisfait la condition de rigidité suivante :

$$\text{Pour tous } g, h \in G, \text{ s'il existe un ouvert } U \subset X \text{ tel que } g|_U = h|_U \text{ alors } g = h.$$

Définition 1.1. *Une (G, X)-structure sur une variété M est la donnée d'un atlas (U_i, φ_i), où $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M, $\varphi_i : U_i \longrightarrow X$ est un homéomorphisme sur son image où les applications de changement de cartes*

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

sont des restrictions d'éléments de G.

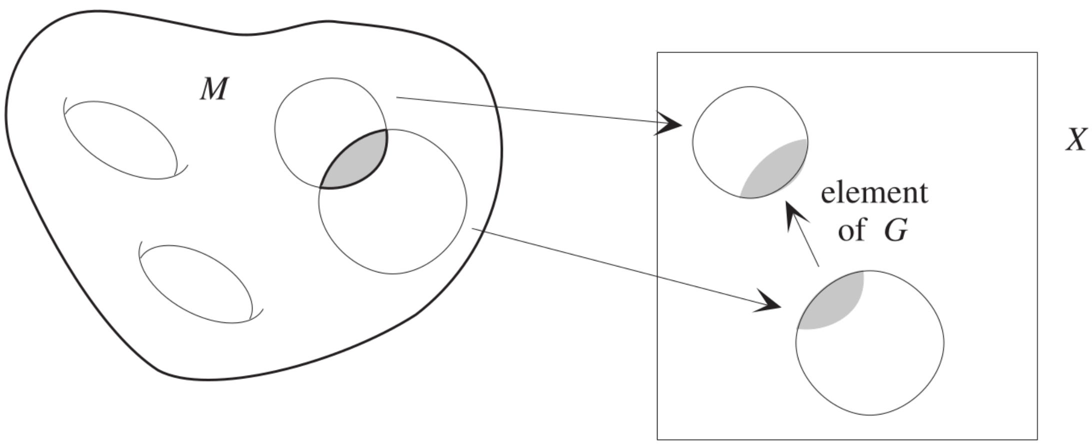

Fig. 1.1 : Le changement de cartes de la (G, X)-structure sur M.

[0]Appelée aussi condition analytique, par analogie au principe du prolongement analytique.

Exemples. 1. *X est une (G, X)-structure.*

2. *Le groupe additif $\mathbb{Z}$ agit sur la variété $\mathbb{R}$ par translations. Le cercle $\mathsf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est muni d'une $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$-structure.*

3. *Le tore $\mathsf{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ porte une $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$-structure.*
Voir la preuve de la proposition (1).

Morphisme de (G, X)-structures

Soient M et N deux (G, X)-variétés et soit $f : M \to N$ une application lisse. On dit que f est un (G, X)-morphisme si autour de tout point p de M, il existe une carte (U, φ), et une carte (V, ψ) avec $f(U) \subset V$ telle que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = g \text{ pour un élément } g \in G.$$

En particulier, f est un difféomorphisme local.

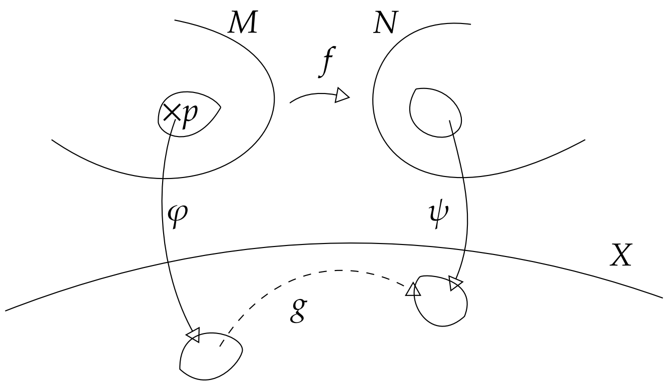

Fig. 1.2 : f est un (G, X)-morphisme

Si M est une (G, X)-variété, son groupe d'automorphismes est constitué de (G, X)-morphismes qui sont des difféomorphismes de M :

$$\mathsf{Aut}_{(G,X)}(M) = \Big\{f : M \to M,\ (G, X) - \text{morphisme bijectif}\Big\}.$$

La proposition suivante donne un outil important pour construire des exemples intéressants de variétés portant des structures géométriques.

Proposition 1. *Soit N une (G, X)-variété et $f : M \to N$ un difféomorphisme local.*

- *Il existe une unique (G, X)-structure sur M pour laquelle f est un (G, X)-morphisme.*

- *Réciproquement, si M est une (G, X)-variété sur laquelle un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathsf{Aut}_{(G,X)}(M)$ agit proprement et librement. Alors M/Γ est une (G, X)-variété et le revêtement*

$$p : M \to M/\Gamma,$$

est un (G, X)-morphisme.

1.2 Application développante et holonomie

Application développante

Le fait suivant est essentiel dans l'étude des (G,X)-structures.

Proposition 2 (Propriété de prolongement unique). *Soient M et N deux (G,X)-variétés et $f_1, f_2 : M \to N$ deux (G,X)-morphismes. Si M est connexe, alors f_1 et f_2 sont égaux si et seulement s'ils coïncident localement.*

Démonstration. Soit S l'ensemble de tous les points de M qui ont un voisinage ouvert dans lequel f_1 et f_2 coïncident. Nous allons montrer que S est à la fois ouvert et fermé dans M, ce qui entrainera la proposition. Soit $x \in S$ et soit U un voisinage ouvert de x, tel que $f_1|_U = f_2|_U$. On a $U \subset S$ ce qui signifie que S est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire que S est ouvert. Soit $x \notin S$. Si $f_1(x) \neq f_2(x)$, on peut trouver un voisinage U de x tel que $f_1(U) \cap f_2(U) = \emptyset$. Donc $U \cap S = \emptyset$ et S est fermé. Supposons que $f_1(x) = f_2(x)$. Soit (U, φ) une carte locale autour de x. Quitte à rétrécir U on peut supposer que $f_1(U)$ et $f_2(U)$ sont contenus dans le domaine W d'une carte locale (W, ψ) de N. On a $U \cap S = \emptyset$. Supposons par contradiction qu'il existe $x_0 \in U$ qui a un voisinage ouvert V dans lequel f_1 et f_2 coïncident. Nous pouvons toujours réduire V et supposons que $V \subset U$. Par construction les cartes $g_i = \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(V) \to \psi(W)$, $i = 1,2$ coïncident donc ils doivent s'étendre à la même carte sur X. Par conséquent, ils sont égaux sur l'ensemble $\varphi(U)$, ce qui signifie qu'en particulier f_1 et f_2 coïncident sur U. Ceci est en contradiction avec le fait que $x \notin S$. Par conséquent, $U \cap S = \emptyset$ et S est fermé. □

Étant donnée une (G,X)-structure sur une variété différentielle M, le principe de prolongement analytique permet de passer aux coordonnées globales et définir une application dite *développante*

$$\mathsf{dev} : \widetilde{M} \to X$$

définie sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M.

Soit $\gamma : I = [0,1] \to M$ un chemin différentiable. L'holonomie résulte de la tentative de définir une seule carte de manière cohérente, le long de γ et mesure le non aboutissement de cette tentative. Cela fonctionne comme suit : couvrir l'image de γ avec un nombre fini de domaines de cartes $\{U_i\}_{i=1,\dots,k}$ où chaque $U_i \cap U_{i+1}$ est connexe non vide. Considérons $U_1 \cap U_2$. Il existe $g_1 \in G$ tel que $\varphi_1 = g_1 \circ \varphi_2$ sur $U_1 \cap U_2$. Si nous remplaçons φ_2 par $g_1 \circ \varphi_2$ nous aurons encore une carte locale qui « étend » φ_1 à U_2. De même, associé à $U_2 \cap U_3$, il existe $g_2 \in G$. Remplaçant φ_3 par $g_2 \circ \varphi_3$ prolonge φ_2. Ainsi, remplacer φ_3 par $g_1 \circ g_2 \circ \varphi_3$ prolonge φ_1. En continuant le long de γ, on arrive à $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_{k-1} \circ \varphi_k$ qui remplace φ_k.

Ce prolongement le long de γ reste inchangé si on passe à un autre chemin homotope, à extrémités fixes. On obtient alors une application : $\mathsf{dev} : \widetilde{M} \to X$ qui est un difféomorphisme local satisfaisant la condition d'équivariance :

$$\mathsf{dev} \circ \gamma = h(\gamma) \circ \mathsf{dev}$$

pour tout γ dans $\pi_1(M)$, où

$$h : \pi_1(M) \to G$$

est un homomorphisme appelé la représentation d'holonomie de la structure géométrique.

À noter que dev et h ne sont pas définis de manière unique ; composer la carte initiale φ_1 par un élément $g \in G$ donne une nouvelle développante $g \circ \mathsf{dev}$ avec la représentation d'holonomie correspondante $g \circ h \circ g^{-1}$.

On montre que la paire (dev, h) détermine la (G, X)-structure sur M.

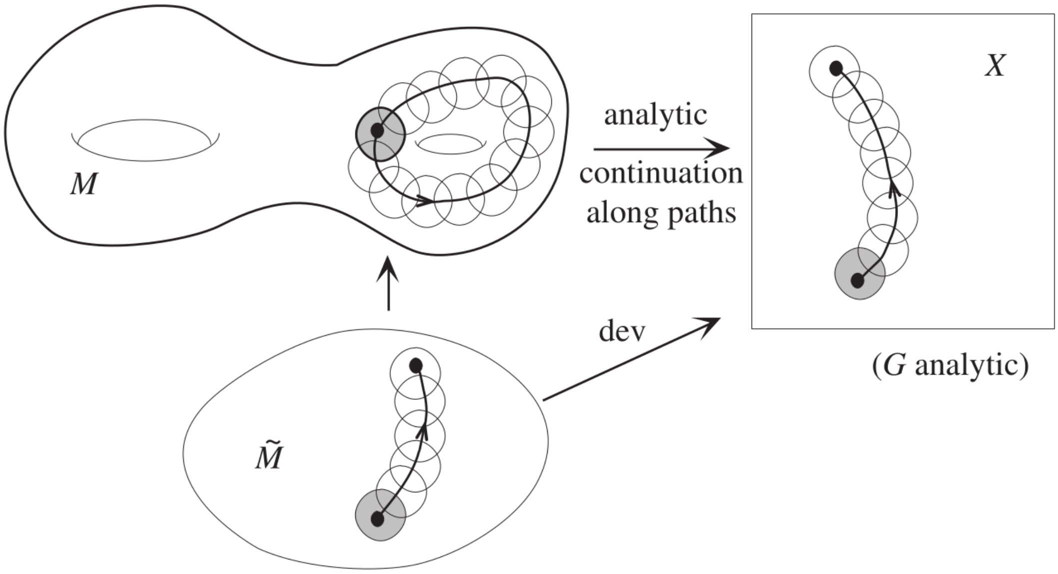

Fig. 1.3 : Construction de la développante.

Construction de la développante

Soit M une (G, X)-variété et soit $p : \widetilde{M} \to M$ son revêtement universel $\pi_1(M)$ son groupe fondamental. La projection p induit une (G, X)-structure sur $\widetilde{M}$ sur laquelle $\pi_1(M)$ agit par (G, X)-automorphismes. La propriété de prolongement unique possède la conséquence importante suivante.

Proposition 3. *Soit M une (G, X)-variété simplement connexe. Alors il existe un (G, X)-morphisme $D : M \to X$.*

Il s'ensuit que le (G, X)-morphisme D détermine complètement la (G, X)-structure sur M, c'est-à-dire la structure géométrique sur une variété est "retirée en arrière" de l'espace modèle X. Ce (G, X)-morphisme s'appelle *la développante* de M et jouit de l'unicité suivante :

Si $D' : M \to X$ est une autre (G, X)-développante, alors il existe un (G, X)-automorphisme ϕ de M et un élément $g \in G$ tel que :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{D'} & X \\ \phi\downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{D} & X \end{array}$$

Démonstration. Partant d'un point base $x_0 \in M$ et une (G,X)-carte locale (U_0,φ_0) contenant x_0. Pour $x \in M$, nous définissons $D(x)$ comme suit. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin dans M qui relie x_0 à $x = x_1$. L'image $\gamma([0,1])$ étant compacte, elle est donc recouverte par un nombre fini de U_i $(i = 0,...,n)$ tels que $\gamma(t) \in U_i$ pour $t \in]a_i, b_i[$ où

$$a_0 < 0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < ... < a_{n-1} < b_{n-2} < a_n < b_{n-1} < 1 < b_n$$

Soit $\phi_i : U_i \to X$ une (G,X)-carte locale et soit $g_i \in G$ l'unique difféomorphisme de X telle que $g_i\varphi_i$ et φ_{i-1} coïncident sur la composante connexe de $U_i \cap U_{i-1}$ contenant la courbe $\gamma(t)$ pour $a_i < t < b_{i-1}$. Soit $D(x) = g_1 g_2 ... g_n \circ \varphi_n(x)$. Nous allons montrer que D est en effet bien définie.

Passage à un recouvrement plus fine. L'application D ne change pas si on passe à un recouvrement plus fine. Supposons qu'un domaine de cartes U' soit « inséré » entre U_{i-1} et U_i. Soit $\gamma(t)$,$a' < t < b'$ la partie de la courbe située à l'intérieur de U' de sorte que

$$a_{i-1} < a' < a_i < b_{i-1} < b' < b_i.$$

Soit $\varphi' : U' \to X$ la carte locale correspondante et soit $h_{i-1}, h_i \in G$ les uniques difféomorphismes tels que φ_{i-1} coïncide avec $h_{i-1} \circ \varphi'$ sur la composante connexe de $U' \cap U_{i-1}$ contenant $\gamma(t), a' < t < b_{i-1}$ et φ' coïncide avec $h_i\varphi_i$ sur la composante connexe de $U' \cap U_i$ contenant $\gamma(t), a_i < t < b'$. Par l'unique propriété d'extension $h_{i-1}h_i = g_i$ et il s'ensuit que la développante

$$\begin{aligned} D(x) =& g_1 g_2 ... g_{i-1} h_{i-1} h_i g_{i+1} ... g_{n-1} g_n \circ \varphi_n(x) \\ =& g_1 g_2 ... g_{i-1} g_i g_{i+1} ... g_{n-1} g_n \circ \varphi_n(x) \end{aligned}$$

reste inchangée. Il s'en suit que la développante, ainsi définie, est indépendante du recouvrement en coordonnées locales, puisque deux tels recouvrements possèdent un recouvrement plus fin commun.

Passage à une courbe homotope. Si γ' est homotope à γ, en gardant les extrémités fixes, alors $D(x)$ est inchangé. La preuve en est qu'un très petit mouvement de γ peut être traité sans changer les $\varphi_i : U_i \to X$.

En effet, soit H une homotopie entre la courbe initiale γ et une autre courbe γ' à extrémités fixées x_0 et x. l'homotopie H peut être décomposée en une succession des « petites » homotopies, c'est-à-dire des homotopies telles qu'il existe une partition $0 = c_0 < c_1 < ... < c_{m-1} < c_m = 1$ telle que pendant l'homotopie le segment $\gamma(t), c_i < t < c_{i+1}$ se trouve dans un un domaine de carte. Il s'ensuit que l'expression définissant $D(x)$ reste inchangée pendant chacune des petites homotopies, et donc pendant toute l'homotopie. Ainsi D ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin.

Comme D est une composition d'une carte locale avec une difféomorphisme de G, il s'ensuit que D est un (G,X)-morphisme. □

Holonomie

Si $\widetilde{M} \to M$ est un revêtement universel de M et $\Gamma = \pi_1(M)$ est le groupe fondamental de M agissant sur $\widetilde{M}$ à gauche (par automorphismes du revêtement). Ici on utilise l'identification :

$$\pi_1(M) \cong \mathsf{Aut}\left(\widetilde{M}\right).$$

L'action étant $\gamma \cdot \tilde{x} := \gamma(\tilde{x})$, pour tout $\gamma \in \mathsf{Aut}\left(\widetilde{M}\right)$[1].

L'application

$$\begin{array}{rccc} D \circ \gamma : & \widetilde{M} & \longrightarrow & X \\ & \tilde{x} & \longmapsto & D\left(\gamma \cdot \tilde{x}\right) \end{array}$$

est également une développante, puisque c'est un (G, X)-morphisme par composition. Il existe donc un unique $g \in G$ (dépendant de γ) tel que :

$$D\left(\gamma \cdot \tilde{x}\right) = g \circ D(\tilde{x}).$$

Ainsi nous avons l'application d'holonomie :

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \pi_1(M) & \longrightarrow & G \\ & \gamma & \longmapsto & g(\gamma) \end{array}$$

Qui est un homomorphisme puisque, pour tout $\alpha, \beta \in \pi_1(M)$ et tout $\tilde{x} \in \widetilde{M}$:

$$\rho(\alpha\beta) \circ D(\tilde{x}) = D\left(\alpha(\beta(\tilde{x})\right) = \rho(\alpha)\rho(\beta) \circ D(\tilde{x}).$$

On appelle ϱ l'holonomie, et son image Γ le groupe d'holonomie de la structure géomé-

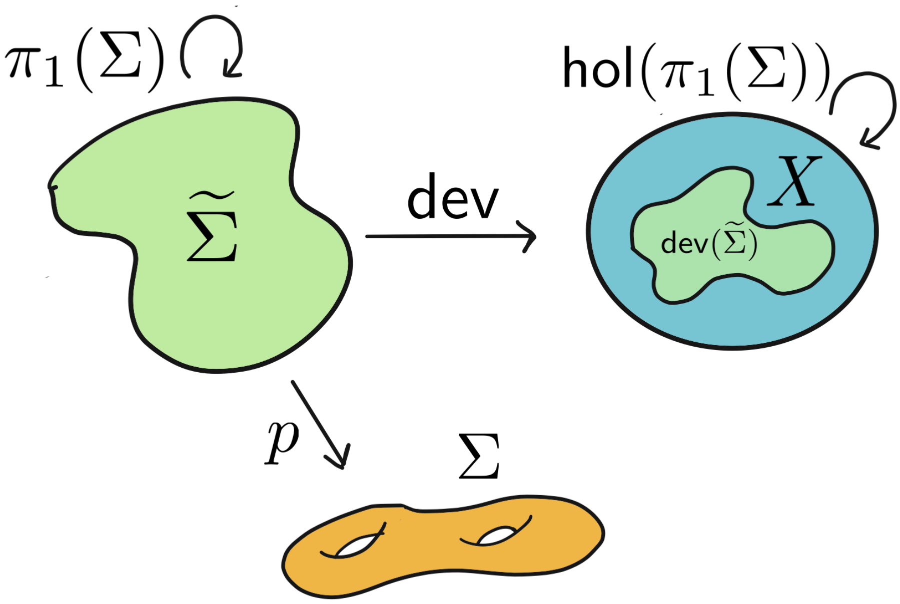

Fig. 1.4 : Développante et holonomie.

trique.

Voici quelques applications de la développante, mais d'abord un lemme utile :

[1] L'action à droite par $\pi_1(M)$ donne un anti-homomorphisme $\pi_1(M) \to G$

Lemme 1.1. *Si la développante est bijective alors l'holonomie est fidèle.*

Démonstration. Si $\rho(\gamma) = 1$ alors, pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, $D(\gamma(\tilde{x})) = D(\tilde{x})$. Par suite, $\gamma(\tilde{x}) = \tilde{x}$, i.e. γ est le neutre de $\pi_1(M) \cong \mathsf{Aut}\left(\widetilde{M}\right)$ et ρ est injectif. □

Proposition 4. *Soit M est une variété fermée dont le groupe fondamental est fini.*

1. *Si X n'est pas compact, alors M n'admet aucune* (G, X)*-structure.*

2. *Si X est compact et simplement connexe et si M admet une* (G, X)*-structure alors M est* (G, X)*-isomorphe à un quotient de X par un sous-groupe fini de G.*

Démonstration.

1. Le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M est compact[2], la développante $D : \widetilde{M} \to X$ est donc une application fermée. Comme D est un difféomorphisme local, c'est donc une application ouverte. L'image $D\left(\widetilde{M}\right)$ est ouverte et fermée dans X. Par connexité de X, $D\left(\widetilde{M}\right) = X$; mais ceci est absurde puisque l'un est compact et l'autre ne l'est pas.

2. La développante $D : \widetilde{M} \to X$ est un difféomorphisme local et comme $\widetilde{M}$ est compacte alors D est un revêtement. C'est donc un difféomorphisme, puisque X est simplement connexe. On déduit aussi que l'holonomie est fidèle (d'après le lemme précédent). Par suite
$$M \cong \widetilde{M}/\pi_1(M) \cong X/\rho\left(\pi_1(M)\right).$$
i.e. M est le quotient de X par un sous-groupe de G. Comme X est compacte, $\rho\left(\pi_1(M)\right)$ est fini, (et donc aussi $\pi_1(M)$).

□

Exemples.

1. *On déduit qu'une variété compacte et simplement connexe (comme la sphère* S^n, $n \geq 2$*), ne possède aucune* (G, X)*-structure avec* $X = \mathbb{R}^n$.

2. *L'espace projectif* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, *(*$n \geq 2$*) est compact et son groupe fondamental est* $\mathbb{Z}_2$. *Il ne possède donc aucune* (G, X)*-structure avec* $X = \mathbb{R}^n$.

1.3 Complétude

Une (G, X)-variété M est dite *complète* si son application développante $D : \widetilde{M} \longrightarrow X$ est un revêtement.

Remarque. *Supposons que X est simplement connexe. Une* (G, X)*-variété M est complète, si et seulement si, D est un isomorphisme.*

Corollaire 1.1. *En particulier si la variété X est simplement connexe, toute* (G, X)*-structure complète M est isomorphe au quotient* X/Γ, *où* Γ *est le groupe l'holonomie de M, qui est isomorphe au groupe fondamental* $\pi_1(M)$.

Exemple. *Le tore euclidien est complet. Par contre, un tore affine n'est en général pas complet.*

[2]Un fibré localement trivial dont la base et les fibres sont compacts est aussi compact.

Chapitre

2 Déformation des structures géométriques

Soit M une variété différentielle. Nous avons vu que toute (G,X)-structure sur M détermine une paire (D,ρ) constitué d'une développante D et d'une holonomie ρ.

Réciproquement, si $\rho : \pi_1(M) \to G$ est un homomorphisme et $D : \widetilde{M} \to X$ un difféomorphisme local qui est $\pi_1(M)$-équivariant, i.e. pour tout $\gamma \in \pi_1(M) \simeq \mathsf{Aut}\left(\widetilde{M}\right)$

$$D \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ D.$$

Alors, il existe une unique (G,X)-structure sur M telle que (D,ρ) soit une paire développante/holonomie pour cette structure.

Classification des structures géométriques. Le problème de classification des structures géométriques, sur une variété M donnée, s'énonce comme suit :

1. Décrire les (G,X)-structures que la variété M peut supporter.
2. Pour une géométrie modèle donnée (G,X), décrire toutes les structures (G,X)-structures possibles sur M.

La première question est extrêmement difficile et largement ouverte[1]. Quant à la deuxième question, il n'y a que le Théorème d'Ehressman-Thurston qui apporte une réponse assez générale qu'on peut résumer :

- En déformant l'holonomie d'une (G,X)-structure on trouve de nombreux autres exemples de (G,X)-structures.
- Localement, une (G,X)-structure est déterminée par son holonomie à isotopie près.

Avant de donner l'énoncé précis du théorème, commençons par établir le lien naturel qui existe entre l'ensemble des holonomies $\mathsf{Hom}(\pi_1(M),G)$ à conjugaison près et l'espace de modules des connexions plates sur les G-fibrés de base M (modulo l'action du groupe de jauge).

Il existe un fibré localement trivial sur M, de fibre X et de groupe de structure G, muni d'une connexion plate dont l'holonomie est à valeur dans G et d'une section transverse.

[1] Pour un aperçu, voir [?]

Esquissons la construction du fibré. Le groupe fondamental de M agit librement et proprement sur le produit $\widetilde{M} \times X$ par morphisme de revêtement sur $\widetilde{M}$ et par la représentation d'holonomie sur le facteur X. Notons E l'espace quotient. La projection $\widetilde{M} \times X \to M$ est invariante par cette action et descend en une projection $E \to M$. On peut vérifier que c'est un fibré localement trivial de fibre X. Ce fibré vient avec des données additionnelles. L'espace $\widetilde{M} \times X$ admet un feuilletage horizontal transverse au fibre de la projection qui est compatible avec l'action du groupe fondamental et qui donc descend au quotient. Cela définit une connexion au sens d'Ehresmann sur E qui est plate (localement horizontale). L'holonomie de cette connexion est à valeur dans G. L'application développante $D : \widetilde{M} \to X$ induit une section du fibré $s : M \to E$.

On peut montrer que réciproquement un triplet (fibré,connexion,section) qui vérifie les mêmes hypothèses permet de reconstruire la (G, X)-structure de M et qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré.

2.1 Fibrations et G-fibrés plats

Soient E, B, F des variétés et soit G un sous groupe de Diff(F).

Définition 2.1. *Un G-fibré sur B de groupe structural G et de fibre type F est une variété E avec une application lisse $\pi : E \longrightarrow B$ telle que, pour tout $x \in B$ il existe un voisinage ouvert U de x et un difféomorphisme, dit* de trivialisation local $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ *tel que le diagramme suivant commute (où $\mathrm{pr}_1(x, u) = x$ est la première projection) :*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Nous appelons E l'espace total, B la base, π la projection canonique et F la fibre. L'ensemble des (U_i, φ_i) est appelé trivialisation locale. Si $x \in B$ la pré-image $\pi^{-1}(x)$ est appelée fibre au dessus de x, notée E_x.

Les difféomorphisme φ_i doivent être G-compatibles dans le sens suivant : les applications

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$$

sont de la forme $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(m, b) = (m, t_{ij}(m)b)$ où $t_{ij}(m) \in G$ et les fonctions

$$t_{ij} : (U_i \cap U_j) \to G$$

sont lisses, appelées les *fonctions de transition* de l'atlas .

Exemples.

1. *Un exemple évident est le fibré trivial. Soient B et F deux variétés, et considérons $E = B \times F$ avec la projection sur le premier facteur. Alors (E, B, π, F) est un fibré localement trivial.*

2. *Un autre exemple de fibré localement trivial est le fibré tangent d'une variété différentielle. Si M est une variété de dimension n, alors TM est un fibré localement trivial de dimension $2n$.*

3. *Le ruban de Möbius est un fibré localement trivial sur le cercle* S^1, *de fibre* $[0,1]$.

Définition 2.2. *Soient* (E,B,π,F) *et* (E',B',π',F') *deux fibrés localement triviaux. Une application* $\phi : E \longrightarrow E'$ *est un morphisme de fibrés si il existe une application continue* $\varphi : B \longrightarrow B'$ *telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, "\varphi"] & B' \end{tikzcd}$$

Fibré vectoriel. Un fibré vectoriel est un fibré dont la fibre type V est un espace vectoriel et dont chaque fibre E_x est aussi un espace vectoriel. Nous demandons donc naturellement que pour toute trivialisation locale (U,ϕ) de E, $\phi_x : V \to E_x$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels, et nous prendrons comme action de G sur V une représentation linéaire. Le rang d'un fibré vectoriel est la dimension de sa fibre.

Exemples.

1. *Un exemple bien connu de fibré vectoriel est le fibré tangent à une variété .*

2. *Nous allons donner ici un exemple de fibré vectoriel très utile en pratique et dans ce qui va suivre. Sa fibre est l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *du groupe de structure* G. *Nous prenons la représentation adjointe* Ad *de* G *sur* $\mathfrak{g}$. *Le fibré que nous obtenons, noté* AdP, *est appelé fibré adjoint de* P.

Fibré principal

Un fibré principal comprend les données suivantes :

- Une variété P, appelée espace total ;
- Un groupe de Lie G agissant librement sur P à droite :

$$\begin{aligned} &\mathsf{P} \times \mathsf{G} \to \mathsf{P} \\ &(p,g) \mapsto pg \quad \text{(ou par fois } \mathsf{R}_g p\text{)} \end{aligned}$$

où par une action libre nous entendons que le stabilisateur de chaque point est trivial, ou paraphrasant, que chaque élément G (sauf l'identité) se déplace en tout point de P. Nous supposerons également que l'espace des orbites $B = P/G$ est une variété (appelée la base) et la carte naturelle $\pi : P \to B$ prendre un point sur son orbite est une surjection douce. Pour chaque $m \in B$, le sous-distributeur $\pi^{-1}(m) \subset P$ s'appelle la fibre sur m.

De plus, ces données seront soumises à la condition de trivialité locale : que M admette une couverture ouverte U_α et des difféomorphismes G-équivariants $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ tels que le schéma suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathsf{pr}_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

On abrège souvent les données ci-dessus en disant que

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & B \end{array} \qquad \text{est un fibré principal}$$

Exemples.

1. *Le fibré principal trivial $B \times G$ (avec la classe d'équivalence des G-atlas donnée par la banalisation évidente).*

2. *Considérons $B = S^2$ et prenons P comme l'ensemble de tous les vecteurs tangents unitaires à B, avec π la projection $P \to B$. Laissant S^1 agir sur P par rotation, on a un faisceau principal* $(P, b, \pi, S1)$.

3. (E, B, π, F) *un fibré vectoriel. Soit n la dimension de l'espace vectoriel F. On associe alors à ce fibré vectoriel E un groupement $GL(n)$ principal. La fibre sur $x \in B$de ce faisceau principal est l'ensemble de toutes les bases ordonnées de Ex, sur lesquelles $GL(n)$ agit à partir de la droite par changement de base.*

Définition 2.3 (Sections). *Une section du fibré E est une application différentiable $S : B \to E$ telle que $\pi \circ S = \mathsf{Id}_U$.*

Exemple. *Un exemple de la section nulle, que nous noterons S_0 : en chaque point nous prenons l'élément nul de l'espace vectoriel V, c'est à dire que localement nous avons* $S_0(x) = \phi_{i,x}(0)$.

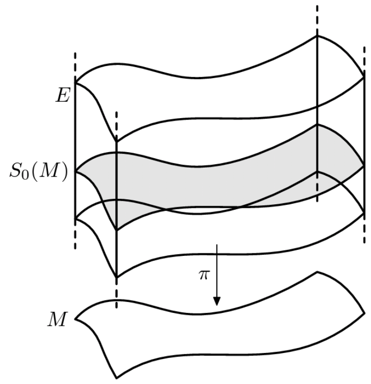

Fig. 2.1 : La section nulle S_0 d'un fibré vectoriel E permet d'identifier M à une sous-variété de E.

Théorème 1. *Un fibré principal est trivial s'il admet une section.*

Démonstration. Il est clair que le fibré trivial admet une section. Soit (P, B, π, F) un fibré principal admettant une section $s : B \to P$. Considérez l'application

$$\begin{aligned} \mathsf{B} \times \mathsf{G} &\to \mathsf{P} \\ (b, g) &\mapsto (s(b) \cdot g) \end{aligned}$$

Il s'agit clairement d'une application, et elle est surjective par transitivité de l'action de groupe sur les fibres de P. Elle est injective par liberté de l'action de groupe sur les fibres de P. Il s'agit donc d'un isomorphisme de fibrés. □

Connexions

Vecteurs verticaux. Soit (P, B, π, G) un fibré principal. Sur la variété P, nous avons la notion canonique de vecteur vertical : un vecteur vertical est un vecteur tangent à la fibre. En utilisant l'application linéaire tangente $T_p\pi : T_pP \to T_{\pi(p)}B$. de la projection $\pi : P \to B$, nous dirons que $X \in T_pP$ est vertical si $T_p\pi X = 0$. On note V_p le sous espace vectoriel de T_pP des vecteurs verticaux.

$$V_p = Ker(T_p\pi) \subseteq T_pP$$

Nous pouvons voir ce sous espace d'une autre façon : G agit sur la fibre par $R_g : p \longmapsto pg$. Pour $X \in g$, nous avons alors une courbe $p \cdot exp(tX)$ dans la fibre. Sa dérivée en $t = 0$donne un vecteur tangent à P en p. Ce vecteur est clairement vertical, et tous les vecteurs verticaux sont de ce type :

$$V_p = \left\{ \left(\frac{d}{dt} p \cdot \exp(tX) \right)_{|t=0} / X \in \mathfrak{g} \right\}$$

C'est à dire que l'espace vertical est engendré par les vecteurs

$$X^v_{|p} = \left(\frac{d}{dt} p \cdot \exp(tX) \right)_{|t=0}$$

pour X variant dans g.

Vecteurs horizontaux. Il n'y a pas de notion canonique d'horizontalité sur un fibré principal. Nous venons de voir que les vecteurs verticaux sont tangents à la fibre. Nous voudrions que les vecteurs horizontaux soient « tangents » à la variété de base M. En fait, ceci n'est pas possible puisque M n'est pas une sous-variété de P. Nous pouvons cependant formaliser cela sous la forme d'une application qui remonte les vecteurs tangents de M en des vecteurs tangents sur P. En d'autres termes, nous allons définir une application de T_xB sur T_pP, $X_{|x} \longmapsto X^h_{|p}$, telle que $T_p\pi X^h_{|p} = X_{|x}$

Nous devons pour cela introduire une nouvelle structure sur P. Pour tout $p \in P$, nous choisissons $Hp \subset T_pP$, sous-espace vectoriel, tel que $H_p \oplus V_p = T_pP$. Nous faisons donc un choix d'un supplémentaire de V_p dans T_pP. Nous voyons que ce choix n'est pas unique, ce que nous introduisons est donc bien un objet de plus sur P, qui n'a rien de canonique. Un vecteur $X_{|p} \in H_p$ sera dit vecteur horizontal. Afin de rendre la notion d'horizontalité compatible avec les structures déjà existantes sur P, nous imposons une G-équivariance : pour tous $g \in G$ et $p \in P$, nous imposons la relation

$$H_{p.g} = T_pR_gH_p$$

Enfin, nous définissons un sous fibré de TP par

$$THP = \bigcup_{p \in P} H_p$$

et nous exigeons que ce sous fibré soit une variété différentiable, c'est-à-dire, que la dépendance en p de H_p soit différentiable. Ce fibré est le fibré des vecteurs horizontaux associé au choix des H_p.

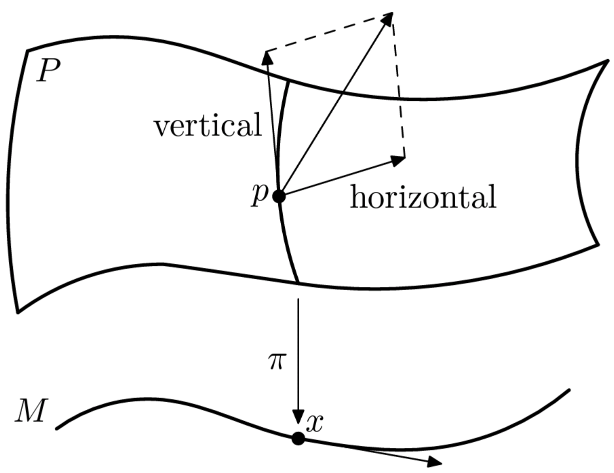

FIG. 2.2 : Tout vecteur du fibré P se décompose de façon unique en une somme directe d'un vecteur horizontal, correspondant au choix d'une connexion sur le fibré, et d'un vecteur vertical, tangent à la fibre

Définition 2.4. *Une connexion sur P est un choix de sous-espaces horizontaux $H_p \subset T_pP$ complémentaires de V_p :*

$$T_pP = H_p \oplus V_p.$$

et tel que $(R_g) * H_p = H_{pg}$.

Forme de connexion. Se donner une connexion par une distribution H_p de vecteurs dans T_pP en tout point de P n'est pas pratique. Ceci ne nous permet pas d'aller très loin dans certaines situations, et il est préférable, pour les « calculs », de se donner des outils algébriques équivalents. C'est ce que nous allons faire en définissant la 1-forme de connexion sur P. A partir de THP, nous définissons une 1-forme ω sur P à valeurs dans g en posant, pour tout $p \in P$:

- $\omega_{|p}(X_{|p}) = 0$ pour $X_{|p} \in H_p$;
- $\omega_{|p}(X_{|p}) = A$ pour $X_{|p} \in V_p$, écrit de façon unique $X_{|p} = A^v_{|p}$ pour un $A \in g$.

Cette 1-forme différentielle est alors complètement définie par linéarité puisque $TP = THP \oplus TVP$.

Forme de courbure. Soit $h : TP \longrightarrow TP$ et soit $h^* : T^*P \longrightarrow T^*P$ l'application adjointe, i.e. si $\alpha \in \Omega^1(P)$ alors $h^*\alpha = \alpha \circ h$. Plus généralement, si $\beta \in \Omega^k(P)$, alors

$$(h^*\beta)(v_1, ..., v_k) = \beta(hv_1, ..., hv_k).$$

Soit $\omega \in \Omega^1(P; g)$ est la 1-forme de connexion pour une connexion $H \subset TP$. La 2-forme

$$\Omega = h^*d\omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$$

est appelée la *courbure* de la connexion. Nous en tirerons des formules plus explicites pour Ω plus tard, mais interprétons d'abord la courbure géométriquement.

Comme $h^*\omega = 0$, alors

$$\begin{aligned}\Omega(u,v) &= d\omega(hu,hv)\\ &= (hu)\omega(hv) - (hv)\omega(hu) - \omega\left([hu,hv]\right)\\ &= -\omega\left(([hu,hv]\right).\end{aligned}$$

D'où $\Omega(u,v) = 0$, si et seulement si, $[hu,hv]$ est horizontal. En d'autres termes, la courbure de la connexion mesure le défaut d'intégrabilité de la distribution horizontale $H \subset TP$.

Holonomie. Supposons que (P,B,π,G) est un fibré principal équipé d'une connexion principale A. Si γ est une boucle dans B, alors l'holonomie de A autour γ est un morphisme d'espaces homogènes principaux

$$\mathsf{Pt}_\gamma : P_{\gamma(0)} \to P_{\gamma(0)}.$$

Pour tout point $p \in P_\gamma(0)$ il existe alors un unique $g \in G$ tel que $\mathsf{Pt}_\gamma(p) = p\cdot g$. Cet élément est écrit $\mathsf{Hol}_p(A,\gamma)$. En d'autres termes

$$\mathsf{Pt}_\gamma(p) = p\cdot \mathsf{Hol}_p(A,\gamma), \text{ pour tout } p \in P_\gamma(0).$$

Il résulte du fait que Pt_γ est un morphisme d'espaces homogènes que

$$\mathsf{Hol}_{p\cdot g}(A,\gamma) = g^{-1}\mathsf{Hol}_p(A,\gamma)g.$$

Supposons maintenant que $x,y \in B$ sont dans la même composante composante par arcs de B. En prenant un chemin δ qui joint x à y et en le relevant horizontalement en un point $p \in P_x$, on obtient un chemin en P qui se termine par $q \in P_y$. Pour tout lacet γ dans B basé en y, nous avons alors

$$\mathsf{Hol}_p(\delta \star \gamma \star \bar{\delta}) = \mathsf{Hol}_q(\gamma).$$

Dans l'équation ci-dessus, l'étoile signifie la concaténation des chemins. Notez que la reparamétrisation d'un chemin n'influence pas l'holonomie de la connexion qui l'entoure. Nous concluons que

$$\mathsf{Hol}(A) = \left\{\mathsf{Hol}_p(A,\gamma),\ \gamma \text{ est un lacet dans } B\right\}$$

ne dépend que du point de base p à conjugaison près. On peut donc parler de l'holonomie de la connexion A comme classe de conjugaison du sous-groupe $\mathsf{Hol}(A) \subset G$.

Définition 2.5 (Automorphismes verticaux de fibrés principaux). *L'automorphisme $f : P \to P$ est un automorphisme vertical du fibré principal P si le difféomorphisme $\tilde{f} : M \to M$ est l'identité.*

Définition 2.6 (groupe de jauge). *On appelle* groupe de jauge *du fibré P, et on le notera ζ, l'ensemble de ces automorphismes verticaux de P.*

2.2 Espaces de modules

Dans cette section, nous considérons l'espace des modules des connexions plates pour un groupe de structure fixe G et un espace de base B. Cet espace de modules $\mathscr{M}(B,G)$ est l'ensemble de tous fibré principal plats jusqu'à B l'équivalence de jauge. À la fin de cette section, nous pourrons identifier

$$\mathscr{M}(B,G) \cong \frac{Hom(\pi_1(B),G)}{G}$$

, où G agit sur $Hom(\pi_1(B),G)$ par conjugaison. Cela nous permet de considérer $\mathscr{M}(B,G)$ non seulement comme un ensemble, mais comme un espace topologique. L'espace $Hom(\pi_1(B),G)$ est souvent appelé une variété de représentation.

La correspondance. . . Notre objectif est une application bijective

$$\Psi : \mathscr{M}(B,G) \longrightarrow \frac{Hom(\pi_1(B),G)}{G}$$

.

On voudrait définir $\Psi([P,A])$ comme la classe d'équivalence du morphisme de groupe

$$\pi_1(B) \longmapsto G : [\gamma] \longmapsto Hol_p(A,\gamma)^{-1}$$

où p est un point fixe de P.

. . . est une bijection Prouvons maintenant que la correspondance Ψ est bijection. Nous prouvons d'abord l'injectivité

Théorème 2. *La correspondance Ψ est injective.*

Démonstration. Supposons que (P,A) et (Q,C) sont deux G-fibrés principaux plats sur B et $\Psi([P,A]) = \Psi([Q,C])$. Nous trouverons une équivalence de jauge entre les deux fibrés plats. Choisissez les points $p \in P$ et $q \in Q$ situés au-dessus du même point $x \in B$. Par hypothèse, il existe des $g \in G$ tels que

$$Hol_p(A,\gamma) = gHol_q(B,\gamma)g^{-1}$$

pour chaque boucle $\gamma \in B$ commençant à x. En remplaçant q par $q \cdot g$, on peut supposer qu'en fait $Hol_p(A,\gamma) = Hol_q(B,\gamma)$. Nous allons construire une équivalence de jauge $f : P \to Q$. Choisissez un point $y \in B$. Prenez une courbe δ dans B de x à y. Soulever δ vers une courbe A-horizontale δ_A dans P et vers une courbe C-horizontale δ_C dans Q. L'idée est d'exiger que

$$f(\delta_A(1)) = \delta_C(1)$$

. (En effet, c'est la seule possibilité pour $f(\delta_A(1))$ car $f \circ \delta_A$ doit être horizontale selon C, donc on veut $f \circ \delta_A = \delta_C$.) Ceci détermine complètement f sur la fibre ci-dessus y parce que f doit être une carte d'ensemble. En fait, cela détermine f sur la fibre au-dessus de y d'une manière indépendante de la courbe δ choisie comme nous le vérifions maintenant.

Supposons γ qu'il y ait une autre courbe de x à y. Ascenseur γ vers les courbes γ_A et γ_C. Nous devons montrer que f tel que construit ci-dessus (en utilisant δ) satisfait $f(\gamma_A(1)) = \gamma_C(1)$. Cela découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned} f(\gamma_A(1)) &= f(\delta_A(1) \cdot Hol_{\delta_1}(1)(A, \bar{\delta}, \star\gamma)) \\ &= f(\delta_A(1)) \cdot Hol_{\delta_A}(1)(A, \bar{\delta}, \star\gamma) \\ &= \delta_C(1) \cdot Hol_p(A, \gamma, \star\bar{\delta}) \\ &= \delta_C(1) \cdot Hol_q(C, \gamma, \star\bar{\delta}) \\ &= \delta_C(1) \cdot Hol_{\delta_C}(C, \bar{\delta}, \star\gamma) \\ &= \gamma_C(1). \end{aligned}$$

Cela montre que l'on peut en effet définir f en utilisant le ci-dessus sans se soucier de la courbe à choisir pour chaque $y \in B$. À partir de considérations en coordonnées locales, il est facile de voir que f est lisse. Il s'agit donc d'une carte de faisceaux couvrant l'identité (et donc un isomorphisme des faisceaux principaux). Par construction, Tf mappe les vecteurs horizontaux en vecteurs horizontaux. Nous concluons que f est une équivalence de jauge. □

Nous avons ainsi montré qu'un faisceau principal plat est essentiellement déterminé par son holonomie. Nous prouvons maintenant que chaque morphisme de groupe $Pi_1(B) \to G$ se produit en fait comme l'holonomie d'un paquet plat.

Théorème 3. *La correspondance* Ψ *est surjective.*

Démonstration. Supposons $\psi : \pi_1(B) \to G$ est un morphisme de groupe. Nous construirons un G-fibré principal plat P sur B et un point $p \in P$ tel que $Hol_p(A, \gamma)^{-1} = ([\gamma])$ pour chaque boucle γ dans B à partir de $\pi(p)$. Ici, A est la connexion plate sur P et π est la projection $P \to B$, comme toujours.

Soit $\widetilde{B}$ revêtement universelle de B avec projection $\tau : \widetilde{B} \to B$. Choisissez un point $x \in \widetilde{B}$. Notez que $\pi_1(B, T(x))$ agit sur $\widetilde{B}$ via la monodromie (à partir de la gauche). Notez également que l'on peut laisser $\pi_1(B)$ agit sur G depuis la gauche via

$$\pi_1(B) \times G \to G : ([\gamma], g) \longmapsto \psi([\gamma])g$$

. On peut alors considérer le quotient

$$P = \frac{\widetilde{B} \times G}{\pi_1(B)}$$

où $[\gamma] \cdot (X, g) = ([\gamma] \cdot X, [\gamma] \cdot G)$ pour $(x, g) \in \widetilde{B} \times G$. Puisque $\pi_1(B)$ agit correctement et librement sur $\widetilde{B} \times G$, ce quotient est une variété lisse telle que

$$\widetilde{B} \times G \to P$$

est une submersion douce (même un difféomorphisme local). En fait, P est un fibré principal pour la projection $[x, g] \longmapsto \tau(x)$ (qui est bien défini), et l'action droite sur P est donné par $[x, g] \cdot h = [x, gh]$ (qui est également bien défini).

Nous allons maintenant construire une connexion convenable sur P. Appelons un vecteur tangent à $\widetilde{B} \times G$ horizontal s'il a seulement une composante dans la direction $\widetilde{B}$, pas dans la direction G (en d'autres termes, s'il est de la forme $(v, 0)$ où $v \in T\widetilde{B}$). L'action de $\pi_1 1(B)$ sur $\widetilde{B} \times G$ mappera des vecteurs horizontaux en vecteurs horizontaux, de sorte que la notion d'horizontalité descend au quotient P. On définit ainsi des espaces horizontaux en chaque point de P, déterminant une connexion A sur P Cette connexion est facilement considérée comme plate par l'intégrabilité du sous-ensemble horizontal.

Écrivez $p = [x, e]$. Nous affirmons que $\psi(A, p) = \psi$, prouvant le résultat. Let $\gamma : I \to B$ être n'importe quelle boucle commençant à $\tau(x)$. Soulever γ vers une courbe $\widetilde{\gamma}$ sur $\widetilde{B}$ à partir de x. La courbe

$$t \longmapsto [\tilde{\gamma}(t), e]$$

est alors l'élévation horizontale de γ à P à partir de p. Il se termine à

$$[[\gamma] \cdot X, e] = [x, \psi([\gamma])^{-1}] = p \cdot \psi([\gamma])^{-1}$$

, montrant que $Hol_p(A, \bar{\gamma}) = Hol_p(A, \gamma)^{-1} = \psi([\gamma])$. Le résultat est prouvé. □

Alors par les résultats de la sous-section précédente, nous pouvons identifier l'espace des modules avec un ensemble de classes d'équivalence de morphismes de groupe :

$$\mathscr{M}(B, G) \cong \frac{Hom(\pi_1(B), G)}{G}$$

Cette identification permet de doter $\mathscr{M}(B, G)$ de plus de structure que celle d'un simple ensemble.

Théorème d'Ehresmann-Thurston

Soit M une variété munie d'une (G, X)-structure V et ρ son holonomie. Alors, pour toute représentation ρ_0 assez proche de ρ (pour la topologie compacte ouverte de $\mathsf{Hom}(\pi_1(M), G)$) il existe une (G, X)-structure sur M dont ρ_0 est l'holonomie. De plus, pour toute (G, X)-structure W sur M assez proche de V, si les deux structures ont des holonomies conjuguées, alors V et W sont isotopes.

Démonstration. Voir [5] □

Exemples.

1. *L'espace des modules des structures affines complètes sur le tore* T^2 *s'identifie au quotient de* $\mathbb{R}^2$ *par l'action linéaire de* $SL(2, \mathbb{Z})$.

2. *le plan hyperbolique* $\mathbb{H}^2 = \mathsf{SL}(2, \mathbb{R})/\mathsf{SO}(2)$. *L'espace des modules est la courbe modulaire*

$$\mathscr{M}_{\mathbb{E}^2}(T^2) = (\mathsf{SL}(2, \mathbb{R})/SO(2))\,/SL(2, \mathbb{Z}).$$

Chapitre

3 Annexe

3.1 Groupe fondamental et revêtement

Groupe fondamental

Définition 3.1 (Chemins et lacets). *Soit T un espace topologique. Un* chemin *dans T est une application continue $\gamma : [0,1] \to T$. Lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on parle de* lacet, *basé au point $x = \gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 3.2 (Homotopie). *Soient $\alpha, \beta : [0,1] \to T$ des chemins de mêmes extrémités x_0 et x_1. On dit que α et β sont homotopes (à extrémités fixées) et on note $\alpha \sim \beta$, s'il existe une application continue $F : [0,1] \times [0,1] \to T$ appelée* homotopie, *telle que :*

$$\begin{aligned} F(0,t) &= \alpha(t), \\ F(1,t) &= \beta(t), \\ F(s,0) &= x_0, \; F(s,1) = x_1. \end{aligned}$$

Lemme 3.1. *Soit α et β deux chemins. On suppose qu'il existe une application continue h de $[0,1]$ dans lui-même tel que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ et $\alpha = \beta \circ h$. Alors α et β sont homotopes.*

Exemples. 1. *Si T est un convexe d'un espace affine, alors deux chemins quelconques ayant les mêmes extrémités sont homotopes.*

2. *Soit α un chemin et h une application continue de $[0,1]$ dans lui même tel que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ alors $\alpha \circ h$ est homotope à α.*

Définition 3.3 (Type d'homotopie). *On dit que deux espaces topologiques X et Y ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que :*

$$f \circ g \sim \mathsf{Id}_Y \quad et \quad g \circ f \sim \mathsf{Id}_X.$$

Exemples. 1. *$\mathbb{R}^n$ a le même type d'homotopie d'un espace réduit à un point $\{pt\}$. En effet, soit $f : \mathbb{R}^n \to \{pt\}$ l'application constante et $g : \{pt\} \to \mathbb{R}^n$ l'application dont l'image est 0. Alors $g \circ f = \mathsf{Id}_{\{pt\}}$ et $f \circ g$ est la fonction nulle, homotope à l'identité par $F(t,x) = tx$.*

2. *$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a le même type d'homotopie que le cercle unité S^1.*

Définition 3.4 (Groupe fondamental). *Soit X un espace topologique et $x \in X$, (on dira que (X, x) est un espace pointé). Soit $\mathscr{L}(X, x)$ l'ensemble des lacets basés en x. On voudrait faire de $\mathscr{L}(X, x)$ un groupe, avec la concaténation des lacets :*

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & si \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & si \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

mais cette opération n'est pas associative.

L'homotopie est compatible avec la concaténation des lacets et descend au quotient pour en former un groupe, appelé le groupe fondamental de (X, x) :

$$\pi_1(X, x) = \frac{\mathscr{L}(X, x)}{\textit{modulo la relation d'homotopie}}.$$

Ce groupe dépend, à priori, du point base x. Néanmoins, si X est connexe par arcs, $\pi_1(X, x)$ ne dépend plus de x et on notera simplement $\pi_1(X)$.

Exemples.
1. *Le groupe fondamental du cercle unité $\mathsf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}$.*
2. *Le groupe fondamental du tore $\mathsf{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est $\mathbb{Z}^n$.*

Revêtement

Définition 3.5. *Soient E et B deux espace topologiques. Une application continue $p : E \to B$ est un revêtement si tout point $x \in B$ possède un voisinage U tel que :*

1. *$P^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$, $V_i \subset E$, $I \neq \emptyset$ (réunion disjointe d'ouverts).*
2. *Pour tout $i \in I$, $P_{|V_i} = V_i \to U$ est un homéomorphisme.*

On appelle B la base et E l'espace total du revêtement.

Un revêtement dont l'espace total est simplement connexe est dit revêtement universel.

Exemples.
1. *Soit $p : E \to B$ un homéomorphisme local, avec E compact. Alors p est un revêtement.*
2. *$t \mapsto e^{it}, \mathbb{R} \to \mathsf{S}^1$ est un revêtement (universel).*
3. *$z \mapsto e^z, \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est un revêtement (universel).*
4. *Si $n \neq 0$, $z \mapsto z^n$, $\mathsf{S}^1 \to \mathsf{S}^1$, est un revêtement.*

Conclusion

Nous avons étudié dans ce mémoire la notion de (G, X)-structure sur les variétés et nous avons construit la paire (développante,holonomie) qui caractérise complètement une (G, X)-structure à isotopie près.

Nous avons abordé la question (difficile) de classification de (G, X)-structures. Étant donnée une variété différentielle connexe M :

1. Décrire les (G, X)-structures que la variété M peut supporter.

2. Pour une géométrie modèle donnée (G, X), décrire toutes les structures (G, X)-structures possibles sur M.

La première question est très difficile et ne semble pas résoluble en toute généralité. Pour la deuxième question, nous avons revu le principe d'Ehressman-Thusrston, qui s'énonce comme suit :

- En déformant l'holonomie d'une (G, X)-structure on trouve de nombreux autres exemples de (G, X)-structures.

- Localement, une (G, X)-structure est déterminée par son holonomie à isotopie près.

Pour étudier la notion de déformation de l'holonomie d'une (G, X)-structure, il a fallut introduire la notion de G-fibré plat (naturellement associé) et de transporter la topologie de la variété de représentation $\mathsf{Hom}(\pi_1(M), G)/G$ vers l'espace de modules des connexions plates sur les G-fibré principaux de base M (modulo l'action du groupe de jauge).

Il est intéressant d'obtenir une description concrète dans une géométrie modèle particulière (affine, en l'occurrence), car dans ce cas, il reste encore des conjectures à étudier :

Conjecture de Markus. Une variété affinement plate compacte est complète si, et seulement si, elle a possède une forme volume parallèle.

Conjecture d'Auslander. Tout groupe cristallographique est virtuellement résoluble.

Bibliographie

[1] H. Abels, *Properly discontinuous groups of affine transformations : a survey*, Geom. Ded. 87 no. 1-3, 309-333. 2001.

[2] R.D. Canary A. Marden, D.B.A. Epstein, *Fundamentals of Hyperbolic Geometry : Selected Expositions*, Cambridge University Press, 2006.

[3] Y. Félix, D. Tanré, *Topologie algébrique*, Sciences Sup, 2010.

[4] J. Milnor, *Fundamental Groups of Affinely Flat Manifolds*, Journal of Geometry and Physics 62 (2012) 1600-1610.

[5] W. Thurston, *The Geometry and Topology of* 3*-Manifolds*, Princeton University, 1979.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude des structures géométriques sur les variétés.
Dans ce travail nous avons défini l'application développante et l'holonomie. C'est la manière la plus importante pour étudier les structures géométriques et déduire des informations topologiques sur la variété.

Nous avons exploré le lien avec les G-fibrés plats pour arriver à l'important théorème d'Ehressman-Thurston, sur les déformations de (G, X)-structures.

Mots clefs : (G, X)-structure, développante, holonomie, complétude, déformations.

Abstract

The object of this thesis is the study of geometric structures on manifolds.
In this work we have defined the developping map and the holonomy, this is the most important way to study geometric structures and derive topological information of the manifold.

We have explored the link with flat G-bundles to arrive to the important Ehressman-Thurston theorem, on the deformations of (G, X)-structures.

Keywords : (G, X)-structure, developping map, holonomy, completeness, deformations.