UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Facultédes mathématiques et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et Géométrie

Par :**Hinda Oubbiche**

Thème

Groupes a croissance polynomiale

Devant le jury composé de :

Mr. Ben Moussa Mohammed Tayeb	Dr UKMO Université-Ouargla	Rapporteur
Mr. Yacine.Guerbousa	Dr UKMO Université-Ouargla	Examinateur
Mr.M. Amine.Bahayou	Dr UKMO Université-Ouargla	Précident

Année Scollaire : 2019/2020

Dédication

Au nom de Allah chément et le miséricordieux.

- Je dédie ce modeste travail.
- A Mon pére :Oubbiche Amor

  Tes sacrifices et tes Priéres m'ont permis de vivre ce jour. Rien ne saurait exprimer la fierté, la reconnaissance et l'amour que je te porte. que Dieu le tout puissant te procure, santé et longue vie.
- A Ma Mére :Djellabi Saliha

  Avec tout mon amour pour ton soutien et tes encouragements. j'espére rester à la hauteur de tes espoirs que Dieu te protége et t'accorde santé et longue vie
- A mes chéres soeurs : Imane,Intissar,Rihab,Samah,Choumissa,Souad.
- A mes frères : Houssam eddin, Abd elfattah, Mohammed iyyad.
- A toute la famille.
- A toute mes amies.
- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion

  Enfin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont cher.

Oubbiche Hinda

Remerciement

Avant tout je remercie Allah, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volanté pour finir ce travail .

Je tiens à remercier particuliérement mon directeur de mémoire Monsieur **Ben moussa Mohammed tayeb**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et son patience, ses conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret.

Je tiens à remercier,particulièrement **GEURBOUSA Yacin**, **Mr. BOUSSAID Mohamed**,**Mr.BAHAYOU Mohamed Amine** et tout les profs qui n'ajamais cessé demesoutenir,pour l'aide qu'il m'aprocuréeet pourses précieux conseils.

Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à mes chers parents à qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collégues et pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

Table des matières

Notations

- ➢ $\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels.
- ➢ $\mathbb{Z}$:L'ensemble des entiers relatifs
- ➢ $\mathbb{R}$:L'ensemble des entiers réels
- ➢ $\mid \mathbf{X} \mid$: le cardinal de X.
- ➢ $\mathbf{H} \triangleleft \mathbf{G}$:H est un sous groupe normal du groupe G.
- ➢ $\mathbf{M}(\mathbf{X})$: l'ensemble des mots en $X \cup X^{-1}$
- ➢ $\mathbf{l}(\mathbf{x})$:la longeur de x.
- ➢ $\mathbf{h}(\mathbf{G})$: la longeur de Hirsch.
- ➢ $\mathbf{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$:l'ensemble des morphismes de groupes de F dans G.
- ➢ $\mathbf{xAy}$:x et y adjacents.
- ➢ $[\mathbf{x}]$:la classe de x.
- ➢ $\mathbf{d}(\mathbf{G})$: le degré de G.
- ➢ $\mathbf{\Omega}(\mathbf{G})$: le taux de croissance minimal de G.
- ➢ $\mathbf{id_x}$:l'identité de x.
- ➢ $\langle \mathbf{x} \rangle$: générateur
- ➢ $\mathbf{N}(\mathbf{R}) \triangleleft \mathbf{F_x}$: l'intersection de tous les sous groupe normaux dans F_x contenant R.
- ➢ $\mathbf{Ker}(\mathbf{f})$: le noyau de f.
- ➢ $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$:le commutateur de x,y.
- ➢ $\mathbf{a_G}(\mathbf{n})$: le nombre d'éléments de longeur n.
- ➢ $\mathbf{s_G}(\mathbf{n})$: le nombre de mots de longeur au moins n.
- ➢ $\mathbf{A_G}(\mathbf{X})$:La fonction de croissance génératrice stricte de G .

- ➢ $\mathbf{S_G(X)}$: La fonction de croissance génératrice cumulative.
- ➢ $\mathbf{r(x)}$: la forme réduite de x.
- ➢ $\mathbf{Z(G)}$: le centre du groupe G.
- ➢ $\cong$:Isomorphisme.
- ➢ $\mathbf{k}$:Le cône asymptotique d'un groupe G.
- ➢ $\mathbf{Isom(K)}$: le groupe isométrique de K.

Introduction

Dans ce travail,on s'intéresse du probléme de la croissance polynomial des groupes . particuliérement,Nous suivons les travaux de **(Mikhail Leonidovich gromov)** ,surtous le théorème $\langle\langle$ **un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent.** $\rangle\rangle$ ce théorème est trés utile pour l'étude des groupes , et leur classification ainsi dans la géométrie des groupes.
Nous essayons dans ce modest mémoire de se familliariser avec l'essentiel des outils dans ce domaine,$a_G(n), s_G(n), d(G)$ les relateurs et les générateurs. ainsi les formules,et les propriété.
en a etudier seuleument la croissance polynomiale des mots d'un certain groupe G.
Dans ce mémoire que contientb trois chapitres :

- 1^{er}**chapiter :Le groupe libre.**
- 2^{eme}**chapiter :Les fonctions de croissance.**
- 1^{er}**chapiter :Le théorème de gromov.**

Chapitre 1

Groupe Libre

1.1 Contruction d'un groupe libre

Soit X un ensemble non nul,I étant totalement ordonné,posons

$$X = \{x_i\}_{i \in I}$$

.

Considérons un ensemble disjoint de X et équipotent à X que nous noterons X^{-1} et dont nous écrirons les élements sous la forme x^{-1},pour $i \in I$.

Définition 1.1.1 *on appelle mot sur* $X \cup X^{-1}$ *tout suite finie de n élement de* $X \cup X^{-1}$ *n s'appelle la longeur du mot .*
par convention ,il n'existe qu'un seul mot de longueur 0,que l'on notera 1,on l'appelle le mot vide ,car il correspond à la partie vide de $X \cup X^{-1}$.
un mot de longueur $n > 0$ *s'écrira sous la forme :*

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

où $\varepsilon_j = \pm 1 \quad \forall j (1 \leq j \leq n)$
c'est-à-dire :

$$\varepsilon_j = 1 \quad si \quad x_{i_j}^{\varepsilon_j} \in X$$

$$\varepsilon_j = -1 \quad si \quad x_{ij}^{\varepsilon_j} \in X^{-1}$$

on désignera par $(X \cup X^{-1})$ *l'ensemble des mots sur* $X \cup X^{-1}$.

Notation 1.1.1 ***Egalitéde deux mots*** *d'une façon générale,dans* $(X \cup X^{-1})$*on a :*

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_n}^{\varepsilon_n} = x_{j_1}^{\sigma_1} x_{j_2}^{\sigma_2} ... x_{j_m}^{\sigma_m} \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ x_{i_k}^{\varepsilon_k} = x_{j_k}^{\sigma_k} \quad \forall k(1 \leq k \leq n) \end{cases}$$

Notion de produit de mots : *On note M(X) l'ensemble des mots en* $X \cup X^{-1}$ *et on definit sur M(X) un produit (loi de composition interne) par juxtaposition des mots.*
Plus précisément, si $u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_n}^{\varepsilon_n}, \quad v = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} ... x_{j_m}^{\varepsilon_m}$.

sont deux mots de longeurs non nulles ,alors : $uv = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} ... x_{j_m}^{\varepsilon_m}$.
Par convention, on pose $1x = x1 = x$.
On remarquera que ce produit est associatif, que 1 est Elément neutre, mais que M(X) n'est pas un groupe car tout èlèment autre que 1 ne peut avoir d'inverse.
En effet, pour tout x et y dans M(X), on a $l(xy) = l(x) + l(y)$, *donc des que x ou y est différent de 1,* $l(xy) > 0$ *et* $xy \neq 1$.
Pour pallier cet inconvenient, on va défnir sur M(X) une relation d'équivalence R telle que $M(X) = R$ *soit un groupe pour le produit induit par celui de M(X).*

Notation 1.1.2 *Si x et y sont deux mots adjacents, on on écrira* xAy.

Définition 1.1.2 • *Deux mots x et y de M(X) sont adjacents s'il existe* $t_1, t_2 \in M(X)$ *et* $a \in X \cup X^{-1}$ *tels que :*
$x = t_1 t_2$ *et* $y = t_1 a a^{-1} t_2$
ou $y = t_1 t_2$ *et* $x = t_1 a a^{-1} t_2$
: avec la convention $(a^{-1})^{-1} = a$ *pour tout :*$a \in X \cup X^{-1}$.

Définition 1.1.3 *on dira qu'un groupe est libre sur un ensemble X,s'ils est engendré par X est isomorphe au groupe* $[X \cup X^{-1}]$,*on note par* F_x
En paticulier,tout groupe réduit à un seul élément est libre sur l'ensemble vide.

$$\pi(xy) = [xy] = [x][y] = \pi(x)\pi(y)$$

Donc, pour tout :

$$x = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} ... x_{i_n}^{\epsilon_n}, \epsilon_i = \pm 1$$

$[x]$,*est inversible et a pour inverse :*

$$[x]^{-1} = ([x_{i_1}^{\epsilon_1}]...[x_{i_n}^{\epsilon_n}])^{-1} = [x_{i_n}^{\epsilon_n}]^{-1}...[x_{i_1}^{\epsilon_1}]^{-1} = [x_{i_n}^{-\epsilon_n}]...[x_{i_1}^{-\epsilon_1}] = [x_{i_n}^{-\epsilon_n}...x_{i_1}^{-\epsilon_1}]$$

.

Définition 1.1.4 *Un mot x de M(X) est réduit si* $x = 1$ *ou* $x = a_1 ... a_n$, *avec* $a_i \in (X \cup X^{-1})$ *tel que* $a_{i+1} \neq a_i^{-1}, \quad i = 1, ..., n-1$.

Propriété 1.1.1 *Chaque classe d'équivalence de M(X) pour la relation R contient un mot.*

Preuve'éxistence est èvidente, car si x est non réduit, il existe un mot u tel que xAu et $l(u) < l(x)$. Comme la fonction l est valeurs positive ou nulle,en un nombre fini d'étapes on arrive à un mot réduit Pour montrer l'unicité, on introduit la construction suivante : pour tout $x = x_1, ..., x_n$ de M(X) on défnit des éléments u_i de la façon suivante : $u_0 = 1$
$u_1 = x_1$
$u_2 = x_1x_2$
si $x_1 \neq x_2^{-1}$ et $u_2 = 1$
sinon et de façon générale, on pose $u_{i+1} = u_ix_{i+1}$ si le dernier terme de u_i est différent de $x_{i+1}^{-1}, u_{i+1} = u_{i-1}$ sinon. Par défnition, chaque mot ui est réduit et $u_iR(x_1, ..., x_i)$. De plus si x est réduit, alors $x = u_n$. On appelle un la forme réduite de x, qu'on note r(x). ■

Lemme 1.1.1 *Si deux mots sont adjacents leurs formes réuites sont égales.*

Preuveoient $x_1...x_kx_{k+1}...x_n$ et $y = x_1...x_kaa^{-1}x_{k+1}...x_n$ deux mots adjacents. Alors les suites u_i et v_i respectivement associées sont telles que $u_0 = v_0, ..., u_k = v_k$. Montrons que $u_k = v_{k+2}$.

- Si le dernier terme de u_k est différent de a^{-1} alors :$u_k = v_k, v_{k+1} = v_ka, v_{k+2} = v_k = u_k$.
- Si le dernier terme de u_k est a_1, on a $u_k = ta^{-1}$ et, u_k étant réduit, le dernier terme de t est différent de a, donc :$u_k = v_k, v_{k+1} = t, v_{k+2} = ta^{-1} = u_k$
  On en déduit que pour tout : $j \geq 0, u_{k+j} = v_{k+2+j}$ et $u_n = v_{n+2}$, d'ou $r(x) = r(y)$.

■

Lemme 1.1.2 *Deux mots équivalents et réduits sont égaux.*

Preuve Soient x et y deux mots réduits tels que xRy. Il existe $t_1, ..., t_n$ tels que $x = t_1, y = t_n, t_iAt_{i+1}; \quad 1 \leq i \leq n-1$, en considérant la forme réduite de chaque t_i et en appliquant le lemme précédent, on à $x = r(t_1) = ... = r(t_n) = y$ d'ou le lemme. ■

1.2 Propriété universelle

Soit un groupe $F \neq (e)$,soient X une partie génératrice de F et α l'injection canonique de X dans F,alors F est libre sur X si et seulement si,quels que soient le groupe G et l'application $\delta : X \longrightarrow G$, il existe un unique morphisme $\varphi \in Hom(F, G)$ tel que :$\varphi \circ \alpha = \delta$.
Preuve Supposons $F = F_x, \alpha_x$ désignant l'injection canonique de X dans F_x démontrons que le couple (F_x, α_x) vérifie la proprieté énoncée . Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\delta"'] & F_x \arrow[dl, dotted, "\exists!\varphi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

où G et δ sont donnés,définitions :

$\varphi : F_x \longrightarrow G.$

en posant pour tout $u \in F_x \quad u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_n}^{\varepsilon_n}$

$\varphi(u) = (\delta(x_{i_1}))^{\varepsilon_1}(\delta(x_{i_2}))^{\varepsilon_2}...(\delta(x_{i_n}))^{\varepsilon_n}$ et $\varphi(1) = e$

où e est l'élement neutre de G.

on définit ainsi un mophisme $\varphi \in Hom(F_x, G)$

tel que :$\varphi(x) = \delta(x) \quad \forall x \in X$

donc :$\varphi \circ \alpha_x = \delta$

De plus ,si $\varphi' \in Hom(F_x, G)$,et $\varphi' \circ \alpha_x = \delta$,alors pour tout $u \in F_x$,

on a :$\varphi'(u) = \varphi(u)$ d'ou l'unicité de φ.

Réciproquement,considérons un groupe F engendré par une partie non vide X,telle que ,siα est l'injection cononique de x dans F,le couple (F, α) vérifie les conditions énoncées dans le théoréme.

compte tenu de l'hypothése et du résultats précédente il existe $\varphi \in Hom(F, F_x)$et $\psi \in Hom(F_x, F)$,telle que les diagrammes est commutent :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha_x"'] & F \arrow[dl, dotted, "\exists!\varphi"] \\ F_x & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\alpha"'] & F_x \arrow[dl, dotted, "\exists!\psi"] \\ F & \end{tikzcd}$$

on en déduit que : $\varphi \circ \psi \circ \alpha = \alpha$ et $\varphi \circ \psi \circ \alpha_x = \alpha_x$

d'ou $\psi \circ \varphi_x = id_x$ et $\varphi \circ \psi_x = id_x$

φ et ψ sont des morphismes de groupes, F et F_x sont engendré par X par suite $\psi \circ \varphi = id_F$ et $\varphi \circ \psi = id_{F_x}$.

D'ou $F \simeq F_x$ et $\psi(x) = X$ implique F libre sur X. ■

Définition 1.2.1 *soit G un groupe libre,le cardinal d'une famille génératrice libre de G est appelé le rang de G.*

1.3 Présentation par générateurs et relations

Nous voulons maintenant pouvoir parler d'un groupe quelconque comme étant un ensemble de mots sur des générateurs.pour ce faire ,il nous faut rajouter un autre ensemble de relations par lequel nous quotienterons un groupe libre.Nous verrons que n'importe quel groupe est isomorphe au quotient d'un groupe libre.la présentation du groupe est alors la paire formée d'un ensemble générateurs et de relations entre les générateurs.
Nous tentons donc de trouver les relations nécessaires et suffisantes afin de pouvoir entiérement décrire un groupe donné . Prenons G un groupe quelconque avec X un sous-ensemble générateurs de G,G est alors isomorphe à un quotient du groupe libre F_x,En particulier il existe un ensemble minimal $R \subseteq F_x$ et un sous-groupe normal $N(R) \lhd F_x$ (L'intersection de tous les sous-groupe normaux dansF_x contenant R)tels que les éléments de N(R)correspondent aux relations entre les élements du groupe G.on considére alors la projection canonique $f : F_x \longrightarrow G$ l'unique morphisme de groupe associant à chaque élement de X le générateurs de G lui correspondant.le noyau de cette projection est N(R).De plus $F_x \diagup N(R) \simeq G$,tel qu'illustré dans le diagramme suivante :

$$\begin{tikzcd} F_x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & G \arrow[dl, dotted, "\exists!\varphi"] \\ F_x/N(R) & \end{tikzcd}$$

1.4 Sous-groupes d'indices finis

Proposition 1.4.1 *Soit H un sous groupe d'indice fini d'un groupe G,si* $G = \langle x_{i_1}, ..., x_{i_n} \rangle$ *alors* $H = \langle x_{i_1}, ..., x_{i_{n'}} \rangle \quad /(n' \leq n)$.

Preuve soit $G = \langle X_{i_1}, ..., X_{i_n} \rangle$, soit $|G : H| = s, \{a_1 = 1, ..., a_s\}$ être un transversal pour H dans G, c'est-à-dire un ensemble de représentants pour le droit cosets de H.
soit $x = y_1...y_n$ tout élément de G, où chaque y_i est l'un des générateurs ou leurs inverses. Soit a_{i_1} le représentant de Hy_1, et écrivez $x = y_1a^{-1}\ a_{i_1}y_2...y_n$,alors soit a_{i_2} le représentant de $Ha_{i_1}y_2$, et écrire $x = y_1a_{i_1}^{-1}.a_{i_1}y_2aa_{i_2}^{-1}.a_{i_2}y_3...y_n$, etc., enfin obtenant $x = y_1a_{i_1}^{-1}.a_{i_1}y_2a_{i_2}^{-1}.....a_{i_{n-1}}y_na_{i_n}^{-1}.a_{i_n}$
Voici les termes $a_jy_ka_l^{-1}$ est dans H, donc si $x \in H$ nous avons $a_{i_n} = 1$ et x s'écrit produit du nombre fini de produits triples $a_jy_ka_l^{-1}$. ■

Proposition 1.4.2 *Un groupe fini ne contient qu'un nombre fini deux sous-groupes d'un indice fini .*

Preuve Soit encore G généré par $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$ et $|G : H| = s$. Donné tout $r < s$, et tout r cosets $Ha_1, ..., Ha_r$, leur union K n'est pas tout de G, donc K ne peut pas être fermé pour multiplication à droite par les générateurs et leurs inverses, c'est-à-dire pour certains i et certains générateurs x_j soit Ha_ix_j ou $Ha_ix_j^{-1}$ est un nouveau coset. Il s'ensuit que chaque coset a un représentatif de la longueur $s-1$ ou moins, et les produits triples ci-dessus ont longueur au plus $2s-1$.
Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de de telles longueurs, il y'a qu'un nombre fini de façons de choisir les générateurs de H. ■

Corollaire 1.4.1 *Si $|G : H| = s$ est fini, alors H contient un indice fini sous-groupe K qui est normal dans G, et si G est de génération finie, on peut prendre K comme caractéristique de G.*

Preuve Soit K l'intersection de tous les conjugués de H, ou, si G est produit fini, l'intersection de tous les sous-groupes de G d'indice s. ■

Chapitre 2

Les fonctions de croissance

Notation 2.0.1 $\mathbf{a_G(n)}$ *:le nombre de éléments de longueur n.*
$\mathbf{s_G(n)}$ *: le nombre de mots de longueur au moins n.*
c'est-à-dire

$$s_G(n) = \sum_0^n a_G(i)$$

.
On appelle $a_G(n)$ et $s_G(n)$ les fonctions de croissance de G.
Plus spécifiquement, $a_G(n)$ est la fonction de croissance stricte et $s_G(n)$ est la fonction de croissance cumulative de G.

Exemple 2.0.1 *G est fini si $a_G(n)$ est a la fin 0, de maniére équivalente si $s_G(n)$ est a la fin constant.*
Par contre, si G est infini, alors $a(n) > 0$ pour chaque n, et $s(n) \geq n + 1$.

Exemple 2.0.2 *Si $G = \mathbb{Z}$ est cyclique infini, alors $a(n) = 2$ pour tout n (sauf pour n = 0; $a_G(0) = 1$ pour tous les groupes).*

Proposition 2.0.3 *Si G est généré par r éléments, alors pour $n > 0$ on ont*

$$a(n) \leq 2r(2r-1)n-1$$

.

Définition 2.0.1 *Deux fonctions f et g de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N}$, ou de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$, ou de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$, sont équivalents s'il existe un nombre réel positif A tel que*

$$f(x) \leq Ag(Ax)$$

et

$$g(x) \leq Af(Ax)$$

.

Proposition 2.0.4 *Deux fonctions de croissance du même groupe sont équivalentes.*

Preuveoit $s = s_{G,X}$ et $t = s_{G,Y}$ deux fonctions de croissance de G.
Express chaque élément de Y en tant que mot dans les éléments de X, et chaque élément de X comme mot dans les éléments de Y, et soit A la longueur maximale de l'ensemble de mots résultant.
Il est alors clair que pour chaque $x \in G$ on a

$$l_X(x) \leq Al_Y(x)$$

et il s'ensuit que

$$t(n) \leq s(An)$$

. De même, $s(n) \leq t(An)$ ■

Exemple 2.0.3 *Soit $G = H \times K$ un produit direct.*
Ensembles de générateurs donnés de H et K, leur union est un ensemble de générateurs pour G, et pour un élément $x = (u, v) \in G$ nous avons

$$l_G(x) = l_H(u) + l_K(v)$$

Il s'ensuit que

$$a_G(n) = \sum_{r=0}^{n} a_H(r)a_K(n-r)$$

Cette égalité nous rappelle la multiplication règle pour les polynômes, ou séries de puissance, et suggère ce qui suit :

Définition 2.0.2 *La fonction de croissance génératrice stricte de G est l'infini série*

$$A_G(X) = \sum_{0}^{\infty} a(n)X^n$$

Nous l'appellerons souvent simplement générer une fonction de croissance.
La fonction de croissance génératrice cumulative de G est

$$S_G(X) = \sum s(n)X^n$$

.

Notation 2.0.2 *on peut considérér un mot de longeur m+n comme produit de l'un de longeur m et l'autre de longeur n,on obtient que :*$a(m+n) \leq a(m)a(n)$
Donc :

$$\omega(G) = \lim_{n \longrightarrow \infty} a(n)^{1/n}$$

existe et fini, pour des raisons similaires

$$s(G) = \lim s(n)^{1/n}$$

existe,et il est clair que $s(G) \geq \omega(G)$*,nous supposons que G est infini,puis* $a(n) \geq 1 \quad \forall n$*, et donc* $\omega(G) \geq 1$*, Etant donné* $\varepsilon > 0$*, nous avons*

$$a(n) \leq (\omega(G) + \varepsilon)^n$$

,si n est grand suffisant,donc

$$s(n) \leq A + n(\omega(G) + \varepsilon)^n$$

pour une canstante A,et il s'ensuit que $s(G) \leq \omega(G)$ *Ainsi* $s(G) = \omega(G)$ *et dans la suite nous n'utilisera que la notation* $\omega(G)$ *pour cet invariante.*

Nous savons déja de que si G est généré par d'élements alors $\omega(G) \leq 2d - 1$*,et nous venons de voir que* $\omega(G) \geq 1$*,la valeur exacte de* $\omega(G)$ *dépendnon seulement sur G,mais aussi sur l'ensembledes généra teurs X,et si cette dépendance est important nous utilisérons la notation* $\omega_x(G)$*,comme nous le verros dans un moment,que* $\omega(G) = 1$ *ou non ne dépend pas X,cela justifie partie des éléments suivants*

Définition 2.0.3 **(a)** *G a une croissance exponentielle si* $\omega(G) > 1$*, et une croissance sous-exponentielle, si* $\omega(G) = 1$*. Le nombre* $\omega(G)$ *est appelé le taux de croissance exponentielle de G (plutôt de* (G, X)*, où X est le groupe électrogène pertinent de G).*
Parfois, le journal des nombres $\omega(G)$ *est appelé l'entropie de G (ou de (G, X)).*

(b) *G a une croissance exponentielle uniforme si* $inf_X \omega_X(G) > 1$*.*
On note cet infimum par $\Omega(G)$*, et l'appelons le taux de croissance minimal de G (et* $log\Omega(G)$ *est appelé l'entropie minimale, ou l'entropie algébrique de G) (si G est fini, on met* $\Omega(G) = 0$*).*

(c) *G a une croissance polynomiale, s'il existe des nombres c et s tels que*
$s_G(n) \leq cn^s$*, pour tout n.*
Si $s = 1$ *ou 2, disons, nous disons que G est linéaire, ou quadratique, croissance, etc.*

(d) *Si G a une croissance polynomiale, son degré est défini par* $d(G) = inf(s|$ *et il existe c tel que*

$$s_G(n) \leq cn^s) = \limsup \frac{logs(n)}{logn}$$

(e) *G a une croissance intermédiaire, si sa croissance n'est ni exponentielle ni polynômiale.*

Proposition 2.0.5 **(a)** *Le type de croissance de G,c'est-à-dire exponentiel,intermédiare ou polynomiale,ne dépend pas du choix des générateurs,si la croissance est polynome,alors le degré ne dépend pas des générateurs.*

(b) *Si $H \leq G$ et $N \lhd G$,avec G et H générés finement,et si G est de croissance sous-exponentielle ou polynomiale alors H et G/N le sont aussi.*
si la croisssance est polynomiale,les degrés H et G/N ne dépasser le degré de G.

(c) *Si $\mid G : H \mid$ est fini,alors G et H ont des fonctions de croissance équivalents,et en particulier avoir le méme type de croissance,et si cette croissance est polynomiale alors G et H on le méme degré si N est fini ; alors G et G/N ont des fonctions de croissance équivalentes et $\Omega(G) = \Omega(G/N)$.*
En particulier,G et G/N ont le méme type de croissance,et si l'on d'entre eux est uniformément exponentielle,tout comme l'autre si la croissanceest polynomiale,alors G et G/N le méme degré.

(d) *si G a une croissance polynomiale,$\mid G : H \mid$ est infini,et H est fini généré,alors $d(H) \leq d(G) - 1$,et si N est infini et fini généré,puis $d(G/N) \leq d(G) - 1$.*

PreuveSoit $H = \langle y_1, ..., y_e \rangle$,avec $y_i \in G$ et soit $k = \max l(y_i)$, alors $s_H(n) \leq s_G(kn)$,cela implique la moitié de (b) et (a) est le spécial cas $H = G$,la revendication en (b) sur G/N est évidents,si nous choisisons comme générateurs pour G/N les cosets des générateurs de G,De plus si H est d'indice fini,soit r la longeur maximal des éléments dans un systéme de présentationpour les cosets de H,étant donné un élement dans G de longueur au plus n,écrivez le comme xu où $x \in H$ et u appartiennent ànotre systéme de représentants alors $k = l(x) \leq n + r$
Ecrivez $X = y_1, ..., y_k$,ou chaque y_j est soit un générateurs soit l'inverse d'un générateur alors

$$X = y_1 {u_1}^{-1}.u_1 y_2.{u_2}^{-1}.u_2 y_3....y_k {u_k}^{-1}$$

pour certains u_j
dans notre systéme de représentants,cela montre que par rapport aux générateurs du formulaire ${u_i}^{-1} y_j u_m$ de H nous avons $l_H(x) \leq k$, et donc

$$S_G(n) \leq \mid G : H \mid s_H(n + r) \leq \mid G : H \mid s_H((r + 1)n)$$

,cela prouve une partie de (c), pour l'autre nous avons déja noté qu'un systéme générateur X de G mappe sur un disons Y de G/N.
De plus ,tout systéme générateur Y de G/N est l'image d'un générer le systéme X de G, il suffit

de prendre des prés-images des élements de Y et les compléter par des générateurs de N.
un élement de G de longeur n (par rapport à X) mappe sur une de longeur au plus n de G/N et exactement $\mid N \mid$ les élements de la carte G sur chaque élément de G/N,donc

$$s_{G/N}(n) \leq s_G(n) \leq \mid N \mid s_{G/N}(n)$$

,il s'ensuit que

$$\omega_x(G) = \omega_y(G/N)$$

que $\Omega(G) = \Omega(G/N)$,et que si la croissance est polynomiale alors $d(G/N) = d(G)$.
Supposons maintenant que $\mid G : H \mid = \infty$,soit $X = \{x_1, ..., x_m\}$
soit un ensemble des générateurs de G,que nous considérons comme contenant également un ensemble de générateurs pour H,et laissez $Hu_1, Hu_2, ..., Hu_n$ be coset distincts de H.
L'ensemble $k = Hu_1 \cup Hu_2 \cup ... \cup Hu_n$ n'est pas fermé par multiplication àdroite par les générateurs de G et leurs inverses,sinon $K = G$,Ainsi l'un des les élements $u_i x_j^{\pm 1}$ représente un nouveau coset,En commençant pour $u_1 = x_1$ ce l'argument montrer que pour chaque n,nous pouvons trouver n sous-ensembles distincts de H qui sont représentés par des élements de longeur au plus n,nous pouvons donc supposer que $l(u_i) \leq i, \quad siz_1, ..., z_k$ sont des élements de longueur.
au plus n de H,alors les élements $z_i u_j$ sont tous différents les uns des autres,d'ou $S_G(2n) \geq nS_H(n)$ donc si la croissance est polynomiale,alors $d(G) \geq d(H) + 1$
Ensuit,soit N un sous-groupe normale infini de G fini cette dernier supposait toujours une croissance polynomiale
Soit X un fini ensemble de générateurs de G,contenant un ensemble de génerteurs de G,contenant un ensemble de générateurs Y pour N,il est alors clairement que $s_{G,X}(2n) \geq s_{G/N,XN/N(n)} s_N, Y(n) \geq ns_{G/N}(n)$
implique $d(G) \geq d(G/N) - 1$.

■

Définition 2.0.4 *Un groupe G est résoluble s'il a une série normale*

$$1 = G_n \lhd G_{n-1} ... G_1 = G \qquad (1)$$

avec des groupes de facteurs abéliens G_i/G_{i-1}.

Notation 2.0.3 *Rappelons que le commutateur [x, y] de deux éléments x, y est défini par $xy = yx[x, y]$, c'est-à-dire :*

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

et que le sous-groupe de commutateurs (également appelé sous-groupe dérivé) est le sous-groupe de G généré par tous les commutateurs. Il est noté G_0 ou [G, G].
Plus généralement, étant donné deux sous-groupes H et K de G, nous écrivons [H, K] pour le sous-groupe généré par tous les commutateurs [x, y] avec $x \in H, y \in K$. On écrit $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$, avec $G^{(0)} = G$.
Alors $G^{(1)} = G' \lhd G$, et $G = G^0$ est abélien.
De plus, si $N \lhd G$, avec G/N abélien, alors $N \geq G$, de sorte que G est le plus petit sous-groupe normal de G avec un facteur abélien groupe.
Il découle de ceci, ou directement de la définition, que G est un sous-groupe caractéristique, de même que les sous-groupes $G^{(i)}$, les termes du série dérivée de G. Il s'ensuit également que si G est résoluble, avec la série G_i ci-dessus en témoignant, alors $G^{(i)} \leq G_i$, de sorte que $G^{(n)} = 1$.

Définition 2.0.5 *Soit G polycyclique, et soit (1) une série normale de G avec des facteurs cycliques.*
Le nombre de facteurs infinis dans cette série est appelé la longueur de Hirsch de G, notée h (G)

Notation 2.0.4 *n appelle Z(G) le centre du groupe G.*
Si $x, y \in G$, alors $xy = y^{-1}xy$

Définition 2.0.6 *Un groupe G est nilpotent s'il a une série normale(1) telle que $G_i \lhd G$ pour chaque i, et $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$. Une telle série est appelé une série centrale.*

Définition 2.0.7 *La série centrale inférieure $\gamma_i(G)$ d'un groupe G est définie par $\gamma_1(G) = G$ et $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$.*
Il est facile de vérifier que les éléments de la série centrale inférieure sont caractéristique dans G, et que si (1) est une série centrale pour G, alors$\gamma_i(G) \leq G_i$.
Donc G est nilpotent ssi $\gamma_{c+1}(G) = 1$ pour certains c.
De plus, si c est le premier index pour lequel cela se produit, alors c est la longueur la plus courte de toutes série centrale de G, et on dit que G a une classe nilpotency (ou juste une classe) c, noté cl(G) = c. En particulier, les groupes abéliens sont les nilpotents groupes de classe 1.

Définition 2.0.8 *La série centrale supérieure $Z_i(G)$ d'un groupe G est définie par $Z_1(G) = Z(G)$ et $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$*

Théorème 2.0.1 *Soit G un groupe fini de sous-exponentiels croissance. alors , le sous-groupe de commutateurs G' de G à un nombre fini de générateurs.*

Preuveuisque G/G' est un groupe abélien de génération finie, c'est un produit direct d'un nombre fini de groupes cycliques. Il suffira donc de montrer que si $N \lhd G$ et G/N sont cycliques, alors N est généré de manière finie.

Puisque tous les sous-groupes d'indices finis de G sont de génération finie, on peut supposer que G/N est cyclique infini.

Soit xN générer G/N. Compte tenu de tous les générateurs $\{x_1, ..., x_d\}$ de G, on peut les écrire

sous la forme $x_i = x^{e_i} y_i$, où $y_i \in N$, puis x,$y_1, ..., y_d$ génèrent G.
Alors N contient la normale fermeture, disons K, du $y's$.
Mais G/K est généré par les images des générateurs de G, donc par xK, donc G/K est cyclique infini, et G/N est un groupe de facteurs cycliques infini de celui-ci, ce qui n'est possible que si $K = N$.
Soit K_i le sous-groupe généré par tous les conjugués $x^{-n} y_i x^n$, alors $N \geq \langle K_1, ..., K_d \rangle$et ce dernier sous-groupe contient $y_1, ..., y_d$ et est invariant sous conjugaison par tous les générateurs de G, d'où il est égal à N.
Il suffira donc de prouver que chaque K_i est fini généré.
À cette fin, nous écrivons y pour y_i et considérons les produits $xy^{e1}xy^{e2}x...y^{en}$, où chaque ei vaut 0 ou 1. Il y a 2^n tels mots, tous de longueur 2^n ou moins, et la sous-exponentialité implique que si n est grand assez, deux de ces mots sont égaux.
Considérons le n minimal à laquelle l'égalité se produit, disons, le mot ci-dessus équivaut à un mot similaire avec exposants f_i.
Par minimalité, $e_n \neq f_n$. Écrivez $y(k) = x^k y x^{-k}$, et écrivez l'égalité sous la forme

$$y(1)^e_1 y(2)^{e_2} ... y(n)^{e_n} x^n = y(1)^{f_1} ... y(n)^{f_n} x^n$$

. Puisque $e_n \neq f_n$, cela montre que y (n) peut être exprimé comme un produit de $y(1), ..., y(n-1)$. Donc $y(n+1) = xy(n)x^{-1}$ peut être exprimé en termes de $y(2), ..., y(n)$, et en remplaçant l'expression de y (n), nous voyons que $y(n+1)$ appartient également au sous-groupe généré par $y(1), ..., y(n-1)$, et une récurrence évidente montre que tous les $y(n)$, pour $n > 0$, appartiennent à le même sous-groupe.
En remplaçant x par son inverse, on voit que le sous-groupe généré par le y (n) pour n négatif est également généré de manière finie,alors est K_i. ■

Corollaire 2.0.2 *Soit G un groupe résoluble de type fini. Puis le la croissance de G est exponentielle ou polynomiale, et celle-ci se produit si et seulement si G est virtuellement nilpotent.*

Chapitre 3

THÉOREME DE GROMOV

Théorème 3.0.2 ***(équivalence logique*** *) un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent.*

Preuveoit G un groupe de croissance polynomiale, disons de degré d. Si d = 0, alors G est fini, donc soit $d > 0$.

Par le corollaire 3.1.2, G contient des sous-groupes $H \triangleright N$ tels que $|G : H|$ est fini et H / N est cyclique infini. Par la preuve du théorème 2.0.1, N est de générateur finie, et par proposition 2.0.5 (d) N a un degré de croissance $d - 1$ ou moins, donc par induction N contient un sous-groupe K nilpotent d'indice fini. Par corollaire 1.4.1, on peut supposer que K est caractéristique dans N, et donc normal dans H.

Alors H/K contient le sous-groupe normal fini N / K, avec un facteur cyclique infini groupe. Soit $H/N = \langle xN \rangle$. Écrivez $C = \langle K, x \rangle$. Alors $H/K = C/KN/K$, d'où $|H : C|$ est fini.

Puisque C/K est cyclique infini, C est résoluble, d'où virtuellement nilpotent,par corollaire 2.0.2. ■

3.0.1 Application aux géometrie des groupes

Théorème 3.0.3 *(Théorème de Jordan) Un sous-groupe fini de GL (n, F), où F est un corps de caractéristique 0, a un sous-groupe abélien d'indice borné en termes de n uniquement.*

Proposition 3.0.6 *Soit G un groupe de Lie avec un nombre fini de composantes.*
(a) *G a un sous-groupe abélien normal Z, tel que G/Z est isomorphe à un sous-groupe de $GL(k, C)$, pour certains k.*
(b) *Pour chaque entier naturel n, il existe un voisinage ouvert de l'identité en G qui ne contient aucun élément de non-identité d'ordre fini inférieur à n.*
(Dans la partie (a), Z est le centre de la composante de l'identité, un sous-groupe d'indice fini). Ensuite, l'espace T est homogène si pour deux points quelconques $x, y \in T$ existe une isométrie de T déplaçant x vers y.

Théorème 3.0.4 *Le cône asymptotique K d'un groupe G de type fini est homogène, connexe par arc de cercle, localement connexe et complet.*

PreuveComme dans tout groupe, multiplication à gauche (par un élément fixe) dans M est la permutation, et dans ce cas c'est aussi une isométrie, et induit une isométrie sur K.
En particulier, si deux éléments $a, b \in K$ sont représentés par les séquences $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$, puis la carte envoyant chaque élément de K, représenté par $\{z_n\}$, disons, à l'élément représenté par $\{ynx_n^{-1}z_n\}$, est une isométrie de K se déplaçant de a vers b. Ainsi K est homogène.
Nous prouverons que K est connecté en arc en montrant que chaque élément a peut être connecté par un chemin continu à e.
Rappelez-vous que ceci signifie qu'il existe une fonction continue $f : [0, 1] \longrightarrow K$, telle que $f(0) = e$ et $f(1) = a$.
Soit a représenté par une suite $\{x_n\}$ comme ci-dessus, et pour chaque n choisir une représentation de x_n comme un produit de longueur $l(x_n)$ des générateurs.
Soit $0 \leq \alpha \leq 1$, et pour chaque mot w de longueur k dans le générateurs X, écrivez $\omega(\alpha)$ pour le mot constitué des premières lettres $\lceil k\alpha \rceil$ en ω.
Définissez $f(\alpha)$ comme l'élément représenté par la séquence $\{x_n(\alpha)\}$. Il est clair que $f(0) = e$ et $f(1) = a$.
De plus, si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, il est aussi clairement que $(\beta - \alpha)l(x_n) - 1 \leq d(\omega(\alpha), \omega(\beta)) \leq (\beta - \alpha)l(x_n) + 1$.
Puisque $l(x_n) \leq An$, cela implique que $d(f(\alpha), f(\beta)) \leq A(\beta - \alpha)$, et donc f est continu.
Cela montre que K est connexe par arc, donc connexe. De plus, $d(e, f(\beta)) \leq \beta d(e, a)$, et donc le chemin de e vers a est contenue dans la boule de rayon $l(a)$ autour de e.
Cela montre que chaque balle autour de e est connexe par arc de cercle. Par homogénéité, cela vaut pour toutes les balles, donc K est localement connexe.

Pour prouver que K est complet, nous avons besoin de la remarque suivante.
Supposons que a et b sont deux points de K et que $d(a, b) < A$, pour un certain nombre A.
Ensuite, nous pouvons trouver des séquences représentatives $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ pour a et b, telle que l'inégalité $d(x_n, y_n) < An$ est valable sur certains ensemble d'entiers S dans l'ultrafiltre F. Pour $n \notin S$ on peut remplacer y_n par x_n. Cela ne change pas le point b, mais garantit que l'inégalité ci-dessus vaut pour tout n.
Soit maintenant $\{a_i\}$ une suite de Cauchy dans K, et soit $\{x_{i_n}\}$ être une séquence représentative de a_i.
On peut supposer que $d(a_1, a_i) < 1$ pour tout i.
Changer comme ci-dessus les séquences xin, pour $i > 1$, nous permet de supposons que pour chaque n et chaque i nous avons $d(x_{1_n}, x_{i_n}) < n$, et donc $d(x_{i_n}, x_{j_n}) < 2n$, pour toutes les paires i, j. Soit k le premier indice tel que $k > 1$ et $d(a_i, a_j) < 1/2$ pour tout i, $j \geq k$. Puis changez x_{i_n}, pour $i > k$, pour obtenir que $d(x_{k_n}, x_{i_n}) < n/2$ est valable pour tout $i > k$. Cela ne change pas le inégalités précédentes, car au pire on a remplacé x_{i_n} par x_{k_n}, qui satisfait toujours $d(x_{1_n}, x_{k_n}) < n$.
En continuant ainsi, nous voyons que c'est possible de choisir les séquences x_{i_n} de telle sorte que pour chaque n et chacun $\epsilon > 0$, l'inégalité $d(x_{i_n}, x_{j_n}) < \epsilon n$ est vraie, si i et j sont grands assez.
Corrigez certains n, puis choisissez de sorte que $n < 1$. Puis x_{i_n} et x_{j_n} sont à une distance inférieure à 1, c'est-à-dire qu'ils sont égaux.
Par conséquent, la séquence $\{x_{i_n}\}$ est finalement constant.
Écrivez xn pour la valeur éventuelle de $\{x_{in}\}$. Si m est un indice tel que $d(x_{i_n}, x_{j_n}) < \epsilon n$ chaque fois que i, $j \geq m$, alors dans particulier $d(x_n, x_{j_n}) < n$ pour tout $j \geq m$ (et pour tout n).
Soit a le point de K représenté par la suite $\{x_n\}$.
Puis la dernière inégalité implique $d(a, a_j) \leq \epsilon$.
Ainsi a_i converge vers a, et la preuve du théorème 3,0,4 est terminé. ■

Théorème 3.0.5 *Soit G un groupe infini de générateur finie, soit K un cône asymptotique de G, et soit $I := Isom(K)$ le groupe isom'étrique de K.*
Alors il existe un homomorphisme $\Phi : G \longrightarrow I$ de noyau N tel que l'une des cales suivantes :
(i) G/N est infini.
(ii) N est abélien par fini
(iii) Pour chaque voisinage O de l'identité en I il existe un homomorphisme $\varphi_O : N \longrightarrow I$, tel que $Im(\varphi_O) \cap O$ contienne une non-identité éléments

3.1 Annex

Théorème 3.1.1 *Les groupe virtuellement nilpotent,ont une croissance polynomiale.*

Preuvear la proposition 2,0,5 (c), nous pouvons supposer que notre groupe G est nilpotent. Nous employons l'induction sur la longueur de Hirsch $h(G)$ de G.
Si $h(G) = 1$, alors G est fini par (cyclique infini) , et donc son type de croissance est identique à $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire linéaire.
Soit G une série centrale $1 = G_{r+1} \leq ... \leq G_1 = G$ avec des facteurs cycliques, et soit $\langle G_i = G_{i+1}, x_i\rangle$, de sorte que $G = \langle x_1, ..., x_r\rangle$.
Si G/G_2 est fini, il suffit à nouveau de considérer G_2. On peut donc supposer que G/G_2 est infini, et alors $h(G_2) = h(G) - 1$, et l'hypothèse d'induction s'applique à G_2. Considérons un élément $x \in G$ écrit comme un mot de longueur n (ou moins) dans les générateurs $\{x_i\}$, disons $x = \omega_1 = y_{i_1}...y_{i_n}$, où chaque y_i est soit un x_j, soit un x_j^{-1}.on va réécrire x sous la forme $x = w_2 = x_1^e z$, pour un entier e, où $z \in G_2$.
Nous commençons par rechercher la première occurrence de x_1 (ou x_1^{-1}) c'est-à-dire à droite d'un autre générateur : disons que nous avons une occurrence de x_2x_1, et nous remplaçons cela par le produit égal $x_1x_2[x_2, x_1]$.
Si x_2 a été précédé par x_3, nous avons maintenant le produit x_3x_1, que nous remplaçons par $x_1x_3[x_3, x_1]$.
Dans chacun de ces remplacements, x_1 est poussé d'une position vers la gauche, et nous continuer jusqu'à ce qu'il arrive à l'extrême gauche, c'est-à-dire jusqu'au segment de ω_1 qui la précède est elle-même une puissance de x_1 (éventuellement 1).
Nous recherchons ensuite le occurrence suivante de x_1, peut-être que cela se produit dans x_4x_1, et nous le remplaçons dans de la même manière.
Une autre possibilité est que le prochain x_1 se produise correctement après le précédent, et dans ce cas, notre premier remplacement a causé l'apparence de $[x_2x_1]x_1$, que nous remplaçons par $x_1[x_2x_1][x_2, x_1, x_1]$.
Nous continuons ce processus jusqu'à ce que nous ayons déplacé toutes les occurrences de x_1 vers le extrême gauche de notre mot, à quel point nous avons notre mot ω_2.
Notez que dans ce processus de collecte, nous ajoutons uniquement des commutateurs ; le nombre de les occurrences des générateurs d'origine n'augmentent pas, bien que cela puisse diminuer, si nous avions un x_i apparaissant à l'origine avec à la fois positif et exposants négatifs, car nous avons alors une annulation à un moment donné.
Il est clair que $|e| \leq n$, donc le nombre de valeurs possibles du puissance x_1^e, n'est pas supérieur

à $2n+1$. Pour limiter le nombre de valeurs de z, nous voulons savoir combien de commutateurs nous y avons.
Premièrement, les commutateurs de la forme $[x_i, x_1]$ ne peuvent être créés que lorsque nous déplacons x_1 vers la gauche de x_i, et une telle occurrence signifie que dans ω_1 nous avions x_1 à droite de x_i (pas nécessairement en tant que voisin droit immédiat).
Le nombre de ces paires x_j, x_1 est au plus n^2, il n'y en a donc pas plus que n^2 commutateurs $[x_j, x_1]$.
Supposons que nous sachions déjà que z contient pas plus de n^k commutateurs de poids k, et considérons ceux de poids $k+1$.
Celles-ci ont la forme $[u, x_1]$, où u est un commutateur de poids k, et un tel commutateur a été créé si à un moment donné u a été créé à gauche de certains x_1.
Le nombre de paires u, x_1 est au plus n^{k+1}, donc par récurrence on obtient que pour chaque poids t, il n'y a pas plus de n^t commutateurs de poids t en z.
Maintenant, si la classe nilpotency de G est c, alors tous les commutateurs de poids $c+1$ ou plus sont triviaux, et nous ne doivent compter que des commutateurs de poids jusqu'à c, dont le nombre est au plus $n^2 + ... + n^c$.
Tous ces commutateurs se trouvent dans $G \leq G_2$, et nous peut les exprimer sous forme de mots dans les générateurs $\{x_2, ..., x_r\}$ de G_2.
Laisser A être la longueur maximale de ces mots.
Le mot z contient ces commutateurs et ceux des éléments $\{x_2, ..., x_r\}$ qui apparaissent dans le élément d'origine x.
Il y a au plus n de ces dernières occurrences, donc la longueur de z est au plus $A(n+n^2+...+n^c) < An^{c+1}$. Par conséquent, $s_G(n) \leq (2n+1)s_{G2}(An^{c+1})$ est polynomial. ∎

Proposition 3.1.1 *Si $x \in N$, alors $F\ lim_{r\longrightarrow\infty} D(x,r)/r = 0$. Preuve Pour chaque r, choisir un a_r tel que $l(a_r) \leq r$ et $l(a_r^{-1} x a_r) = D(x,r)$. La séquence $\alpha := a_[r]$ est modérée. Si $x \in N$, alors $x\alpha = \alpha$: donc $FlimD(x,r)/r = d(x\alpha, \alpha) = 0$.*

Proposition 3.1.2 *Pour $x, y \in G$ et les entiers r, s on a $D(x, r+s) \leq D(x,r) + 2s$ et $D(y^{?1}xy, r) \leq D(x,r) + 2l(y)$.*

PreuveSoit $l(a) \leq r+s$. Alors on peut écrire $a = bc$ avec $l(b) \leq r$ et $l(c) \leq s$. Alors

$$d(xa,a) = d(xbc,bc) \leq d(xbc,xb)+d(xb,b)+d(b,bc) = d(xb,b)+2d(b,bc) \leq d(xb,b)+2s \leq D(x,r)+2s$$

donc $D(x, r+s) \leq D(x,r) + 2s$

Ensuite, si $l(a) \leq r$, alors

$$d(y^{?1}xya, a) = d(xya, ya) \leq D(x, r + l(y))$$

■

Théorème 3.1.2 *Si G est de croissance polynomiale, le cône asymptotique K est dimension finie et localement compact.*

Preuvehoisissons à l'intérieur de la boule B le nombre maximal possible, disons k, de points tels que la distance entre deux d'entre eux soit plus que 2ϵ. Ensuite, chaque point de B se trouve à une distance d'au plus 2ϵ de l'un des ces points, et B est couvert par au plus $(1/\epsilon)^{2(d+1)}$ boules de rayon 2ϵ. Cela signifie que la dimension Hausdorff de B est au plus 2 (d + 1), et en particulier cela implique que la dimension de B est fini. Puisque la dimension est déterminée par le comportement local, le la dimension de K est finie.
Soit maintenant $\{x_n\}$ n'importe quelle séquence de B. Nous allons montrent qu'il a une sous-séquence convergente. Cela montrera que B est compact, et donc K est localement compact. À cette fin, couvrons B, pour chaque i, par k_i boules de rayon 2^{-i} . Puis une sous-séquence infinie de $\{x_n\}$ se trouve dans l'une des boules de rayon 1, une sous-séquence infinie de celui-ci se trouve dans une des boules de rayon 1/2, etc.
En prenant une suite diagonale, on trouve une sous-séquence de Cauchy de la séquence originale. Puisque K est complet, ce la sous-séquence converge. ■

Corollaire 3.1.1 *Soit G un groupe infini de croissance polynomiale. alors il existe un groupe de Lie avec un nombre fini de composants, et un nombre k, tel que G contienne un sous-groupe normal C d'indice fini, pour lequel des éléments suivants contient :*
(i) C a un groupe de facteurs abéliens infini.
(ii) C a un groupe de facteurs infini dans $GL(k, C)$.
(iii) Il existe des homomorphismes $\varphi_n : C \longrightarrow \Gamma$, pour tous les nombres naturels n, tel que $|C/Ker(\varphi_n)| \geq n$.

Preuveoit N comme dans le théorème 3.0.5 D'après les théorèmes 3.0.4 et 3.1.2, le cône asymptotique K satisfait les hypothèses du proposition 3.0,6 G/N a un sous-groupe abélien normal L/N tel que G/L est isomorphe à un sous-groupe de $GL(k, C)$, pour un certain k. Si G/L est infini, nous sommes fait, et aussi si G/Lest fini et G/N est infini. On suppose donc que G/N est fini. Dans le cas (ii) du théorème 3.0.5, nous avons toujours terminé, donc nous supposons que (iii) s'applique. Dans ce cas, nous appliquons la proposition 3.0.6. ■

Corollaire 3.1.2 *Un groupe infini de croissance polynomiale contient un sous-groupe d'indice fini qui a une image homomorphe cyclique infinie.*

Preuve Soit G l'infini de croissance polynomiale, et soit C comme dans le corollaire 3.1.1 Dans le cas (ii) de 3.1.1, nous savons, par les théorèmes de Tits et de Milnor-Wolf, que le groupe de facteurs linéaires infini G / N est virtullement nilpotent , donc G contient un sous-groupe d'indice fini $H \geq N$ tel que H/N soit nilpotent et infini, et le dernier terme de la série dérivée de H qui a un indice fini dans G est le sous-groupe que nous voulons.
Le cas (i) est évident, nous supposons donc que (iii) est vrai. Soit $K_n = Ker(\varphi)$.
Par le théorème 3.0.6, C contient des sous-groupes normaux L_n tels que L_n/K_n est abélien et C/L_n est isomorphe à un sous-groupe de $GL(k, C)$ (où k est indépendant de n).
Par Le théorème de Jordan 3.0.3 , C contient des sous-groupes $H_n \geq L_n$ tels que H_n/L_n ■

Conclusion

Le théorème de gromov a beaucoup application dans la théories des groupes et en géometrie des groupe,espérons dans le future de l'applique pour trouver une réponse de le question posé par Man ⟨⟨ **If G has uniform exponential growth, and H is a finite index subgroup of G, does H have uniform exponential growth ?** ⟩⟩

Bibliographie

[1] Josette Calais - Eléments de théorie des groupes (Mathématiques) French (1984)

[2] Avinoam Mann "How Groups Grow " 2012.

[3] Josette Calais " Eléments de théorie des groupes" Presses Universitaires de France (1984).

Résumé

Gromov a confirmé la conjucture de Milnor sur la croissance polynomiale des groupes :$\langle\langle$ **un groupe de type fini est à croissance polynomiale si rt seulement si'il est virtuellement nilpotent$\rangle\rangle$.**

Abstract

Gromov confirmed Milnor conjucture on polynomial growth groupes :
$\langle\langle$ A group of polynomial growth is nilpotent-by-finite$\rangle\rangle$.