République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIERE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE PRESENT EN VUE DE L OTENTION DU DIPLOME :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités Et Statistique

Par

Bouhssaya Nesrine

Titre :

LE PRINCIPE DU MAXIMUM EN CONTRÔLE OPTIMAL STOCHASTIQUE

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Akti Mohamed Prof. Université KASDI Merbah-Ouargla Président

Dr. Boussad Abdelmalek M.A. Université KASDI Merbah-Ouargla Examinateur

Dr. Mansoul brahim M.A. Université KASDI Merbah-Ouargla Encadreur

Année universitaire 2019- 2020

Dédicace

Je dédie ce travail :

À ma chéré mère qui ne cesse de me consolider d'une parole des ma tendre enfance.

À Ma mère que j'aime beaucoup m'a donne tous,

J'aimerais cette bonne mère, ma vie

*À mes frères : **Abed elhakim et Adel.***

Et

*À mes sœurs : **Siham, Fayza, Amel et Achwak.***

Et

*Mon aimée : **Marwa***

Remerciement

*Je remercie **Allah** tout-puissant qui nous donner la force*

Et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire master.

*Je remercier en particulier **Mansoul Brahim***

Pour l'encadrement technique et pour m'avoir guidé, en courage et conseillé pendant toute la période de formation.

J'exprime également ma gratitude aux membres du Jurys qui m'ont honoré en acceptant de juger ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on propose d'étudier les problèmes de contrôles stochastiques gouverné par l'équation différentielle stochastique et on va étudier le principe du maximum dans le cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas du contrôle et aussi le domaine du contrôle U est non convexe, noté par l'ensemble des contrôles admissibles définie par :

$$U = \left\{ u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A/u_t \text{ est mesurable et } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} - adapt\acute{e} \ \right\}$$

L'équation différentielle stochastique contrôlé de type Itô de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t)dB_t \\ x_0 = \varepsilon \qquad\qquad\qquad s \leq t \leq T \end{cases} \tag{1}$$

Où b et σ sont deux fonctions boréliennes et $B = (B_t \ , 0 \leq t \leq T)$ désigne un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ continue à droite et contenant tous les ensembles P- négligables de $\mathcal{F}$, $u = (u_t \ , 0 \leq t \leq T)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans un espace métrique compact A, appelle contrôle admissible, alors pour tout contrôle admissible u, on introduit une fonction de coût $J(u)$ défini par :

$$J(u) = E\left[g(x(T)) + \int_0^T h(t, x(t), u(t))dt\right] \tag{2}$$

L'objet du contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût J sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

La solution $x = (x_t \, , s \leq t \leq T)$ de l'équation (1) et appelée réponse de contrôle u et le couple (u, x) est appelé un couple admissible.

Ce mémoire est consiste de trois chapitres :

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre, on représente et détaillé les rappelles de base concernant la théorie des probabilités et calcul stochastiques, l'espace de probabilités et mesuré, mouvement brownien, espérance et l'espérance conditionnelle, l'intégrale d'Itô et la formule d'Itô et quelques exemples pour clarifier le concept.

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre, on définit l'équation différentielle stochastique. Par la suite nous citons le théorème d'existence et l'unicité de la solution de l'EDS avec la preuve de cette théorème. En fin, nous avons conclu ce chapitre avec des exemples.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, on représente le problème de ce mémoire. Alors le but de ce chapitre est déterminer les conditions nécessaires que doit satisfaire un contrôle optimal dans le cas où la famille des contrôles admissibles est constituée de processus adapté d'une filtration fixée. De plus, on met des conditions sur les coefficients pour obtenir des solutions fortes pour l'équation différentielle stochastique contrôlée.

Donc d'après l'existence d'une solution optimale, alors il existe un contrôle optimal u minimisant le coût J sur l'ensemble $\grave{U}$.

Si u représente un contrôle optimal, alors il existe un processus $(p_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que pour tout $t \in [0; T]$ et pour $u_\theta \in U$, on a la condition nécessaire suivante :

$$H(x(t), u(t), p(t)) \leq H(x(t), v, p(t)) \tag{3}$$

Ou x est la solution de l'équation associée au contrôle optimal, H est appelé, le Hamiltonien du système et $p(t)$ est appelé le processus adjoint. Alors d'après la condition nécessaire, on dit que (u, x) le couple optimal.

Chapitre 1

Rappelle de calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous examinerons les concepts de base du calcul stochastique que nous considérons importants dans notre travail.
Soit Ω est un ensemble non vide.

1.1 Tribu

Définition 1.1.1 *[**1**]Sois **A** un ensemble de parties de Ω ($\boldsymbol{A} \subset P(\ \Omega)$), on appelle tribu (ou δ-algébre) si **A** vérifier les conditions suivantes :*

1. *A n'est pas vide ($A \neq \phi$).*
2. *A est stable par complémentaire ($\forall\ B \in\ \boldsymbol{A}$: $B \in A \Leftrightarrow \bar{B} \in \boldsymbol{A}$).*
3. *A est stable par union dénombrable ($\forall\ n \in \mathbb{N}$,$B_n \in A \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in A$).*

Avec le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle espace mesurable.

Proposition 1.1.1 *Une intersection des tribus est une tribu.*

Exemple 1.1 *-Tribu des boréllieners de $\mathbb{R}$ (on note $B_{\mathbb{R}}$), c'est la plus petite tribu contenant tous les intervalles overts.*

Définition 1.1.2 *[1]La tribu engendrée par une famille de sous-ensemble A sur Ω est la plus petite tribu sur Ω contenant cette famille, on note $\delta(A)$, elle est l'intersection de touts tribus contenant A.*

Exemple 1.2 $\delta(A) = \left\{\Omega, \phi, A, \bar{A}\right\}$.

Définition 1.1.3 *On dit que $\Im$ est une sous-tribu de $\mathcal{F} \Leftrightarrow \ \forall A \in$ **A** *:*$A \in \Im \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.*

1.2 Filtrations

Définition 1.2.1 *[1]On appelle filtrations sur $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille croissent $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ telle que :*

$$\forall s, t : 0<s<t<\infty \quad \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F} \text{ avec } \mathcal{F}_\infty = \delta(\cup \mathcal{F}_{t>0}) \text{ sous tribu de } \mathcal{F}$$

– On appelle filtration naturelle $\left\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\right\}$ définie par

$$\mathcal{F}_t^X = \delta(X_s, s \leq t)$$

– La filtration est continue à droite si :

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s>\mathrm{t}} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t_+}$$

– On dit qu'une filtration $\mathbb{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite i.e $\mathcal{F}_t = \cap_{s\leq t} \mathcal{F}_s$, $\forall t \in \mathbb{T}$, et si elle complet c'est-à-dire $\mathcal{F}_0$ contient les ensembles négligeables.

1.3 Espace mesurés

Sois $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.

Définition 1.3.1 ***(Mesure)[2]*** *Une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une fonction*

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_{+} = [0, +\infty]$$

telle que :

1. $\mu(\phi) = 0$.
2. $\forall (A_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} \quad \mu(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$ si $\forall i, j \in I \quad A_i \cap A_j = \phi$.
3. $\forall i, j \in I \qquad \mu(\cup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$ si $\forall i, j \in I \quad A_i \cap A_j \neq \phi$.

Définition 1.3.2 *Un espace mesuré est un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *tel que* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace mesurable et* μ *est une mesure.*

Remarque 1.3.1 *Si* $\mu(\Omega) = 1$ *; la mésure* μ*dite probabilité noté par* P
l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sappelle éspace de probabilité*
On appelle le quadruple $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t \geq 0} ; P)$ *éspace de probabilité filtré .*

1.3.1 Mesurabilité

Définition 1.3.3 *[2]Soient* $(\Omega,\ \mathcal{F})$ *et* $(E,\ \xi)$ *deux espaces mesurables, une application* $f : \Omega \rightarrow E$ *est dit mesurable par rapport à* $(F,\ \xi)$ *:* $\forall A \in \xi$*, si* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ *tel que :* $f^{-1}(A) = \{w \in \Omega \ / \ f(w) \in A\}$ *.*

Définition 1.3.4 ***(Ensemble négligable)[1]*** *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, et* E *un ensmble non vide* $E \in \Omega$*. On dit que l'ensemble* E *est negligable ou* μ*-negligable si :*

$$\exists B \in \mathcal{F}/E \subset B \ :\mu(B) = 0$$

1.4 Variable aléatoire

Définition 1.4.1 *[3]Sois* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité.*

Une variable aléatoire X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans. $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$

$$\Leftrightarrow \forall B \in B_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) = \{w \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Remarque 1.4.1 *Il existe deux types des variables aléatoires discrètes et contenues :*

Définition 1.4.2 ***(Loi de probabilité d'un v.a)[3] :****Soit X une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La loi de X est la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ définie par :*

$$P_X(A) = P\{\omega; X(\omega) \in A\} = P(X^{-1}(A)) = P(X \in A), \quad \forall A \in B_{\mathbb{R}}$$

– On définie la fonction de répartitions de la v.a X avec :

$$\begin{aligned} &F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \\ &\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} P(X = k) \\ \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \end{cases} \end{aligned}$$

Telle que f est densité,si :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (f est positif).
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

1.5 Precessus stochastique

[1]

Définition 1.5.1 *Un processus X_t est une famille des variables aléatoires $(X_t,\, t \in [0, +\infty[)$ définie sur le même espace de probabilité.*

Définition 1.5.2 *Un processus stochastique $X = (X_t,\, t \in [0, +\infty[)$ est dit adapter (Par-rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t..*

Définition 1.5.3 ***(Trajectoire continue)*** *On dit que le processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est à trajectoire continue si l'application* $t \to X(t,\omega)$ *soit continue.*

Définition 1.5.4 ***(Processus prévisible)*** *On dit qu'un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est prévisible pour* $\mathcal{A}_t$*, si* X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* X_t *est* $\mathcal{F}_{t-1}$*-mesurable pour chaque* $t > 0$.

Définition 1.5.5 ***(Processus Gaussien)*** *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus Gaussien ssi* $\forall n \geq 1 : \forall\ t_0, t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+, \forall\ a_0, a_1, ..., a_n\ : \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$ *est un v.a Gaussien.*

Définition 1.5.6 ***(Accroissement stationnaire et indépendante)*** *Pour* $0 \leq s \leq t$ *les variables aléatoires* $X(t) - X(s)$ *sont appelés des accroissement :*
1).Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est à accroissement stationnaire si la distribution de la variable aléatoire* $X_{t+s} - X_t$ *ne dépende pas de* t.
2).Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est à accroissement indépendants si pour tout suite* $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n$ *les v.as* $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendante.*

1.6 Mouvement Brownien

Définition 1.6.1 *[7]Un processus stochastique* (B_t) *à valeurs réelles est appelée mouvement Brownien (ou processus de Winter), s'il vérifier les trois propieties suivantes :*

1. $P(B_0 = 0) = 1$ *(élément certain).*
2. $\forall s \leq t$ *accroissent* $(B_t - B_s)$ *suit la loi normale centrée de variance* $(t - s)$.
3. *si* $0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n$ *les accroissants* $B_{t_1}, (B_{t_2} - B_{t_1}), ..., (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ *indépendants* $(cov((B_{t_2} - B_{t_1}), (B_{t_1} - B_{t_0})) = 0)$.
4. *En dehors d'un ensemble de probabilité nul, les trajectoire* $t \to B_t(w)$ *sont contenue.*

Remarque 1.6.1 *Un mouvement Brownien est dit standard si :*

(a) $B_0 = 0$.

(b) $E(B_t) = 0$.

(c) $E(B_t^2) = t \Leftrightarrow var(B_t) = t$.

Définition 1.6.2

Un mouvement brownien (B_t) est un processus contenu gaussienne centrée de covariance $t \wedge s = \min(t, s)$, i.e. :

$$cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) - E(B_t)E(B_s) = E(B_t B_s)$$

1.7 Espérance

Définition 1.7.1 *[1]L'espérance d'une v.a X est définie par la quantité $\int_\Omega X dP$ que l'on note $E(X)$ ou $E_p(X)$ si l'on désire préciser quelle est la probabilité utilisée sur Ω. Cette quantité peut ne pas exister. Pour calculer cette intégrale, on passe dans "l'espace image" et on obtient, par définition de la loi de probabilité.*

$$\int_\Omega X dP = \int_\mathbb{R} x dP_X(x).$$

– on dit que X est intégrable si $E(|X|)$ est finie.

– Si X admet une densité f, on a $E(X) = \int_\mathbb{R} x f(x) dx$.

– Si X est une v.a discréte alors $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x)$.

1.8 Espérance conditionelle

[1]

On fixe l'espace de probabiliser $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit X est une v.a intégrable $(E(X) < \infty)$.

i par rapport à événement B $\in \mathcal{F}$, et soit $A \in \mathcal{F}$:

$$E(X/B) = \frac{P(X1_B)}{P(B)} \text{ si } P(B) \neq 0$$

ii par rapport à une tribu :

Définition 1.8.1 *Sois $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Sois également X une v.a réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et intégrable. Alors il existe une unique v.a, appelée espérance conditionnelle de X sachant G, notée $E(X\,/G)$,telle que :*

1. $E(X\,/B)$ est $B-$mesurable.
2. pour tout $B \in G$, $\int_B E(X\,/G)dP = \int_B X(\omega)dP$.

iii par rapport à une variable aléatoire :

Définition 1.8.2 *On définie l'espérance conditionelle d'une v.a X (intégrable) par rapport à Y étant comme l'espérance conditionelle de X par rapport à la tribu engendré $\delta(Y)$. On la note $E(X\,/Y)$ telle que :*

1. c'est une variable $\delta(Y)$ mesurable.
2. pour tout $B \in \delta(Y), \int_B E(X\,/Y)dP = \int_B XdP$.

Propriété 1.8.1

1. *Linéarité : si X et $Y \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$ alors : $E\left(aX + bY/G\right) = aE\left(X/G\right) + bE\left(Y/G\right)$*
2. *Si Y est G-mesurable alors : $E(YX/G) = YE(X/G)$.*
3. *Si X est indépendante de G alors : $E(X/G) = E(X)$.*
4. *Si $X \perp G$ alors : $E(E(X/G)) = E(X).*$*
5. *Si $X \leq Y$ alors : $E(X/G) \leq E(Y/\beta)$.*
6. *Si Y est indépendante de X, alors : $E(Y/X) = E(Y)$.*
7. *Si $X \perp Y$ alors : $E(Y/X) = Y$*

1.9 Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, on se donne une suite croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$ $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, et on définie un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}; \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}, P)$.

Définition 1.9.1 ***(martingale, sur-martingale et sous-martingale)[5] :***_Une suite_$\{X_n\}_{n\geq 0}$ *de v.a réells est dit martingale,sous martingale et sur martingale si :*

1. **Définition 1.9.2** *1.* $\{X_n\}_{n\geq 0}$*est* $\mathcal{F}_n$ *-adapté et pour tout* $n \geq 0$, $E(|X_n|) < +\infty$ *(existe).*

   2. Pour tout $n \geq 0$ $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$*.avec :*

$$\begin{cases} E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n \quad \text{équivatent (martingale)} \\ E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n \ \text{équivatent (sur-martingale)} \\ E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq \ X_n \ \text{équivatent (sous-martingale)} \end{cases}$$

Remarque 1.9.1 *(a) Si* $\{X_n\}_{n\geq 0}$*est une* $\mathcal{F}_n-$*martingale alors* $\forall n \geq 0, X_n$ *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable.*

(b) La définition d'une martingale signifie que la meilleure prévision de X_{n+1} *compte trouver l'informations disponsible à constant n..*

(c) Si X_n*est* $\mathcal{F}_n$ *-martingale alors* $E(X_{n+1}) = E(E(X_n/\mathcal{F}_n)) = E(X_n)$.

1.10 Intégralle stochastique (ou Intégrale d'Itô)

Définition 1.10.1 *[4]L'intégralle stochastique, est une intégrale proposée avec des processus stochastiques sous la forme suivantes :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s;$$

où $\{\theta_s, s \geq 0\}$ *est un processus stochastique et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien.*

i Cas de processus étages : Ce sont les processus du type :

$$\theta_t^n = \sum_{i=1}^{m} \theta_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t);$$

Où $m \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m$ et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ pour tout $i = 0, 1, ..., n$. On voit immédiatement que θ^n est un bon processus. On définie alors :

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i});$$

avec

$$E(I_t(\theta^n)) = 0 \text{ et } var(I_t(\theta^n)) = E(\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds).$$

ii Cas général :

Le principe est le même que l'intégrale de Winer, et on applique les lemmes Hilbertienne et Gaussien, alors si θ est un bon processus, donc il exist $\{\theta^n, n \geq 0\}$ suite de processus étagés telle que :

$$E(\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds) \longrightarrow 0,$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} E(|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|) \longrightarrow 0.$$

Alors d'après la limite, on note :

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s.$$

Alors il vérifier :

$$E(I_t(\theta)) = 0 \text{ et } var(I_t(\theta)) = \lim_{n \to +\infty} var(I_t(\theta^n)) = E(\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds).$$

1. Linéarité :

$$\int_0^t (c\theta_s + K_s)dBs = c\int_0^t \theta_s dBs + \int_0^t K_s dBs$$

2 Espérance nulle et isométrie :

$$E(\int_0^t \theta_s dBs) = 0$$

et

$$cov(\int_0^t \theta_s dBs, \int_0^t K_s dBs) = E(\int_0^{t\wedge s} \theta_r K_r dr)$$

3 $\int \theta dB$ est une martingale continue de carré intégrable :

$$E(\sup_{t\in[0;T]} (\int_0^t \theta_s dBs)^2) \leq 4E(\int_0^T \theta_s^2 ds)$$

1.10.1 Processus d'Itô

Définition 1.10.2 *[8]Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$; et B_t un mouvement brownien, on appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{t\in[0;T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall t \leq T : X_t = X_0 + \int_0^t b_s(x_s)ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)dB_s.$$

La forme différentielle équivalante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases},$$

avec

1. X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.
2. $(b_t)_{t\in[0;T]}$ un processus adapté à $\mathcal{F}_t$ et s'appelle la coefficient de dérive et $\int_0^t |b_s|\, ds{<}{+\infty}$.
3. $(\sigma_t)_{t\in[0;T]}$ un processus adapté à $\mathcal{F}_t$ et s'appelle la coefficient de déffitient et $\int_0^t |\sigma_s|^2\, dB_s{<}{+\infty}$.

1.10.2 Formule d'itô

[11]

Sois $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô, telle que :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

Théorème 1.10.1 ***(Premiére formule d'Itô) :*** *Supposons que f de classe $C^2(\mathbb{R})$, telle que $f^{"}$ est bornée stasifait presque sûrement et $(B_t)_{t>0}$ est un M.B, standard tel que :*

$$E\left(\int_0^t f^{'}(B_t)ds\right)^2 < \infty, \forall t > 0$$

Alors

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f^{'}(B_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)dX_s$$

Exemple 1.3 *Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ on a d'après (Théoreme (1.10.1)) : $f\grave{(}x) = x$, $f\,"(x) = 1$ on a :*

$$\begin{aligned} E(\int_0^t (B_s)^2 ds) &= \int_0^t s ds \\ &= \frac{1}{2}t^2 < \infty \end{aligned}$$

Donc la formule d'Itô s'écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}B_0^2 &= \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t ds \\ \frac{1}{2}B_t^2 &= \frac{1}{2}B_0^2 + \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t ds \\ 2\int_0^t B_s dB_s &= B_t^2 - t \end{aligned}$$

Alors $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

Théorème 1.10.2 ***(Deuxième formule d'Itô) :*** *Soient f une fonction définie sur*

$(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de classe C^1 par rapport à t, et de classe C^2 par rapport à x et $(B_t)_{t>0}$ est un M.B, standard on a :

$$E\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)^2 ds\right)\right) < \infty, \forall t > 0.$$

Alors

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) < dX_s; dX_s >$$

Exemple 1.4 *Soit la fonction $f(t, x) = tx$, on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = x, \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = t, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0,$$

Et on a

$$E(\int_0^t (s)^2 ds) < \infty$$

Donc la formule d'Itô s'écrite sous la forme :

$$B_t t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 0 ds.$$

Alors $\int_0^t s dB_s = B_t t - \int_0^t B_s ds.$

Proposition 1.10.1 ***(formule d'intégration par partie)*** *: Soient X et Y deux processus d'Itô, alors :*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b\prime_s(y_s)ds + \int_0^t \sigma\prime_s(y_s)dB_s$$
$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(x_s)ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)dB_s$$
$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

Avec :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s(x_s)\sigma\prime_s(y_s)ds$$

Preuve [5] ■

Chapitre 2

Équation différentielle stochastique

2.1 Introduction

Une équation différentielle stochastique $(E.D.S)$ est une équation de la forme

$$dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dB_t, t \geq 0, \tag{2.1}$$

$b, \sigma : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$, b, σ sont deux fonctions déterministes mesurables, avec b est appelée le coefficient de dérive et σ est appelée le coefficient de diffusion, soit $x_0 : \Omega \to \mathbb{R}$,x_0 est une v.a carrée intégrable et x_0 indépendant du M.B .

Sois $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$ la filtration engendrée par le M.B $(B_t)_{t\geq 0}$, et par le variable x_0 une solution de (2.1) est un processus continue $\mathcal{F}_t-$adapté tel que les intégrables ($\int_0^t b(s, x_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, x_s)dBs$)ou un sens et l'égalité

$$x_t = \varepsilon + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dB_s, \tag{2.2}$$

telle que $x_0 = \varepsilon$.

Remarque 2.1.1 *Il existe deux types de solutions d' E.D.S, la solution fort (on une égalité presque sûre) et la solutions faible (une égalité on loi).*

On considère l'équation $E.D.S$

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dB_t \\ x_0 = \varepsilon \end{cases} . \tag{2.3}$$

Une solution forte consiste à un processus stochastique x existant sur le même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

Définition 2.1.1 *On dit que l'equation (2.3) admet une solutions forte si pour deux solutions fortes $x = (x_t)_{t\in[0;T]}$ et $y = (y_t)_{t\in[0;T]}$ on a :*

$$P(\sup_{t\in[0;T]} |x_t - y_t| > 0) = 0 \tag{2.4}$$

c-à-dire :$P(x_t = y_t ; \forall t \in [0; T]) = 1$.

2.2 Existence et unicité de la solution forte d'une E.D.S

[6]

On dit que l'équation E.D.S (2.3) admet une unique solution forte, si les coefficients b et σ vérifie les conditions suivantes lipschitzienne (2.5) et de croissance (2.6) :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y| . \tag{2.5}$$

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2). \tag{2.6}$$

Donc, on se donne ci-dessous le théorème d'existence et unicité d'Itô.

Théorème 2.2.1 *Si les coeffitients b et σ vérifient les conditions (2.5) et (2.6). Alors l'équation (2.3) admet une solution forte unique $x = (x_t)_{t\in[0;T]}$-$(\mathcal{F}_t)$ adapté et continue* *avec condition initiale* $x_0 = \varepsilon$ *de plus cette solution est Makrovienne et vérifie*

$$E(\sup_{t\in[0;T]} |x_t|^p) < M, \forall p > 1.$$

Où M *est une constante qui dépend de* K, p, L, T *et* ε.

Preuve La preuve du théorème d'existence et unicité est basé sur le lemme de Gronwall et l'inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy

i) Unicité : on va montrer que $x_t = y_t.\ P.\ P-s$

Soient $x = (x_t)_{t\in[0;T]}$ et $y = (y_t)_{t\in[0;T]}$ deux solutions de (2.3) tel que $x_0 = y_0 = \varepsilon$. En utilisant les formules de x_t et y_t pour montrer que :

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} (x_t - y_t)^2\right] = 0 \qquad 0 \le t \le T.$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} x_t - y_t &= \int_0^t b(s,x_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x_s)dB_s - \left[\int_0^t b(s,y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,y_s)dB_s\right] \\ &= \int_0^t \left(b(s,x_s) - b(s,y_s)\right)ds + \int_0^t \left(\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)\right)dB_s. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité suivante :$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ on a

$$|x_t - y_t|^2 \le 2\left|\int_0^t b(s,x_s) - b(s,y_s)ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)dB_s\right|^2.$$

En passant à l'espérance mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left(|x_t - y_t|^2\right) &\le E\left[2\left|\int_0^t b(s,x_s) - b(s,y_s)ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)dB_s\right|^2\right]. \\ &\le 2E\left[\left|\int_0^t b(s,x_s) - b(s,y_s)ds\right|^2\right] + 2E\left[\left|\int_0^t \sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)dB_s\right|^2\right]. \end{aligned}$$

Par l'esométrie, on a :

$$E\left[\left|\int_0^t \sigma(s,x_s)-\sigma(s,y_s)dB_s\right|^2\right] \leq E\left[\int_0^t \left|\sigma(s,x_s)-\sigma(s,y_s)\right|^2 ds\right].$$

Alors :

$$E\left(\left|x_t-y_t\right|^2\right) \leq 2E\left[\int_0^t \left|b(s,x_s)-b(s,y_s)\right|^2 ds\right] + 2E\left[\int_0^t \left|\sigma(s,x_s)-\sigma(s,y_s)\right|^2 ds\right].$$

En appliquant la condition de Lipchitz (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} E\left(\left|x_t-y_t\right|^2\right) &\leq 2K\int_0^t E\left(\left|x_s-y_s\right|^2 ds\right) + 2K\int_0^t E\left(\left|x_s-y_s\right|^2 ds\right) \\ &\leq 4K\int_0^t E\left(\left|x_s-y_s\right|^2 ds\right) \end{aligned}$$

On a :

$$E\left(\left|x_t-y_t\right|^2\right) \leq 4K\int_0^t E\left(\left|x_s-y_s\right|^2 ds\right). \tag{2.7}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on pose $4K = c$

$$E\left(\left|x_t-y_t\right|^2\right) \leq 0\exp(ct) \quad \forall t \in [0;T].$$

Alors, il résulte que :

$$E\left(\left|x_t-y_t\right|^2\right) = 0.$$

En appliquant l'inégalité de Tchébychef, on obtient :

$$\forall \zeta > 0; \left(P\left|x_t-y_t\right|^2 > \zeta\right) \leq \frac{E(\left|x_t-y_t\right|^2)}{\zeta^2} = 0.$$

Enfin, le processus x et y sont continus. On conclut par (2.4) que :

$$P\left(\sup_{t\in T}|x_t-y_t|^2>0\right)=0.$$

Alors :

$$P(x_t=y_t;\forall t\in[0;T])=1.$$

Donc cela lui prouve de l'unicité forte de la solution. ■

ii) Existence : pour démontrer l'existence d'une solution x de l'EDS (2.3) on utilise la méthode des approximations successives on note **"méthode d'itération de Picard".** On définie par récurrence une suite de processus $(x^{(n)})$

$$\begin{aligned}
x_t^0 &= \varepsilon \\
x_t^1 &= \varepsilon+\textstyle\int_0^t b(s,\varepsilon)ds+\int_0^t\sigma(s,\varepsilon)dB_s \\
x_t^2 &= \varepsilon+\textstyle\int_0^t b(s,x_t^1)ds+\int_0^t\sigma(s,x_t^1)dB_s \\
&\vdots \\
x_t^n &= \varepsilon+\textstyle\int_0^t b(s,x_t^{n-1})ds+\int_0^t\sigma(s,x_t^{n-1})dB_s \\
x_t^{n+1} &= \varepsilon+\textstyle\int_0^t b(s,x_t^n)ds+\int_0^t\sigma(s,x_t^n)dB_s \qquad .
\end{aligned}$$

Par récurrence pour tout n, x_t^n est continûment adapté, donc le processus $\sigma(s,x_t^n)$ l'est aussi

Preuve Premièrement nous vérifions par récurrence sur n que :

$$\exists M:\ E\left[|x_t^n|\right]\leq M,\quad \forall t\in[0,T]\,. \tag{2.8}$$

Pour $n=0$, il n'ya rien montrer.

Supposons a présent que ceci est vrai à l'ordre $n-1$ et vérifions que cela reste vrai à l'ordre , on a :

$$x_t^n=\varepsilon+\int_0^t b(s,x_t^{n-1})ds+\int_0^t\sigma(s,x_t^{n-1})dB_s$$

D'après l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3a^2+3b^2+3c^2$,on a :

$$|x_t^n|^2 \leq 3\varepsilon^2 + 3\left|\int_0^t b(s,x_s^{n-1})ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t \sigma(s,x_s^{n-1})dB_s\right|^2$$

En passant à la l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[|x_t^n|^2\right] &\leq E\left[3\varepsilon^2 + 3\left|\int_0^t b(s,x_s^{n-1})ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t \sigma(s,x_s^{n-1})dB_s\right|^2\right] \\
&\leq 3E\left[\varepsilon^2\right] + 3E\left[\left|\int_0^t b(s,x_s^{n-1})ds\right|^2\right] + 3E\left[\left|\int_0^t \sigma(s,x_s^{n-1})dB_s\right|^2\right]
\end{aligned}$$

Par l'esométrie, on a :

$$E\left[|x_t^n|^2\right] \leq 3E\left[\varepsilon^2\right] + 3E\left[\int_0^t \left|b(s,x_s^{n-1})\right|^2 ds\right] + 3E\left[\int_0^t \left|\sigma(s,x_s^{n-1})\right|^2 ds\right].$$

D'après la condition de croissance bornée (2.6) on a :

$$\begin{aligned}
E\left[|x_t^n|^2\right] &\leq 3\left[E(\varepsilon^2) + LE(\int_0^t (1+\left|x_s^{n-1}\right|^2))ds\right] \\
&\leq 3E(\varepsilon^2) + 3LE(\int_0^t (1+\left|x_s^{n-1}\right|^2)ds).
\end{aligned}$$

On posant $d = \max(3,3L)$ Alors :

$$\begin{aligned}
E\left[|x_t^n|^2\right] &\leq dE(\varepsilon^2) + dE(\int_0^t (1+\left|x_s^{n-1}\right|^2)ds) \\
&\leq dE(\varepsilon^2) + dE(\int_0^t (1+\sup_{0\leq t\leq T}\left|x_s^{n-1}\right|^2)ds) \\
&\leq dE(\varepsilon^2) + dE(\int_0^t (1+M')ds) \\
&\leq dE(\varepsilon^2) + d\left(1+M'\right)\int_0^t ds \\
&\leq dE(\varepsilon^2) + d\left(1+M'\right)T
\end{aligned}$$

Puisque $E(|\varepsilon|^2)<\infty$ alors en posant $M = dE(\varepsilon^2) + d\left(1 + M'\right)T$. On obtient :

$$E(|x_t^n|^2) < M, \forall t \in T. \tag{2.9}$$

D'autre part on pose :

$$x_t^{n+1} - x_t^n = \int_0^t b(s, x_s^n) - b(s, x_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^n) - \sigma(s, x_s^{n-1})dB_s.$$

On utilise le même technique $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$que pour l'unicité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2 &\leq 2\left|\int_0^t b(s, x_s^n) - b(s, x_s^{n-1})ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s, x_s^n) - \sigma(s, x_s^{n-1})dB_s\right|^2 \\
E\left(\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2\right) &\leq E\left(2\left|\int_0^t b(s, x_s^n) - b(s, x_s^{n-1})ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s, x_s^n) - \sigma(s, x_s^{n-1})dB_s\right|^2\right) \\
&\leq 2E\left(\left|\int_0^t b(s, x_s^n) - b(s, x_s^{n-1})ds\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_0^t \sigma(s, x_s^n) - \sigma(s, x_s^{n-1})dB_s\right|^2\right) \\
&\leq 2E\left(\int_0^t \left|b(s, x_s^n) - b(s, x_s^{n-1})\right|^2 ds\right) + 2E\left(\int_0^t \left|\sigma(s, x_s^n) - \sigma(s, x_s^{n-1})\right|^2 ds\right) \\
&\leq 2K\int_0^t E\left(\left|x_s^n - x_s^{n-1}\right|^2 ds\right) + 2K\int_0^t E\left(\left|x_s^n - x_s^{n-1}\right|^2 ds\right) \\
&\leq 4K\int_0^t E\left(\left|x_s^n - x_s^{n-1}\right|^2 ds\right) \\
E(\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2) &\leq c\int_0^t E(\left|x_t^n - x_t^{n-1}\right|^2)
\end{aligned}$$

Telle que :$c = 4K$

Par récurrence sur n, on a : pour $n = 0$

$$\begin{aligned}
x_t^1 - x_t^0 &\leq \int_0^t b(s, x_s^0)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^0)dB_s \\
\left|x_t^1 - x_t^0\right|^2 &\leq 2\left|\int_0^t b(s, x_s^0)ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s, x_s^0)dB_s\right|^2 \\
E(\left|x_t^1 - x_t^0\right|^2) &\leq 2E\left(\left|\int_0^t b(s, x_s^0)ds\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_0^t \sigma(s, x_s^0)dB_s\right|^2\right) \\
&\leq 2E\left(\int_0^t \left|b(s, x_s^0)\right|^2 ds\right) + 2E\left(\int_0^t \left|\sigma(s, x_s^0)\right|^2 ds\right) \\
&\leq 2L\int_0^t (1 + E(\left|x_s^0\right|^2))ds + 2E\int_0^t \left|\sigma(s, x_s^0)\right|^2 ds \\
&\leq 2L\int_0^t (1 + E(\left|x_s^0\right|^2))ds + 2L\int_0^t (1 + E(\left|x_s^0\right|^2))ds \\
&\leq 4L\int_0^t (1 + E(\left|x_s^0\right|^2))ds \\
&\leq 4L(1 + E(\left|x_s^0\right|^2))\int_0^t ds \\
&\leq 4L(1 + E(\left|x_s^0\right|^2)T
\end{aligned}$$

En pose $M = 4L(1 + E(|x_s^0|^2)$.On a : $E(|x_t^1 - x_t^0|^2) \leq MT$

Par récurrence sur n, il résulte que :

$$E(\left|x_t^{n+1} - x_t^n\right|^2) \leq \frac{M\,(T)^{n+1}}{(n+1)!},$$

Telle que

$$\begin{aligned}
E(\left|x_t^{n+2} - x_t^{n+1}\right|^2) &\leq \frac{M\,(T)^{n+2}}{(n+2)!} \\
&\leq c\int_0^t E(\left|x_s^{n+1} - x_s^n\right|^2)ds \\
&\leq cM\int_0^t \frac{(T)^{n+1}}{(n+1)!}ds = cM\frac{(T)^{n+2}}{(n+2)!}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} E(|x_t^m - x_t^n|^2)^{\frac{1}{2}} &= \|x_t^m - x_t^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \left\|x_t^{k+1} - x_t^k\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left(M \frac{(T)^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc x_t^n est une suite de Cauchy dans l'espace de Banakh $(L^2(\Omega)$ alors il existe un processus noté x_t telle que : $\lim_{n\to+\infty} x_t^n = x_t$, on obtient :

$$x_t = \varepsilon + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dB_s$$

Donc x_t est une solution de l'équation (2.3) .

iii) Montrons que :$E\left[\sup_{t\in[0;T]} |x_t|^p\right] < M, \forall p > 1$

On a :

$$x_t = \varepsilon + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dB_s.$$

Par l'inégalité $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$On a :

$$|x_t|^2 \leq 3|\varepsilon|^2 + 3\left|\int_0^t b(s, x_s)ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t \sigma(s, x_s)dB_s\right|^2.$$

En passant aux espérances, on a :

$$\begin{aligned} E\left[|x_t|^2\right] &\leq E\left[3|\varepsilon|^2 + 3\left|\int_0^t b(s, x_s)ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t \sigma(s, x_s)dB_s\right|^2\right] \\ &\leq 3E\left[|\varepsilon|^2\right] + 3E\left[\left|\int_0^t b(s, x_s)ds\right|^2\right] + 3E\left[\left|\int_0^t \sigma(s, x_s)dB_s\right|^2\right]. \\ &\leq 3E\left[|\varepsilon|^2\right] + 3E\left[\int_0^t |b(s, x_s)|^2 ds\right] + 3E\left[\int_0^t |\sigma(s, x_s)|^2 ds\right] \end{aligned}$$

D'aprés la conditions de croissance linéaire(2.6), on a :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq 3E\left[|\varepsilon|^2\right] + 3L\int_0^t E\left[1+|x_s|^2\right]ds + 3L\int_0^t E\left[1+|x_s|^2\right]ds$$

En posant :$m = \max(3, 3L)$ On a :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq mE\left[|\varepsilon|^2\right] + 2m\int_0^t E\left[1+|x_s|^2\right]ds$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on a :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq mE\left[|\varepsilon|^2\right]\exp(mt) \quad \forall t \in [0;T]$$

Puisque $E\left[|\varepsilon|^2\right] < \infty$, alors on posant

$$M = mE\left[|\varepsilon|^2\right]\exp(dt)$$

On obtient :

$$E\left[|x_t|^2\right] < M \quad \forall t \in [0;T]$$

Enfin par l'inégalité de Buckholders-Davis-Gundy :

$$E\left[\sup_{t\in[0;T]}|x_t|^p\right] < M \quad \forall p > 1$$

Alors, le théoreme est prouvé.. ■

2.3 Exemples

[10]

1/ Cas ou le processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

pour $n = d = 1$ et $c \in \mathbb{R}$, l'unique solution de L'EDS (*)

$$\begin{cases} dx_t = cx_t dt + dB_t \\ x(0) = \varepsilon \end{cases} \tag{*}$$

est

$$x_t = \varepsilon \exp(at) + \int_0^t \exp(c(t-s))dB_s$$

2/ Cas ou Modéle de black et schole : sois $(\mu, \delta, x_0) \in \mathbb{R}^3$, l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de L'E.D.S. liniére.

$$\begin{cases} dx_t = x_t(\mu dt + \delta dB_t) \\ x(0) = \varepsilon \end{cases} \tag{**}$$

On doit vérifier les conditions du théoreme d'existence et l'unicité.

On a :

$$b(t, x_t) = \mu x_t \quad , \quad \sigma(t, x_t) = \delta x_t$$

Les fonctions b et σ sont continues.

1. **Condition de Lipschitez** : il existe une constante K telle que : pour toutes x et $y \in \mathbb{R}$:

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x - y|$$

$$|\mu x - \mu y| + |\delta x - \delta y| \leq K\,|x - y|$$

$$|\mu|\,|x - \mu| + |\delta|\,|x - y| \leq K\,|x - y|\,.$$

   Alors $\quad K = |\mu| + |\delta|\,.$

2. **Condition de croissance** : il existe une constante L telle que : pour toutes $x \in \mathbb{R}$:

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2)$$

$$|\mu x|^2 + |\delta x|^2 \leq L^2(1 + |x|^2)$$

$$|\mu|^2 |x|^2 + |\delta|^2 |x|^2 \leq L^2(1+|x|^2)$$

$$|\mu|^2 |x|^2 + |\mu|^2 + |\delta|^2 |x|^2 + |\delta|^2 \leq L^2(1+|x|^2) = (|\mu|^2 + |\delta|^2)(1+|x|^2)$$

Alors $L = \sqrt{|\mu|^2 + |\delta|^2}$

3. x_0 est indépendant de B_t alors l'E.D.S. (**) admet une solution forte, et cette solution est unique.

Recharche de solutions :

On pose

$$Y_t = \ln(x_t) \text{ encore } f(x) = \ln(x)$$

$$f\prime(x_t) = \frac{1}{x_t}, \quad f"\ (x_t) = -\frac{1}{x_t^2}$$

Donc d'après d'Itô on a :

$$\begin{aligned} df(x_t) &= f\prime(x_t)dx_t + \frac{1}{2}f"\ (x_t)dx_t^2 \\ &= \frac{dx_t}{x_t} - \frac{1}{2}\frac{dx_t^2}{x_t^2} \end{aligned}$$

On introduire l'intégrale

$$\int_0^t df(x_s) = \int_0^t \frac{dx_s}{x_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{dx_s^2}{x_s^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x_t) - f(x_0) &= \int_0^t \frac{x_s(\mu ds + \delta dB_s)}{x_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{x_s^2\delta^2 ds}{x_s^2} \\ \ln(x_t) - \ln(x_0) &= \int_0^t (\mu ds + \delta dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t {}_s\delta^2 ds \end{aligned}$$

D'oū

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x_t}{x_0}\right) &= \int_0^t \mu ds + \int_0^t \delta dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t {}_s\delta^2 ds \\
&= \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\delta^2) ds + \int_0^t \delta dB_s \\
&= (\mu - \frac{1}{2}\delta^2)t + \delta B_t
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{x_t}{x_0} &= \exp((\mu - \frac{1}{2}\delta^2)t + \delta B_t) \\
x_t &= x_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\delta^2)t + \delta B_t)
\end{aligned}$$

x_t est une solution forte de E.D.S. $(**)$.

Chapitre 3

Condition nécessaire d'optimalité pour E.D.S contrôlée

[12][13][14]

3.1 Formulation du probléme

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimensionnel et A un borélien de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.1 *On appelle contrôle touts processus $u = u(t)_{t\in[0;T]}$ adapté par rapport à une filtration, de carré intégrable et prend ces valeurs dans un borélienne A de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 3.1.2 *On appelle contrôle admissible tout processus $u = (u(t))_{t\in[0,T]}$ mesurable et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$- adapté à valeurs dans un borélien A de $\mathbb{R}^n$,avec $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \delta(B(s), 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien. On note par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles et sous ensemble non convexe de $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$U = \left\{u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A/u_t \text{ est mesurable et } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} - \text{adapté } \right\}$$

Soient $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times A \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow M_{d\times d}(\mathbb{R})$ sont deux fonctions Boréliennes telle que $b(t,x,a)$ est continue en a uniformément en (t,x) et ε une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable indépendante de B telle que :

$$E(|\varepsilon|^m) < \infty, \text{ pour tout } m > 1$$

On considére le probléme de contrôle suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t,x(t),u(t))dt + \sigma(t,x(t))dB_t \\ x(0) = \varepsilon \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour chaque contrôle, u soit $x = (x(t), 0 \leq t \leq T)$ la solution de l'équation différentielle (3.1). La solution x est appelée la réponse du contrôle u et le couple $(x,\ u)$ est appelée couple admissible.

Sois la fonction coût défini par :

$$J(u) = E\left[g(x(T)) + \int_0^T h(t,x(t),u(t))dt\right] \tag{3.2}$$

Où $h : [0,\ T] \times \mathbb{R}^d \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions boréliennes et $x(T)$ est la solution de l'équation (3.1) prise au temps terminal T.

Définition 3.1.3 *On appelle contrôle optimale si'l existe $u \in U$ tell que :*

$$J(u) = \inf_{v\in U}(J(v))$$

Quelques hypothèses pour les fonctions b, σ, g et h :

pour tout $(t,u) \in [0,T] \times A$,$\exists\ C > 0$ et $x \in \mathbb{R}^m$

1. Les fonctions b, σ, g et h vérifiant le condition de croissance telle que

$$|b(t,x,u)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|^2) \tag{3.3}$$
$$|h(t,x,u)| + |g(x)| \leq C(1+|x|^2)$$

2. Les fonctions b, σ, g et h sont dérivables en x et à dérivée continue et bornée, donc il existe une constante positive telle que :

$$|b(t,x,u)| \leq K \tag{3.4}$$

3. La fonction $b(t,x,.) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est continue.

Remarque 3.1.1 *D'après l'hypothèses de b et σ, donc elles est lipschitzienne, alors l'équation (3.1) admet une unique solution continue forte donnée par :*

$$x_t = \varepsilon + \int_0^T b(s,x_s,u)dt + \int_0^T \sigma(s,x_s)dB_s$$

Telle que

$$E\left[\sup_{t\in[0;T]} |x_t|^m\right] \leq M, \forall m > 1. \tag{3.5}$$

Remarque 3.1.2 *Les fonctions b et σ vérifiant les conditions de croissance et Lipschitzienne et de plus elles est déterministes donc nous assurent l'existence et l'unicité d'une solution forte de (3.1) pour tout contrôle admissible $u \in U$.*

Remarque 3.1.3 *Les fonctions h et g vérifiants le conditions de croissance, alors le coût $J(u)$ est bien définie telle que :*

$$J(u) = E\left[g(x(T)) + \int_0^T h(t,x(t),u(t))dt\right]$$

Alors

$$|J(u)| \leq E\left[\int_0^T |h(t,x(t),u(t))|\,dt\right] + E\left[|g(x(T))|\right]$$

On a h et g vérifiant la condition de croissance, on obtient :

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq E\left[\int_0^T C(1+|x_t|^2)dt\right] + E\left[C(1+|x_t|^2)\right] \\ &\leq E\left[C(1+\sup_{t\in[0;T]}|x_t|^2)\right] + E\left[C(1+\sup_{t\in[0;T]}|x_t|^2)\right]. \end{aligned}$$

D'après (3.5) *on pose* $m=1$*, donc :*

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq CE(1+\sup_{t\in[0;T]}|x_t|^2) \\ &\leq CE(1+M^{'}) \\ &\leq M. \end{aligned}$$

- Le but du problème de contrôle optimal consiste à minimiser la fonction $J(u)$ sur l'ensemble U des contrôles admissibles. C'est-à-dire trouver un contrôle $u \in U$ telle que :

$$J(u) = \inf_{v\in U}(J(v))$$

3.2 Estimation des solutions

On supposera l'existence d'un contrôle optimal u minimisant le coût J sur l'ensemble U et notons par la trajectoire optimale (la solution de l'équation (3.1) associée à u).

Pour établir des conditions nécessaires d'optimalité, on utilise des perturbations fortes de

u. Et pour cela ont défini :

$$u_\theta(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0, t_0[\\ v & t \in [t_0, t_0+\theta[\\ u(t) & t \in [t_0+\theta, T[\end{cases}$$

Où $v \in A$, $t_0 \in]0; T[$ et θ assez petit.

$u_\theta(t)$ est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$-adapté à valeurs dans A. Donc c'est un contrôle admissible appartenant à U.

Lemme 3.2.1 *Soient x et x_θ les solutions de (3.1) correspondant aux contrôles u et u_θ, et quand $\theta \longrightarrow 0$ alors on a l'estimation suivante :*

$$E\left(\sup_{t\in[0;T]} |x_\theta(t) - x(t)|^2\right) \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

Preuve Soit $x(t)$ et $x_\theta(t)$ sont les solutions de l'équation (3.1) associées à les contrôles u et u_θ alors elles sont données respectivement par :

$$x(t) = \varepsilon + \int_0^t b(s, x(s), u(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x(s))dB_s$$

$$x_\theta(t) = \varepsilon + \int_0^t b(s, x_\theta(s), u_\theta(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x_\theta(s))dB_s$$

En utilisant les formules de $x(t)$ et $x_\theta(t)$, alors :

$$\begin{aligned} x_\theta(t) - x(t) = & \left[\varepsilon + \int_0^t b(s, x_\theta(s), u_\theta(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x_\theta(s))dB_s\right] \\ & - \left[\varepsilon + \int_0^t b(s, x(s), u(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x(s))dB_s\right] \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\int_0^t b(s, x(s), u_\theta(s))ds$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_\theta(t) - x(t) = &\int_0^t \left[b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma(s, x_\theta(s)) - \sigma(s, x(s))\right] dB_s + \int_0^t \left[b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u_\theta(s))\right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_\theta(t) - x(t) = &\int_0^t \left[b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u_\theta(s))\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))\right] ds + \int_0^t \left[\sigma(s, x_\theta(s)) - \sigma(s, x(s))\right] dB_s. \\ |x_\theta(t) - x(t)| = &\left| \int_0^t \left[b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u_\theta(s))\right] ds + \int_0^t \left[b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))\right] ds \right. \\ &\left. + \int_0^t \left[\sigma(s, x_\theta(s)) - \sigma(s, x(s))\right] dB_s \right| \end{aligned}$$

D'après l'inégalité $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, on a

$$\begin{aligned} |x_\theta(t) - x(t)|^2 \leq &\, 3 \left| \int_0^t b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u_\theta(s))ds \right|^2 \\ &+ 3 \left| \int_0^t b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))ds \right|^2 + 3 \left| \int_0^t \sigma(s, x_\theta(s)) - \sigma(s, x(s))dB_s \right|^2 \end{aligned}$$

D'après l'esométrie, on a :

$$\begin{aligned} |x_\theta(t) - x(t)|^2 \leq &\, 3 \int_0^t |b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u_\theta(s))|^2 ds + 3 \int_0^t |b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))|^2 \\ &+ 3 \int_0^t |\sigma(s, x_\theta(s)) - \sigma(s, x(s))|^2 ds \end{aligned}$$

En applique la condition de lipschitzienne, on trouve :

$$\begin{aligned} |x_\theta(t) - x(t)|^2 \leq &\, 3K \int_0^t |x_\theta(t) - x(t)|^2 ds + 3 \int_0^t |b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))|^2 ds \\ &+ 3K \int_0^t |x_\theta(t) - x(t)|^2 ds \end{aligned}$$

En passant à l'espérance, on a : ■

$$
\begin{aligned}
E\left[|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] \leq\ & E[3k\int_0^t |x_\theta(s)-x(s)|^2\, ds + 3k\int_0^t |x_\theta(t)-x(t)|^2\, ds \\
& + 3\int_0^t |b(s,x(s),u_\theta(s))-b(s,x(s),u(s))|^2\, ds]. \\
& \leq 6kE\int_0^t \left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\right] ds \\
& + 3\int_0^t |b(s,x(s),u_\theta(s))-b(s,x(s),u(s))|^2\, ds]
\end{aligned}
$$

D'après la définition du contrôle u_θ, on trouve :

$$
\begin{aligned}
E\left[|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] \leq\ & 6kE\int_0^t \left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\right] ds \\
& + 3E[\int_0^{t_0} |(b(t,x(t),u(t))-b(t,x(t),u(t)))|^2\, ds \\
& + \int_{t_0}^{t_0+\theta} |(b(t,x(t),v)-b(t,x(t),u(t)))|^2\, ds \\
& + \int_{t_0+\theta}^{T} |(b(t,x(t),u(t))-b(t,x(t),u(t)))|^2\, ds].
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
E\left[|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] \leq\ & 6kE\left[\int_0^t |x_\theta(s)-x(s)|^2\, ds\right] \\
& + 3E[\int_{t_0}^{t_0+\theta} |(b(t,x_\theta(t),v)-b(t,x(t),u(t)))|^2\, ds].
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
E\left[|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] \leq\ & 6kE\left[\int_0^t |x_\theta(s)-x(s)|^2\, ds\right] \\
& + 3E\left[\sup_{t\in[0;T]} \left|b(t,x(t),v)-b(t,x(t),u(t))\int_{t_0}^{t_0+\theta} ds\right|^2\right].
\end{aligned}
$$

Donc :

$$E\left[|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] \leq 6k\int_0^t E\left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\,ds\right]$$
$$3E\left[\sup_{t\in[0;T]}|b(t,x(t),v)-b(t,x(t),u(t))\theta|^2\right]$$

D'après la condition de croissance (3.3) et la bornétude (3.4)de b et σ, on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\in[0;T]}|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] &\leq 6k\int_0^t E\left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\,ds\right] \\
&+ 3\theta^2 CE\left(1+|x_t|^2\right) \\
&\leq 6k\int_0^t E\left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\,ds\right] \\
&+ 3\theta^2 C\left(1+E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_t|^2\right]\right) \\
&\leq 6k\int_0^t E\left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\,ds\right] \\
&+ 3\theta^2 C\left(1+M^{'}\right) \\
&\leq 6k\int_0^t E\left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\,ds\right] \\
&+ M\theta^2
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on pose :

$$6k\int_0^t E\left[|x_\theta(s)-x(s)|^2\,ds\right] = ws..$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\in[0;T]}|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] &\leq M\theta^2\int_0^t \exp(ws)\,ds \\
&\leq M\theta^2\left[\frac{1}{w}\exp(ws)\right]_0^t \\
&\leq M\theta^2\left[\frac{1}{w}\exp(wt)-\frac{1}{w}\right] \\
&\leq \frac{M\theta^2}{w}\left[\exp(wt)-1\right].
\end{aligned}
$$

On pose $C=\frac{M}{w}\left[\exp(wt)-1\right]$, alors :

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\in[0;T]}|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] &\leq C\theta^2 \Leftrightarrow \\
E\left[\sup_{t\in[0;T]}|x_\theta(t)-x(t)|^2\right] &\rightarrow 0.
\end{aligned}
$$

D'oũ la démonstration..

Lemme 3.2.2 *Sous les hypothèses* (3.6), *on a :*

$$
\begin{aligned}
C\theta^2 \leq E\int_0^T &\left([h(t,x(t),u_\theta(t)-h(t,x(t),u(t)]\right)dt \\
+E\int_0^T &h_x(t,x(t),u(t)x_1dt+E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right],
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

où x_1 est la solution de l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
x_1(t)=\int_0^t &b_x(s,x(s),u(s))x_1ds+\int_0^t\sigma_x(s,x(s))x_1dB_s \\
+\int_0^t &\left[b(s,x(s),u_\theta(s))-b(s,x(s),u(s))\right]ds
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Preuve D'après la définition de $x(t)$ et $x_\theta(t)$

$$x(t) = \varepsilon + \int_0^t b(s, x(s), u(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x(s))dB_s,$$

$$x_\theta(t) = \varepsilon + \int_0^t b(s, x_\theta(s), u_\theta(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x_\theta(s))dB_s$$

On a :

$$\begin{aligned} x_\theta(t) - x(t) = & \int_0^t \left[b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))\right] ds \\ & + \int_0^t \left[\sigma(s, x_\theta(s)) - \sigma(s, x(s))\right] dB_s. \end{aligned} \tag{3.9}$$

D'après les hypothèses de b et σ on a dérivable en point x alors b et $\sigma \in \mathbb{C}^1$, donc en appliquant la développement de Taylor à l'ordre 1 en point x : on pose $x_0(s) = x(s)$ alors :

$$b(s, x_0(s), u_\theta(s) = b(s, x(s), u_\theta(s)).$$

Et

$$\left(b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)\right)' \big|_{x_0(s)=x(s)} = b_x(s, x(s), u_\theta(s)).$$

Alors la développement de Taylor s'écrit sous la formme :

$$b(s, x_\theta(s), u_\theta(s) = b(s, x_0(s), u_\theta(s) + \left(b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)\right)' \big|_{x_0(s)=x(s)} (x_\theta(s) - x_0(s)) + o\left(|x_\theta(s) - x_0(s)|^2\right).$$

Donc :

$$b(s, x_\theta(s), u_\theta(s) = b(s, x(s), u_\theta(s)) + b_x(s, x(s), u_\theta(s) \left(x_\theta(t) - x(t)\right) + o\left(|x_\theta(s) - x(s)|^{2^2}\right),$$

Et

$$\sigma(s, x_\theta(s)) = \sigma(s, x(s)) + \sigma_x(s, x(s)) \left(x_\theta(t) - x(t)\right) + o\left(|x_\theta(s) - x(s)|\right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} b(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s)) &= b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s)) \\ &\quad + b_x(s, x_\theta(s), u_\theta(s)\,(x_\theta(t) - x(t)) + C\theta^2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

et

$$\sigma(s, x_\theta(s)) - \sigma(s, x(s)) = \sigma(s, x(s)) + \sigma_x(s, x(s))\,(x_\theta(t) - x(t)) - \sigma(s, x(s)) + C\theta^2. \tag{3.11}$$

En substituant (3.10) et (3.11) dans (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} x_\theta(t) - x(t) = &\int_0^t \left[b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s)) + b_x(s, x_\theta(s), u_\theta(s)\,(x_\theta(s) - x(s))\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma(s, x(s)) + \sigma_x(s, x(s))\,(x_\theta(s) - x(s)) - \sigma(s, x(s))\right] dB_s.. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} x_\theta(t) - x(t) = &\int_0^t \left[b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))\right] ds + \int_0^t \left[b_x(s, x_\theta(s), u_\theta(s)\,(x_\theta(s) - x(s))\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma_x(s, x(s))\,(x_\theta(s) - x(s))\right] dB_s + C\theta^2. \end{aligned}$$

On pose $x_1(t) = x_\theta(t) - x(t) + C\theta^2$ on obtient l'èquation (3.8) suivant :

$$\begin{aligned} x_\theta(t) - x(t) = &\int_0^t \left[b(s, x(s), u_\theta(s)) - b(s, x(s), u(s))\right] ds + \int_0^t \left[b_x(s, x_\theta(s), u_\theta(s)) x_1(t)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma_x(s, x(s)) x_1(t)\right] dB_s + C\theta^2 \end{aligned}$$

On a h et g sont dérivable en point x alors c'est la même technique pour b et σ on applique le développant de Taylor à l'ordre 1 en point x, on pose $x_0(t) = x(t)$

$$h(t, x_0(t), u_\theta(t)) = h(t, x(t), u_\theta(t)),$$

et

$$h(t, x_\theta(t), u_\theta(t))' \big|_{x_0(t)=x(t)} = h_x(t, x(t), u_\theta(t)).$$

Alors le développement de Taylor s'écrit sous la forme :

$$h(t, x_\theta(t), u_\theta(t)) = h(t, x_0(t), u_\theta(t)) + h(t, x_\theta(t), u_\theta(t))' \big|_{x_0(t)=x(t)} (x_\theta(s) - x_0(s)) + o\left(|x_\theta(s) - x_0(s)|\right).$$

Alors :

$$h(t, x_\theta(t), u_\theta(t)) = h(t, x(t), u_\theta(t)) + h_x(t, x(t), u_\theta(t))\left(x_\theta(s) - x(s)\right) + o\left(|x_\theta(s) - x(s)|\right).$$

On a : $x_1(t) = x_\theta(t) - x(t) + C\theta^2$, alors :

$$h(t, x_\theta(t), u_\theta(t)) = h(t, x(t), u_\theta(t)) + h_x(t, x(t), u_\theta(t))x_1(t) + C\theta^2,$$

et

$$g(x_\theta(T)) = g(x(T)) + g_x(x(T))x_1(t) + C\theta^2$$

Donc

$$h(t, x_\theta(t), u_\theta(t)) - h(t, x(t), u(t)) = h(t, x(t), u_\theta(t)) - h(t, x(t), u(t)) + h_x(t, x(t), u_\theta(t))x_1(t) + C\theta^2, \tag{3.12}$$

et

$$g(x_\theta(T)) - g(x(T)) = g_x(x(T))x_1(t) + C\theta^2. \tag{3.13}$$

En passant à l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T h(t, x_\theta(t), u_\theta(t)) - h(t, x(t), u(t))dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T h(t, x(t), u_\theta(t)) - h(t, x(t), u(t))dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T h_x(t, x(t), u_\theta(t))x_1(t)dt\right] + C\theta^2.
\end{aligned}$$

Et

$$E\left[\int_0^T g(x_\theta(T)) - g(x(T))dt\right] = E\left[\int_0^T g_x(x(T))x_1(t)dt\right] + C\theta^2.$$

Puisque u est optimal, alors on a $J(u) \leq J(u_\theta)$, donc :

$$J(u_\theta) - J(u) \geq 0.$$

Par la définition de le coût, on a :

$$E\left[\int_0^T h(t, x_\theta(t), u_\theta(t))dt + g(x_\theta(T))\right] - E\left[\int_0^T h(t, x(t), u(t))dt + g(x(T))\right] \geq 0.$$

Alors :

$$E\left[\int_0^T \left[h(t, x_\theta(t), u_\theta(t)) - h(t, x(t), u_\theta(t))\right] dt\right] + E\left[g(x_\theta(T)) - g(x(T))\right] \geq 0. \tag{3.14}$$

Ce qui nous donne :

$$0 \leq E\left[\int_0^T \left[h(t, x(t), u_\theta(t)) - h(t, x(t), u(t))\right] dt\right] + E\left[\int_0^T \left[h_x(t, x(t), u_\theta(t))x_1(t)\right] dt\right] \tag{3.15}$$

$$+ E\left[g_x(x(T))x_1(t)\right] + C\theta^2.$$

Donc :

$$G\theta^2 \leq E\left[\int_0^T [h(t,x(t),u_\theta(t)) - h(t,x(t),u(t))]\,dt\right] + E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t))x_1(t)]\,dt\right]$$
$$+ E\left[g_x(x(T))x_1(t)\right].$$

De plus en ajoutant et en retranchant le terme $h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)$ dans

$$E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t))x_1(t)]\,dt\right].$$

En trouve

$$E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t))x_1(t)]\,dt\right] = E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right]$$
$$+ E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t)) - h_x(t,x(t),u(t))]\,x_1(t)dt\right].$$

D'après la définition de u_θ on a :

$$E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t))x_1(t)]\,dt\right] = E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right]$$
$$E\left[\int_{t_0}^{t_0+\theta} [h_x(t,x(t),v) - h_x(t,x(t),u(t))]\,x_1(t)dt\right].$$

Par l'hypothèse sur h_x est bornée alors :

$$E\left[\int_{t_0}^{t_0+\theta} [h_x(t,x(t),v) - h_x(t,x(t),u(t))]\,x_1(t)dt\right] \leq kE\left[\int_{t_0}^{t_0+\theta} x_1(t)dt\right]$$

Donc

$$E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t))x_1(t)]\,dt\right] \leq E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right] + kE\left[\int_{t_0}^{t_0+\theta} x_1(t)dt\right]$$

Donc

$$E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t))x_1(t)]\,dt\right] \leq E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right] + kE\left[\sup_{t\in[0;T]}\int_{t_0}^{t_0+\theta} x_1(t)dt\right]$$

Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité (3.5) on a :

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T [h_x(t,x(t),u_\theta(t))x_1(t)]\,dt\right] &\leq E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right] + Mk\int_{t_0}^{t_0+\theta} tdt \\ &\leq E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right] + Mk\theta \end{aligned}$$

Alors, on a le résultat suivants :

$$\begin{aligned} C\theta^2 \leq\; & E\int_0^T ([h(t,x(t),u_\theta(t) - h(t,x(t),u(t)])\,dt \\ & + E\int_0^T h_x(t,x(t),u(t)x_1dt + E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]. \end{aligned}$$

■

3.3 Principe du maximum

Les conditions nécessaires d'optimalité seront établies essentiellement à partie de la relation (3.7) du lemme précédent.

Théorème 3.3.1 *Soit (x,u) une solution optimale pour problème de contrôle, alors il existe un processus $p(t)$ $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$-adapté défini par :*

$$p(t) = E\left[\Psi^*(t)\Phi^*(t)g_x(x(T))/\mathcal{F}_t\right] + \Psi^*(t)\int_t^T \Phi^*(t)h_x(s,x(s),u(s))ds., \tag{3.16}$$

telle que :

$$H(x(t),v,p(t)) \leq H(x(t),u(t),p(t)) \quad \forall v\in A; P-ps. \tag{3.17}$$

Où le Hamiltonien H est défini par :

$$H(t,x(t),u(t),p(t)) = h(t,x(t),u(t)) + p(t)b(t,x(t),u(t)). \tag{3.18}$$

Preuve On considère l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} d\Phi(t) = b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dB_t \\ \Phi(0) = Id \end{cases} \tag{3.19}$$

Cette équation étant linéaire à coefficient bornés alors elle admet une solution forte unique. De plue, la solution Φ est inversible, on pose $\Phi^{-1} = \Psi$. Alors

$$\Phi\Psi = Id \Longrightarrow d(\Phi\Psi) = 0$$

On suppose que :

$$d\Psi(t) = a(t)dt + b(t)dB_t$$

Maintenant, on recherche $a(t)$ et $b(t)$ par l'intégrale par partie d'Itô on a :

$$d(\Phi\Psi) = \Phi(t)d\Psi(t) + \Psi(t)d\Phi(t) + d\Phi(t)d\Psi(t)$$

Alors :

$$\begin{aligned} d(\Phi\Psi) &= \Phi(t)\left[a(t)dt + b(t)dB_t\right] + \Psi(t)\left[b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dB_t\right] \\ &\quad + \left[a(t)dt + b(t)dB_t\right]\left[b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dB_t\right] \\ &= \left[\Phi(t)a(t) + \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t) + b(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\right]dt \\ &\quad + \left[\Phi(t)b(t) + \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\right]dB_t. \end{aligned}$$

On a $d(\Phi\Psi) = 0$, alors on pose :

$$\Phi(t)a(t) + \Psi(t)b_x(t, x(t), u(t))\Phi(t) + b(t)\sigma_x(t, x(t))\Phi(t) = 0 \tag{1}$$

$$\Phi(t)b(t) + \Psi(t)\sigma_x(t, x(t))\Phi(t) = 0. \tag{2}$$

D'après l'équation (2) on trouve :

$$\Phi(t)b(t) = -\Psi(t)\sigma_x(t, x(t))\Phi(t).$$

On multipliée par Φ^{-1} :

$$\Phi(t)b(t)\Phi^{-1}(t) = -\Psi(t)\sigma_x(t, x(t))\Phi(t)\Phi^{-1}(t).$$

D'où :

$$b(t) = -\Psi(t)\sigma_x(t, x(t)). \tag{3}$$

On remplace l'équation (3) dans l'équation (1) on trouve :

$$\Phi(t)a(t) + \Psi(t)b_x(t, x(t), u(t))\Phi(t) + \sigma_x(t, x(t))\Phi(t)\left[-\Psi(t)\sigma_x(t, x(t))\right] = 0.$$

$$\Phi(t)a(t) = -\Psi(t)b_x(t, x(t), u(t))\Phi(t) + \sigma_x(t, x(t))\Phi(t)\left[\Psi(t)\sigma_x(t, x(t))\right].$$

On a $\Phi(t)\Psi(t) = Id$, alors :

$$\Phi(t)a(t) = -\Psi(t)b_x(t, x(t), u(t))\Phi(t) + \sigma_x(t, x(t))\sigma_x(t, x(t)).$$

On multipliée par $\Phi(t)^{-1}$ et on a $\Phi(t)^{-1} = \Psi(t)$

$$\Phi(t)a(t)\Phi(t)^{-1} = -\Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)\Phi(t)^{-1} + \sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)^{-1}$$

$$a(t) = \sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))\Psi(t) - \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t)).$$

Donc :

$$\begin{cases} d\Psi(t) = \left[\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t)) - \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\right]dt - \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))dB_t \\ \Psi(0) = Id \end{cases} .. \tag{3.20}$$

En appliquant le formule d'Itô pour vérifier cette égalité :

$$d(\Phi\Psi) = d(\Psi\Phi) = 0 \ .$$

On a

$$d(\Phi\Psi) = d\Phi(t)\Psi(t) + d\Psi(t)\Phi(t) + d\Phi(t)d\Psi(t).. \tag{3.21}$$

On remplace la formule de $d\Phi(t)$ et $d\Psi(t)$ dans (3.21) on trouve :

$$\begin{aligned} d(\Phi\Psi) &= \left[b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dB_t\right]\Psi(t) \\ &\quad + \left[\left[\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t)) - \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\right]dt - \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))dB_t\right]\Phi(t) \\ &\quad + \left[b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dB_t\right]\times \\ &\quad \left[\left[\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t)) - \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))\right]dt - \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))dB_t\right]. \end{aligned}$$

Par la relation suivante :

$$dtdB_t = 0 \ , \ dt^2 = 0 \ , \ dB_t^2 = dt..$$

On a :

$$\begin{aligned}
d(\Phi\Psi) &= b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)\Psi(t)dt + \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\Psi(t)dB_t + \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dt \\
&\quad - b_x(t,x(t),u(t))\Phi(t)\Psi(t)dt - \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))\Phi(t)dt - \sigma_x(t,x(t))\Phi(t)\Psi(t)dB_t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour le même par $d(\Psi\Phi)$. Danc $d(\Phi\Psi) = d(\Psi\Phi) = 0$. Alors Φ est inversible et sont inverse est Ψ.

En suivant la méthode de la résolvante des équations différentielles ordinaires linéaires, on pose

$$\eta(t) = \Psi(t)x_1(t).$$

On applique la formule d'Ito sur $\Psi(t)x_1(t)$ on obtient :

$$d\eta(t) = d\Psi(t)x_1(t) + \Psi(t)dx_1(t) + d\Psi(t)dx_1(t). \tag{3.22}$$

D'après l'équation (3.8) on a :

$$\begin{aligned}
d\eta(t) &= \left([\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t)) - \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))]\,dt - \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))dB_t\right)x_1(t) \\
&\quad + \Psi(t)\left(b_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt + \sigma_x(t,x(t))x_1(t)dB_t + [b(t,x(t),u_\theta(t)) - b(t,x(t),u(t))]\,dt\right) \\
&\quad + \left([\Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t)) - \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))]\,dt - \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))dB_t\right)\times \\
&\quad \left(b_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt + \sigma_x(t,x(t))x_1(t)dB_t + [b(t,x(t),u_\theta(t)) - b(t,x(t),u(t))]\,dt\right)..
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))x_1(t)dt - \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt \\ &- \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))x_1(t)dB_t - \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))\sigma_x(t,x(t))x_1(t)dt \\ &+ \Psi(t)b_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt + \Psi(t)\sigma_x(t,x(t))x_1(t)dB_t \\ &+ \Psi(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t)) - b(t,x(t),u(t))\right]dt.. \end{aligned}$$

On trouve la formule suivante :

$$d\eta(t) = \Psi(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t)) - b(t,x(t),u(t))\right]dt.$$

On pose :

$$Y = \Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds$$

$$\zeta(t) = E\left[Y/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds$$

On remarque que :

$$E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right] = E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T))\eta(T)\right] = E\left[\eta(T)\zeta(T)\right]$$

Car :

$$\begin{aligned}
E\left[\eta(T)\zeta(T)\right] &= E\left[\eta(T)\left(E\left[Y/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right)\right] \\
&= E\left[\eta(T)E\left[Y/\mathcal{F}_t\right] - \eta(T)\int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right] \\
&= E\left[\eta(T)\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \eta(T)\int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right. \\
&\left.-\eta(T)\int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right] \\
&= E\left[\eta(T)\Phi^*(T)g_x(x(T))\right] + E\left[\eta(T)\int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right] \\
&- E\left[\eta(T)\int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right] \\
&= E\left[\eta(T)\Phi^*(T)g_x(x(T))\right].
\end{aligned}$$

D'autre part :$E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T))\eta(T)\right] = E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]$car $\eta(T) = \Psi(T)x_1(T)$ donc $x_1(T) = \eta(T)\Psi(T)^{-1} = \eta(T)\Phi(T)$ alors :

$$\begin{aligned}
E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right] &= E\left[g_x(x(T))\eta(T)\Phi(T)\right] \\
&= E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T))\eta(T)\right]
\end{aligned}$$

Danc pour calculer le premier terme $E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]$, il suffit de calculer $E\left[\eta(T)\zeta(T)\right]$. Puisque $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t), Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $E(Y/\mathcal{F}_t)$ est une martingale de carré intégrable, alors la décomposition d'Itô nous donne :

$$E(Y/\mathcal{F}_t) = E(Y) + \int_0^t G(s)dB_s \tag{3.23}$$

Où G est un processus adapté telle que $E\left[\int_0^t |G(s)|^2 ds\right] < \infty$ donc on peut utiliser une forme de $\zeta(t)$ mieux adapté à notre problème comme suie :

$$\zeta(t) = E(Y) - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds + \int_0^t G(s)dB_s.$$

Ce qui nous donne

$$d\zeta(t) = -\Phi^*(t)h_x(t, x(t), u(t))dt + G(t)dB_t. \tag{3.24}$$

On applique la formule d'Itô sur $\eta(t)\zeta(t)$ on obtient :

$$d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) = \eta(t)d\zeta(t) + \zeta(t)d\eta(t) + d\zeta(t)d\eta(t).$$

$$\begin{aligned} d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) = {} & \eta(t)\left[-\Phi^*(t)h_x(t, x(t), u(t))dt + G(t)dB_t\right] \\ & + \zeta(t)\left[\Psi(t)\left[b(t, x(t), u_\theta(t)) - b(t, x(t), u(t))\right]dt\right] \\ & + \left[-\Phi^*(t)h_x(t, x(t), u(t))dt + G(t)dB_t\right]\left[\Psi(t)\left[b(t, x(t), u_\theta(t)) - b(t, x(t), u(t))\right]dt\right].. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) = {} & -\eta(t)\Phi^*(t)h_x(t, x(t), u(t))dt + \eta(t)G(t)dB_t \\ & + \zeta(t)\left[\Psi(t)\left[b(t, x(t), u_\theta(t)) - b(t, x(t), u(t))\right]dt\right]. \end{aligned}$$

Où :$p(t) = \Psi(t)^*\zeta(t)$.on a :

$$d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) = -\eta(t)\Phi^*(t)h_x(t, x(t), u(t))dt+\eta(t)G(t)dB_t+p(t)\left[b(t, x(t), u_\theta(t)) - b(t, x(t), u(t))\right]dt.$$

Maintenant, on passant par l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T d\left(\eta(t)\zeta(t)\right)dt = {} & \int_0^T \left[-\eta(t)\Phi^*(t)h_x(t, x(t), u(t))\right]dt + \int_0^T \eta(t)G(t)dB_t \\ & + \int_0^T \left[p(t)\left[b(t, x(t), u_\theta(t)) - b(t, x(t), u(t))\right]\right]dt. \end{aligned}$$

Alors :

$$\eta(T)\zeta(T)-\eta(0)\zeta(0)=\int_0^T\left[-\eta(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))\right]dt+\int_0^T\eta(t)G(t)dB_t$$
$$+\int_0^T\left[p(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t))-b(t,x(t),u(t))\right]\right]dt.$$

En passant à l'espérance, on a :

$$E\left[\eta(T)\zeta(T)\right]=E\left[\int_0^T\left[-\eta(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))\right]dt\right]+E\left[\int_0^T\eta(t)G(t)dB_t\right]$$
$$+E\left[\int_0^T\left[p(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t))-b(t,x(t),u(t))\right]\right]dt\right].$$

Donc :

$$E\left[d\left(\eta(T)\zeta(T)\right)\right]=E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]$$

Alors :

$$E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]=E\int_0^T p(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t))-b(t,x(t),u(t))\right]dt$$
$$-E\int_0^T\eta(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt$$

On a $\eta(t)=\Psi(t)x_1(t)$:donc :

$$E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]=E\left[\int_0^T p(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t))-b(t,x(t),u(t))\right]dt\right]$$
$$-E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right].$$

En remplaçant $E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]$ par sa valeur dans le lemme (3.7) on obtient :

$$G\theta^2\leq E\left[\int_0^T\left(\left[h(t,x(t),u_\theta(t)-h(t,x(t),u(t)\right]\right)dt\right]+E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right]$$
$$+E\left[\int_0^T p(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t))-b(t,x(t),u(t))\right]dt\right]-E\left[\int_0^T h_x(t,x(t),u(t))x_1(t)dt\right].$$

On trouve

$$
\begin{aligned}
G\theta^2 \leq\ & E\left[\int_0^T \left([h(t,x(t),u_\theta(t) - h(t,x(t),u(t)]\right) dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T p(t)\left[b(t,x(t),u_\theta(t)) - b(t,x(t),u(t))\right] dt\right]
\end{aligned}
$$

On a la définition d'Hamiltonien suivant :

$$
H(t,x(t),u(t),p(t)) = h(t,x(t),u(t)) + p(t)b(t,x(t),u(t)),
$$

Avec le contrôle u_θ on a :

$$
H(t,x(t),u_\theta(t),p(t)) = h(t,x(t),u_\theta(t)) + p(t)b(t,x(t),u_\theta(t)).
$$

Donc :

$$
G\theta^2 \leq E\left[\int_0^T [h(t,x(t),u_\theta(t)) + p(t)b(t,x(t),u_\theta(t))] - [h(t,x(t),u(t)) + p(t)b(t,x(t),u(t))]\, dt\right]
$$

Alors

$$
G\theta^2 \leq E\left[\int_0^T [H(t,x(t),u_\theta(t),p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\, dt\right].
$$

De la définition de u_θ on obtient :

$$
\begin{aligned}
G\theta^2 \leq E[&\int_0^{t_0} [H(t,x(t),u_\theta(t),p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\, dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+\theta} [H(t,x(t),u_\theta(t),p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\, dt \\
&+ \int_{t_0+\theta}^{T} [H(t,x(t),u_\theta(t),p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\, dt].
\end{aligned}
$$

Donc :

$$\begin{aligned}
G\theta^2 &\leq E[\int_0^{t_0} [H(t,x(t),u(t),p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\,dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_0+\theta} [H(t,x(t),v,p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\,dt \\
&\quad + \int_{t_0+\theta}^{T} [H(t,x(t),u(t),p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\,dt] \\
G\theta^2 &\leq E\left[\int_0^{t_0} 0dt + \int_{t_0}^{t_0+\theta} [H(t,x(t),v,p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\,dt + \int_{t_0+\theta}^{T} 0dt\right] \\
G\theta^2 &\leq E\left[\int_{t_0}^{t_0+\theta} [H(t,x(t),v,p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\,dt\right].
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$G\theta^2 \leq E\left[\int_{t_0}^{t_0+\theta} \frac{1}{\theta}\,[H(t,x(t),v,p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\,dt\right]$$

En passant par limite

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} G\theta^2 \leq \lim_{\theta \longrightarrow 0} E\left[\int_{t_0}^{t_0+\theta} \frac{1}{\theta}\,[H(t,x(t),v,p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))]\,dt\right]$$

En trouve

$$0 \leq H(t,x(t),v,p(t)) - H(t,x(t),u(t),p(t))$$

Alors, le resultat :

$$H(t,x(t),u(t),p(t)) \leq H(t,x(t),v,p(t))$$

■

3.4 Équation adjointe

Théorème 3.4.1 *En appliquant la formule d'Itô à $p(t) = \Psi^*(t)\zeta(t)$ on obtient l'équation adjointe suivante :*

$$\begin{cases} -dp(t) = \left[b_x^*(t,x(t),u(t))p(t) + \sigma_x^*(t,x(t))Z(t) + h_x(t,x(t),u(t))\right]dt - Z(t)dB_t \\ p(T) = g_x(x(T)) \end{cases} \tag{3.25}$$

Où Z est donnée par :

$$Z(t) = \Psi^*(t)G(t) - \sigma_x^*(t,x(t))p(t) \tag{3.26}$$

Et G vérifie l'équation suivante :

$$\int_0^t G(s)dB_s = E(Y/\mathcal{F}_t) - E(Y) = E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds/\mathcal{F}_t\right] \tag{3.27}$$

$$- E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right]$$

Preuve En appliquant la formule d'Itô pour trouver l'équation adjointe vérifiée par $p(t)$: on a$p(t) = \Psi^*(t)\zeta(t)$, d'après d'Itô, on a :

$$\begin{aligned} dp(t) &= d(\Psi^*(t)\zeta(t)) \\ &= \Psi^*(t)d\zeta(t) + \zeta(t)d\Psi^*(t) + d\zeta(t)d\Psi^*(t). \end{aligned} \tag{3.28}$$

D'après (3.20) Ψ^* vérifiée l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Psi^*(t) = \left[\sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t) - b_x^*(t,x(t),u(t))\Psi^*(t)\right]dt - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)dB_t \\ \Psi^*(0) = Id \end{cases} . \tag{3.29}$$

Donc en remplace (3.25) et (3.30) dans (3.29) on obtient :

$$\begin{aligned}
dp(t) &= \zeta(t)\left[\left[\sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t) - b_x^*(t,x(t),u(t))\Psi^*(t)\right]dt - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)dB_t\right] \\
&+ \Psi^*(t)\left[-\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt + G(t)dB_t\right] \\
&+ \left[\left[\sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t) - b_x^*(t,x(t),u(t))\Psi^*(t)\right]dt - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)dB_t\right] \\
&\left[-\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt + G(t)dB_t\right].
\end{aligned}$$

En trouve :

$$\begin{aligned}
dp(t) &= \zeta(t)\sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)dt - \zeta(t)b_x^*(t,x(t),u(t))\Psi^*(t)dt - \zeta(t)\sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)dB_t \\
&- \Psi^*(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt + \Psi^*(t)G(t)dB_t - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)G(t)dt.
\end{aligned}$$

En remplace $p(t) = \Psi^*(t)\zeta(t)$ dans (3.29) :

$$\begin{aligned}
dp(t) &= \sigma_x^*(t,x(t))\sigma_x^*(t,x(t))p(t)dt - b_x^*(t,x(t),u(t))p(t)dt - \sigma_x^*(t,x(t))p(t)dB_t \\
&- \Psi^*(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt + \Psi^*(t)G(t)dB_t - \sigma_x^*(t,x(t))\Psi^*(t)G(t)dt \\
dp(t) &= -\sigma_x^*(t,x(t))\left[\Psi^*(t)G(t) - \sigma_x^*(t,x(t))p(t)\right]dt - b_x^*(t,x(t),u(t))p(t)dt \\
&- \left[\Psi^*(t)G(t) - \sigma_x^*(t,x(t))p(t)\right]dB_t - \Psi^*(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),u(t))dt.
\end{aligned}$$

D'aprés (3.27) et on a $\Psi^*(t)\Phi^*(t) = \Phi^*(t)\Psi^*(t) = Id$, on trouve :

$$\begin{aligned}
dp(t) &= -\sigma_x^*(t,x(t))Z(t)dt - b_x^*(t,x(t),u(t))p(t)dt - Z(t)dB_t \\
&- h_x(t,x(t),u(t))dt.
\end{aligned}$$

Donc :

$$dp(t) = -\left[\sigma_x^*(t,x(t))Z(t) + b_x^*(t,x(t),u(t))p(t) + h_x(t,x(t),u(t))\right]dt$$
$$+ Z(t)dB_t$$

On vérifier que $p(T) = g_x(x(T))$, on a $p(T) = \Psi^*(T)\zeta(T)$ et on a $\zeta(T) = E(Y) - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds + \int_0^t G(s)dB_s$, alors :

$$p(T) = \Psi^*(T)\left[E(Y) - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds + \int_0^t G(s)dB_s\right]$$

On a $\int_0^t G(s)dB_s = E(Y/\mathcal{F}_t) - E(Y)$, alors :

$$p(T) = \Psi^*(T)\left[E(Y/\mathcal{F}_t) - \int_0^t \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds\right]$$

Et on a

$$Y = \Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds$$

$$p(T) = \Psi^*(T)\left[E\left(\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds - \int_0^T \Phi^*(s)h_x(s,x(s),u(s))ds/\mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$p(T) = \Psi^*(T)\left[E\left(\Phi^*(T)g_x(x(T))/\mathcal{F}_t\right)\right]$$
$$p(T) = E\left[\Psi^*(T)\Phi^*(T)g_x(x(T))/\mathcal{F}_t\right]$$

$$p(T) = E\left[g_x(x(T))/\mathcal{F}_t\right]$$
$$p(T) = g_x(x(T))$$

Alors le résultat suivant :

$$\begin{cases} -dp(t) = \left[\sigma_x^*(t, x(t))Z(t) + b_x^*(t, x(t), u(t))p(t) + h_x(t, x(t), u(t))\right] dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +Z(t)dB_t \\ \quad p(T) = g_x(x(T)) \end{cases}$$

■

Remarque 3.4.1 *L'équation* (3.26) *est une équation backward linéaire à coefficient bornés, donc elle admet une solution forte unique.*

Remarque 3.4.2 *Le processus* $p(T)$ *est appellé processus adjoint de l'équation adjointe, et si le couple optimale* (x, u) *est une solution optimale pour le probléme de contrôle, alors il existe un couple* (p, Z) *solution de l'équation backward* (3.26) *telle que* (3.17) *soit vérifiée.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous sommes intéressées aux problèmes de contrôle dans lesquels des systèmes sont gouvernés par des équations différentielles stochastique du type Itô.
Dans le troisième chapitre, nous sommes intéressés au principe de maximum pour définie les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas où le coefficient de division ne dépend pas du contrôle.

Annexe

Lemme 3.4.1 ***Lemme de Gronwall [7]***

Soient $T > 0$ et u une fonction positive bornée sur $[0;T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a > 0, b > 0$ telles que pour tout $t \in [0;T]$, on a :

$$u(t) \leq a + b\int_0^t u(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [0;T], \quad u(t) \leq a\int_0^t \exp(bs)\, ds$$

Preuve [7] ■

Lemme 3.4.2 ***(Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (BDG)*** *pour tout temps d'arrêt τ on a ,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0;T]}\left|\int_0^t f(s)dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s)|^2\, ds\right],$$

où C est une constante positive.

Proposition 3.4.1 ***(L'inégalité de Hölder)[2] :****L'inégalité de Hölder dit que si $p, q >$ 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Proposition 3.4.2 ***(l'inégalité de Cauchy-Schwartz)*** *C 'est une cas particuliée de* *l'inégalité de Holder pour $p = q = 2$;on a*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Théorème 3.4.2 ***(Dévelopment de Taylor-Young)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n-1$-fois dérivable, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(|x-a|^n).$$

Théorème 3.4.3 ***(Dévelopment de Taylor avec reste intégral)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt.$$

Proposition 3.4.3 ***(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)[3] :***

Soit X une variable aléatoire. Pour tout $a > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Preuve [3]. ■

Théorème 3.4.4 *Si $f(x;y)$est continue en tout point d'un rectangle $R = \{|x - x_0| < a \text{ et } |y - y_0| < b\}$, bornée sur $\mathbb{R}$ alors l'ED $y' = f(x,y)$ a une solution sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale $y(x_0) = y_0$. Cette solution est définie pour tout $|x - x_0| < \alpha$ telleque $\alpha = \min(a, b/k)$ avec $|f(x;y)| < k$ .Si de plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues et bornées sur $\mathbb{R}$, alors la solution est unique.*

Bibliographie

[1] **Monique Jeablanc.** Cours de calcul stochastique Septembre 2006

[2] **Marc Troyanov**-EPLF-Octobre 2005, Mesures et Intégration ,30 avril 2008

[3] **Laurent Tournier.**Cours Commun Scientifique de Probabilités et Statistiques.Univercité Paris 13

[4] **Monique Jeanblanc,Thomas Sinom**.ELEMENT DE CALCUL STOCHASTIQUE.IRBID, Septembre 2005

[5] **Damien Lambretron, Bernand Lapeyre**. Introduction au calcule stochastique appliqué à la finance

[6] **Jean-Christophe Breton.** Calcul stochastique, M2 Math ematiques. Universit e de Rennes 1,Septembre-D ecembre 2014

[7] **Romuald ELIE & Idris KHARROUBI.**Calcul stochastique appliqué à la finance.

[8] **G.Allaire et M.Benaim.**Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance.Univercité Paris 7.

[9] **Jean-Christophe BRETON**. INTÉGRALE DE LEBESGUE, L3 Mathématiques. Univercité de Rennes 1, Septembre-décembre 2016

[10] **Benjamin JOURDAIN.** M´ethodes de Monte Carlo pour les processus financiers. November 21, 2014.

[11] **Jean-Christophe Breton.** Processus stochastiques M2 Mathématiques. Universit e de Rennes 1, Septembre-Octobre 2019

[12] **A. Bensoussan (1969),** Non linear filtering and stochastic control. Proc. Cortona 1981, Lect, notes in Math. 972, Springer Verlag.

[13] **U.G Haussann (1986),** A Stochastic maximum principle for optimal control of diffusions. Pitamn Research Notes in Math. Series 151.

[14] **S.Peng (1990)**, A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM Jour.Cont. Optim.28,N° 4, pp 966-979.

Résumé

Dans ce travaille, nous avons étudié le principe du maximum en contrôle optimal stochastique gouverné par l'équation différentielle stochastique dans le cas ou le coefficient de diffusion ne dépend pas de contrôle et le domaine des contrôles est non convexe, ou nous avons étudié le théorème de l'existence et de l'unicité de solution d'une E.D.S, puis le principe du maximum de contrôle optimal et les conditions nécessaires d'optimalités.

Mots-clés : *formule d'Itô, processus stochastique, l'équation différentielle stochastique, principe du maximum, contrôle optimale*

.

الملخص

تطرقنا في هذا العمل إلى دراسة التحكم الأمثل الذي تحكمه المعادلات التفاضلية العشوائية من خلال الحالة التي يكون فيها معامل الانتشار مستقل عن التحكم و مجال التحكم مقعر.حيث أننا تطرقنا إلى الوجود و الوحدانية لحلول المعادلة التفاضلية العشوائية ، ثم المبدأ الأقصى للتحكم الأمثل و شروط تحققه .

الكلمات المفتاحية : صيغة إيتو – العملية العشوائية – معادلة تفاضلية عشوائية – المبدأ الأقصى – التحكم الأمثل .

Abstract

In this work, we studied the principle of the maximum in optimal stochastic control governed by the stochastic differential equation in case where the diffution coeffitient does not depend on control and the set of control sis non-convex, where we studied the theorem of existence and the uniqueness of the necessary condition of optimalities.

Key-word : *Itô 's formula, stochastic process, stochastic* differential equation, maximum principle, optimal control.