الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة قاصدي مرباح–ورقلة
كلية الرياضيات–علوم المادة
قسم الفيزياء

مذكرة تخرج

من أجل الحصول على
شهادة الماستر

تقديم:

تمرني صباح و رحماني حدي

الموضوع

تطبيق الهندسة غير التبديلية على جسيمات سلمية و شعاعية

الميدان: علوم المادة
الشعبة: الفيزياء
التخصص: الفيزياء النظرية

نوقشت يوم: 2020/10/01

أمام اللجنة:

الرئيس:	الحاج بالشراير بلغيثار	أستاذ مساعد أ	جامعة ورقلة
المشرف:	خوجة الأمين	أستاذ محاضر أ	جامعة ورقلة
المُناقش:	بن الزاير هجيرة	أستاذ محاضر أ	جامعة ورقلة

السنة الجامعية 2020/2019

الإهداء

الحمد لله الذي هدانا إلى طريق العلم و المعرفة ووفقنا لانجاز هذه المذكرة و اتمام هذا البحث العلمي المتواضع الذي اهديه :

- إلى من كان دعاؤهما سراجا ينير الطريق... إلى " أبي" و " أمي " متعهما الله بالصحة و العافية و أطال في عمرهما.

-إلى من كان دعمهم خير زاد... إلى إخوتي وفقهم الله كل بإسمه "نسيبة"، "أحمد عبد الجبار"، "عبد الجليل" ،"إسلام" ،"ندى".

- إلى من تذوقت معها أجمل اللحظات صديقة عمري "حدي".

- إلى من كانوا عائلتي الثانية إلى كل صديقاتي التي فارقتنا العين ولم يفارقنا الوجدان كل واحدة بإسمها ورسمها.

- إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم و المعرفة... إلى جميع أساتذتنا الأفاضل.

صباح تمرني

الإهداء

الحمد لله الذي هدانا إلى طريق العلم والمعرفة ووفقنا لإنجاز هذه المذكرة ، أهدي ثمرة جهدي المتواضع:

- إلى روح والدي الطاهرة، تغمده الله بواسع رحمته و أسكنه الفردوس الأعلى .
- إلى أعز ما أملك في الوجود و من كانت سر وجودي والتي مهما فعلت وقلت لن أوفي حقها " أمي الغالية " حفظها الله وأطال في عمرها.
- إلى رياحين حياتي في الشدة والرخاء أخوتي و أخواتي.
- إلى صديقاتي الحبيبات وأخص بالذكر رفيقة دربي "صباح".

حمدي رحماني

تشكرات

نشكر الله سبحانه وتعالى و نحمده على توفيقنا إلى ماسعينا إليه ، فإننا ما كنا بالغين ما بلغنا إلا بفضله وعظيم كرمه.

فيطيب لنا بعد شكر الله عز وجل أن نتقدم بخالص الشكر وعظيم الإمتنان و التقدير إلى أستاذنا الفاضل "خوجة الأمين" لتفضله مشكورا بالإشراف على هذه الرسالة و لما قدمه لنا من خبرته العلمية الواسعة داعين الله تعالى أن يمتعه بوافر الصحة والعافية و جزاه الله كل خير.

كما نتقدم بالشكر والإحترام للسادة أعضاء لجنة المناقشة الموقرين الأستاذة الفاضلة "بن الزاير هجيرة" كمناقشة و الأستاذ الفاضل "الحاج بالشراير بلغيثار" كرئيس على ما أبدوه من ملاحظات و مقترحات قيمة تثري رسالتي.

كما لا يفوتني أن اتقدم بالشكر الجزيل إلى كل من ساهم في هذا العمل من قريب أو بعيد وأخص بالذكر الأستاذ الفلسطيني "محمد البيطار" على كل مجهوداته المبذولة و مساعدته حفظه الله و جزاه كل خير.

و إلى كل الذين لا يسعنا الكلام لذكرهم...لكم منا خالص الشكر و العرفان.

حدي و صباح

الفهرس

مقدمة عامة

في السنوات الأخيرة تضاعفت الأبحاث حول نظرية الهندسة غير التبديلية و تطبيقاتها على الفيزياء الكمية و نظرية الحقول و التي أعطت نتائج فيزيائية و مفاهيم رياضية جديدة.
و عليه سنتطرق في هذه المذكرة إلى النقاط التالية:

- **الفصل الأول** : في هذا الفصل سنحاول تقديم مفاهيم عامة حول نظرية الهندسة غير التبديلية .

- **الفصل الثاني** : في هذه الفصل سنقوم بدراسة حقل DKP في فضاء $de\ sitter$ ذو بعد مكاني واحد و هذا في إطار الهندسة غير التبديلية ، ونحاول تطبيق النتائج المتحصل عليها في حساب كثافة خلق الجسيمات.

- **الفصل الثالث** : في هذا الفصل سنطبق مفهوم الهندسة غير التبديلية على معادلة كلاين-غوردن في وجود كمون كولوم ، ونحاول حساب التصحيحات في الطاقة اعتمادا على نظرية الاضطرابات من الدرجة الأولى.

و في الأخير نختم هذه المذكرة بخلاصة عامة .

الفصل الأول

صياغة الهندسة غير التبديلية

1.I مقدمة

في بداية القرن العشرين تم إكتشاف ميكانيك الكم من قبل هايزنبارغ عام 1925 [1]. نتذكر أن أي ملاحظة كلاسيكية في صياغة هاملتون هي دالة للثنائية (x_i, p_i) و هذه الثنائية تُشكل فضاء يُسمى فضاء الأطوار (أي أن الملاحظة هي دالة على فضاء الأطوار) . بعد عمل هايزنبارغ اوضحت الأبحاث الصادرة عن ديراك [2] و بورن–هايزنبارغ–جوردن [3] أن الملاحظة في الميكانيك الكمومي هي مؤثرات هرميتية على فضاء هيلبرت . بعبارة أخرى نقوم بتكميم فضاء الأطوار برفع الثنائية (x_i, p_i) من مجرد متغيرات إلى هرميتية $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$ تُحقق علاقة التبديل $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$.

كما في تكميم فضاء الأطوار الكلاسيكي ، من أجل الحصول على فضاء_زمن غير تبديلي نستبدل احداثيات الفضاء_زمن x^μ بمولدات هرميتية $\widehat{x}^\mu$ للجبر _ C^* غير التبديلي لدوال الفضاء_زمن التي تُحقق علاقات التبديل

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{I.1}$$

ابسط حالة ل (I.1) هي لما تكون $\Theta^{\mu\nu}$ مصفوفة 4×4 ضد متناظرة ذات عناصر ثابتة .

2.I مؤثرات وايل

لنعتبر جبر تبديلي لدوال على الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^2$ ذو 4 أبعاد ، مزودة بجداء مُعرف بالتركيب الإعتيادي للدوال . سنفترض أن كل الحقول المعرفة على $\mathbb{R}^4$ ، الدوال تنعدم بسرعة عند المالانهاية [4] . أي ، تلك الدوال التي مشتقاتها من أجل أي رتبة كيفية تنعدم في المالانهاية في كل من فضاء الموضع و فضاء كمية الحركة . شرط شوارتز يعني أيضا أن أي دالة $f(x)$ يمكن كتابة تحويل فوريي خاص بها على الشكل :

$$\tilde{f}(k) = \int d^4x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) \tag{I.2}$$

من أجل $f(x)$ دالة حقيقة يمكن أن نكتب :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k)^* &= \left(\int d^4x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) \right)^* \\
&= \int d^4x e^{+ik_\mu x^\mu} f(x)^* \\
&= \int d^4x e^{+ik_\mu x^\mu} f(x) \\
&= \int d^4x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) \qquad [k \longrightarrow -k] \\
&= \tilde{f}(-k)
\end{aligned} \tag{I.3}$$

الآن نُعرف الفضاء غير التبديلي باستبدال الإحداثيات المحلية x^μ على $\mathbb{R}^4$ بمؤثرات هرميتية $\hat{x}^\mu$ تُحقق علاقة التبديل (I.1) . لنعتبر الدالة $f(x)$ و تحويل فوريي الخاص بها (I.2) . مؤثر وايل الموافق لها يُعطى بـ :

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tag{I.4}$$

يمكننا أن نبرهن أن مؤثر وايل هرميتي من أجل $f(x)$ حقيقية ، حيث :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{W}}^{\dagger}[f] &= \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)e^{ik_\mu\hat{x}^\mu}\right]^{\dagger} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}^*(k)e^{-ik^\mu\hat{x}^{\dagger}_\mu} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(-k)e^{-ik_\mu\hat{x}^\mu} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)e^{ik_\mu\hat{x}^\mu} \\
\hookrightarrow \hat{\mathcal{W}}^{\dagger}[f] &= \hat{\mathcal{W}}[f]
\end{aligned} \tag{I.5}$$

انطلاقا من المعادلة (I.4) يمكن أن نعرف $\hat{\Delta}(x)$ و نكتب :

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^4x f(x)\hat{\Delta}(x) \tag{I.6}$$

حيث :

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}e^{-ik_\mu x^\mu} \tag{I.7}$$

نلاحظ أن المؤثر (I.7) هرميتي كما يمكن أن نلاحظ أنه من أجل $\Theta^{\mu\nu} = 0$ فإن هذا المؤثر يُصبح دالتا ديراك $\delta^4(\hat{x} - x)$ و منه فإن مؤثر وايل يُكتب بـ $\hat{\mathcal{W}}[f] = f(\hat{x})$.
يمكن ان نعرف مؤثرات المشتقات بعلاقات التبديل التالية :

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}_\nu] = \delta_{\mu\nu} \quad , \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0 \tag{I.8}$$

نحسب مُبدل الإشتقاق مع المؤثر $\hat{\Delta}(x)$ حيث :

$$\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}] &= [\hat{\partial}_\mu, \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}e^{-ik_\nu x^\nu}] \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}[\hat{\partial}_\mu, \underbrace{e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}}_{\Sigma_n\frac{(ik_\nu\hat{x}^\nu)^n}{n!}}]e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\sum_n \frac{(ik_\nu)^n}{n!}[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^n]e^{-ik_\nu x^\nu}
\end{aligned}$$

الآن نحسب المبدل $[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^n]$

$$
\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^n] &= [\hat{\partial}_\mu, x^\nu(\hat{x}^\nu)^{n-1}] = \underbrace{[\hat{\partial}_\mu, x^\nu]}_{\delta^\nu_\mu}(\hat{x}^\nu)^{n-1} + x^\nu[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-1}] \\
&= \delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + x^\nu[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-1}] \\
&= \delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + x^\nu([\hat{\partial}_\mu, x^\nu](\hat{x}^\nu)^{n-2} + \hat{x}^\nu[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-2}]) \\
&= \delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + \hat{x}^\nu\delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-2} + (\hat{x}^\nu)^2[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-2}] \\
&= 2\delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-1} + (\hat{x}^\nu)^2[\hat{\partial}_\mu, (\hat{x}^\nu)^{n-2}] \\
&= \ldots \\
&= n\delta^\nu_\mu(\hat{x}^\nu)^{n-1}
\end{aligned}
$$

باستخدام خصائص دالتا كرونكر فإنه :

$$
\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_n \frac{(ik_\mu)^n}{n!} n(\hat{x}^\mu)^{n-1} e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ik_\mu \sum_n \frac{(ik_\mu)^{n-1}}{(n-1)!} (\hat{x}^\mu)^{n-1} e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ik_\mu \underbrace{\sum_n \frac{(ik_\mu \hat{x}^\mu)^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}} e^{-ik_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \underbrace{ik_\mu e^{-ik_\nu x^\nu}}_{-\partial_\mu e^{ik_\nu x^\nu}} \\
&= -\partial_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik_\nu x^\nu} \\
\hookrightarrow \quad &= [\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}] = -\partial_\mu \hat{\Delta}(x)
\end{aligned}
\tag{I.9}
$$

الآن نحسب مُبدل مؤثر الإشتقاق مع مؤثر وايل

$$\begin{aligned}
[\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] &= [\hat{\partial}_\mu, \int d^4x f(x) \hat{\Delta}(x)] \\
&= \int d^4x f(x) [\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}(x)] \\
&= -\int d^4x f(x) \partial_\mu \hat{\Delta}(x) \qquad [\text{نكامل بالتجزئة}] \\
&= -\left[-\int d^4x \partial_\mu f(x) \hat{\Delta}(x)\right] \quad [\text{الحقل معدوم عند حدود التكامل}] \\
\hookrightarrow \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] &= \int d^4x \partial_\mu f(x) \hat{\Delta}(x) = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]
\end{aligned} \tag{I.10}$$

من (I.9) يعني أنه يمكن كتابة مولدات الإنسحاب على الشكل :

$$e^{\upsilon^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{-\upsilon^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+\upsilon) \tag{I.11}$$

من الخاصية (I.11) فإن الأثر Tr على مؤثرات وايل يعطي بالعبارة التالية :

$$Tr \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^4x f(x) \tag{I.12}$$

باستخدم صيغة بيكر-كامبل-هاسدورف :

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} = e^{-\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} \tag{I.13}$$

نطبقها على العبارة (I.7) ، نحصل على :

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) &= \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu} e^{-\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu} \\
&= \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int d^4z e^{i(k+k')_\mu z^\mu} \hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu} \\
\hookrightarrow \quad \hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) &= \frac{1}{\pi^4 |\det \Theta|} \int d^4z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\Theta^{-1})_{\mu\nu}(x-z)^\mu (y-z)^\nu}
\end{aligned} \tag{I.14}$$

باعتبار أن $Tr\Delta(x) = 1$ فإنه يمكننا أن نكتب :

$$Tr\left(\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)\right) = \delta^4(x-y) \tag{I.15}$$

و يمكن أن نبرهن أيضا انطلاقا من العلاقة (I.6) :

$$\begin{aligned} Tr\left(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)\right) &= Tr\left(\int d^4y f(y)\hat{\Delta}(y)\hat{\Delta}(x)\right) \\ &= \int d^4y f(y) Tr\left(\hat{\Delta}(y)\hat{\Delta}(x)\right) \\ &= \int d^4y f(y)\delta^4(x-y) \\ \Rightarrow \quad Tr\left(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)\right) &= f(x) \end{aligned} \tag{I.16}$$

هذه بعض خصائص مؤثر وايل .

3.I الجداء نجمة (جداء مويال)

لتكن f و g دالتين ، يمكن أن نكتب الجداء التالي :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{g}(q)e^{iq_\mu\hat{x}^\mu} \\ &= \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{ik_\nu\hat{x}^\nu}e^{iq_\mu\hat{x}^\mu} \end{aligned} \tag{I.17}$$

نستخدم صيغة بيكر-كامبل-هاسدورف العلاقة (I.13) لتبسيط هذه العبارة فنجد :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] &= \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{i(k_\mu+q_\mu)\hat{x}^\mu}e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu q_\nu} \\ &= \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{ik'_\mu\hat{x}^\mu}e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}(k_\mu k'_\nu-k_\mu k_\nu)} \end{aligned} \tag{I.18}$$

حيث وضعنا $k+q=k'$. باستخدام التناظر $k_\mu k_\nu = k_\nu k_\mu$ نجد أن :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] &= \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{ik'_\mu\hat{x}^\mu}e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} \\ &= \iint \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}(\widetilde{f\star_M g})(k')e^{ik'_\mu\hat{x}^\mu} \end{aligned} \tag{I.19}$$

حيث $(\widetilde{f\star_M g})(k')$ هو عبارة عن جداء مُعرف بـ :

$$(\widetilde{f\star_M g})(k') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} \tag{I.20}$$

الجداء نجمة أو جداء مويال هو تحويل فوريي العكسي لـ (I.20) :

$$\begin{aligned}(f\star_M g)(x) &= \int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\widetilde{(f\star_M g)}(k')e^{ik'_\mu x^\mu}\\ &= f(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu}\Theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_\nu}\right)g(x)\\ &= f(x)g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\Theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\Theta^{\mu_n\nu_n}\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_n}f(x)\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_n}g(x)\end{aligned} \tag{I.21}$$

و بالتالي فإن :

$$\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]=\hat{\mathcal{W}}[f\star_M g] \tag{I.22}$$

و هذه هي العلاقة بين جداء وايل و جداء نجمة مويال حيث جداء مويال بين دالتين معرف كما يلي :

$$f\star_M g=f(x)\exp(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu}\Theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_\nu})g(x) \tag{I.23}$$

4.I تطبيقات سايبرغ–ويتين

برهن سايبرغ–ويتين في [5] أنه يمكن الحصول على النظرية المعيارية غير التبديلية من النظرية المعيارية التبديلية . بعبارة أخرى يوجد هناك تطبيق يربط الحقول و الوسائط المعيارية غير التبديلية بالحقول والوسائط المعيارية التبديلية الذي يتلائم مع البنية المعيارية للنظرية .

حيث أنه في نظرية يانغ–ميلز و بتعويض الجداء العادي بالجداء نجمة فإن الفعل يُكتب على النحو التالي :

$$\hat{S}=-\frac{1}{4}Tr\int d^4x\hat{F}^{\mu\nu}\star\hat{F}_{\mu\nu}=-\frac{1}{4}Tr\int d^4x\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} \tag{I.24}$$

مع

$$\hat{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\hat{A}_\nu-\partial_\nu\hat{A}_\mu-i[\hat{A}_\mu,\hat{A}_\nu]_* \tag{I.25}$$

هو تنسور شدة الحقل غير التبديلي للحقل المعياري غير التبديلي $\hat{A}$. الفعل (I.24) لا تغايري تحت التحويلات المعيارية غير التبديلية

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}\hat{A}_\mu=\partial_\mu\hat{\Lambda}-i[\hat{A}_\mu,\hat{\Lambda}]_*\equiv\hat{D}_\mu\hat{\Lambda}\quad,\quad\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}\hat{F}_{\mu\nu}=i[\hat{\Lambda},\hat{F}_{\mu\nu}]_* \tag{I.26}$$

حيث $\hat{\Lambda}$ الوسيط المعياري غير التبديلي . $\hat{\delta}$ التغاير غير التبديلي .
نُعرف تطبيقات سايبرغ–ويتين على النحو التالي [5] :

$$\hat{A}_\mu(A;\Theta) + \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}(A;\Theta) = \hat{A}_\mu(A+\delta_\alpha;\Theta) \tag{I.27}$$

حيث A و α هي الحقل المعياري و الوسيط المعياري العادي (التبديلي) على الترتيب . و δ_α هي التحويلات المعيارية العادية و المعرفة بالشكل :

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha - i[A_\mu, \alpha] = D_\mu \alpha \tag{I.28}$$

المعادلة (I.27) يمكن كتابتها كما يلي :

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}(A;\Theta) = \hat{A}_\mu(A+\delta_\alpha;\Theta) - \hat{A}_\mu(A;\Theta) = \delta_\alpha \hat{A}_\mu(A;\Theta) \tag{I.29}$$

حيث :

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu(A;\Theta) \quad , \quad \hat{F}_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu}(A;\Theta) \quad , \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\alpha, A;\Theta) \tag{I.30}$$

إن الحقول و الوسائط غير التبديلية يمكن كتابتها على شكل سلسلة قوى للمعامل Θ :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\alpha &= \alpha + \Lambda_\alpha^1 + \cdots + \Lambda_\alpha^n + \cdots \\ \hat{A}_\mu &= A_\mu + A_\mu^1 + \cdots + A_\mu^n + \cdots \end{aligned} \tag{I.31}$$

إذن فإن حلول المعادلة (I.29) حتى الدرجة الأولى للمعامل Θ تُعطى بـ [5] :

$$\Lambda_\alpha^1 = -\frac{1}{4}\Theta^{k\lambda} A_k, \partial_\lambda \alpha \quad , \quad A_\rho^1 = -\frac{1}{4}\Theta^{k\sigma} A_K, \partial_\sigma A_\rho + F_{\sigma\rho} \tag{I.32}$$

انطلاقا من هذه الحلول ، فإن التصحيح في تنسور الحقل $\hat{F}_{\mu\nu}$ يُكتب على الشكل :

$$F_{\rho\lambda}^1 = -\frac{1}{4}\Theta^{k\sigma}\left(\{A_k, \partial_\sigma F_{\rho\lambda} + D_\sigma F_{\rho\lambda}\} - 2\{F_{\rho k}, F_{\lambda\sigma}\}\right) \tag{I.33}$$

5.I الخلاصة

في هذا الفصل قدمنا بعض المفاهيم فيما يخص الهندسة غير التبديلية و قمنا بتعريف مؤثرات وايل حيث الدوال العادية تُصبح مؤثرات و جداء مويال الذي يسمح بالانتقال من الفضاء التبديلي إلى الفضاء غير التبديلي ، كما عرفنا تطبيقات سايبرغ–ويتين التي تربط الحقول المعيارية في الفضاء غير التبديلي بالحقول المعيارية في الفضاء التبديلي . سنحاول فيما سيأتي من فصول تطبيق هذه المفاهيم على بعض النتائج الفيزيائية .

الفصل الثاني

معادلة DKP في فضاء غير تبديلي ذو بعدين

1.II مقدمة

هناك عدة أعمال قامت بدراسة عملية خلق الجسيمات لنظرية DKP في فضاءات منحنية صرفة [6, 7]. كما أن هناك أبحاث أخرى قامت بدراسة هذه النظرية في وجود حقل خارجي [8, 9] .

في هذا الفصل نحاول تطبيق الهندسة غير التبديلية و تطبيقات سايبرغ-ويتين على حقل DKP من أجل سبين 1 في فضاء $de{-}Sitter$ ذو بعدين . و نحاول إيجاد حلول المعادلات و تطبيقها في حساب كثافة خلق الجسيمات [10].

2.II حلول معادلة DKP في فضاء $de{-}Sitter$ ذو بعدين

معادلة DKP في فضاء غير تبديلي تعطى على النحو التالي :

$$\begin{aligned}(i\beta^\mu(\partial_\mu-\Gamma_\mu)-m)\psi-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}[(\partial_\alpha\beta^\mu)(\partial_\mu\partial_\beta\psi)-\partial_\alpha(\beta^\mu\Gamma_\mu)(\partial_\beta\psi)]\\ -\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\ln\sqrt{-g})\partial_\beta[(i\beta^\mu(\partial_\mu-\Gamma_\mu)-m)\psi]=0\end{aligned} \tag{II.1}$$

فيما يلي ، نأخذ: $x^0=t$ و $x^1=x$ لنفترض فضاء de–Sitter ذو بعد مكاني واحد $(1+1)$ ، في هذه

الحالة تُكتب المترية على الشكل :

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}dx^2 \tag{II.2}$$

من أجل تبسيط الحساب ،نأخذ مصفوفة الفضاء غير التبادلي $\theta^{\alpha\beta}$ كما يلي :

$$\theta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta = 0, 1 \tag{II.3}$$

حيث θ ثابت موجب و حقيقي, و مترية فضاء $de{-}Sitter$ تُكتب بـ :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{2Ht} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\partial}_0(\ln\sqrt{-g}) = H \tag{II.4}$$

لدينا :

$$\underbrace{(i\widetilde{\beta}^{\mu}(\widetilde{\partial}_{\mu} - \widetilde{\Gamma}_{\mu}) - m)\psi}_{(1)} - \frac{1}{2}\underbrace{\theta^{\alpha\beta}[(\widetilde{\partial}_{\alpha}\widetilde{\beta}^{\mu})(\widetilde{\partial}_{\mu}\widetilde{\partial}_{\beta}\psi) - \widetilde{\partial}_{\alpha}(\widetilde{\beta}^{\mu}\widetilde{\Gamma}_{\mu})(\widetilde{\partial}_{\beta}\psi)]}_{(2)}$$
$$-\frac{1}{2}\underbrace{i\theta^{\alpha\beta}\widetilde{\partial}_{\alpha}(\ln\sqrt{-g})\widetilde{\partial}_{\beta}[(i\widetilde{\beta}^{\mu}(\widetilde{\partial}_{\mu} - \widetilde{\Gamma}_{\mu}) - m)\psi]}_{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned}
(1) &= (i\widetilde{\beta}^{0}(\widetilde{\partial}_{0} - \underbrace{\widetilde{\Gamma}_{0}}_{0}) + i\widetilde{\beta}^{1}(\widetilde{\partial}_{1} - \widetilde{\Gamma}_{1}) - m)\psi \\
&= (i\widetilde{\beta}^{0}\widetilde{\partial}_{0} + i\widetilde{\beta}^{1}\widetilde{\partial}_{1} - i\widetilde{\beta}^{1}\widetilde{\Gamma}_{1} - m)\psi \\
&= (i\widetilde{\beta}^{0}\widetilde{\partial}_{0} + ie^{-Ht}\beta^{1}\widetilde{\partial}_{1} - ie^{-Ht}\beta^{1}\widetilde{\Gamma}_{1} - m)\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &= \theta^{\alpha\beta}[(\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\beta}^\mu)(\widetilde{\partial}_\mu\widetilde{\partial}_\beta\psi) - \widetilde{\partial}_\alpha(\widetilde{\beta}^\mu\widetilde{\Gamma}_\mu)(\widetilde{\partial}_\beta\psi)] \\
&= \theta^{01}[(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\beta}^\mu)(\widetilde{\partial}_\mu\widetilde{\partial}_1\psi) - \widetilde{\partial}_0(\widetilde{\beta}^\mu\widetilde{\Gamma}_\mu)(\widetilde{\partial}_1\psi)] \\
&+ \underbrace{\theta^{10}[(\widetilde{\partial}_1\widetilde{\beta}^\mu)(\widetilde{\partial}_\mu\widetilde{\partial}_0\psi) - \widetilde{\partial}_1(\widetilde{\beta}^\mu\widetilde{\Gamma}_\mu)(\widetilde{\partial}_0\psi)]}_{0} \\
&= \theta[\underbrace{(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\beta}^0)(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\partial}_1\psi)}_{0} - \underbrace{\widetilde{\partial}_0(\widetilde{\beta}^0\widetilde{\Gamma}_0)(\widetilde{\partial}_1\psi)}_{0} + (\widetilde{\partial}_0\widetilde{\beta}^1)(\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1\psi) - \widetilde{\partial}_0(\widetilde{\beta}^1\widetilde{\Gamma}_1)(\widetilde{\partial}_1\psi)] \\
&= \theta[-He^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1^2\psi - [(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\beta}^1)\widetilde{\Gamma}_1 + \widetilde{\beta}^1(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\Gamma}_1)](\widetilde{\partial}_1\psi)] \\
&= \theta[-He^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1^2\psi - [(-He^{-Ht}\beta^1)\widetilde{\Gamma}_1 + e^{-Ht}\beta^1(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\Gamma}_1)](\widetilde{\partial}_1\psi)] \\
&= \theta[-He^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1^2\psi + He^{-Ht}\beta^1\widetilde{\Gamma}_1(\widetilde{\partial}_1\psi) - e^{-Ht}\beta^1(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\Gamma}_1)(\widetilde{\partial}_1\psi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) &= i\theta^{\alpha\beta}\widetilde{\partial}_\alpha(\ln\sqrt{-g})\widetilde{\partial}_\beta[(i\beta^\mu(\widetilde{\partial}_\mu - \widetilde{\Gamma}_\mu) - m)\psi] \\
&= i\underbrace{\theta^{01}}_{\theta}\underbrace{\widetilde{\partial}_0(\ln\sqrt{-g})}_{H}\widetilde{\partial}_1[(i\beta^0\widetilde{\partial}_0 + ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1 - ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\Gamma}_1 - m)\psi] \\
&+ i\underbrace{\theta^{10}}_{-\theta}\underbrace{\widetilde{\partial}_1(\ln\sqrt{-g})\widetilde{\partial}_0}_{0}[(i\beta^0\widetilde{\partial}_0 + ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1 - ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\Gamma}_1 - m)\psi] \\
&= i\theta H(i\beta^0\widetilde{\partial}_0 + ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1 - ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\Gamma}_1 - m)\widetilde{\partial}_1\psi
\end{aligned}$$

نعوض في المعادلة (II.1) نحصل على :

$$\begin{aligned}
&(i\beta^0\widetilde{\partial}_0 + ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1 - ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\Gamma}_1 - m)\psi - \frac{1}{2}\theta[-He^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1^2\psi + He^{-Ht}\beta^1\widetilde{\Gamma}_1(\widetilde{\partial}_1\psi) \\
&- e^{-Ht}\beta^1(\widetilde{\partial}_0\widetilde{\Gamma}_1)(\widetilde{\partial}_1\psi)] - \frac{i}{2}\theta H(i\beta^0\widetilde{\partial}_0 + ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\partial}_1 - ie^{-Ht}\beta^1\widetilde{\Gamma}_1 - m)\widetilde{\partial}_1\psi = 0 \qquad \text{(II.5)}
\end{aligned}$$

حيث β^0 و β^1 تمثل مصفوفات $Kemmer$ في فضاء منكوفسكي ، لنعتبر الآن التغيير التالي :

$$\eta = \frac{-1}{H}e^{-Ht} \qquad , \qquad \widetilde{\partial}_0 = -H\eta\partial_\eta \qquad \text{(II.6)}$$

نعوض في (II.5) نجد :

$$\begin{aligned}
&[i\beta^0(-H\eta\partial_\eta) + i(-\eta H)\beta^1\widetilde{\partial}_1 - i(-\eta H)\beta^1\widetilde{\Gamma}_1 - m]\psi - \frac{1}{2}\theta[-H(-H\eta)\beta^1\widetilde{\partial}_1^2\psi + H(-H\eta)\beta^1\widetilde{\Gamma}_1(\widetilde{\partial}_1\psi) \\
&-(-H\eta)\beta^1((-H\eta\partial_\eta)\widetilde{\Gamma}_1)(\widetilde{\partial}_1\psi)] - \frac{i}{2}\theta H[i\beta^0(-H\eta\partial_\eta) + i(-H\eta)\beta^1\widetilde{\partial}_1 - i(-\eta H)\beta^1\widetilde{\Gamma}_1 - m]\widetilde{\partial}_1\psi = 0
\end{aligned}$$

و منه :

$$[-i\beta^0 H\eta\partial_\eta - i\beta^1 H\eta\widetilde{\partial}_1 + i\beta^1 H\eta\widetilde{\Gamma}_1 - m]\psi - \frac{1}{2}\theta[H^2\eta\beta^1\widetilde{\partial}_1^2\psi - H^2\eta\beta^1\widetilde{\Gamma}_1(\widetilde{\partial}_1\psi)$$
$$- \beta^1 H^2\eta^2(\partial_\eta\widetilde{\Gamma}_1)(\widetilde{\partial}_1\psi)] - \frac{i}{2}\theta H[-i\beta^0 H\eta\partial_\eta - i\beta^1 H\eta\widetilde{\partial}_1 + i\beta^1 H\eta\widetilde{\Gamma}_1 - m]\widetilde{\partial}_1\psi = 0 \qquad \text{(II.7)}$$

في فضاء-زمن ذو بعدين ، يمكننا كتابة $(spin\ connexion)$ لجسيمات ذات سبين واحد كما يلي :

$$\widetilde{\Gamma}_1 = \frac{-1}{2\eta}(\alpha^1 \otimes I + I \otimes \alpha^1) \qquad \text{(II.8)}$$

$$\alpha^1 = \gamma^0\gamma^1, \quad \text{حيث} \quad (\gamma^0, \gamma^1) = (\sigma^3, -i\sigma^2) \qquad \text{(II.9)}$$

و منه :

$$\begin{cases} \gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 = -i\sigma^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

إذن :

$$\alpha^1 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث $\otimes$ يصف جداء كرونكر لمصفوفتين A و B [11] :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \qquad \text{(II.10)}$$

و عليه :

$$\widetilde{\Gamma}_1 = \frac{-1}{2\eta}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\widetilde{\Gamma}_1 = \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و لدينا:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi 1 \\ \varphi 2 \\ \varphi 3 \\ \varphi 4 \end{pmatrix}$$

و منه فإن معادلة DKP تكتب على الشكل :

$$-iH\eta\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_\eta\varphi_1\\\partial_\eta\varphi_2\\\partial_\eta\varphi_3\\\partial_\eta\varphi_4\end{pmatrix}-iH\eta\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\\widetilde{\partial}_1\varphi_2\\\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}$$

$$+\frac{iH}{2}\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m\varphi_1\\m\varphi_2\\m\varphi_3\\m\varphi_4\end{pmatrix}\frac{-1}{2}\theta\left[H^2\eta\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4\end{pmatrix}\right]$$

$$\frac{-i}{2}\theta H\left[-iH\eta\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_2\\\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}-iH\eta\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\frac{iH}{2}\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\\widetilde{\partial}_1\varphi_2\\\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\m\widetilde{\partial}_1\varphi_2\\m\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\m\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}\right]=0$$

يمكن أن نبسط العبارات على النحو التالي :

$$-iH\eta\begin{pmatrix}2\partial_\eta\varphi_1\\0\\0\\-2\partial_\eta\varphi_4\end{pmatrix}-iH\eta\begin{pmatrix}-\widetilde{\partial}_1\varphi_2-\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1\varphi_1-\widetilde{\partial}_1\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1\varphi_1-\widetilde{\partial}_1\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1\varphi_2+\widetilde{\partial}_1\varphi_3\end{pmatrix}+\frac{i}{2}H\begin{pmatrix}-2&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m\varphi_1\\m\varphi_2\\m\varphi_3\\m\varphi_4\end{pmatrix}$$

$$\frac{-1}{2}\theta\left[H^2\eta\begin{pmatrix}-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2+\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3\end{pmatrix}\right]\frac{-i}{2}\theta H\left[-iH\eta\begin{pmatrix}2\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\0\\0\\-2\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}-iH\eta\begin{pmatrix}-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2+\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}H\begin{pmatrix}-2&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\\widetilde{\partial}_1\varphi_2\\\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\m\widetilde{\partial}_1\varphi_2\\m\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\m\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}\right]=0$$

إذن معادلة DKP تكتب على الشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{pmatrix}-2iH\eta\partial_\eta\varphi_1+iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_2+iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_3-iH\varphi_1-iH\varphi_4-m\varphi_1\\-iH\eta(\widetilde{\partial}_1\varphi_1-\widetilde{\partial}_1\varphi_4)-m\varphi_2\\-iH\eta(\widetilde{\partial}_1\varphi_1-\widetilde{\partial}_1\varphi_4)-m\varphi_3\\2iH\eta\partial_\eta\varphi_4-iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_2-iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_3+iH\varphi_1+iH\varphi_4-m\varphi_4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\theta H\begin{pmatrix}-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4\\\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2+\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3\end{pmatrix}$$

$$\frac{-i}{2}\theta H\begin{pmatrix}-2iH\eta\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1+iH\eta\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2+iH\eta\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3-iH\widetilde{\partial}_1\varphi_1-iH\widetilde{\partial}_1\varphi_4-m\widetilde{\partial}_1\varphi_1\\-iH\eta(\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4)-m\widetilde{\partial}_1\varphi_2\\-iH\eta(\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4)-m\widetilde{\partial}_1\varphi_3\\2iH\eta\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4-iH\eta\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2-iH\eta\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3+iH\widetilde{\partial}_1\varphi_1+iH\widetilde{\partial}_1\varphi_4-m\widetilde{\partial}_1\varphi_4\end{pmatrix}=0$$

و منه يمكن كتابة جملة المعادلات التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} -2iH\eta\partial_\eta\varphi_1 + iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_2 + iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_3 - iH\varphi_1 - iH\varphi_4 - m\varphi_1 - \frac{1}{2}\theta H\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2 - \frac{1}{2}\theta H\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3 + \theta H^2\eta\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1 \\ +\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2 + \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3 - \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_1 - \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_4 + \frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_1 = 0 & \text{(II.11)} \\ -iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1 + iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4 - m\varphi_2 + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1 - \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4 - \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1 + \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4 \\ +\frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_2 = 0 & \text{(II.12)} \\ -iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1 + iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4 - m\varphi_3 + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1 - \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4 - \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1 + \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4 \\ +\frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_3 = 0 & \text{(II.13)} \\ 2iH\eta\partial_\eta\varphi_4 - iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_2 - iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_3 + iH\varphi_1 + iH\varphi_4 - m\varphi_4 + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2 + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3 + \theta H^2\eta\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4 \\ -\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2 - \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3 + \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_1 + \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_4 + \frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_4 = 0 & \text{(II.14)} \end{cases}$$

من المعادلة (II.11) نجد :

$$\begin{aligned} &-2iH\eta\partial_\eta\varphi_1 - iH\varphi_1 - m\varphi_1 + \theta H^2\eta\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1 - \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_1 + \frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_1 \\ &= -iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_2 - iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_3 + iH\varphi_4 + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2 + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3 - \frac{\theta H\eta^2}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2 - \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3 + \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_4 \end{aligned}$$

حلول الموجة المستوية $\varphi_i = e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1$ مع $i = \overline{1,4}$ معناه المعادلة (II.11) تُصبح :

$$\begin{aligned} &-2iH\eta\partial_\eta(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1) - iHe^{ikx}\widetilde{\varphi}_1 - me^{ikx}\widetilde{\varphi}_1 + \theta H^2\eta\partial_\eta\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1) - \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1) + \frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1) \\ &= -iH\eta\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_2) - iH\eta\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_3) + iHe^{ikx}\widetilde{\varphi}_4 + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_2) + \frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_3) \\ &- \frac{\theta H\eta^2}{2}\widetilde{\partial}_1^2(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_2) - \frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_3) + \frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_4) \end{aligned}$$

و منه :

$$\begin{aligned} &2iH\eta\partial_\eta\widetilde{\varphi}_1 + iH\widetilde{\varphi}_1 + m\widetilde{\varphi}_1 - i\theta H^2\eta k\partial_\eta\widetilde{\varphi}_1 + \frac{i\theta H^2k}{2}\widetilde{\varphi}_1 + \frac{\theta Hmk}{2}\widetilde{\varphi}_1 = \\ &-\underbrace{H\eta k\widetilde{\varphi}_2 - H\eta k\widetilde{\varphi}_3}_{-H\eta k(\widetilde{\varphi}_2+\widetilde{\varphi}_3)} - iH\widetilde{\varphi}_4 + \underbrace{\frac{\theta Hk^2}{2}\widetilde{\varphi}_2 + \frac{\theta Hk^2}{2}\widetilde{\varphi}_3}_{\frac{\theta Hk^2}{2}(\widetilde{\varphi}_2+\widetilde{\varphi}_3)} - \underbrace{\frac{\theta H^2\eta k^2}{2}\widetilde{\varphi}_2 - \frac{\theta H^2\eta k^2}{2}\widetilde{\varphi}_3}_{-\frac{\theta H^2\eta k^2}{2}(\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_2)} - \frac{i\theta H^2k}{2}\widetilde{\varphi}_4 \end{aligned}$$

و عليه نتوصل إلى :

$$[iH\eta(2+\theta Hk)\partial_\eta+\frac{i\theta H^2k}{2}+iH+m(1+\frac{\theta Hk}{2})]\widetilde{\varphi}_1$$
$$=(\frac{\theta Hk^2}{2}-H\eta k-\frac{\theta H^2\eta k^2}{2})(\widetilde{\varphi}_2+\widetilde{\varphi}_3)-iH(1+\frac{\theta Hk}{2})\widetilde{\varphi}_4 \tag{II.15}$$

من المعادلة (II.12) نحصل على :

$$-m\varphi_2+\frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_2=iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_1-iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4-\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1+\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4+\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_1-\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_4$$

و منه :

$$-me^{ikx}\widetilde{\varphi}_2+\frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_2)=iH\eta\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1)-iH\eta\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_4)-\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1)$$
$$+\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_4)+\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1)-\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_4)$$

$$m\widetilde{\varphi}_2+\frac{\theta Hmk}{2}\widetilde{\varphi}_2=\underbrace{H\eta k\widetilde{\varphi}_1-H\eta k\widetilde{\varphi}_4}_{H\eta k(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)}\underbrace{-\frac{\theta Hk^2}{2}\widetilde{\varphi}_1+\frac{\theta Hk^2}{2}\widetilde{\varphi}_4}_{-\frac{\theta Hk^2}{2}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)}+\frac{\theta H^2\eta k^2}{2}\widetilde{\varphi}_1-\frac{\theta H^2\eta k^2}{2}\widetilde{\varphi}_4$$

و عليه نحصل على :

$$m\left(1+\frac{\theta Hk}{2}\right)\widetilde{\varphi}_2=(H\eta k-\frac{\theta Hk^2}{2}+\frac{\theta H^2\eta k^2}{2})(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4) \tag{II.16}$$

من المعادلة (II.13) يمكننا أن نكتب :

$$-me^{ikx}\widetilde{\varphi}_3+\frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_3)=iH\eta\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1)-iH\eta\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_4)-\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1)$$
$$+\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_4)+\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_1)-\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1\widetilde{\partial}_1(e^{ikx}\widetilde{\varphi}_4)$$

و بالتالي فإن :

$$m\widetilde{\varphi}_3+\frac{\theta Hkm}{2}\widetilde{\varphi}_3=\underbrace{H\eta k\widetilde{\varphi}_1-H\eta k\widetilde{\varphi}_4}_{H\eta k(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)}\underbrace{-\frac{\theta Hk^2}{2}\widetilde{\varphi}_1+\frac{\theta Hk^2}{2}\widetilde{\varphi}_4}_{-\frac{\theta Hk^2}{2}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)}+\underbrace{\frac{\theta H^2\eta k^2}{2}\widetilde{\varphi}_1-\frac{\theta H^2\eta k^2}{2}\widetilde{\varphi}_4}_{\frac{\theta H^2\eta k^2}{2}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)}$$

و عليه نتحصل على شكل المعادلة التالي :

$$m\left(1+\frac{\theta Hk}{2}\right)\widetilde{\varphi}_3=(H\eta k-\frac{\theta Hk^2}{2}+\frac{\theta H^2\eta k^2}{2})(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4) \tag{II.17}$$

من المعادلة (II.14) لدينا:

$$\begin{aligned}&2iH\eta\partial_\eta\varphi_4+iH\varphi_4-m\varphi_4+\theta H^2\eta\partial_\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_4+\frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_4+\frac{i\theta Hm}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_4\\&=iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_2+iH\eta\widetilde{\partial}_1\varphi_3-iH\varphi_1-\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2-\frac{\theta H}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3+\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_2+\frac{\theta H^2\eta}{2}\widetilde{\partial}_1^2\varphi_3-\frac{\theta H^2}{2}\widetilde{\partial}_1\varphi_1\end{aligned}$$

بتعويض عبارة الموجة المستوية يمكن أن نكتب المعادلة السابقة على الشكل التالي :

$$\begin{aligned}&[iH\eta(2+\theta Hk)\partial_\eta+\frac{i\theta H^2k}{2}+iH-m(1+\frac{\theta Hk}{2})]\widetilde{\varphi}_4\\&=(\frac{\theta Hk^2}{2}-H\eta k-\frac{\theta H^2\eta k^2}{2})(\widetilde{\varphi}_2+\widetilde{\varphi}_3)-iH(1+\frac{\theta Hk}{2})\widetilde{\varphi}_1\end{aligned} \tag{II.18}$$

بالمطابقة بين المعادلة (II.12) و المعادلة (II.13) نجد :

$$\widetilde{\varphi}_2=\widetilde{\varphi}_3 \tag{II.19}$$

نعوض المعادلة (II.19) في المعادلة (II.11) فنتحصل على :

$$[iH\eta(2+\theta Hk)\partial_\eta+\underbrace{\frac{i\theta H^2k}{2}+iH}_{iH(1+\frac{\theta Hk}{2})}+m(1+\frac{\theta^2 Hk}{2})]\widetilde{\varphi}_1=2(\frac{\theta Hk^2}{2}-H\eta k-\frac{\theta H^2\eta k^2}{2})\widetilde{\varphi}_2-iH(1+\frac{\theta Hk}{2})\widetilde{\varphi}_4$$

لدينا :

$$\frac{1}{1-x}\simeq 1+x\qquad\Longrightarrow\qquad\theta\lll\frac{1}{(1-(-\frac{\theta Hk}{2}))}=(1-\frac{\theta Hk}{2})$$

حيث x صغير جدا .

نضرب في $\frac{1}{iH\eta\underbrace{(2+\theta H\eta)}_{2(1+\frac{\theta Hk}{2})}}$ و بعد النشر و التبسيط نجد :

$$(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2H\eta})\widetilde{\varphi}_1 = -ik(\frac{\theta k}{2\eta} - 1 - \frac{\theta Hk}{2})(1 - \frac{\theta Hk}{2})\widetilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_4$$
$$(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2H\eta})\widetilde{\varphi}_1 = -ik(\frac{\theta k}{2\eta} - 1)\widetilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_4$$

و عليه نتوصل إلى :

$$(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2H\eta})\widetilde{\varphi}_1 - ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\widetilde{\varphi}_2 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_4 = 0 \tag{II.20}$$

نعوض المعادلة (II.19) في المعادلة (II.14) و بعد النشر و التبسيط نتوصل إلى :

$$[\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2H\eta}]\widetilde{\varphi}_4 = -\frac{ik(\frac{\theta k}{2} - \eta - \frac{\theta H\eta k}{2})}{\eta(1 + \frac{\theta Hk}{2})}\widetilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_1$$

أي :

$$(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2H\eta})\widetilde{\varphi}_4 = -ik(\frac{\theta k}{2\eta} - 1 - \frac{\theta Hk}{2})(1 - \frac{\theta Hk}{2})\widetilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_1$$

و بالتالي فإن :

$$(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2H\eta})\widetilde{\varphi}_4 - ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\widetilde{\varphi}_2 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_1 = 0 \tag{II.21}$$

بضرب المعادلة (II.19) في $\frac{1}{(1+\frac{\theta Hk}{2})}$ نجد :

$$m\frac{(1 + \frac{\theta Hk}{2})}{(1 + \frac{\theta Hk}{2})}\widetilde{\varphi}_2 = \frac{(H\eta k - \frac{\theta Hk^2}{2} + \frac{\theta H^2\eta K^2}{2})}{(1 + \frac{\theta Hk}{2})}(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4)$$

إذن :

$$m\widetilde{\varphi}_2 = H\eta k\left(1 - \frac{\theta k}{2\eta}\right)(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4) \tag{II.22}$$

من المعادلتين (II.20) و (II.21) نكتب :

$$\begin{cases}(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2H\eta})\widetilde{\varphi}_1 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_4 = ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\widetilde{\varphi}_2 \\ (\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2H\eta})\widetilde{\varphi}_4 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_1 = ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\widetilde{\varphi}_2\end{cases}$$

و عليه نجد :

$$\partial_\eta(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4) = \frac{im}{2H\eta}(\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_4) \tag{II.23}$$

بجمع المعادلتين (II.20) و (II.21) نتحصل على :

$$\partial_\eta\widetilde{\varphi}_1 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_1 - \frac{im}{2H\eta}\widetilde{\varphi}_1 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_4 + \partial_\eta\widetilde{\varphi}_4 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_4 + \frac{im}{2H\eta}\widetilde{\varphi}_4 + \frac{1}{2\eta}\widetilde{\varphi}_1 = 2ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\widetilde{\varphi}_2$$

أي :

$$\partial_\eta(\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_4) + \frac{1}{\eta}(\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_4) - \frac{im}{2H\eta}(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4) = 2ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\widetilde{\varphi}_2$$

و عليه :

$$(\partial_\eta + \frac{1}{\eta})(\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_4) - \frac{im}{2H\eta}(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4) = 2ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\widetilde{\varphi}_2 \tag{II.24}$$

من المعادلة (II.22) لدينا :

$$\widetilde{\varphi}_2 = \frac{H\eta k}{m}(1 - \frac{\theta k}{2\eta})$$

نعوض في المعادلة (II.24) فنجد :

$$(\partial_\eta + \frac{1}{\eta})(\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_4) - \frac{im}{2H\eta}(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4) = 2ik(1 - \frac{\theta k}{2\eta})\frac{H\eta k}{m}(1 - \frac{\theta k}{2\eta})(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4)$$

أي :

$$(\partial_\eta + \frac{1}{\eta})(\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_4) = \frac{im}{2H\eta}(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4) + \frac{2ik^2H\eta}{m}(1 - \frac{\theta k}{\eta})(\widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_4)$$

و منه نتحصل على المعادلة التالية :

$$(\partial_\eta+\frac{1}{\eta})(\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{\varphi}_4)=[\frac{im}{2H\eta}+\frac{2ik^2H\eta}{m}(1-\frac{\theta k}{\eta})](\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4) \tag{II.25}$$

من المعادلة (II.24) لدينا :

$$\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{\varphi}_4=-\frac{2iH\eta\partial_\eta}{m}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)$$

نعوض في المعادلة (II.25) فنجد :

$$(\partial_\eta+\frac{1}{\eta})\times\frac{-2iH\eta\partial_\eta}{m}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)=[\frac{im}{2H\eta}+\frac{2iH\eta k^2}{m}(1-\frac{\theta k}{\eta})](\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)$$

و منه :

$$[\frac{im}{2H\eta}+\frac{2iH\eta}{m}k^2(1-\frac{\theta k}{\eta})+\frac{2iH\eta}{m}\partial_\eta(\partial_\eta+\frac{1}{\eta})](\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)=0$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل :

$$[\partial_\eta^2+\frac{1}{\eta}\partial_\eta+\frac{m^2}{4H^2\eta^2}+k^2(1-\frac{\theta k}{\eta})](\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)=0 \tag{II.26}$$

نأخذ التحويل $(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)=\frac{1}{\eta}B(\eta)$ و $z=2ik\eta$

$$\begin{aligned}
z=2ik\eta \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2ik}\frac{\partial}{\partial\eta}\\
\eta=\frac{1}{2ik}z \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{\eta}=\frac{2ik}{z}\\
\frac{\partial}{\partial\eta}=2ik\frac{\partial}{\partial z} \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}=(2ik)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\eta}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)&=\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{1}{\eta}B)\\
&=-\frac{1}{\eta^2}B+\frac{1}{\eta}\frac{\partial B}{\partial\eta}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)=\frac{2}{\eta^3}B-\frac{2}{\eta^2}\frac{\partial B}{\partial\eta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2B}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)+\frac{2}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)=\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2 B}{\partial\eta^2}$$

نعوض في المعادلة (II.26) فنجد :

$$\partial\eta^2(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)+\frac{2}{\eta}\partial\eta(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)+\frac{m^2}{4H^2\eta^2}(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)+k^2\left(1-\frac{\theta k}{\eta}\right)(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)=0$$

و منه :

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}B+\frac{m^2}{4H^2\eta^2}\frac{1}{\eta}B(\eta)+k^2\left(1-\frac{\theta k}{\eta}\right)\frac{1}{\eta}B(\eta)=0$$

أي أن :

$$\left[(2ik)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{m^2}{4H^2z^2}(2ik)^2+k^2\left(1-\frac{2ik\theta k}{z}\right)\right]B(z)=0$$

إذن نتحصل على :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{i}{2}+i\frac{\theta k^2}{2z}+\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{4H^2}\right)}{z^2}\right]B(z)=0 \tag{II.27}$$

هذه المعادلة من شكل معادلة $Whittaker$ [12] :

$$\left[\partial_z^2-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{z}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right]W_{\lambda,\mu}(z)=0 \tag{II.28}$$

إذن الحلول تُعطى على الشكل :

$$\begin{cases}\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4=\frac{1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta), \qquad \lambda=\frac{i\theta k^2}{2}\\ \mu=i|\mu|=i\left(\frac{m^2}{4H^2}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\end{cases} \tag{II.29}$$

من المعادلة (II.22) لدينا :

$$\widetilde{\varphi}_2=\widetilde{\varphi}_3=\frac{Hk\eta}{m}\left(1-\frac{\theta k}{2\eta}\right)\underbrace{(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)}_{\frac{1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)}$$

و منه :

$$\widetilde{\varphi}_2=\widetilde{\varphi}_3=\frac{Hk}{m}\left(1-\frac{\theta k}{2\eta}\right)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta) \tag{II.30}$$

و المعادلة (II.23) تُعطي :

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{\varphi}_4&=\frac{2H\eta}{im}\partial\eta\underbrace{(\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4)}_{\frac{1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)}\\&=\frac{(-i)2H\eta}{(-i)im}\left[-\frac{1}{\eta^2}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)+\frac{1}{\eta}\partial\eta W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)\right]\end{aligned}$$

إذن :

$$\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{\varphi}_4=\frac{2iH}{m\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-\frac{2iH}{m}\partial\eta W_{\lambda,\mu}(2ik\eta) \tag{II.31}$$

باستخدام علاقة اشتقاق دوال $Whittaker$ [12] :

$$z\partial_z W_{\lambda,\mu}(z)=(\frac{1}{2}z-\lambda)W_{\lambda,\mu}(z)-W_{\lambda+1,\mu}(z) \tag{II.32}$$

من المعادلتين (II.31) و(II.29) لدينا :

$$\begin{cases}\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4 &=\frac{1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)\\ \widetilde{\varphi}_1+\widetilde{\varphi}_4 &=\frac{2iH}{m\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-\frac{2iH}{m}\partial\eta W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)\end{cases}$$

بالجمع :

$$2\widetilde{\varphi}_1=\frac{1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)+\frac{2iH}{m\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-\frac{2iH}{m}\underbrace{\partial\eta W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)}_{\frac{1}{\eta}\left[(\frac{1}{2}\eta-\lambda)W_{\lambda,\mu}(z)-W_{\lambda+1,\mu}(z)\right]}$$

و منه :

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_1&=\frac{1}{2\eta}\left[W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)+\frac{2iH}{m}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-\frac{2iH}{m}[(\frac{1}{2}\eta-\lambda)W_{\lambda,\mu}(z)-W_{\lambda+1,\mu}(z)]\right]\\&=\frac{1}{2\eta}\left[\left(1+\frac{2iH}{m}\right)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-\frac{2iH}{m}[(ik\eta-\lambda)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-W_{\lambda+1,\mu}(2ik\eta)]\right]\end{aligned}$$

لدينا :

$$\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_4=\frac{1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)$$

و عليه فإن :

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_4&=\widetilde{\varphi}_1-\frac{1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)\\&=\frac{1}{2\eta}\left[\left(-1+\frac{2iH}{m}\right)W_{\lambda,\mu}-\frac{2iH}{m}[(ik\eta-\lambda)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-W_{\lambda+1,\mu}(2ik\eta)]\right]\end{aligned}$$

في النهاية من عبارات $\widetilde{\varphi}_1$ ، $\widetilde{\varphi}_2$ ، $\widetilde{\varphi}_3$ ، $\widetilde{\varphi}_4$ فإن الحل العام لمعادلة DKP المعطاة بالعلاقة (II.1) يُعطى على الشكل المصفوفي :

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\\widetilde{\varphi}_2\\\widetilde{\varphi}_3\\\widetilde{\varphi}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\eta}\left[\left(1+\frac{2iH}{m}\right)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-\frac{2iH}{m}((ik\eta-\lambda)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-W_{\lambda+1,\mu}(2ik\eta))\right]\\\frac{Hk}{m}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\theta k}{\eta}\right)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)\\\frac{Hk}{m}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\theta k}{\eta}\right)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)\\\frac{1}{2\eta}\left[\left(-1+\frac{2iH}{m}\right)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-\frac{2iH}{m}((ik\eta-\lambda)W_{\lambda,\mu}(2ik\eta)-W_{\lambda+1,\mu}(2ik\eta))\right]\end{pmatrix}$$

3.II كثافة خلق الجسيمات

بعد حساب حلول معادلة DKP في فضاء غير تبديلي ذو بعدين فإنه يمكننا حساب كثافة خلق الجسيمات في هذه الحالة سنستعمل طريقة معاملات بوغوليوبوف و التي تعتمد على حساب الترددات الموجبة و السالبة .
في هذه الحالة نكتب الترددات الموجبة و السالبة ، $\psi^+(z\to 0)$ و $\psi^-(z\to 0)$ على النحو التالي :

$$\psi^+(z\to 0)\approx C_0^+M_{\lambda,\mu}(z)\tag{II.33}$$

و

$$\psi^-(z\to 0)\approx C_0^+(-1)^{-\mu+1/2}M_{\lambda,-\mu}(z)\tag{II.34}$$

حيث C_0^+ هو ثابت .
دالة $Whittaker$ $M_{\lambda,\mu}(z)$ لها السلوك المقارب :

$$M_{\lambda,\mu}(z)\approx e^{-z/2}z^{\mu+1/2},\qquad z\ll 1$$

و بالمثل بالنسبة إلى $z \to \infty$ ، فإن الترددات الموجبة و السالبة هي :

$$\psi^+(z \to \infty) \approx C_\infty^+ W_{\lambda,\mu}(z) \tag{II.35}$$

و :

$$\psi^-(z \to \infty) \approx C_\infty^- W_{-\lambda,\mu}(z) \tag{II.36}$$

حيث $C_\infty^\pm$ ثوابت . الآن ، نستخدم العلاقة التالية لدوال $Whittaker$ [12] عند المالانهاية :

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-\lambda)} M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)} M_{\lambda,-\mu}(z) \tag{II.37}$$

حيث $\Gamma(z)$ هي دالة غاما و

$$(W_{-\lambda,\mu}(-z))^* = W_{\lambda,\mu}(z) \tag{II.38}$$

$$(W_{\lambda,\mu}(z))^* = M_{\lambda,-\mu}(z) \tag{II.39}$$

يمكن أن نستنتج :

$$\psi^+(z \to 0) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-\lambda)} \psi^+(z \to \infty) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)} e^{i\pi(\mu-1/2)} \psi^-(z \to \infty) \tag{II.40}$$

حسب تحويلات بوغوليوبوف فإن الدالة ذات الترددات الموجبة و السالبة تُكتب على الشكل :

$$\psi^+(z \to 0) = \alpha\psi^+(z \to 0) + \beta\psi^-(z \to \infty) \tag{II.41}$$

حيث α و β هما معاملات بوغوليوبوف .
بالمطابقة :

$$\alpha = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-\lambda)} \quad , \quad \beta = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)} e^{i\pi(\mu-1/2)} \tag{II.42}$$

حيث استخدمنا المعادلتين (II.35) و (II.36) .

خلق الجسيمات حسب طريقة معاملات بوغوليوبوف تعطى بالعبارة :

$$\hat{n} = \left[\left(\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}\right)^{-1} - 1\right]^{-1} \tag{II.43}$$

و منه :

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \frac{\frac{|\Gamma(2\mu)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)|^2}\left|e^{i\pi(\mu-1/2)}\right|}{\frac{|\Gamma(-2\mu)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-\lambda)|^2}}$$

حيث :

$$\mu = i|\mu| \quad , \quad \lambda = \frac{i\theta k^2}{2}$$

نستخدم العلاقتين التاليتين :

$$\begin{cases} |\Gamma(iz+1/2)|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi z} \\ |\Gamma(iz)|^2 = \frac{\pi}{\sinh \pi z} \end{cases}$$

و عليه :

$$\begin{aligned} |\Gamma(2\mu)|^2 &= |\Gamma(2i|\mu|)|^2 \\ &= \frac{\pi}{2|\mu| \sinh(2\pi|\mu|)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Gamma(-2\mu)|^2 &= |\Gamma(-2i|\mu|)|^2 \\ &= \frac{\pi}{-2|\mu| \sinh(2\pi|\mu|)} \end{aligned}$$

$$|\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)|^2 = |\Gamma(\frac{1}{2}+i|\mu|+i\underbrace{-\frac{\theta k^2}{2}}_{\widetilde{\lambda}})|^2$$
$$= |\Gamma(\frac{1}{2}+i(|\mu|+\widetilde{\lambda}))|^2$$
$$= \frac{\pi}{\cosh(|\mu|+\widetilde{\lambda})}$$

$$|\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-\lambda)|^2 = |\Gamma(\frac{1}{2}-i|\mu|+i\underbrace{-\frac{\theta k^2}{2}}_{\widetilde{\lambda}})|^2$$
$$= |\Gamma(\frac{1}{2}+i(-|\mu|+\widetilde{\lambda}))|^2$$
$$= \frac{\pi}{\cosh(-|\mu|+\widetilde{\lambda})}$$

$$|e^{i\pi(\mu-1/2)}|^2 = e^{-2\pi|\mu|}$$

بعد التبسيط نحصل على :

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = -\frac{\cosh\pi(|\mu|+\widetilde{\lambda})}{\cosh(-|\mu|+\widetilde{\lambda})}e^{-2\pi|\mu|}$$

4.II الخلاصة

في هذا الفصل استطعنا إيجاد حلول معادلة DKP من أجل الجسيمات الشعاعية في فضاء $de\ sitter$ ذو بعدين و هذا إطار الهندسة غير التبديلية .
من خلال هذه الحلول استطعنا باستعمال طريقة معاملات بوغوليوبوف من حساب كثافة خلق الجسيمات لسبين 1 و أثبتنا أن الهندسة غير التبديلية تساهم في خلق الجسيمات .

الفصل الثالث

معادلة كلاين–غوردن في الفضاء غير التبديلي

1.III مقدمة

في هذا الفصل نطبق مبدأ الهندسة غير التبديلية على جسيمات سلمية إنطلاقا من معادلة كلاين–غوردن غير التبديلية في وجود كمون كولوم المعدل ، ثم سنحاول في نهاية هذا الفصل حساب التصحيحات في مستويات الطاقة و هذا باستخدام نظرية الاضطراب و من ثم استخراج قيمة تجريبية لمعامل الهندسة غير التبديلية θ .

2.III معادلة كلاين–غوردن في الفضاء غير التبديلي

إن معادلة كلاين–غوردن في الهندسة غير التبديلية في وجود حقل خارجي $\hat{A}_\mu$ تُكتب على الشكل التالي [13]:

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m_e^2)\hat{\varphi} + (ie\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{A}_\nu - e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu + 2ie\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu\partial_\nu)\hat{\varphi} = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

حيث في هذه الحالة الكمون هو كمون كولوم . هذا الكمون باستعمال تطبيقات سايبارغ–ويتين يُكتب على النحو التالي [14] :

$$\hat{A}_0 = -\frac{e}{r} - \frac{e^3}{r^4}\Theta^{0k}x_k + \mathcal{O}(\Theta^2), \qquad \text{(III.2)}$$

$$\hat{A}_i = \frac{e^3}{4r^4}\Theta^{ik}x_k + \mathcal{O}(\Theta^2), \tag{III.3}$$

نختار زمان-مكان غير تبديلي أي أن $\Theta^{0k} \neq 0$ و $\Theta^{ki} = 0$، حيث $i, k = 1, 2, 3$ في هذه الحالة يمكننا التحقق من :

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \Delta, \tag{III.4}$$

و:

$$2ie\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu\partial_\nu = i\frac{2e^2}{r}\partial_0 + 2i\frac{e^4}{r^4}\Theta^{0j}x_j\partial_0, \tag{III.5}$$

و:

$$-e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu = \frac{e^4}{r^2} + 2\frac{e^6}{r^5}\Theta^{0j}x_j, \tag{III.6}$$

نعوض المعادلات (III.2) ، (III.3) ، (III.4) ، (III.5) ، (III.6) في المعادلة (III.1) نتحصل على:

$$(-\partial_0^2 + \Delta - m_e^2)\hat{\varphi} + \left[ie(\eta^{\mu 0}\partial_\mu\hat{A}_0) + \frac{e^4}{r^2} + 2\frac{e^6}{r^5}\Theta^{0j}x_j + i\frac{2e^2}{r}\partial_0 + 2i\frac{e^4}{r^4}\Theta^{0j}x_j\partial_0\right]\hat{\varphi} = 0$$

ثم تأخذ معادلة كلاين-جوردن (III.1) حتى $\mathcal{O}(\Theta^2)$ بالشكل :

$$\left[-\partial_0^2 + \Delta - m_e^2 + \frac{e^4}{r^2} + i\frac{2e^2}{r}\partial_0 + 2i\frac{e^4}{r^4}\Theta^{0j}x_j\partial_0 + 2\frac{e^6}{r^5}\Theta^{0j}x_j\right]\hat{\varphi} = 0 \tag{III.7}$$

حل المعادلة (III.7) في الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) يأخذ الشكل القابل الفصل :

$$\hat{\varphi}(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{r}\hat{R}(r)\hat{Y}_l^m(\theta, \phi)\exp(-iEt) \tag{III.8}$$

إذن المعادلة (III.7) تُكتب على الشكل :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1) - e^2}{r^2} + \frac{2Ee^2}{r} + E^2 - m_e^2 + 2E\frac{e^4}{r^4}\Theta^{0j}x_j + 2\frac{e^6}{r^5}\Theta^{0j}x_j\right]\hat{R}(r) = 0 \tag{III.9}$$

نعتبر الحدود التي تحتوي على المعامل Θ كحدود اضطراب . إذن في حل المعادلة التفاضلية من أجل Θ^{0j} معروف و انطلاقا من المعادلة (III.9) فإن هاميلتوني الاضطراب يُعطى كما يلي [15] :

$$H_{pert}^{\Theta} = 2E\frac{e^4}{r^4}\Theta^{0j}x_j + 2\frac{e^6}{r^5}\Theta^{0j}x_j \tag{III.10}$$

إن حلول المعادلة (III.10) من أجل $\Theta^{0j} = 0$ تُعطى على النحو التالي [16] :

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{a}{n+\nu+1}}\left(\frac{n!}{\Gamma(n+2\nu+2)}\right)^{1/2} x^{\nu+1}e^{-x/2}L_n^{2\nu+1}(x) \tag{III.11}$$

مع عبارة الطاقة :

$$E = E_{n,l} = \frac{m_e\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right)}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+2(n+\frac{1}{2})\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{III.12}$$

و $L_n^{2\nu+1}$ هي كثيرات حدود *Laguerre* [16] ، و المعاملات α و ν معرفة بـ :

$$\nu = -\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}, \quad \alpha = e^2, \quad \alpha = \sqrt{m_e^2-E^2} \tag{III.13}$$

1.2.III التصحيحات غير التبديلية للطاقة

الأن، من أجل حساب التصحيحات في الطاقة نستعمل نظرية الاضطرابات من الدرجة الأولى ، للتبسيط نعتبر $\Theta^{0j}x_j = \Theta r$ حيث Θ هو مقدار حقيقي موجب . في هذه الحالة فإن حدود الاضطرابات تكون من الرتبة r^{-3} و r^{-4} . إذن سنحسب ما يلي :

$$\langle nlm|r^{-3}|nlm'\rangle = \int_0^{\infty} R_{nl}^2(r)r^{-3}dr\delta_{mm'}$$

من المعادلة (III.11) نجد :

$$\langle nlm|r^{-3}|nlm'\rangle = \frac{an!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}\int_0^{\infty}(x^{\nu+1})^2e^{-x}[L_n^{2\nu+1}(x)]^2r^{-3}dr\delta_{mm'}$$

لدينا :

$$x = ar \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{x}{a} \quad \Longrightarrow \quad dr = \frac{dx}{a}$$

و منه :

$$\langle nlm|r^{-3}|nlm'\rangle = \frac{a^3 n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)} \int_0^\infty x^{2\nu-1} e^{-x} [L_n^{2\nu+1}(x)]^2 dx \delta_{mm'}$$

لدينا العلاقة بين كثيرات حدود $Laguerre$ $L_n^\nu(x)$ و الدالة $confluent\ hypergeometric$ $F(-n,\gamma,x)$

$$L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+1)} F(-n,\nu+1,x)$$

و عليه فإن :

$$\begin{aligned}\langle nlm|r^{-3}|nlm'\rangle &= \frac{a^3 n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)} \left[\frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu+2)}\right]^2 \\ &\times \int_0^\infty x^{2\nu-1} e^{-x} [F(-n,2\nu+2,x)]^2 dx \delta_{mm'}\end{aligned}$$

لدينا التكامل التالي :

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} [F(-n;\gamma;x)]^2 dx \delta_{mm'} \\ &= \frac{n!\Gamma(\nu)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \left\{1 + \frac{n(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)}{1^2\gamma} + \right. \\ &\frac{n(n-1)(\gamma-\nu-2)(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)(\gamma-\nu+1)}{1^2 2^2 \gamma(\gamma+1)} + \cdots \\ &\left. + \frac{n(n-1)\cdots 1(\gamma-\nu-n)\cdots(\gamma-\nu+n-1)}{1^2 2^2 n^2 \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \right\}\end{aligned} \tag{III.14}$$

و منه :

$$\langle nlm|r^{-3}|nlm'\rangle = \frac{a^3 n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}\left[\frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu+2)}\right]^2 \times\frac{n!\Gamma(2\nu)}{(2\nu+2)(2\nu+3)\cdots(2\nu+n+1)}\left\{1+\frac{n}{\nu+1}\right\}$$

و عليه فإن :

$$\langle nlm|r^{-3}|nlm'\rangle = \frac{2a^3}{\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)}\{1+\frac{n}{\nu+1}\}\delta_{mm'} = f(3) \tag{III.15}$$

و بنفس الطريقة نحسب القيمة المتوسطة لـ $1/r^4$:

$$\langle nlm|r^{-4}|nlm'\rangle = \int_0^\infty R^2(r)r^{-4}dr\delta_{mm'} \tag{III.16}$$

و منه :

$$\langle nlm|r^{-4}|nlm'\rangle = \frac{a^4 n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}\left[\frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu+2)}\right]^2 \times\int_0^\infty x^{2\nu-2}e^{-x}[F(-n;2\nu+2);x]^2dx\delta_{mm'}$$

$$\langle nlm|r^{-4}|nlm'\rangle = \frac{a^4 n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}\left[\frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu+2)}\right]^2 \times\left\{1+\frac{3}{\nu+1}+\frac{3n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(3-n)\cdots(2+n)}{4n^2(2\nu+2)(2\nu+3)\cdots(2\nu+n+1)}\right\} \times\frac{n!\Gamma(2\nu-1)}{(2\nu+2)(2\nu+3)\cdots(2\nu+n+1)}$$

إذن :

$$\langle nlm|r^{-4}|nlm'\rangle = \frac{4a^2}{(2\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)}\left[1+\frac{3n}{(\nu+1)} +\frac{3n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right]\delta_{mm'} = f(4) \tag{III.17}$$

الآن تصحيح الطاقة من الدرجة الأولى في Θ هو :

$$\Delta E^{\Theta(1)} = \langle \psi^0_{nlm} | H^{\Theta(1)}_{pert} | \psi^0_{nlm} \rangle \tag{III.18}$$

حيث $H^{\Theta(1)}_{pert}$ هو التصحيح غير التبادلي من الدرجة الأولى لـ Θ للهاميلتوني ، والذي يُعطى في العلاقة التالية :

$$H^{\Theta(1)}_{pert} = 2E\frac{e^4}{r^3}\Theta + 2\frac{e^6}{r^4}\Theta \tag{III.19}$$

إذن طاقة التصحيح تُكتب كما يلي :

$$\Delta E^{\Theta(1)} = 2\Theta\alpha^2(E^0_{n,l}f(3) + \alpha f(4))$$

حيث E^0_{nl} مُعرف بالعبارة (III.12).

إن عبارة التصحيح في الطاقة تتعلق بالعدد الكمي l مما يسمح بإزالة التوالد في بعض مستويات الطاقة

$$\Delta E^{NC}_{1S} = \Theta\alpha^2\left(f_{1S}(3) + \frac{\alpha}{E^0_{1,0}}f_{1S}(4)\right) \tag{III.20}$$

2.2.III النهاية غير النسبية

النهاية غير النسبية لمعادلة KG تُكتب انطلاقا من المعادلة (III.7) على الشكل [17, 18] :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m_e e^2}{r} + 2m_e\epsilon + 2m_e\frac{e^4}{r^3}\Theta + 2\frac{e^6}{r^4}\Theta\right]\hat{R}(r) = 0 \tag{III.21}$$

في هذه الحالة و بنفس الطريقة السابقة سنستعمل نظرية الاضطرابات من الدرجة الأولى .

حلول المعادلة التفاضلية (III.21) من أجل $\Theta = 0$ تُعطى بالحل المعروف :

$$\epsilon_n = -\frac{m_e\alpha^2}{2\hbar^2 n^2} \tag{III.22}$$

و

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{n}\left(\frac{(n-l-1)!}{a(n+l)!}\right)^{1/2} x^{l+1}e^{-x/2}L^{2l+1}_{n-l-1}(x), \qquad x = \frac{2}{an}r \tag{III.23}$$

حيث $a = \hbar^2/(m_e\alpha)$ هو نصف قطر بور لذرة الهيدروجين . حد الاضطراب في هذه الحالة هو :

$$H^{\Theta}_{pert} = 2\Theta\alpha^2\left(\frac{m_e}{r^3} + \frac{\alpha}{r^4}\right) + \mathcal{O}(\Theta^2) \tag{III.24}$$

حيث تكون القيم المتوسطة لـ $1/r^3$ و $1/r^4$ و بنفس الحساب السابق :

$$\langle nlm|r^3|nlm'\rangle = \frac{2}{a^3n^3l(l+1)(2l+1)}\delta_{mm'} = g(3) \tag{III.25}$$

$$\begin{aligned}\langle nlm|r^3|nlm'\rangle = &\left[\frac{4(3n^2 - l(l+1))}{a^4n^5l(l+1)(2l-1)(2l+1)(2l+3)}\right.\\ &\left.+\frac{35(3n^2 - l(l+1))}{3(l-1)(l+2)(2l-1)(2l+1)(2l+3)}\right]\delta_{mm'} = g(4)\end{aligned} \tag{III.26}$$

و من ثم فإن التصحيح في الطاقة يُعطى بـ :

$$\Delta E^{NC} = \Theta\alpha^2\left[g(3) + \frac{\alpha}{m_e}g(4)\right] + \mathcal{O}(\Theta^2) \tag{III.27}$$

يمكننا أيضا حساب التصحيح من أجل المستوى $2P$:

$$\Delta E^{NC}_{2P} = 0.243156\Theta(MeV)^3 \tag{III.28}$$

حسب القيم التجريبية فإن التردد لمستوى الطاقة $2P$ هو $0.08kHz$ [19] . من هذه القيمة يمكننا استنتاج قيمة تقريبية للمعامل Θ وهي :

$$\Theta \simeq 8.5(TeV)^{-2} \tag{III.29}$$

هذه القيمة تتوافق مع القيم المتحصل عليها في المراجع [20, 21] .

III.3 الخلاصة

في هذا الفصل طبقنا مبدأ الهندسة غير التبديلية على معادلة كلاين-غوردن في وجود حقل كولوم ، و اخترنا الدراسة في فضاء (زمان-مكان) غير تبديلي و تحصلنا باستعمال نظرية الإضطرابات من الدرجة الأولى على تصحيحات في الطاقة . بمقارنة هذه الطاقة مع القيم التجريبية استطعنا الحصول على قيمة تقريبية لمعامل الهندسة غير التبديلية و كانت النتيجة في حدود $\Theta \simeq 8.5(TeV)^{-2}$.

خاتمة عامة

في هذه المذكرة قمنا بتطبيق مفاهيم الهندسة غير التبديلية على دراسة جسيمات سلمية و أخرى شعاعية.
طبقنا هذه النظرية على حقل DKP في حالة جسيمات شعاعية في فضاء منحني $de\ sitter$ ذو بعد مكاني واحد.و تمكنا بعد حسابات رياضية وبعض التحويلات من إيجاد حلول تحليلية، باستعمال طريقة معاملات بوغوليوبوف فإن الحلول السابقة مكنتنا من حساب كثافة احتمال خلق الجسيمات والتي بينت أن للهندسة غير التبديلية دور كبير في عملية إنشاء الجسيمات.
درسنا أيضا حقل جسيمات سلمية في كمون كولوم وباستعمال نظرية الاظطرابات من الدرجة الأولى تمكنا من إيجاد تصحيحات في الطاقة ، هذه النتيجة النهائية وبأخذ عين الإعتبار للقيم التجريبية فإننا تمكنا من إيجاد قيمة تقريبية لمعامل الهندسة غير التبديلية .حيث نلاحظ أن تطبيق المفاهيم السابقة يمكن من أجل الطاقات العالية فقط.

قائمة المراجع

[1] Werner Heisenberg. Quantum-theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical rela- tions. Z. Phys, 33:879, 1925.

[2] P. A. M Dirac. The fundamental equations of quantum mechanics. Proc. R. Soc. Lond. A, 109:642, 1925.

[3] Max Born, Werner Heisenberg, and Pasqual Jordan. On quantum mechanics ii. Z. Phys, 35:557, 1926.

[4] Nikita A Nekrasov. Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories. arXiv preprint hep-th/0011095, 2000.

[5] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. JHEP, 9909:032, 1999.

[6] R. Casana, V. Y. Fainberg, B. M. Pimentel and J. S. Valverde, Phys. Lett. A 316, 33 (2003).

[7] L. B. Castro, Eur. Phys. J. C 75, 287 (2015).

[8] S. Haouat and R. Chekireb, Eur. Phys. J. C 72, 2034 (2012).

[9] V. M. Villalba, Phys. Rev. D 52, 3742 (1995).

[10] M. Achour, L. Khodja, and S. Zaim, Int. J. Mod. Phys. A 34 (2019), 1950082.

[11] A. J. Laub, Matrix Analysis for Scientists and Engineers (SIAM, PA, 2005), Chap. 13.

[12] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Function (Dover, New York, 1974).

[13] S. Zaim, L. Khodja, and Y. Delenda, IJMPA 23 (2011), 4133.

[14] V. Stern, Phys. Rev. Lett. 100 (2008), 061601.

[15] S. Zaim and Y. Delenda, J. Phys. Conf. Ser. 435 (2013), 012020.

[16] A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov, Special Functions of Mathematical Physics. Basel, Birkhauser, 1988.

[17] M.R. Setareand and O. Hatami, Commun. Theor. Phys. (Beijing) 51 (2009), 1000.

[18] S. Zaim, L. Khodja, and Y. Delenda, Int. J. Mod. Phys. A 26 (2011), 4133.

[19] C. Itzykson and J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, Dover Publications, New York, 2005.

[20] M. Chaichian, M.M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. 86 (2001), 2716.

[21] M. Chaichian, M.M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. 86 (2001), 2716.

[22] I. Mocioiu, M. Pospelov, and R. Roiban, Phys. Lett. B 489 (2000), 390.

مُلخص

في هذه المذكرة قدمنا مفاهيم عامة عن الهندسة غير التبديلية ثم قمنا بتطبيقها على الحالات الفيزيائية التالية :

- حقل DKP ذو سبين 1 في فضاء *de sitter* ذو بعدين واستطعنا إيجاد الحلول و حساب كثافة خلق الجسيمات.
- معادلة كلاين–غوردن في وجود حقل كولوم و باستعمال نظرية الإضطرابات استطعنا حساب التصحيحات في الطاقة و إيجاد قيمة تقريبية لـ Θ .

الكلمات المفتاحية : الهندسة غير التبديلية ، معادلة DKP ، معادلة كلاين–غوردن ، خلق الجسيمات .

Résumé

Dans ce mémoire , on a presenté le formalisme de la géométrique non-commutative , et on l'a appliqué sur les cas suivants :

- Champ de DKP (spin 1) un dimentionnel dans un de sitter , et nous avons obtenue des solutions analytiques et nous avons calculé la densité de création des particules .
- Equation de Klein-Gordon dans un champ de coulomb .

En utilisant la théorie des perturbation an 1^{er} er ordre , nous avons calculé les corrections d'énergie et nous avons trouvé une valeur approximative de Θ

Mots-clés : Géométrie noncommutative ; Equation de DKP ; Equation de Klein-Gordon ; Création des particules .

Abstract

In this memorandum , we have presented the noncommutative geometry formalism , and we have applied it in the following cases :

- DKP field (spin 1) in unidementional de sitter space , we have obtained analytical solutions and we have calculated the density of created paticles.

– Klein-Gordon equation with coulomb potential . By the use of perturbation theory at first order , we have calculated energy corrections and we have shown an approximate value of Θ.

Keywords: Noncommutative geometry ; DKP equation ; Klein-Gordon equation ; Particle creation .