

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

---

---

MASTER  
EN  
MATHÉMATIQUES

OPTION  
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

INTITULÉ

Représentations de groupes de surfaces

PAR  
Zineb MAZOUZI

Devant le jury :

Mohamed BOUSSAID	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Mohamed Tayeb BENMOUSSA	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mohamed Amine BAHAYOU	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

Soutenu publiquement le : 01-10-2020

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mon cher père **Ahmed** qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui et qui m'a toujours encouragé et m'a soutenu durant les années d'étude. Que Dieu le garde et le protège.

Ma chère mère **Khadra**, la lumière de ma vie qui m'a entouré d'amour et d'affection. Sa présence a toujours été la source de force pour ma réussite. Que Dieu la garde et la protège.

À tous mes frères : **Mohamed Tayeb, Abd El Hakim, Mouhieddine, Adel**, mes sœurs : **Safia et Mebarka.**

À mon encadreur **Monsieur Mohamed Amine Bahayou.**

À mes chères amies.

À tous mes profs.

Zineb Mazouzi.

## Remerciements

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur **Mohamed Amine Bahayou**, directeur de mémoire, de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et d'avoir encadré ce travail avec beaucoup de compétence. Je le remercie infiniment d'avoir toujours été présent par son aide, ses précieux conseils, ses encouragements et sa gentillesse.

Je voudrais remercier également : Monsieur **Mohamed Boussaid** pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Mes remerciements vont aussi à Monsieur **Mohamed Tayeb Benmoussa** d'avoir accepté d'examiner et de juger ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Yassine Guerboussa** et à tous mes profs.

Un grand merci à mes parents, mes frères et mes sœurs.



# Table des figures

# Introduction

Considérons une surface fermée orientée  $S$  de groupe fondamental  $\pi$  et soit  $G$  un groupe de Lie connexe. L'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  constitué de représentations  $\rho : \pi \rightarrow G$  (muni de la topologie compacte-ouverte) est une variété avec éventuellement des singularités (c'est une variété algébrique si  $G$  est un groupe algébrique). Il existe une action canonique de  $G$  sur  $\text{Hom}(\pi, G)$  obtenue par composition des représentations avec des automorphismes intérieurs de  $G$ .

Sous des conditions assez générales sur  $G$  (par exemple, s'il est réductif)  $\text{Hom}(\pi, G)/G$  admet de manière naturelle une structure symplectique. L'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  est généralement une variété algébrique singulière et l'action de  $G$  sur  $\text{Hom}(\pi, G)$  rend le quotient  $\text{Hom}(\pi, G)/G$  encore plus singulier. Les points simples de  $\text{Hom}(\pi, G)$  sont les représentations dont les images ont des centralisateurs de dimension minimale et on peut montrer que  $G$  agit librement sur ces points. Le quotient  $\text{Hom}(\pi, G)^-/G$  est une variété symplectique (éventuellement non séparée).

La motivation principale à l'étude de ces espaces de module trouve son origine dans un article de Atiyah et Bott [1]. Considérons l'espace  $\mathcal{A}$  des connexions sur un fibré vectoriel au dessus d'une surface de Riemann  $S$ .  $\mathcal{A}$  est un espace affine de dimension infinie et possède une forme symplectique à coefficients constants. De plus, l'action du groupe de jauge  $\mathcal{G}$  est hamiltonienne dont l'application moment associée à toute connexion  $A$  sa courbure  $F_A$ . Par conséquent, le quotient symplectique  $\mathcal{A} // \mathcal{G}$  est (formellement) l'espace des modules des connexions plates.

Les Théorèmes qui nous intéressent, s'énoncent comme suit :

## Structure de l'espace des représentations

- $\text{Hom}(\pi, G)$  est muni de la topologie compacte-ouverte. Si  $G$  est un groupe algébrique alors  $\text{Hom}(\pi, G)$  est une variété algébrique (singulière, en général).
- Les points réguliers de  $\text{Hom}(\pi, G)$ , sont les représentations dont les images ont des centralisateurs égaux au centre de  $G$ .

## Structure symplectique

Si  $G$  est un groupe de Lie réductif, alors le quotient des points réguliers  $\text{Hom}(\pi, G)^-$  par  $G$  est une variété symplectique (éventuellement, non séparée).

## Théorème d'isomorphisme

Il y a une bijection naturelle entre l'espace de modules des connexions plates  $\mathcal{A}_p // \mathcal{G}$  (modulo l'action du groupe de jauge) et la variété des caractères  $\text{Hom}(\pi, G)/G$

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre de généralités sur les structures symplectiques, sur la notion d'application moment et sur la réduction symplectique.
2. Deuxième chapitre, consacré à l'étude de la structure géométrique de l'espace des représentations d'un groupe de surface à valeur dans un groupe, ainsi qu'à l'étude de l'espace de modules associé.
3. Une annexe qui regroupe des notions de géométrie algébrique, de topologie et éléments de cohomologie des groupes et des algèbres de Lie; notions nécessaires à l'étude de l'espace de modules associé à un groupe de surface.

Nous terminons par une petite bibliographie de la littérature qui traite ce thème plus en détail.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Éléments de géométrie symplectique</b>	<b>7</b>
1.1	Variétés symplectiques . . . . .	8
1.2	Structures de Poisson . . . . .	11
1.3	Application moment . . . . .	14
1.4	Réduction symplectique . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Représentations de groupes de surfaces</b>	<b>21</b>
2.1	Structure topologique et géométrie . . . . .	21
2.2	Structure symplectique de l'espace de modules . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Annexe</b>	<b>31</b>
3.1	Structure de variété algébrique . . . . .	31
3.1.1	Groupe algébrique . . . . .	32
3.2	Fibrés et connexions . . . . .	33
3.3	Holonomie et connexions . . . . .	39
3.3.1	Espace de modules des connexions plates . . . . .	40
3.4	Cohomologie des groupes et des algèbres de Lie . . . . .	42

# Éléments de géométrie symplectique



Ce premier chapitre est une introduction à la géométrie symplectique. La référence principale est [7].

## Espaces vectoriels symplectiques

Soit  $V$  un espace vectoriel. Une forme *symplectique* sur  $V$  est la donnée d'une forme bilinéaire et antisymétrique  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  qui soit non dégénérée, i.e.

$$\ker \omega = \{x \in V, \omega(x, y) = 0, \forall y \in V\} \text{ est trivial.}$$

On dit alors que le couple  $(V, \omega)$  est un espace vectoriel symplectique.

**Exemple.** Le plan  $\mathbb{R}^2$  muni du déterminant  $\omega(x, y) = \det(x, y)$ . Plus généralement,  $\mathbb{R}^{2n}$  et

$$\omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{n+i}^*$$

où  $e_1^*, \dots, e_{2n}^*$  est la base duale de la base canonique.

### Symplectomorphisme

Un isomorphisme linéaire  $L : (V_1, \omega_1) \rightarrow (V_2, \omega_2)$  entre deux espaces vectoriels symplectiques est un *symplectomorphisme* si  $L^* \omega_2 = \omega_1$ . En d'autre terme, si pour tout  $x, y \in V_1$

$$\omega_2(L(x), L(y)) = \omega_1(x, y).$$

Le groupe symplectique d'un espace vectoriel symplectique  $(V, \omega)$  est le groupe de Lie :

$$\text{Sp}(V, \omega) = \{L : (V, \omega) \rightarrow (V, \omega), \text{ isomorphisme linéaire avec } L^* \omega = \omega\}.$$

**Exemple.** Pour le plan  $\mathbb{R}^2$  muni de la forme symplectique  $\omega = \det$ , toute application linéaire  $L$  qui conserve (i.e.  $\det L = 1$ ) est un symplectomorphisme. En effet,  $L^* \omega = (\det L) \omega = \omega$ .



## Sous espaces particuliers

Soient  $(V, \omega)$  un espace vectoriel symplectique et  $E$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . L'orthogonal symplectique de  $E$  est le sous-espace vectoriel :

$$E^\omega = \{x \in V, \omega(x, y) = 0, \forall y \in E\}.$$

On a les propriétés suivantes :

- $\dim V = \dim E + \dim E^\omega$ .
- $(E^\omega)^\omega = E$ .
- $(E + F)^\omega = E^\omega \cap F^\omega$ .

On dit que  $E$  est

- *Isotrope*, si  $E \subset E^\omega$ .
- *Co-isotrope*, si  $E^\omega \subset E$ .
- *Lagrangien*, si  $E = E^\omega$ .
- *Symplectique*, si  $E \cap E^\omega = \{0\}$ .

Tout sous-espace vectoriel de dimension 1 est isotrope. En effet, Si  $E = \langle v \rangle$  alors pour tout  $x, y \in E$ ,

$$\omega(x, y) = \omega(\alpha v, \beta v) = \alpha\beta \omega(v, v) = 0,$$

ce qui veut dire que  $E \subset E^\omega$ .

**Proposition 1.** *Tout espace vectoriel symplectique est de dimension paire.*

Pour cela, il suffit de montrer l'existence d'un sous-espace lagrangien. En effet, Soit  $L$  un sous-espace isotrope maximal (n'est pas contenu dans un sous-espace vectoriel isotrope de dimension strictement plus grande). Alors  $L = L^\omega$  sinon, s'il existe  $x \in L^\omega \setminus L$  alors  $L \oplus \langle x \rangle$  est isotrope, puisque

$$L \oplus \langle x \rangle \subset L^\omega \cap \langle x \rangle^\omega = (L \oplus \langle x \rangle)^\omega.$$

$L$  est donc lagrangien et  $\dim V = 2 \dim L$ .

## 1.1 Variétés symplectiques

Une variété symplectique est la donnée d'un couple  $(M, \omega)$  où  $M$  est une variété différentielle et  $\omega$  est une 2-forme différentielle sur  $M$  qui est

- fermée, i.e.  $d\omega = 0$ .
- non dégénérée, i.e. l'application

$$\begin{aligned} \omega_\# : \mathcal{X}(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ X &\mapsto i_X \omega \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Dans ce qui suit  $(M, \omega)$  désignera toujours une variété symplectique.

### Remarques.

1. Toute variété symplectique est de dimension paire, car l'espace tangent en n'importe quel point est un espace vectoriel symplectique.
2. Toute variété symplectique est orientable. En effet, si  $\dim M = 2n$  alors  $\mu = \wedge^n \omega$  ( $n$ -fois le produit extérieur de la forme symplectique) est une forme volume.

### Exemples.

1.  $\mathbb{R}^{2n}$  avec  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$ . Plus généralement, toute variété symplectique de dimension  $2n$  est localement isomorphe à la variété ci-dessus (Théorème de Darboux).
2. Le fibré cotangent  $T^*M$ , d'une variété différentielle  $M$ , est munie d'une structure symplectique canonique.
3. Une surface  $S$  possède une structure symplectique si, et seulement si, elle est orientable. En effet, une 2-forme sur  $S$  est non dégénérée si, et seulement si, elle ne s'annule jamais.
4. La sphère  $S^2$  est la seule sphère (de dimension non nulle) qui possède une structure symplectique. Plus généralement, une variété compacte  $M$  (de dimension  $2n$ ) qui possède une structure symplectique doit avoir  $H^{2k}(M) \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , ( $\wedge^k \omega$  ne peut être exacte, grâce au Théorème de Stokes).
5. Les orbites de l'action co-Adjointe d'un groupe de Lie  $G$  sur  $\mathfrak{g}^*$ , (le dual de son algèbre de Lie), sont des variétés « canoniquement » symplectiques. Plus généralement, toute variété de Poisson est partitionnée en sous-variétés symplectiques.

**Définition 1.1.** Soit  $f : (M, \omega) \rightarrow (N, \Omega)$  un difféomorphisme entre deux variétés symplectiques. On dit que  $f$  est un symplectomorphisme si

$$f^* \Omega = \omega$$

c'est-à-dire, pour tout  $x \in M$  et pour tout  $u, v \in T_x M$  on a :

$$\Omega_{f(x)}(D_x f(u), D_x f(v)) = \omega_x(u, v).$$

## Champs symplectiques et champs hamiltoniens

On peut générer des symplectomorphismes, à partir de champs de vecteurs dits *symplectiques*.

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est dit symplectique si la 1-forme différentielle  $i_X \omega$  est fermée.

**Remarque.** Le flot d'un champ symplectique est un symplectomorphisme.

*Démonstration.* En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp tX)^* \omega &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\exp(t+s)X)^* \omega = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\exp tX)^* ((\exp sX)^* \omega) \\ &= (\exp tX)^* \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\exp sX)^* \omega \right) = (\exp tX)^* (\mathcal{L}_X \omega) \end{aligned}$$

et donc

$$d(i_X \omega) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_X \omega = 0 \Leftrightarrow (\exp tX)^* \omega = \omega.$$

□

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est dit *hamiltonien* si la 1-forme différentielle  $i_X \omega$  est exacte.

Comme  $\omega$  est non dégénérée, pour toute fonction  $f \in C^\infty(M)$ , il existe un seul champ de vecteurs  $X_f$  dit *champ hamiltonien* associé à  $f$  vérifiant :

$$i_{X_f} \omega = df.$$

Notons par  $\mathcal{X}_{\text{sym}}(M)$  (respectivement,  $\mathcal{X}_{\text{ham}}(M)$ ) l'espace vectoriel des champs de vecteurs symplectiques (respectivement, hamiltoniens).

**Proposition 2.**  $\mathcal{X}_{\text{sym}}(M)$  et  $\mathcal{X}_{\text{ham}}(M)$  sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs. Par ailleurs, le crochet de deux champs symplectiques et un champ hamiltonien.

*Démonstration.* Pour tout champs de vecteurs symplectiques  $X$  et  $Y$  on a :

$$i_{[X,Y]} \omega = \mathcal{L}_X (i_Y \omega) - i_Y (\mathcal{L}_X \omega) = i_X d(i_Y \omega) + di_X (i_Y \omega) = d(\omega(X, Y)),$$

i.e.  $[X, Y]$  est le champ hamiltonien associé à la fonction  $\omega(Y, X)$ . □

**Exemple.** Pour  $\mathbb{R}^2$  et  $\omega = dx \wedge dy$ , les champs  $X = \partial_x$  et  $Y = -y\partial_x + x\partial_y$  sont hamiltoniens (associés aux fonctions  $y$  et  $-\frac{x^2+y^2}{2}$  respectivement). Les flots associés sont, respectivement, la translation de vecteur  $v = (1, 0)$  et la rotation d'angle  $t$  centrée en  $(0, 0)$ . Ce sont bien des symplectomorphismes.

## Action de groupes

Soit  $G$  un groupe de Lie, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Une action de  $G$  sur  $M$  est dite *symplectique* si pour tout  $g \in G$ , l'application

$$\begin{aligned} \psi_g : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est un symplectomorphisme.

Pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$  on associe le champ de vecteurs sur  $M$ , dit *champ fondamental* :

$$X_\xi(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp t\xi \cdot x$$

**Remarque.** L'action du groupe est symplectique si, et seulement si, pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ , la 1-forme différentielle  $i_{X_\xi}\omega$  est fermée. En d'autre terme, si tout champ fondamental est symplectique.

Une action d'un groupe de Lie  $G$  sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  est dite *hamiltonienne* si les champs fondamentaux sont des champs hamiltoniens, c'est-à-dire pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ , la 1-forme  $i_{X_\xi}\omega$  est exacte.

**Remarque.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Si  $H^1(M) = 0$  (en particulier, si  $M$  est simplement connexe), alors toute action symplectique sur  $M$  est hamiltonienne.

## 1.2 Structures de Poisson

Un *crochet de Poisson* sur une variété différentiable  $M$  est une application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $\{, \}$  sur l'algèbre  $C^\infty(M)$  des fonctions lisses sur  $M$  vérifiant

(i) L'antisymétrie

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \text{pour tout } f, g \in C^\infty(M).$$

(ii) La règle de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}, \quad \text{pour tout } f, g, h \in C^\infty(M).$$

(iii) L'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad \text{pour tout } f, g, h \in C^\infty(M).$$

Une variété munie d'un crochet de Poisson est appelée *variété de Poisson*.

Soient  $(M, \{, \})$  une variété de Poisson et  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ . Le crochet de Poisson fait de  $\mathcal{A}$  une algèbre de Lie. La règle de Leibniz implique, pour toute fonction lisse  $f$  sur  $M$ , que l'application linéaire  $g \mapsto \{f, g\}$  est une dérivation de  $\mathcal{A}$ . À chaque fonction  $f$  correspond un champ de vecteurs  $X_f$ , appelé l'hamiltonien de  $f$ , défini par  $X_f(g) = \{f, g\}$ . De l'identité de Jacobi on déduit également que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}. \quad (1.1)$$

Autrement dit, l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs  $(\mathfrak{X}(M), [, ])$  et l'application  $f \mapsto X_f$  définit un homomorphisme d'algèbres de Lie de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathfrak{X}(M)$ .

Pour tout crochet  $\{, \}$ , sur l'algèbre des fonctions d'une variété différentielle  $M$ , bilinéaire, antisymétrique qui vérifie l'identité de Leibniz, est associé un unique tenseur 2-fois contra-variant antisymétrique, noté  $\pi$ , tel que

$$\{f, g\} = \pi(df, dg). \quad (1.2)$$

Si de plus  $\{, \}$  vérifie l'identité de Jacobi,  $\pi$  est appelé *tenseur de Poisson* de  $M$ .

En coordonnées locales  $(U, x_1, \dots, x_n)$  un tel tenseur s'écrit :

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{ij} \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \pi_{ij} \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j},$$

où les  $\pi_{ij}$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $U$ , tel que  $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$ .  
L'identité de Jacobi pour  $\{, \}$  est équivalente à la condition :

$$\oint_{jkl} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi_{kl}}{\partial x_i} \pi_{ij} = 0, \quad \text{pour tout } j, k, \ell = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

où  $\oint_{jkl} a_{jkl}$  dénote la somme circulaire  $a_{jkl} + a_{k\ell j} + a_{\ell jk}$ . En effet, compte tenu de (1.2), le jacobiateur

$$J(f, g, h) = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\},$$

est égal à

$$J(f, g, h) = \sum_{j,k,\ell} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \pi_{kl}}{\partial x_i} \pi_{ij} + \frac{\partial \pi_{\ell j}}{\partial x_i} \pi_{ik} + \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_i} \pi_{i\ell} \right) \right] \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right).$$

Notons  $\mathfrak{X}^k(M)$  l'ensemble des champs de multivecteurs de degré  $k$ , avec

$$\mathfrak{X}^0(M) = C^\infty(M), \quad \mathfrak{X}^1(M) = \mathfrak{X}(M) \text{ et } \mathfrak{X}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \mathfrak{X}^k(M).$$

On peut définir les structures de Poisson grâce au crochet de Schouten [?], qui est l'unique extension du crochet de Lie à l'espace des champs de multivecteurs  $\mathfrak{X}^*(M)$ , caractérisé par

1.  $[P, Q] \in \mathfrak{X}^{p+q-1}(M)$ ,
2.  $[f, g] = 0$  et  $[X, P] = \mathcal{L}_X P$ ,
3.  $[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P]$ ,
4.  $[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]$ ,
5.  $(-1)^{(p-1)(r-1)} [P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)} [Q, [R, P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)} [R, [P, Q]] = 0$ ,

pour  $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$ ,  $R \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  et  $f, g \in C^\infty(M)$ .

Une autre définition équivalente du crochet de Schouten, due à Lichnerowicz, est donnée par la proposition suivante <sup>1</sup>

**Proposition 3.** Pour tout  $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$  et  $\omega \in \Omega^{p+q-1}(M)$ .

$$\langle \omega, [P, Q] \rangle = (-1)^{(p-1)(q-1)} \langle d(i_Q \omega), P \rangle - \langle d(i_P \omega), Q \rangle + (-1)^p \langle d\omega, P \wedge Q \rangle. \quad (1.4)$$

*Démonstration.* Voir l'article de Lichnerowicz [?]. □

Il en résulte, en particulier, que le crochet de Schouten de deux champs de multivecteurs nuls en un point, est un champs de multivecteurs nul aussi en ce point.

Soit  $\pi$  un bivecteur sur une variété différentielle  $M$  et soit  $\{, \}$  le crochet associé sur  $C^\infty(M)$ , c'est-à-dire

$$\{f, g\} = \langle df \wedge dg, \pi \rangle.$$

Le Lemme suivant permet d'exprimer l'identité de Jacobi en terme du tenseur  $\pi$ .

<sup>1</sup>Cette formule a l'avantage d'être adaptée aux calculs de nature globale.

**Lemme 1.1.** *Le jacobiateur est égale à la moitié du crochet de Schouten de  $\pi$  par lui même, c'est-à-dire pour tout  $f, g, h \in C^\infty(M)$*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = \frac{1}{2}[\pi, \pi](df, dg, dh). \quad (1.5)$$

Ceci permet de considérer le jacobiateur comme un tenseur 3-fois contravariant; donc nul sur toute variété de dimension  $\leq 2$ .

*Démonstration.* On a d'après la formule de Lichnerowicz (1.4)

$$\begin{aligned} \langle df \wedge dg \wedge dh, [\pi, \pi] \rangle &= -2 \langle d(i_\pi(df \wedge dg \wedge dh)), \pi \rangle \\ &= -2 \langle d(\{g, h\}df - \{f, h\}dg + \{f, g\}dh), \pi \rangle \\ &= -2 \langle d\{g, h\} \wedge df - d\{f, h\} \wedge dg + d\{f, g\} \wedge dh, \pi \rangle \\ &= 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) \end{aligned}$$

□

On peut définir donc une variété de Poisson  $M$  par la donnée d'un tenseur 2-fois contravariant antisymétrique  $\pi$  sur  $M$ , qui vérifie  $[\pi, \pi] = 0$ .

**Exemple 1 (Variétés symplectiques).** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Pour tout  $f \in C^\infty(M)$ , il existe un unique champ de vecteurs  $X_f$  tel que  $i_{X_f}\omega = df$ . On montre alors que le crochet

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g)^2,$$

est un crochet de Poisson, de sorte que toute variété symplectique est de Poisson. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(X_f, X_g, X_h) = X_f \cdot \omega(X_g, X_h) - X_g \cdot \omega(X_f, X_h) + X_h \cdot \omega(X_f, X_g) \\ &\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\ &= X_f \cdot X_g(h) + X_g \cdot X_h(f) + X_h \cdot X_f(g) - [X_f, X_g](h) + [X_f, X_h](g) - [X_g, X_h](f) \\ &= -(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}). \end{aligned}$$

**Exemple 2 (Variétés de Poisson Linéaires).** Une structure de variété de Poisson, qui n'est pas symplectique, est donnée canoniquement sur le dual  $\mathfrak{g}^*$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  par le tenseur, appelé *tenseur de Poisson linéaire* :

$$\pi_x(X, Y) = \langle x, [X, Y] \rangle, \quad \text{pour tout } X, Y \in \mathfrak{g}, x \in \mathfrak{g}^*.$$

En d'autres termes, pour tout  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle,$$

<sup>2</sup>Le signe '-' assure que les champs hamiltoniens (symplectique et Poisson) associés à une fonction donnée sont identiques.

avec l'identification de  $\mathfrak{g}$  avec son bidual  $\mathfrak{g}^*$ , ce qui permet de considérer la différentielle d'une fonction sur  $\mathfrak{g}^*$  comme un élément de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $X_1, \dots, X_n$  est une base de  $\mathfrak{g}$  et  $x_1, \dots, x_n$  le système de coordonnées globales de  $\mathfrak{g}^*$ , associé à cette base, alors

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k, \quad (1.6)$$

où les  $c_{ij}^k$  sont les constantes de structure de  $\mathfrak{g}$ .

### Morphisme de Poisson.

Soient  $(M, \{, \}_M)$  et  $(N, \{, \}_N)$  deux variétés de Poisson. Une application  $\varphi : M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty$  est un *morphisme de Poisson* si  $\varphi^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$  est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire, pour tout  $f, g \in C^\infty(N)$

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_M = \varphi^* \{f, g\}_N, \quad (1.7)$$

où  $\varphi^* f$  désigne l'image réciproque de  $f$  par  $\varphi$ , c'est-à-dire l'application  $f \circ \varphi$ .

## 1.3 Application moment

**Définition 1.2.** *L'existence d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie  $G$  sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  est équivalente à l'existence d'une application moment*

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

qui vérifie :

$$i_{X_\xi} \omega = d(\langle \mu, \xi \rangle).$$

On demande en plus à cette application d'être  $G$ -équivariante, i.e. pour tout  $g \in G$

$$\mu \circ \psi_g = \text{Ad}_g^* \circ \mu.$$

### Existence d'application moment

**Lemme 1.2.** *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique.*

1. Pour tout  $X, Y \in \mathcal{L}_{\text{sym}}(M)$ , on a

$$d(\omega(Y, X)) = i_{[X, Y]} \omega.$$

En particulier,  $[X, Y] \in \mathcal{L}_{\text{ham}}(M)$ .

2. Pour tout  $f, g \in C^\infty(M)$ , on a

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g],$$

i.e. un morphisme d'algèbres de Lie.

3. Si  $\phi : G \rightarrow \text{Sp}(M, \omega)$  est un homomorphisme, i.e. l'action  $G \curvearrowright M$  est symplectique, alors l'application

$$\begin{aligned} d\phi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{L}_{\text{sym}}(M) \\ \xi &\longrightarrow X_\xi \end{aligned}$$

est un anti-morphisme d'algèbres de Lie.

*Démonstration.*

1. Rappelons d'abord l'identité de Cartan  $\mathcal{L}_Z = i_Z \circ d + d \circ i_Z$  pour tout champ de vecteurs  $Z$  où  $i_Z$  dénote le produit intérieur et  $\mathcal{L}_Z$  la dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs  $Z$ .

On a pour tout  $X, Y \in \mathcal{L}_{\text{sym}}(M)$ ,

$$i_{[X, Y]}\omega = \mathcal{L}_X(i_Y\omega) - i_Y\mathcal{L}_X\omega = (i_X \circ d + d \circ i_X)i_Y\omega = di_Xi_Y\omega = d(\omega(Y, X))$$

2. C'est une conséquence de (1). Ça résulte aussi de l'identité de Jacobi pour le crochet de Poisson associé à  $\omega$ .
3. Rappelons que si  $F : M \rightarrow N$  est une application lisse, un champ de vecteurs  $X$  de  $M$  (respectivement  $Y$  de  $N$ ) sont  $F$ -reliés et on écrit  $X \sim_F Y$  si, pour tout  $x \in M$ ,  $Y(F(x)) = D_x F(X(x))$ . On montrer que

$$\left\{ \begin{array}{cc} X \sim_F & Y \\ X' \sim_F & Y' \end{array} \right\} \implies [X, X'] \sim_F [Y, Y']$$

Si on a une action d'un groupe de Lie  $G$  sur  $M$  et sur  $N$ , on dit que  $F$  est  $G$ -équivariante si, pour tout  $x \in M$ ,  $F(g \cdot x) = g \cdot F(x)$ . Dans ce cas, pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ , les champs fondamentaux  $X_\xi^M$  et  $X_\xi^N$  sont  $F$ -reliés, il suffit de dériver en 0 l'identité :

$$F(\exp t\xi \cdot x) = \exp t\xi \cdot F(x).$$

L'application  $F : G \times M \rightarrow M$ , définie par  $F(g, x) = g \cdot x$  est équivariante<sup>3</sup> et surjective.

On a  $X_\xi(g, x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((\exp t\xi)g, x) = (\xi_R(g), 0)$ , où  $\xi_R$  est le champ invariant à droite et égale à  $\xi$  en l'élément neutre  $e$  de  $G$ . On a, pour tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$

$$[X_\xi^{G \times M}, X_\eta^{G \times M}] = ([\xi_R, \eta_R], 0) = (-[\xi, \eta]_R, 0) = -X_{[\xi, \eta]}^{G \times M}.$$

En effet, l'inversion  $i : G \rightarrow G$  est un difféomorphisme dont la différentielle en l'élément neutre est  $D_e i(\xi) = -\xi$  et transforme un champ invariant à gauche en un champ invariant à droite (et vice versa). Plus précisément, si  $\xi_L$  est le champ invariant à gauche, égale à  $\xi$  en l'élément neutre alors  $\xi_R = -i_*\xi_L$ . On a donc :

$$[\xi_R, \eta_R] = [-i_*\xi_L, -i_*\eta_L] = i_*[\xi_L, \eta_L] = i_*[\xi, \eta]_L = -[\xi, \eta]_R.$$

Comme  $F$  est surjective, on déduit que, pour tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ ,  $[X_\xi, X_\eta] = -X_{[\xi, \eta]}$ .

<sup>3</sup>Pour l'action de  $G$  sur  $G \times M$ ,  $g \cdot (h, x) = (gh, x)$



□

**Théorème 1.** *Si  $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \{0\}$  alors toute action symplectique est hamiltonienne.*

*Démonstration.* Comme  $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , alors

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Soit  $G \times M \rightarrow M$  une action symplectique sur une variété symplectique connexe  $M$ . Comme le crochet de deux champs de vecteurs symplectiques est hamiltonien, alors l'application  $d\phi : [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rightarrow \mathcal{X}_{sym}(M)$  est à valeur dans  $\mathcal{X}_{ham}(M)$ . Soit  $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$  une base  $\mathfrak{g}$  et  $J_1, \dots, J_p \in C^\infty(M)$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $X_{J_i} = X_{\xi_i}$ . En d'autre terme, le champ hamiltonien de  $J_i$  est égale au champ fondamental de  $\xi_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, p$ . On pose  $J(\xi_i) = J_i$  et on étend  $J$  en une application linéaire  $J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ , avec  $X_{J(\xi)} = X_\xi$  pour tous  $\xi \in \mathfrak{g}$ . L'application  $J$  n'est pas nécessairement un morphisme d'algèbres de Lie. Cependant le fait que  $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ , permet une légère modification de  $J$  la rendant un morphisme d'algèbres de lie, à savoir pour tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ , l'application  $J([\xi, \eta]) - \{J(\xi), J(\eta)\}$  est a constante puisque, par

$$X_{J([\xi, \eta])} = X_{[\xi, \eta]} = -[X_\xi, X_\eta] = X_{\{J(\xi), J(\eta)\}}$$

donc, il existe une constante  $c(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$

$$J([\xi, \eta]) - \{J(\xi), J(\eta)\} = c(\xi, \eta).$$

Par conséquent, nous obtenons une application  $c : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ , bilinéaire et antisymétrique. Comme les crochets  $[\cdot, \cdot]$  et  $\{\cdot, \cdot\}$  satisfont l'identité de Jacobi et  $c(\xi, \eta)$  est une fonction constante sur  $M$  pour tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ , on a  $\delta c = 0$ . Par  $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ , il existe  $b \in \mathfrak{g}^*$  tel que  $\delta b = c$ , c'est-à-dire  $c(\xi, \eta) = -b([\xi, \eta])$  pour tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ .

Si  $\mu^* := J + b$ , on obtient une application linéaire  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ , qui vérifie encore  $X_{\mu^*(\xi)} = X_\xi$  (puisque  $b(\xi)$  est constante sur  $M$ ) pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ , mais également

$$\begin{aligned} \mu^*([\xi, \eta]) &= J([\xi, \eta]) + b([\xi, \eta]) \\ &= c(\xi, \eta) + \{J(\xi), J(\eta)\} + b([\xi, \eta]) \\ &= \{\mu^*(\xi), \mu^*(\eta)\} \end{aligned}$$

pour tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ , donc  $\mu^*$  est l'application co-moment pour l'action de  $G$ . □

## Unicité d'application moment

**Théorème 2.** *Si  $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ , alors si une application moment d'une action symplectique de  $G$  existe, elle est unique.*

*Démonstration.* Si  $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ , et si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux applications moment d'une action du groupe  $G$ , alors pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ , la fonction  $\langle \mu_1 - \mu_2, \xi \rangle$  est constante sur  $M$  puisque

$$X_{\mu_1(\xi) - \mu_2(\xi)} = X_\xi - X_\xi = 0.$$

Comme  $M$  est connexe, il existe  $b(\xi) \in \mathbb{R}$ , tel que  $\mu_1(\xi) - \mu_2(\xi) = b(\xi)$ .

On a  $b \in \mathfrak{g}^*$  et puisque  $\mu_i([\xi, \eta]) = \{\mu_i(\xi), \mu_i(\eta)\} = \omega(X_\xi, X_\eta)$  pour tout  $i = 1, 2$ , on obtient

$$(\delta b)(\xi, \eta) = -b([\xi, \eta]) = 0, \text{ pour tout } \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Finalement, par  $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$  on obtient  $b = 0$ , c'est-à-dire  $\mu_1 = \mu_2$ . □

## Exemples

1. Soit  $M = \text{GL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$  munie de la forme symplectique  $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$ . L'action du cercle

$$G = \text{SO}(2) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), A \cdot A^t = I, \det A = 1\}$$

sur  $M$ , par conjugaison, est hamiltonienne et

$$\begin{aligned} \mu : \text{GL}(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} &\longmapsto x_1 x_4 - x_2 x_3 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), \end{aligned}$$

qui n'est pas unique, puisque  $G$  est abélien. Toute autre application moment diffère de  $\mu$  d'une constante.

2. L'action de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  sur le plan  $\mathbb{R}^2$ , par multiplication à gauche, est hamiltonienne et l'application moment est unique, donnée par :

$$\mu(x, y) = \left( xy, \frac{y^2}{2}, -\frac{x^2}{2} \right).$$

## 1.4 Réduction symplectique

Soit  $G \curvearrowright (M, \omega)$  une action hamiltonienne et  $\mu$  une application moment. Comme  $\mu$  est équivariante, alors pour tout  $c \in \mathfrak{g}^*$  invariant par l'action co-Adjointe, le niveau  $\mu^{-1}(c)$  est  $G$ -invariant. En effet, pour tout  $x \in \mu^{-1}(c)$ ,

$$\mu(g \cdot x) = \text{Ad}_g^* \mu(x) = \text{Ad}_g^* c = c.$$

En particulier,  $\mu^{-1}(0)$  est  $G$ -invariant.

Si  $c$  est une valeur régulière de  $\mu$ , alors  $\mu^{-1}(c)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension égale à  $\dim M - \dim G$ .

L'espace quotient  $\mu^{-1}(c)/G$  n'est pas toujours une variété, puisque l'action de  $G$  sur  $\mu^{-1}(c)$  peut ne pas être libre<sup>4</sup>. Si l'action est libre et propre alors le quotient est une variété de dimension égale à  $\dim M - 2 \dim G$  et possède une forme symplectique canonique. C'est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 3.** *Théorème de Marsden-Weinstein-Meyer* Soit  $(M, \omega, G, \mu)$  un  $G$ -espace hamiltonien où  $G$  est un groupe de Lie compacte. Soit  $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$  l'injection canonique. On suppose que l'action de  $G$  sur  $\mu^{-1}(0)$  est libre. On a alors :

1. L'espace d'orbites  $M_{\text{red}} = \mu^{-1}(0)/G$  est une variété différentielle de dimension égale à  $\dim M - 2 \dim G$ .
2. La surjection canonique  $\pi : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M_{\text{red}}$  est une  $G$ -fibration.
3. La variété quotient  $M_{\text{red}}$  possède une forme symplectique canonique  $\omega_{\text{red}}$ , caractérisée par

$$i^* \omega = \pi^* \omega_{\text{red}}.$$

<sup>4</sup>Le quotient est un orbifold.

Le couple  $(M_{red}, \omega_{red})$  est appelé la réduction de  $(M, \omega)$  par rapport à  $G, \mu$ , ou bien le quotient symplectique, ou bien le quotient de Marsden-Weinstein-Meyer.

Les deux premiers points du théorème font partie d'un résultat classique concernant les actions de groupes sur les variétés. Voir [6].

Pour montrer le troisième point du théorème on a besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires. On montre ensuite que si l'action  $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$  est libre alors est une sous-variété<sup>5</sup> et que, pour toute  $x \in \mu^{-1}(0)$ , l'orbite  $O(x)$  est isotrope (pour lesquels un procédé général de réduction peut s'appliquer).

Notons par  $O(x)$  l'orbite du point  $x$  de  $M$ , i.e.  $O(x) = \{g \cdot x, g \in G\}$  et par  $G_x$  le sous-groupe d'isotropie  $G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}$ , qui est un sous-groupe de Lie de  $G$  (car fermé dans  $G$ ), d'algèbre de Lie donnée par :

$$\mathfrak{g}_x = \{\xi \in \mathfrak{g}, X_\xi(x) = 0\}.$$

On a le lemme suivant :

**Lemme 1.3.** *Avec les notations ci-dessus et  $\mu$  désigne l'application moment alors*

$$\begin{aligned} \ker D_x \mu &= (T_x O(x))^\omega \\ \text{Im} D_x \mu &= \mathfrak{g}_x^\circ = \{\alpha \in \mathfrak{g}^*, \langle \alpha, \xi \rangle = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}_x\}. \end{aligned}$$

De sorte que si l'action est libre alors 0 est une valeur régulière de  $\mu$ .

*Démonstration.* • Pour tout  $x \in M, v \in T_x M, \xi \in \mathfrak{g}$  et  $\gamma$  une courbe dans  $M$  qui passe par  $x$  et dont le vecteur tangent en  $x$  est  $v$  on a :

$$\left( i_{X_\xi} \omega \right)_x (v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \mu(\gamma(t)), \xi \rangle = \langle D_x \mu(v), \xi \rangle.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} v \in \ker D_x \mu &\iff \omega_x(X_\xi(x), v) = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g} \\ &\iff v \in \{X_\xi(x), \xi \in \mathfrak{g}\}^\omega = (T_x O(x))^\omega. \end{aligned}$$

- Remarquons d'abord que  $\text{Im} D_x \mu$  est contenu dans l'annulateur de  $\mathfrak{g}_x$  : pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}_x = \{\xi \in \mathfrak{g}, X_\xi(x) = 0\}$ , on a

$$\langle D_x \mu(v), \xi \rangle = \omega_x(X_\xi(x), v) = 0, \forall v \in T_x M.$$

Ceci signifie que  $\text{Im} D_x \mu \subset \mathfrak{g}_x^\circ$ . Pour l'égalité, il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension. En effet,

$$\begin{aligned} \dim \text{Im} D_x \mu &= \dim M - \dim \ker D_x \mu = \dim M - \dim (T_x O(x))^\omega \\ &= \dim T_x O(x) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_x \quad (\text{car } O(x) \cong G/G_x) \\ &= \dim \mathfrak{g}_x^\circ \quad (\text{car } \dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_x + \dim \mathfrak{g}_x^\circ). \end{aligned}$$

□

<sup>5</sup>co-isotrope

**Lemme 1.4.** *Si l'action  $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$  est libre alors, pour tout  $x \in \mu^{-1}(0)$ , l'orbite  $O(x)$  est une sous-variété isotrope de  $M$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mu^{-1}(0)$  et tout  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ ,

$$\langle D_x \mu (X_\xi(x)), \eta \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \mu(\exp t\xi \cdot x), \eta \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \mu(x), \text{Ad}_{\exp t\xi}^* \eta \rangle = 0,$$

ce qui signifie que  $X_\xi(x) \in \ker D_x \mu = (T_x O(x))^\omega$ . Comme tout vecteur tangent à l'orbite  $O(x)$  est la valeur en  $x$  d'un champ fondamental, alors  $T_x O(x)$  est isotrope donc aussi  $\ker D_x \mu = T_x \mu^{-1}(0)$ .  $\square$

**Lemme 1.5.** *Soit  $(V, \omega)$  un espace vectoriel symplectique. supposons que  $I$  est un sous-espace isotrope, i.e.  $\omega|_I \equiv 0$ . Alors  $\omega$  induit une forme symplectique canonique  $\Omega$  sur le quotient  $I^\omega/I$ , caractérisée par*

$$i^* \omega = \pi^* \Omega \quad (1.8)$$

où  $i : I^\omega \hookrightarrow V$  est l'injection canonique et  $\pi : I^\omega \rightarrow I^\omega/I$  est la surjection canonique.

*Démonstration.* Soient  $u, v \in I^\omega$ , et  $[u], [v]$  leurs classes d'équivalence dans  $I^\omega/I$ . On définit  $\Omega$  par :

$$\Omega([u], [v]) := \omega(u, v).$$

- $\Omega$  est bien définie. En effet, pour tout  $i, j \in I$

$$\omega(u + i, v + j) = \omega(u, v) + \omega(u, j) + \omega(i, v) + \omega(i, j) = \omega(u, v).$$

Ce qui signifie que la valeur de  $\Omega([u], [v])$  ne dépend pas des représentants des classes d'équivalence.

- $\Omega$  est non dégénérée. En effet, si  $u \in I^\omega$  est tel que  $\omega(u, v) = 0$  pour tout  $v \in I^\omega$ , alors  $u \in (I^\omega)^\omega = I$ . Ce qui veut dire que  $[u] = 0$ .

On a, pour tout  $u, v \in I^\omega$ ,

$$(\pi^* \Omega)(u, v) = \Omega([u], [v]) = \omega(u, v) = (i^* \omega)(u, v).$$

$\square$

## Preuve de theorem de Weinstien-Marsden-Meyer

*Démonstration.* Comme l'action  $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$  est libre alors  $\mu^{-1}(0)$  est une sous-variété isotrope de  $M$  (d'après les lemmes précédents).

L'action de  $G$  sur  $\mu^{-1}(0)$  est propre<sup>6</sup> et donc le quotient  $M_{\text{red}} = \mu^{-1}(0)/G$  est une variété différentielle de dimension égale à  $\dim M - 2 \dim G$ .

Le sous-espace  $T_x O(x)$  est isotrope dans l'espace vectoriel symplectique  $(T_x M, \omega_x)$ . Il existe, d'après le lemme (1.5) une structure symplectique canonique sur le quotient

$$(T_x O(x))^{\omega_x} / T_x O(x) = T_x \mu^{-1}(0) / T_x O(x).$$

<sup>6</sup>car  $G$  est compact

En tout point  $[x] \in M_{\text{red}}$ , l'espace tangent  $T_{[x]}M_{\text{red}}$  s'identifie à  $T_x\mu^{-1}(0)/T_xO(x)$ . Par suite,  $M_{\text{red}}$  possède une 2-forme non dégénérée  $\omega_{\text{red}}$ <sup>7</sup>.

Par construction, d'après (1.8), on a  $i^*\omega = \pi^*\omega_{\text{red}}$  où

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(0) & \xhookrightarrow{i} & M \\ \pi \downarrow & & \\ M_{\text{red}} & & \end{array}$$

Il reste à montrer que  $\omega_{\text{red}}$  est fermée. Pour cela remarquons que :

$$\pi^*(d\omega_{\text{red}}) = d(\pi^*\omega_{\text{red}}) = d(i^*\omega) = i^*(d\omega) = 0.$$

Comme  $\pi^*$  est injective alors  $d\omega_{\text{red}} = 0$ . □

---

<sup>7</sup>Bien définie, car  $\omega$  est  $G$ -invariante.

# Représentations de groupes de surfaces



## 2.1 Structure topologique et géométrique

Soit  $S$  une surface fermée orientée de genre  $g \geq 1$ . Son groupe fondamental, noté par  $\pi$ , est appelé *groupe de surface* et possède la présentation à  $2g$  générateurs suivante :

$$\pi = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g] = 1 \rangle, \quad (2.1)$$

où  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$  est le commutateur de  $x$  et de  $y$ . Voir [6].

**Définition 2.1** (Représentations d'un groupe de surface). *Soit  $G$  un groupe et soit  $S$  une surface fermée orientée de genre  $g \geq 1$ . L'ensemble de toutes les représentations de  $\pi$  dans  $G$  est l'ensemble des homomorphismes de  $\pi$  vers  $G$ . On notera cet ensemble par  $\text{Hom}(\pi, G)$ .*

**Exemples.**

1. *Le groupe de surface de la sphère  $S^2$  est réduit à un point, puisque  $S^2$  est simplement connexe. Donc  $\text{Hom}(\pi_1(S^2), G)$  est réduit à un point.*
2. *Si  $G$  est abélien alors  $\text{Hom}(\pi, G) \cong G^{2g}$ . En particulier, si  $G = \mathbb{R}$  alors  $\text{Hom}(\pi, G)$  est une variété différentielle de dimension  $2g$ .*

### Topologie de $\text{Hom}(\pi, G)$

Soit  $G$  est un groupe topologique. Comme la topologie de  $\pi$  est discrète<sup>1</sup>, tous les homomorphismes de  $\text{Hom}(\pi, G)$  sont continus et l'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  peut être muni de la topologie compacte-ouverte.

Soit  $K = \{y_1, \dots, y_k\}$  une partie compacte de  $\pi^2$  et soit  $U$  un ouvert de  $G$ . Soit

$$R(K, U) = \{ \rho \in \text{Hom}(\pi, G), \rho(y_i) \in U, i = 1, \dots, k \}$$

La topologie sur  $\text{Hom}(\pi, G)$  engendrée par l'ensemble

$$E_{K,U} = \{ R(K, U), K \text{ compact de } \pi, U \text{ ouvert de } G \}$$

est appelée la topologie *compacte-ouverte*.

<sup>1</sup>Le groupe fondamental d'une variété est discret.

<sup>2</sup>Un compact et discret est fini.

**Lemme 2.1.** *Pour tout  $x \in \pi$ , l'application d'évaluation*

$$\begin{aligned} e_x : \text{Hom}(\pi, G) &\rightarrow G \\ \rho &\mapsto \rho(x) \end{aligned}$$

*est continue.*

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert de  $G$  alors

$$e_x^{-1}(U) = \{\rho \in \text{Hom}(\pi, G), \rho(x) \in U\} = R(\{x\}, U)$$

Comme  $\{x\}$  est compacte alors  $R(\{x\}, U)$  est un ouvert de  $R(\pi, G)$ .  $\square$

**Lemme 2.2.** *Soit  $F_n$  le groupe libre sur l'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et soit  $w(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$  un mot sur  $F_n$  alors l'application*

$$\begin{aligned} \tilde{w} : G^n &\rightarrow G \\ (g_1, \dots, g_n) &\mapsto \prod_{i=1}^n g_i^{\epsilon_i} \end{aligned} \quad (2.2)$$

*est continue.*

*Démonstration.* Comme  $G$  est un groupe topologique alors la continuité de la multiplication et d'inverse montre la continuité de  $\tilde{w}$ .  $\square$

On va montrer que si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  engendre  $\pi$  alors il existe un plongement de  $\text{Hom}(\pi, G)$  dans  $G^n$ . Rappelons qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques est un *plongement* si

$$f : X \rightarrow f(X) \text{ est un homéomorphisme,}$$

où  $f(X)$  est munie de la topologie induite de la topologie de  $Y$ .

**Proposition 4.** *Soit  $\pi = \langle x_1, \dots, x_n \mid w_i, i \in I \rangle$  alors l'application*

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}(\pi, G) &\rightarrow G^n \\ \rho &\mapsto (\rho(x_1), \dots, \rho(x_n)) \end{aligned}$$

*est un plongement.*

*Démonstration.* Soit l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Hom}(\pi, G) &\rightarrow \Phi(\text{Hom}(\pi, G)) \\ \rho &\mapsto (\rho(x_1), \dots, \rho(x_n)) \end{aligned}$$

L'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$  engendre  $\pi$  alors  $\Psi$  est injective et donc bijective. De plus,  $\Phi = (e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$  et donc, par le lemme 2.1,  $\Psi$  est continue.

$\Psi$  est une application ouverte. En effet, soit  $K = \{y_1, \dots, y_k\} \subset \pi$  et  $U$  un ouvert de  $G$ . Si on écrit  $y_i = w_i(x_1, \dots, x_n)$  avec  $i = 1, \dots, k$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Psi(R(K, U)) &= \{\Phi(\rho), \rho \in \text{Hom}(\pi, G), \rho(y_i) \in U, i = 1, \dots, k\} \\ &= \{\Phi(\rho), \rho \in \text{Hom}(\pi, G), \tilde{w}_i(\Phi(\rho)) \in U, i = 1, \dots, k\} \\ &= \Phi(\text{Hom}(\pi, G)) \cap \left( \bigcap_{i=1}^k \tilde{w}_i^{-1}(U) \right) \end{aligned}$$

et cet ensemble est un ouvert de  $\Phi(\text{Hom}(\pi, G))$ .  $\square$

**Lemme 2.3.** Si  $\pi = \langle x_1, \dots, x_n \mid w_i, i \in I \rangle$  et  $\Phi$  est le plongement associé, alors

$$\Phi(\text{Hom}(\pi, G)) = \bigcap_{i \in I} \tilde{w}_i^{-1}(1_G)$$

*Démonstration.* On a, pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, G)$  et tout  $i \in I$ ,

$$1_G = \rho(w_i) = \tilde{w}_i(\Phi(\rho)).$$

Il en résulte que  $\Phi(\text{Hom}(\pi, G)) \subseteq \tilde{w}_i^{-1}(1_G)$ .

Supposons  $(g_1, \dots, g_n) \in \bigcap_{i \in I} \tilde{w}_i^{-1}(1_G)$ , alors  $1_G = \tilde{w}_i(g_1, \dots, g_n)$ . Considérons la représentation

$$\begin{aligned} \rho : F_n &\rightarrow G \\ x_j &\mapsto g_j \end{aligned}$$

où  $j = 1, \dots, n$ .

Si  $N$  est le sous groupe normale de  $F_n$  engendré par  $\{w_i, i \in I\}$ , alors  $N \subset \ker(\rho)$  ainsi il existe une représentation  $\tilde{\rho} \in \text{Hom}(\pi, G)$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{\quad} & F_n/N \simeq \pi \\ & \searrow \rho & \swarrow \tilde{\rho} \\ & G & \end{array}$$

On a  $\Phi(\tilde{\rho}) = (g_1, \dots, g_n)$  et il en résulte que  $\bigcap_{i \in I} \tilde{w}_i^{-1}(1_G) \subset \Phi(\text{Hom}(\pi, G))$ .  $\square$

Nous allons voir que  $\text{Hom}(\pi, G)$  n'est pas toujours une variété. On a cependant le résultat important suivant :

#### Structure géométrique

Si  $G$  est un groupe algébrique linéaire alors  $\text{Hom}(\pi, G)$  est une variété algébrique.

*Démonstration.* Rappelons qu'un groupe algébrique linéaire est un sous-groupe fermé du groupe linéaire  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , pour la topologie de Zariski, (voir annexe).

Si  $\pi = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_N \mid R(\gamma_1, \dots, \gamma_N) \rangle$ , alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}(\pi, G) &\rightarrow G^N \\ \rho &\mapsto (\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_N)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

est injective, puisque deux homomorphismes qui coïncident sur une partie génératrice sont identiques. L'image de  $\Phi$  est constituée des  $N$ -uplets  $(g_1, \dots, g_N)$  vérifiant dans  $G$ , les équations

$$R(g_1, \dots, g_N) = 1.$$

Ce sont des équations polynomiales en les variables  $(g_1, \dots, g_N)$ . Il en résulte que  $\text{Hom}(\pi, G)$  s'identifie à un sous ensemble algébrique (fermé pour la topologie de Zariski) de  $G^N$ . La structure algébrique est indépendante de l'ensemble des générateurs.

En terme de la présentation standard (2.1)  $R = [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g]$  détermine l'application

$$R : G^{2g} \rightarrow G,$$

de sorte que  $\text{Hom}(\pi, G)$  s'identifie au sous ensemble  $R^{-1}(1)$  de  $G^{2g}$  (où 1 est le neutre de  $G$ ).  $\square$



## Exemples.

1. Soient  $\pi = \pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$  et  $G = \text{Aff}(\mathbb{R})$ , i.e. le groupe des transformations affines de  $\mathbb{R}$  :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x > 0 \right\} \cong ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}.$$

Comme  $\pi = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\pi, G) &\cong \{(A, B) \in G \times G, AB = BA\} \\ &\cong \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, x_1 x_4 - x_2 x_3 + x_2 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

C'est une variété algébrique (ensemble des zéros du polynôme  $P = x_1 x_4 - x_2 x_3 + x_2 - x_4$ ) qui n'est pas une variété, à cause du point singulier  $(1, 0, 1, 0)$  (qui correspond au point  $(\text{Id}, \text{Id})$  de  $G \times G$ ). Si on enlève le point singulier, on obtient grâce au théorème de submersion, une variété différentielle de dimension 3.

2. Si  $\pi = \pi_1(S_g) = \langle x_1, \dots, x_{2g} \mid [x_1, x_2] \dots [x_{2g-1}, x_{2g}] = 1 \rangle$ , et  $G$  est le groupe de Heisenberg de dimension 3

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3,$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\pi, G) &\cong \{(A_1, \dots, A_{2g}) \in G^{2g}, [A_1, A_2] \dots [A_{2g-1}, A_{2g}] = 1\} \\ &\cong \{(x_1, y_1, z_1, \dots, x_{2g}, y_{2g}, z_{2g}) \in \mathbb{R}^{6g}, \sum_{i=1}^{2g} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i = 0\} \\ &\cong \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{Z}(Q), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{Z}(Q)$  est l'ensemble des zéros de la forme quadratique  $Q = \sum_{i=1}^{2g} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$ . On déduit dans ce cas que l'ensemble des points singuliers de la variété algébrique  $\text{Hom}(\pi, G)$  est précisément  $\mathbb{R}^{2g} \times \{0_{\mathbb{R}^{4g}}\}$  (qui est d'intérieur vide).

Comme on vient de le voir, la variété algébrique  $\text{Hom}(\pi, G)$  n'est pas toujours une variété. Pour comprendre sa structure locale, on va étudier ses points non singuliers.

Soit  $\rho \in \text{Hom}(\pi, G)$  fixé et considérons l'action de  $\pi$  sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  définie pour  $\gamma \in \pi$  et  $v \in \mathfrak{g}$  par :

$$\gamma \cdot v := \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot v, \quad (2.4)$$

où  $\text{Ad}$  est l'action adjointe  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . En d'autres termes, on considère la représentation linéaire de  $\pi$  dans  $\text{Aut}(\mathfrak{g}) \cong \text{GL}(n, \mathbb{R})$  (si  $\dim \mathfrak{g} = n$ ), i.e. l'homomorphisme :

$$\pi \xrightarrow{\rho} G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

L'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  avec sa structure de  $\pi$ -module, ainsi définie, sera noté  $\mathfrak{g}_\rho$ .

**Proposition 5.** Soit  $\rho_t$  une famille d'homomorphismes au voisinage de  $\rho$  telle que pour la fonction  $u : \pi \rightarrow \mathfrak{g}$  et pour tout  $x \in \pi$ ,  $\rho_t$  est donné par :

$$\rho_t(x) = \exp(tu(x) + \mathcal{O}(t^2)) \rho(x),$$

alors  $u$  vérifie, pour tout  $x, y \in \pi$  :

$$u(xy) = u(x) + \text{Ad}(\rho(x)) \cdot u(y) \quad (2.5)$$

(2.5) signifie que  $u$  est un 1-cocycle.

*Démonstration.* Pour montrer que  $u$  est un 1-cocycle on utilise le fait que  $\rho_t$  est un homomorphisme de groupes, i.e.  $\rho_t(xy) = \rho_t(x)\rho_t(y)$ . On a

$$\begin{aligned} \rho_t(xy) &= \exp\left(tu(xy) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(xy) \\ &= \exp\left(tu(xy) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(x)\rho(y) \end{aligned}$$

et

$$\rho_t(x)\rho_t(y) = \exp\left(tu(x) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(x) \exp\left(tu(y) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(y)$$

Alors

$$\exp\left(tu(xy) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(xy) = \rho_t(xy) = \rho_t(x)\rho_t(y) = \exp\left(tu(x) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(x) \exp\left(tu(y) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(y)$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp\left(tu(xy) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(x)\rho(y) &= \exp\left(tu(x) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(x) \exp\left(tu(y) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(y) \\ \exp\left(t(u(xy) - u(x)) + \mathcal{O}(t^2)\right) &= \rho(x) \exp\left(tu(y) + \mathcal{O}(t^2)\right) \rho(x)^{-1} \\ &= \exp\left[\text{Ad}(\rho(x))\left(tu(y) + \mathcal{O}(t^2)\right)\right]. \end{aligned}$$

Car par naturalité de l'application exponentielle, si  $\varphi : G \rightarrow H$  est un morphisme de groupes de Lie, alors  $\varphi_* := D_e\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie et, pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,

$$\varphi(\exp X) = \exp(\varphi_* X)$$

Donc pour tout  $g \in G$  et tout  $v \in \mathfrak{g}$ ,  $g \exp vg^{-1} = \exp(\text{Ad}(g) \cdot v)$ .

Comme l'application exponentielle est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans un voisinage du neutre alors, pour tout  $t$  petit,  $t(u(xy) - u(x)) + \mathcal{O}(t^2)$  est dans un voisinage de 0 et donc  $\exp\left(t(u(xy) - u(x)) + \mathcal{O}(t^2)\right) = \exp\left[\text{Ad}(\rho(x))\left(tu(y) + \mathcal{O}(t^2)\right)\right]$  donne

$$t(u(xy) - u(x)) + \mathcal{O}(t^2) = \text{Ad}(\rho(x))\left(tu(y) + \mathcal{O}(t^2)\right) = t\text{Ad}(\rho(x)) \cdot u(y) + \mathcal{O}(t^2).$$

Il en résulte que  $u$  est un 1-cocycle

$$u(xy) = u(x) + \text{Ad}(\rho(x)) \cdot u(y).$$

□

**Définition 2.2.** L'espace tangent à  $\text{Hom}(\pi, G)$  en  $\rho$  est l'espace  $Z^1(\pi, \mathfrak{g}_\rho)$  des 1-cocycles :

$$Z^1(\pi, \mathfrak{g}_\rho) = \left\{ u : \pi \rightarrow \mathfrak{g}_\rho, u(xy) = u(x) + \text{Ad}(\rho(x)) \cdot u(y), \forall x, y \in \pi \right\}.$$

**Exemple.**

L'ensemble des représentations pour lesquelles la dimension de l'espace tangent est minimal sont les points non singuliers de la variété algébrique  $\text{Hom}(\pi, G)$ . L'espace tangent à  $\text{Hom}(\pi, G)$  ci-dessus est au sens de Zariski, qui coïncide avec la notion habituelle d'espace tangent (des variétés différentielles) aux points qui ne sont pas singuliers.

### Partie régulière

Si  $G$  est un groupe de Lie qui préserve une forme bilinéaire sur son algèbre de Lie alors l'ensemble des représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, G)$  telle que  $\dim(Z(\rho)/Z(G)) = 0$  est une variété de dimension  $(2g - 1) \dim G + \dim Z(\rho)$ .  
où  $Z(\rho)$  est le centralisateur de  $\rho(\pi)$  dans  $G$ . On note cette variété par  $\text{Hom}^-(\pi, G)$ .

*Démonstration.* Voir [3]. □

**Exemple.** Si  $G = \text{U}(n), \text{SU}(n)$  la variété  $\text{Hom}^-(\pi, G)$  est la variété des représentations irréductibles.

## 2.2 Structure symplectique de l'espace de modules

Le groupe  $G$  agit sur l'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  par conjugaison

$$(g \cdot \rho)(\gamma) := g\rho(\gamma)g^{-1},$$

et on s'intéresse au quotient  $\text{Hom}(\pi, G)/G$ .

Si  $G$  n'est pas compact, l'action de  $G$  n'est pas propre et il en résulte que l'espace  $\text{Hom}(\pi, G)/G$  muni de la topologie quotient n'est pas toujours séparé. On a cependant le résultat suivant :

**Proposition 6.** L'action de  $G/Z(G)$  sur  $\text{Hom}^-(\pi, G)$  est localement libre<sup>3</sup>.

*Démonstration.* Pour identifier l'espace tangent en  $\rho$  de l'orbite  $\mathcal{O}(\rho) = G \cdot \rho$ , considérons la courbe  $\rho_t$  des homomorphismes de la forme  $\rho_t(\gamma) = g_t\rho(\gamma)g_t^{-1}$  où  $g_t$  est une courbe dans  $G$  telle que  $g_0 = 1$ .

Si  $g_t = \exp(tu_0 + \mathcal{O}(t^2))$  alors :

$$\begin{aligned} \rho_t(\gamma) &= \exp(tu_0 + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma) \exp(-tu_0 + \mathcal{O}(t^2)) \\ &= \exp(tu_0 + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma) \exp(-tu_0 + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma)^{-1} \rho(\gamma) \\ &= \exp(tu_0 + \mathcal{O}(t^2)) \exp(\text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot (-tu_0 + \mathcal{O}(t^2))) \rho(\gamma) \\ &= \exp(tu_0 + \mathcal{O}(t^2)) \exp(-t\text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot u_0 + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma) \\ &= \exp(t(u_0 - \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot u_0) + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma). \end{aligned}$$

Donc  $\rho_t$  est donnée par le 1-cobord  $u = u_0 - \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot u_0$ , où  $u_0$  est le vecteur tangent à  $g_t$  si  $t = 0$ . L'espace

$$\mathcal{B}^1(\pi, \mathfrak{g}_\rho) = \{u : \pi \rightarrow \mathfrak{g}_\rho, u(\gamma) = u_0 - \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot u_0\}$$

<sup>3</sup>Les stabilisateurs sont discrets

est isomorphe à l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\rho)$  où  $\mathcal{Z}(\rho)$  est l'algèbre de Lie de  $Z(\rho)$  alors :

$$\dim G \cdot \rho = \dim \mathcal{B}^1(\pi, \mathfrak{g}_\rho) = \dim G - \dim Z(\rho).$$

L'action de  $\widetilde{G} = G/Z(G)$  sur  $\text{Hom}(\pi, G)$  est bien définie

$$gZ(G) \cdot \rho := g \cdot \rho,$$

car  $gZ(G) = hZ(G) \implies g \cdot \rho = h \cdot \rho$ . Sa restriction à  $\text{Hom}^-(\pi, G)$  est localement libre. En effet,

$$\begin{aligned} \dim G - \dim Z(G) &= \dim G \cdot \rho = \dim \widetilde{G} \cdot \rho \\ &= \dim \widetilde{G} - \dim \widetilde{G}_\rho = \dim G - \dim Z(G) - \dim \widetilde{G}_\rho \end{aligned}$$

d'où la dimension du stabilisateur  $\widetilde{G}_\rho$  est nulle, i.e. discret. Ce qui veut dire que l'action de  $\widetilde{G}$  sur  $\text{Hom}^-(\pi, G)$  est localement libre.  $\square$

**Remarque.** Si  $G$  est compacte alors son action sur  $\text{Hom}^-(\pi, G)$  est propre et les stabilisateurs de l'action de  $\widetilde{G}$  sur  $\text{Hom}^-(\pi, G)$  sont tous finis de même cardinal (car  $\widetilde{G}$  est compact et les stabilisateurs sont discrets et compacts et tous isomorphes). Donc si de plus un stabilisateur  $\widetilde{G}_\rho$  est trivial alors le quotient  $\text{Hom}^-(\pi, G)/\widetilde{G}$  est une variété.

**Définition 2.3.** L'espace tangent de Zariski à  $\text{Hom}(\pi, G)/G$  en une classe d'équivalences  $[\rho]$  est donné par le groupe de cohomologie :

$$H^1(\pi, \mathfrak{g}_\rho) = Z^1(\pi, \mathfrak{g}_\rho)/\mathcal{B}^1(\pi, \mathfrak{g}_\rho).$$

### Exemple $G = \text{SU}(2)$

Soient  $\pi = \pi_1(S_g)$  et  $G = \text{SU}(2)$  le groupe unitaire spécial (isomorphe à la sphère  $S^3$ ). L'espace des représentations irréductibles :

$$\rho \in \text{Hom}(\pi, G), Z(\rho) = Z(\text{SU}(2)) = \{\text{Id}\}$$

est une variété différentielle, on le note  $\text{Hom}^{\text{irr}}(\pi, \text{SU}(2))$ . En effet, on a lemme suivant :

**Lemme 2.4.** Soit  $G$  un groupe de Lie et soit l'application

$$\begin{aligned} R : \quad G^{2g} &\longrightarrow G \\ (A_1, \dots, A_{2g}) &\longmapsto [A_1, A_2] \dots [A_{2g-1}, A_{2g}] \end{aligned}$$

Alors le rang de  $R$  en  $(A_1, \dots, A_{2g})$  est égal à la codimension du centralisateur de  $\{A_1, \dots, A_{2g}\}$  dans  $G$ .

*Démonstration.* Pour une preuve, voir [3]  $\square$

Donc, pour l'application

$$\begin{aligned} R : \quad \text{SU}(2)^{2g} &\longrightarrow \text{SU}(2) \\ (A_1, \dots, A_{2g}) &\longmapsto [A_1, A_2] \dots [A_{2g-1}, A_{2g}] \end{aligned}$$

$R^{-1}(\text{Id})$  est une sous variété de dimension :

$$\dim \text{SU}(2)^{2g} - \dim \text{SU}(2) = 6g - 3$$

Clairement que  $R^{-1}(\text{Id}) = \text{Hom}^{\text{irr}}(\pi, \text{SU}(2))$ .

Le groupe  $\text{SU}(2)$  agit librement sur  $\text{Hom}^{\text{irr}}(\pi, \text{SU}(2))$  car la stabilisateur de  $\rho \in \text{Hom}^{\text{irr}}(\pi, \text{SU}(2))$  est réduit à l'élément neutre  $\text{Id}$  et comme  $\text{SU}(2)$  est compacte, alors l'action est propre et il en résulte que  $\text{Hom}^{\text{irr}}(\pi, \text{SU}(2))/\text{SU}(2)$  est une variété différentielle de dimension égale à :

$$\dim \text{Hom}^{\text{irr}}(\pi, \text{SU}(2)) - \dim \text{SU}(2) = 6g - 6$$

## Réduction symplectique

Soit  $G$  un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  admet une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et  $\text{Ad}$ -invariant. Cela signifie une forme bilinéaire symétrique :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R},$$

non dégénérée et vérifie, pour tous  $X, Y \in \mathfrak{g}$  :

$$\langle \text{Ad}_g(X), \text{Ad}_g(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

### Exemples.

1. L'algèbre de Lie du groupe linéaire avec sa forme :

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY).$$

2. La forme de Killing d'une algèbre de Lie semi-simple (ou généralement, une algèbre de Lie réductive).

Une connexion sur le  $G$ -fibré trivial  $S \times G \rightarrow S$  est une 1-forme à valeur dans  $\mathfrak{g}$ ,  $A \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$  et on note l'espace des connexions par :

$$\mathcal{A} := \Omega^1(S, \mathfrak{g}).$$

Soient  $\alpha \in \Omega^k(S, \mathfrak{g})$  et  $\beta \in \Omega^\ell(S, \mathfrak{g})$ , on peut former leur produit extérieur  $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(S, \mathfrak{g})$  et si on applique la forme bilinéaire on obtient  $\langle \alpha \wedge \beta \rangle \in \Omega^{k+\ell}(S, \mathbb{R}) = \Omega^{k+\ell}(S)$ .

**Définition 2.4.** La courbure d'une connexion  $A$  est la 2-forme  $F_A \in \Omega^2(S, \mathfrak{g})$  tel que

$$F_A = dA + A \wedge A.$$

**Définition 2.5.** Une connexion  $A$  est dite plate si  $F_A = 0$ .

On note par  $\mathcal{A}_p$  l'espace des connexions plates.

**Action du groupe de jauge sur  $\mathcal{A}_p$** 

Les automorphismes du fibré trivial  $H : S \times G \rightarrow S \times G$  peuvent être identifiés avec les applications  $h : S \rightarrow G$  telle que  $H(x, g) = H(x, e)g = (x, h(x)g)$ .

L'application  $h : S \rightarrow G$  est appelée *transformation de jauge* et on définit le groupe de jauge  $\mathcal{G}$  par :

$$\mathcal{G} := C^\infty(S, G),$$

avec sa structure de groupe donnée par :

$$(h \cdot h')(x) := h(x)h'(x), \text{ pour tout } x \in S.$$

Le groupe de jauge  $\mathcal{G}$  agit sur l'espace des  $G$ -connexions  $\mathcal{A}$  et l'action est définie par :

$$h^* A := \text{Ad}_h A + h^* \theta^R$$

où  $\theta^R$  est la forme de *Maurer-Cartan*. Comme l'action de  $\mathcal{G}$  préserve  $\mathcal{A}_{\text{plat}}$ , on définit l'espace de module des  $G$ -connexions plates par :

$$\mathcal{M} := \mathcal{A}_p / \mathcal{G}$$

**Holonomie et connexion plate** On va montrer en annexe le théorème important suivant :

**Théorème 4.** *Il y a un identification naturelle  $\mathcal{M} := \mathcal{A}_p / \mathcal{G} \simeq \text{Hom}(\pi, G)/G$*

**Définition 2.6.** *Le groupe de jauge  $\mathcal{G}$  admet comme algèbre de Lie l'espace des applications différentiables de  $S$  dans  $\mathfrak{g}$ , i.e.  $\text{Lie}(\mathcal{G}) = C^\infty(S, \mathfrak{g})$ .*

*Pour tout  $\xi \in C^\infty(S, \mathfrak{g})$ , le champ de vecteur  $X_\xi : \mathcal{A} \rightarrow T_A \mathcal{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$  défini par  $X_\xi(A) = d_A \xi$*

**Structure Symplectique sur  $\mathcal{A}$ .** L'espace des connexions  $\mathcal{A}$  est un espace affine de dimension infini et son espace tangent est donné par  $T_A \mathcal{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ . L'espace  $\mathcal{A}$  admet une structure symplectique définie par la 2-forme  $\omega$  :

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_S \langle \alpha, \beta \rangle$$

pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $T_A \mathcal{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et le produit extérieur définissent un application bilinéaire antisymétrique :

$$\langle \cdot \wedge \cdot \rangle : \Omega^1(S, \mathfrak{g}) \times \Omega^1(S, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^2(S)$$

la composition avec l'intégration  $\Omega^2(S) \rightarrow \mathbb{R}$  définit la 2-forme  $\omega$ . la 2-forme  $\omega$  est constante ( $\omega$  ne dépend pas de  $A$ ) et non dégénéré, car définie par la forme bilinéaire non dégénéré  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Lemme 2.5.** *L'action de  $\mathcal{G}$  sur l'espace  $\mathcal{A}$  est hamiltonienne avec l'application moment :*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\rightarrow \text{Lie}(\mathcal{G})^* \\ A &\mapsto -F_A \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $\text{Lie}(\mathcal{G})^* = \Omega^2(S, \mathfrak{g})$

*Démonstration.*

Considérons la fonction  $\mu_\xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mu_\xi(A) = - \int_S \langle F_A \wedge \xi \rangle$  avec  $\xi \in \Omega^0(S, \mathfrak{g})$ . On va montrer la condition

$$d_A \mu_\xi(\beta) = \omega(X_\xi(A), \beta),$$

avec  $\beta \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$

On a :

$$\begin{aligned} d_A \mu(\beta) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu(A + t\beta) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (-F_A - t d_A) \beta \\ &= -d_A \beta \end{aligned}$$

On obtient  $d_A \mu_\xi(\beta) = - \int_S \langle d_A \beta \wedge \xi \rangle$ . Comme  $d\langle \beta \wedge \xi \rangle = \langle d_A \beta \wedge \xi \rangle - \langle \beta \wedge d_A \xi \rangle$ , alors

$$\int_S d\langle \beta \wedge \xi \rangle = \int_S \langle d_A \beta \wedge \xi \rangle - \int_S \langle \beta \wedge d_A \xi \rangle.$$

Par le théorème de Stokes et comme  $S$  est une surface sans bord, il en résulte alors :

$$0 = \int_S d\langle \beta \wedge \xi \rangle = \int_S \langle d_A \beta \wedge \xi \rangle - \int_S \langle \beta \wedge d_A \xi \rangle,$$

i.e.  $\int_S \langle d_A \beta \wedge \xi \rangle = \int_S \langle \beta \wedge d_A \xi \rangle$ . Donc  $d_A \mu_\xi(\beta) = \int_S \langle d_A \xi \wedge \beta \rangle = \omega(X_\xi(A), \beta)$ .  $\square$

Nous déduisons, par le théorème de réduction de Meyer et Marsden-Weinstein, que l'espace de modules des connexions plates modulo l'action du groupe de jauge  $\mu^{-1}(0)/\mathfrak{g}$  est une variété symplectique. Nous allons voir en annexe que  $\mu^{-1}(0)/\mathfrak{g}$  s'identifie à  $\text{Hom}(\pi, G)/G$  et donc cet espace possède lui aussi une structure symplectique.



### 3.1 Structure de variété algébrique

Dans toute la suite  $\mathbb{K}$  désigne un corps algébriquement clos et  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $n \geq 1$  désigne l'algèbre des polynômes à  $n$  indéterminés.

**Définition 3.1.** Soit  $S$  une partie de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . L'ensemble algébrique affine défini par  $S$  est l'ensemble des zéros de tout les polynômes de  $S$  :

$$\mathcal{V}(S) = \{x \in \mathbb{K}^n, p(x) = 0, \text{ pour tout } p \in S\}.$$

**Exemples.**

- $\mathcal{V}(\{0\}) = \mathbb{K}^n$ .
- $\mathcal{V}(\{1\}) = \emptyset$ .
- $\mathcal{V}(\{(X_1 - x_1), \dots, (X_n - x_n)\}) = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ .

Plus généralement, si  $I$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  on définit

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbb{K}^n, p(x) = 0, \text{ pour tout } p \in I\}.$$

**Proposition 7.** Soient  $I$  et  $J$  des idéaux de l'algèbre de polynômes  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .

1. Si  $I \subset J$  alors  $\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I)$ <sup>1</sup>.
2. Si  $S$  une partie de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  et  $I$  est l'idéal engendré par  $S$  alors  $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(S)$ .
3.  $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I \cap J)$ .
4. Si  $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille d'idéaux de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  alors

$$\mathcal{V}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda).$$

*Démonstration.*

<sup>1</sup>Vrai pour tout  $I \subset J$ , pas forcément des idéaux.



1. Si  $x \in \mathcal{V}(J)$  alors, pour tout  $p \in J$ ,  $p(x) = 0$ . En particulier, pour tout  $p \in I$ ,  $p(x) = 0$  et donc  $x \in \mathcal{V}(I)$ .
2. On a  $S \subset \langle S \rangle = I$  et par la propriété précédente  $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(S)$ . Inversement, soit  $x \in \mathcal{V}(S)$  et  $p \in I$ , Il suffit de montrer que  $p(x) = 0$ . On a  $p = \sum_i p_i q_i$  avec  $p_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  et  $q_i \in S$ . On a  $p(x) = \sum_i p_i(x) q_i(x) = 0$ , car tout les  $q_i$  sont nuls en  $x$ .
3. Comme  $IJ \subset I$  et  $IJ \subset J$  alors  $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(IJ)$ . Inversement, soit  $x \in \mathcal{V}(IJ)$  supposons  $x \notin \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$  alors il existe  $p \in I$  et  $q \in J$  telle que  $p(x) \neq 0$  et  $q(x) \neq 0$ . Comme  $pq \in IJ$  et  $pq(x) = p(x)q(x) \neq 0$  alors  $x \notin \mathcal{V}(IJ)$ .

□

**Définition 3.2** (Topologie de Zariski). *On défini sur  $\mathbb{K}^n$  une topologie dont les fermés sont les ensembles algébriques affines, appelé topologie de Zariski.*

*En effet,  $\{\emptyset\}$  et  $\mathbb{K}^n$  sont fermés. Les points (3) et (4) de 7 montrent que la réunion finie des fermés est fermés et l'intersection quelconque des fermés est fermés.*

**Définition 3.3** (Variété Algébrique affine). *Une variété algébrique affine est une sous ensemble algébrique affine de  $\mathbb{K}^n$  c'est à dire, un sous ensemble fermé pour la topologie de Zariski.*

*Comme l'algèbre des polynômes est noethérien, alors tout idéal  $I$  est de type fini, c'est à dire  $I$  est engendré par une famille finie des polynômes  $\{f_1, \dots, f_m\}$ . Donc tout ensemble algébrique est défini par un nombre fini d'équations*

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{V}(f_m)$$

*tout fermé est intersection fini de  $\mathcal{V}(f_i)$ .*

*Il revient à dire que toute variété affine est définie par un nombre fini d'équations.*

**Définition 3.4.** *Si  $X$  et  $Y$  sont respectivement des sous-variétés de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^m$ , un morphisme de variétés  $\varphi : X \rightarrow Y$  est une application polynômiale  $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  telle que  $\varphi(X) \subset Y$ .*

*De manière équivalente, il existe  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tel que :*

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$$

*avec  $x \in X$ .*

### 3.1.1 Groupe algébrique

**Définition 3.5.** *Un groupe algébrique linéaire est une variété algébrique affine munie d'une structure de groupe telle que :*

- *la multiplication  $G \times G \rightarrow G$  est un morphisme de variétés,*
- *l'inverse  $G \rightarrow G$  est un morphisme de variétés.*

**Exemples.** • *Le groupe additif  $(\mathbb{K}, +)$ .*

- *Le groupe multiplicatif  $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ .*
- *Le groupe des matrices inversibles  $GL(n, \mathbb{K})$  et tout sous groupe de  $GL(n, \mathbb{K})$  : le groupe linéaire spécial  $SL(n, \mathbb{K})$  le groupe orthogonal  $O(n, \mathbb{K})$ , le groupe spécial orthogonal  $SO(n, \mathbb{K})$  sont des groupes algébriques linéaires.*

## 3.2 Fibrés et connexions

### Fibré localement trivial

Soient  $E, B, F$  trois espaces topologiques. On dit que  $E$  est un *espace fibré* de base  $B$  et de fibre  $F$ , s'il existe une application continue (notée verticalement) :

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$$

telle que, pour tout  $x \in B$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et un homéomorphisme

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F,$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array}$$

où la flèche oblique de droite est la première projection  $\text{pr}_1(x, u) = x$ .

#### Remarques.

1. Pour tout  $x \in B$ ,  $\pi^{-1}(\{x\})$  est homéomorphe à  $F$  (puisque  $\text{pr}_1^{-1}(\{x\})$  l'est clairement) et s'appelle la « fibre au dessus de  $x$  ». L'application  $\pi : E \rightarrow B$  est ouverte, puisque les projections de produits sont des applications ouvertes. Donc  $B$  porte la topologie quotient déterminée par l'application  $\pi$ .
2. Si on peut choisir  $U = B$ , on dit que le fibré est trivial. Dans ce cas  $E$  s'identifie au produit  $B \times F$ .

Si  $C$  est un sous-espace de  $B$ , « la restriction » de  $E$  à  $C$  est simplement la restriction de l'application continue  $\pi$  à  $\pi^{-1}(C)$  : c'est un fibré de base  $C$ .

Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert de  $B$  tel que la restriction de  $E$  à chaque  $U_i$  soit un fibré trivial (le recouvrement est alors dit « trivialisant »). On a donc des homéomorphismes

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$$

d'où des « données de recollement »

$$\begin{array}{ccc} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F & \longrightarrow & (U_i \cap U_j) \times F \\ & & (x, u) \longmapsto (x, g_{ij}(x)(v)) \end{array} \quad (3.1)$$

où  $g_{ij}$  est une application de  $U_i \cap U_j$  dans  $\text{Homéo}(F)$  le groupe des homéomorphismes de  $F$ .

Un  $G$ -fibré est la donnée d'un sous-groupe topologique  $G$  de  $\text{Homéo}(F)$  et de trivialisations  $(\varphi_i)$  comme ci-dessus tels que les  $g_{ij}$  définissent des applications continues de  $U_i \cap U_j$  dans  $G$ . On dit alors que  $G$  est le *groupe structural* du fibré  $E$ .

Avant d'explorer quelques exemples importants, faisons d'abord ces remarques :

**Remarques.**

1. Un fibré différentiel est un fibré pour lequel l'espace total, la base et la fibre sont des variétés différentielles. On remplace dans la définition : continuité par différentiabilité (de classe  $C^\infty$ ), homéomorphisme par difféomorphisme.
2. La condition de continuité des  $g_{ij}$  n'est pas automatique, sauf dans des cas particuliers. Par exemple, si  $E$  est un fibré vectoriel (voir ci-dessous), il est naturel de prendre pour  $G$  le groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{R})$ . Dans ce cas, la condition de continuité est automatique.
3. On montre que les fonctions de transition  $g_{ij}$  caractérisent le  $G$ -fibré  $E$ . De manière précise, on vérifie d'abord la condition de cocycle

$$g_{ij} = g_{ik} \cdot g_{kj}$$

au-dessus de chaque point  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ . Réciproquement, la donnée d'un tel cocycle permet de reconstruire le fibré  $E$  comme quotient de la réunion disjointe des  $U_i \times F$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(x, u)$  à  $(x, g_{ij}(x)(u))$  pour  $x \in U_i \cap U_j$ . Voir [10].

**Exemples.**

1. **Revêtement.** Un revêtement est un fibré localement trivial dont la fibre est discrète.
2. **Fibré vectoriel.** Un fibré vectoriel est un espace fibré localement trivial dont la fibre est un espace vectoriel et le groupe de structure est le groupe linéaire. C'est le cas des fibrés tangent et cotangent sur une variété différentielle.
3. **Fibré principal.** Un fibré principal est un fibré localement trivial pour lequel le groupe structural agit librement et transitivement sur la fibre, autrement dit si la fibre peut s'identifier au groupe structural muni de l'action à droite. C'est le cas du fibré de Hopf, ainsi que du fibré des repères d'une variété différentielle.
4. La première projection  $\pi$  de  $E = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  à  $B = \mathbb{R}$  est une submersion surjective, mais  $(E, \pi, B)$  n'est pas un fibré localement trivial,  $0$  ne possède aucun voisinage  $U$  tel que  $\pi^{-1}(U)$  soit homéomorphe à  $U \times \pi^{-1}(0)$ . En effet, pour tout  $r > 0$ , si  $U = ]-r, r[$  alors  $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$  est connexe (car connexe par arcs) alors que  $U \times \pi^{-1}(0) = U \times \{0\} \times \mathbb{R}^*$  possède deux composantes connexes.

**Morphismes de fibrés**

Soient  $\pi_E : E \rightarrow M$  et  $\pi_F : F \rightarrow N$  des espaces fibrés de bases respectivement  $M$  et  $N$ . Alors une application continue  $\Phi : E \rightarrow F$  est un « morphisme de fibrés » de  $E$  à  $F$  s'il existe une application continue  $\varphi : M \rightarrow N$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

c'est-à-dire  $\pi_F \circ \Phi = \varphi \circ \pi_E$ . En d'autres termes,  $\Phi$  « préserve les fibres », et  $\varphi$  est l'application induite sur l'espace des fibres de  $E$  : puisque  $\pi_E$  est surjective,  $\varphi$  est uniquement déterminé par  $\Phi$ .

**Définition 3.6** (Image réciproque). Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré localement trivial et soit  $f : M \rightarrow B$  une application continue. Soit

$$f^*E = \{(m, x) \in M \times E, \pi(x) = f(m)\}$$

Le triplet  $(f^*E, p, M)$ , où  $p$  est l'application  $p(m, x) = m$ , est un fibré localement trivial, image réciproque.

*Démonstration.* Si  $\{U_i\}$  est un recouvrement de  $B$  tel que  $E|_{U_i}$  est trivial et si  $\varphi_{ij}$  sont les applications de transition, alors  $\{f^{-1}(U_i)\}$  est un recouvrement de  $M$  qui trivialise  $f^*E$   $\square$

L'utilité de la définition ci-dessus réside dans le théorème important suivant :

**Théorème 5.** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré localement trivial et soient  $f, g : M \rightarrow B$  deux applications continues homotopes. Alors  $f^*E \cong g^*E$ .

Pour une preuve, voir [10]. Une conséquence importante est la suivante :

**Corollaire 3.1.** Tout fibré de base contractile est un fibré trivial.

*Démonstration.* Si  $\pi : E \rightarrow B$  est un fibré localement trivial avec  $B$  contractile, alors  $f_0, \text{Id} : B \rightarrow B$  sont homotopes ( $f_0$  est l'application constante  $f_0(x) = x_0$ , pour tout  $x \in B$ ). Le fibré de départ  $E = \text{Id}^*E$  est isomorphe au fibré trivial

$$f_0^*E = \{(m, x) \in B \times E, \pi(x) = x_0\} = B \times \pi^{-1}(x_0) \cong B \times F.$$

$\square$

**Théorème 6.** Soit  $(E, \pi, B)$  un fibré localement trivial de fibre type  $F$ . Si  $B$  et  $F$  sont compacts alors  $E$  est lui aussi compact.

**Définition 3.7** (Section). C'est le choix, dans chaque fibre, d'un point variant différentiablement avec la fibre. En d'autres termes, une section du fibré  $E$  est une application différentiable  $S : B \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ S = \text{Id}_B$ . On peut parler des sections locales au dessus d'un ouvert  $U$  de  $B$  ( $S : U \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ S = \text{Id}_U$ ). On note  $\Gamma(B, E)$  ou  $\Gamma(E)$  l'espace des sections de  $E$ ,  $\Gamma(U, E)$  l'espace des sections locales au dessus de  $U$ .

Un fibré trivial a toujours des sections, mais la réciproque n'est pas vraie (le ruban de Möbius n'est pas trivial, mais a une section, la *section médiane*).

## Connexion d'Ehresmann

Soit  $p : E \rightarrow M$  un fibré localement trivial différentiable. Pour tout  $e \in E$  on associe le sous espace vectoriel de  $T_eE$  :

$$V_e = \ker d_e p, \text{ pour la différentielle } d_e p : T_eE \rightarrow T_{p(e)}M.$$

$V = \coprod_{e \in E} V_e$  est un sous-fibré du fibré tangent  $TE$ , dit *sous-espace vertical*, constitué des vecteurs tangents aux fibres de  $E$ .

**Définition via les sous-espaces horizontaux** Une connexion d'Ehresmann sur  $E$  est un sous-fibré régulier  $H$  de  $TE$ , appelé le fibré horizontal de la connexion, qui est un supplémentaire de  $V$ , dans le sens où il définit une décomposition en somme directe :

$$TE = H \oplus V.$$

De façon plus détaillée, le fibré horizontal a les propriétés suivantes :

- Pour tout  $e \in E$ ,  $H_e$  est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent  $T_eE$  à  $E$  en  $e$ , appelé le « sous-espace horizontal » de la connexion en  $e$ .
- $H_e$  dépend régulièrement de  $e$ .
- Pour tout  $e \in E$ ,  $H_e \cap V_e = \{0\}$ .
- Tout vecteur tangent de  $T_eE$  (pour tout  $e \in E$ ) est la somme d'une composante horizontale et d'une composante verticale, de telle sorte que  $T_eE = H_e + V_e$ .

## Fibré principal

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $B$  une variété. Un  $G$ -fibré principal au dessus de  $B$  est une fibration  $\pi : P \rightarrow B$  avec une action libre de  $G$  (le groupe structural) sur l'espace total  $P$ , tel que la base  $B$  soit l'espace d'orbite,  $\pi$  est la projection et les trivialisations locales sont de la forme

$$\varphi_{\mathcal{U}} = (\pi, s_{\mathcal{U}}) : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times G$$

avec  $s_{\mathcal{U}}(g \cdot p) = g \cdot s_{\mathcal{U}}(p)$  pour tout  $g \in G$  et tout  $p \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ . Un  $G$ -fibré principal est représenté par un diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

Par exemple, la *fibration de Hopf* est un  $S^1$ -fibré principal au dessus de la sphère  $S^2 (= \mathbb{C}P^1)$ . L'espace total étant la sphère  $S^3$  considérée comme l'ensemble des vecteurs unitaires de  $\mathbb{C}^2$  où les éléments de cercle agissent par multiplication complexe.

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2).$$

**Théorème 7.** *Pour qu'un fibré principal soit trivial, il faut et il suffit qu'il admette une section.*

*Démonstration.* La nécessité est évidente. Pour voir la suffisance soit  $x \in E$  et soit  $x_0$  l'intersection de la fibre de  $x$  et de la section. En désignant par  $g$  l'élément bien déterminé de  $G$  tel que  $x = x_0 \cdot g$ . Si  $b$  est l'unique point de  $B$ , tel que  $s(b) = x_0$ , alors l'application  $\Phi(x) = (b, g)$  définit un difféomorphisme de  $E$  sur  $B \times G$ , d'inverse  $\Phi^{-1}(b, g) = s(b) \cdot g$ .  $\square$

On peut se restreindre aux  $G$ -fibrés principaux trivialisables (isomorphes aux fibré trivial), lorsque  $G$  est simplement connexe. En effet, on a le résultat suivant :

**Théorème 8.** *Si  $G$  est un groupe de Lie simplement connexe, alors tout  $G$ -fibré principal est trivialisable.*

*Démonstration.* Voir [10].  $\square$

## Connexions

Une action  $\psi : G \rightarrow \text{Diff}(P)$  induit une action (infinitésimale)  $d\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \chi(P)$  qui envoie un champ de vecteurs invariant à gauche  $X \in \mathfrak{g}$  vers le champ *fondamental*  $X^\#$  généré par le groupe à un paramètre  $\{\exp tX(e) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq G$ .

Fixons une base  $X_1, \dots, X_k$  de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $P$  un  $G$ -fibré principal au dessus de  $B$ . Comme l'action de  $G$  est libre, les champs de vecteurs  $X_1^\#, \dots, X_k^\#$  sont linéairement indépendants en tout point  $p \in P$ . Le *sous-fibré vertical*  $V$  est le sous-espace de rang  $k$  de  $TP$  engendré par  $X_1^\#, \dots, X_k^\#$ .

Alternativement,  $V$  est l'ensemble des vecteurs tangente à  $P$  qui se trouve dans le noyau de la différentielle de la projection  $\pi$ , donc  $V$  est bien indépendant du choix de la base de  $\mathfrak{g}$ .

Une connexion (d'Ehresmann) sur  $P$  est un choix d'une décomposition en somme directe  $TP = V \oplus H$ , où  $H$  (appelé le *sous-fibré horizontal*) est un sous-ensemble  $G$ -invariant de  $TP$  complémentaire au sous-fibré vertical  $V$ .

Une *forme de connexion* sur  $P$  est une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  :

$$A = \sum_{i=1}^k A_i \otimes X_i, \text{ élément de } \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g},$$

tel que  $A$  est  $G$ -invariante, par rapport à l'action produit de  $G$  sur  $\Omega^1(P)$  (action à droite sur  $P$ ) et l'action adjointe sur  $\mathfrak{g}$ . De plus,  $A$  est vertical en ce sens que

$$i_{X^\#}A = X, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

Une connexion  $TP = V \oplus H$  détermine une forme de connexion  $A$  et vice-versa par la formule

$$H = \ker A = \{v \in TP, i_v A = 0\}.$$

Étant donnée une connexion sur  $P$ , la décomposition en somme directe  $TP = V \oplus H$  induit une décomposition en sous-fibrés

$$\begin{aligned} T^*P &= V^* \oplus H^* \\ \wedge^2 T^*P &= (\wedge^2 V^*) \oplus (V^* \wedge H^*) \oplus (\wedge^2 H^*) \end{aligned}$$

et pour leurs sections :

$$\begin{aligned} \Omega^1(P) &= \Omega_{\text{vert}}^1 \oplus \Omega_{\text{horiz}}^1, \\ \Omega^2(P) &= \Omega_{\text{vert}}^2 \oplus \Omega_{\text{mix}}^2 \oplus \Omega_{\text{horiz}}^2 \end{aligned}$$

La forme de connexion correspondante  $A$  est dans  $\Omega_{\text{vert}}^1 \otimes \mathfrak{g}$ .

Soit  $A$  une connexion sur  $P$ . Si  $a \in \Omega_{\text{horiz}}^1 \otimes \mathfrak{g}$  est  $G$ -invariante pour l'action produit, alors  $A + a$  est aussi une connexion sur  $P$ . Réciproquement, deux connexions quelconques sur  $P$  diffèrent par un  $a \in (\Omega_{\text{horiz}}^1 \otimes \mathfrak{g})^{G^2}$ .

Nous concluons que l'ensemble  $\mathcal{A}$  de toutes les connexions sur le  $G$ -fibré principal  $P$  est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel  $\mathfrak{a} = (\Omega_{\text{horiz}}^1 \otimes \mathfrak{g})^G$ .

<sup>2</sup>Si  $G$  agit sur  $X$  et  $A \subset X$ , la notation  $A^G$  signifie l'ensemble des éléments de  $A$  invariants par  $G$ .

## G-fibré au dessus d'une surface fermée

Soit  $P$  un  $G$ -fibré au dessus d'une surface compacte. Supposons que le groupe  $G$  soit compact ou semi-simple, de sorte que son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  possède un produit scalaire  $G$ -invariant.

Comme  $\mathcal{A}$  est un espace affine, son espace tangent en tout point  $A$  est identifié avec son espace vectoriel associé  $\mathfrak{a}$ . Par rapport à une base  $X_1, \dots, X_k$  pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , les éléments  $a, b \in \mathfrak{a}$  sont écrits

$$a = \sum a_i \otimes X_i \quad \text{et} \quad b = \sum b_i \otimes X_i.$$

Si nous prenons le produit extérieur de  $a$  et  $b$ , puis en intégrant sur  $B$ , nous obtenons un nombre réel :

$$\begin{aligned} \omega : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} &\longrightarrow \left( \Omega_{\text{horiz}}^2(P) \right)^G \simeq \Omega^2(B) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto \sum_{i,j} a_i \wedge b_j \langle X_i, X_j \rangle \longmapsto \int_B \sum_{i,j} a_i \wedge b_j \langle X_i, X_j \rangle. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé que le fait que l'image réciproque  $\pi^* : \Omega^2(B) \rightarrow \Omega^2(P)$  est un isomorphisme sur son image  $\left( \Omega_{\text{horiz}}^2(P) \right)^G$ . Si pour tout  $b \in \mathfrak{a}$ ,  $\omega(a, b) = 0$  alors  $a$  doit être nul.

La forme bilinéaire  $\omega$  est non dégénérée, antisymétrique et constante dans le sens où elle ne dépend pas du point de base  $A$ . Par conséquent, on peut qualifier  $\omega$  de forme symplectique sur l'espace affine (de dimension infinie)  $\mathcal{A}$ . Donc la paire  $(\mathcal{A}, \omega)$  est une *variété symplectique de dimension infinie*.

## Courbure

Soient  $\pi : P \rightarrow B$  un  $G$ -fibré principal et  $A$  une forme de connexion sur  $P$ . Pour tout  $p \in P$  on a la décomposition  $T_p P = V_p \oplus H_p$ . Considérons la projection horizontale  $h : TP \rightarrow TP$  tel que  $\text{Im } h = H$  et  $\text{ker } h = V$ .

**Définition 3.8.** La 2-forme  $F_A \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$  donnée par

$$F_A(u, v) = dA(h(u), h(v))$$

est appelée la forme de courbure de  $A$ .

La connexion de courbure nulle est dite *plat*.

**Proposition 8** (Équation de structure). Soit le  $G$ -fibré  $P$  avec la forme de connexion  $A$ . Alors la courbure vérifie

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A],$$

avec  $[A, A](u, v) = 2[A(u), A(v)]$ , pour tous  $u, v \in \chi(P)$ .

*Démonstration.* On va montrer que

$$dA(h(u), h(v)) = dA(u, v) + [A(u), A(v)] \quad (3.2)$$

pour tout  $u, v \in \chi(P)$

- Si  $u, v$  sont verticaux, posons  $u = X^\#$  et  $v = Y^\#$  où  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , i.e.  $A(X^\#) = X$  et  $A(Y^\#) = Y$ .  
il en résulte que  $F_A(u, v) = dA(h(X^\#), h(Y^\#)) = 0$  car  $h(X^\#) = 0$  et  $h(Y^\#) = 0$ , en d'autre terme on a

$$\begin{aligned} [A, A](u, v) &= [A(X^\#), A(Y^\#)] - [A(Y^\#), A(X^\#)] \\ &= 2[A(X^\#), A(Y^\#)] \\ &= 2[X, Y], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} dA(X^\#, Y^\#) &= X^\# A(Y^\#) - Y^\# A(X^\#) - A([X^\#, Y^\#]) \\ &= -[X, Y] \\ &= -\frac{1}{2}[A, A](X^\#, Y^\#) \end{aligned}$$

- Si  $u, v$  sont horizontaux, i.e.  $h(u) = u, h(v) = v$  et  $A(u) = A(v) = 0$  alors  $F_A(u, v) = dA(u, v)$ .
- Si  $u$  est vertical, i.e.  $u = X^\#$  et  $v$  est horizontal alors l'équation 3.2 devient  $dA(0, v) = 0$ . On a  $[A, A](X^\#, v) = 0$  car  $A(v) = 0$ .

□

**Proposition 9** (Identité de Bianchy).

$$h^* dF_A = 0$$

*Démonstration.* On utilise l'équation de structure, il résulte

$$\begin{aligned} h^*(dF_A) &= h^*d\left(dA + \frac{1}{2}[A, A]\right) \\ &= h^*\left(d^2A + \frac{1}{2}[dA, A] - \frac{1}{2}[A, dA]\right) \\ &= h^*([dA, A]) \\ &= [h^*dA, h^*A] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

### 3.3 Holonomie et connexions

Considérons le  $G$ -fibré principal  $\pi : P \rightarrow S$  au dessus d'une surface fermé  $S$ . Soit  $A$  une connexions sur  $P$ .

**Définition 3.9.** Un chemin différentiable  $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$  de  $x$  vers  $y$  est dit horizontal pour  $A$  si les vecteurs tangents  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}P$  sont horizontaux.



**Définition 3.10.** Soit le chemin différentiable  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ . Soit  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Le relèvement horizontal de  $\gamma$  est l'unique chemin  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  tel que  $\tilde{\gamma}(0) = p$  et  $\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$  et  $\tilde{\gamma}(t)$  est horizontal.

**Définition 3.11** (Transport parallèle). Le transport parallèle le long de chemin  $\gamma$  pour la connexion  $A$  est le difféomorphisme

$$P_\gamma^A : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x) \\ p \mapsto \tilde{\gamma}(1)$$

où  $\tilde{\gamma}$  est la relèvement horizontal de  $\gamma$ .

**Définition 3.12** (Holonomie). Soient  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  un lacet de point base  $x$  et  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Il existe un unique élément  $g \in G$  vérifiant  $P_\gamma^A(p) = p \cdot g$  cet élément est appelé l'holonomie  $\text{Hol}_p(A, \gamma)$ .

$$P_\gamma^A(p) = p \cdot \text{Hol}_p(A, \gamma).$$

### 3.3.1 Espace de modules des connexions plates

#### Groupe de Jauge et son action

Pour un  $G$ -fibré principal  $P$ , le groupe d'automorphismes

$$\mathcal{G} = \{f : P \rightarrow P \text{ difféomorphisme, } \pi \circ f = \pi, \forall p \in P, \forall g \in G, f(p \cdot g) = f(p) \cdot g\}$$

est appelé le *groupe de jauge*.

Les éléments de  $\mathcal{G}$  sont appelés transformations de jauge. On peut identifier les transformations de jauge avec les applications

$$F : P \rightarrow G, \text{ telles que } F(p \cdot g) = g^{-1}F(p)g,$$

c'est-à-dire des applications équivariantes par rapport à l'action conjuguée de  $G$  sur lui-même.

Le groupe de jauge agit sur l'espace de connexion  $\mathcal{A}$  par

$$f \cdot A = f^* A.$$

En effet, on vérifie que pour toute connexion  $A \in \mathcal{A}$  et pour tout  $f \in \mathcal{G}$  l'image réciproque  $f^* A$  est aussi un forme de connexion. De plus, pour tout  $g \in G$  on a

$$\begin{aligned} R_g^*(f^* A) &= (f \circ R_g)^* A \\ &= (R_g \circ f)^* A \\ &= f^*(R_g^* A) \\ &= f^*(\text{Ad}_{g^{-1}} \circ A) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (f^* A) \end{aligned}$$

**Définition 3.13.** On définit l'espace de modules des connexions plates par

$$\mathcal{A}_p / \mathcal{G}.$$

L'holonomie d'une connexion le long d'un lacet  $\gamma$  ne dépend que de la classe d'homotopie de ce lacet qui fixe le point  $p$ . Dans le fibré plat on peut construire un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned}\pi_1(S) &\rightarrow G \\ [\gamma] &\mapsto \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1}\end{aligned}$$

où  $\pi_1(S)$  est le groupe fondamental de la surface  $S$ .

On peut maintenant montrer le théorème important suivant :

### Théorème d'isomorphisme

Il y a une bijection entre l'espace de modules des connexions plates et l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$  modulo la conjugaison :

$$\mathcal{A}_p/\mathcal{G} \simeq \text{Hom}(\pi_1(S), G)/G$$

*Démonstration.* Fixons  $x \in S$  et  $p \in \pi^{-1}(x)$ . On considère l'application

$$\Phi : \mathcal{A}_p/\mathcal{G} \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(S), G)/G$$

donnée par  $\Phi([P, A]) = [\rho]$  tel que

$$\begin{aligned}\rho : \pi_1(S) &\rightarrow G \\ [\gamma] &\mapsto \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1}\end{aligned}$$

Cette application est indépendante du choix de  $x$  et de  $p$ . Elle est bien définie comme l'holonomie de  $A$  dépend que la classe d'homotopie d'un lacet  $\gamma$  de point de base  $x$ . Soit  $(P, A)$  et  $(Q, B)$  deux fibrés plats au dessus  $S$ , on suppose que  $\Phi([P, A]) = \Phi([Q, B])$ . On va montrer qu'il existe un équivalent de jauge entre les deux fibrés plats.

Fixons  $p \in P$  et  $q \in Q$ . Par hypothèse, il existe  $g \in G$  tel que

$$\text{Hol}_p(A, \gamma) = g \text{Hol}_q(B, \gamma) g^{-1}$$

posons  $q = p \cdot g$ , on peut supposer  $\text{Hol}_p(A, \gamma) = \text{Hol}_q(A, \gamma)$ . On va construire un équivalent de jauge  $f : P \rightarrow Q$ , soient  $y \in S$  et  $\delta$  un chemin de  $x$  à  $y$ ,  $\widetilde{\delta}_A$  sa relèvement horizontal dans  $P$  et  $\widetilde{\delta}_B$  sa relèvement horizontal dans  $Q$ . L'idée est d'arriver à

$$f(\widetilde{\delta}_A(1)) = \widetilde{\delta}_B(1)$$

En particulier,  $f \circ \widetilde{\delta}_A = \widetilde{\delta}_B$ .

Pour la surjectivité, soit  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow G$ , on va construire un fibré  $P$  au dessus  $S$  tel que

$$\rho([\gamma]) = \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1}$$

pour toute lacet  $\gamma$  dans  $S$  de point de base  $\pi(p)$  et  $A$  une connexion plate .  
Soit  $\tilde{S}$  le revêtement universel de  $S$  avec la projection  $\tau : \tilde{S} \rightarrow S$ , fixons  $y \in \tilde{S}$ . Rappelons que le groupe  $\pi_1(S, \tau(y))$  agit sur  $\tilde{S} \times G$  par

$$[\gamma] \cdot (y, g) = ([\gamma] \cdot y, \rho([\gamma])g)$$

et on considère le quotient

$$P = \tilde{S} \times G / \pi_1(S)$$

Comme l'action de  $\pi_1(S)$  sur  $\tilde{S} \times G$  est libre et propre alors le quotient

$$P = \tilde{S} \times G / \pi_1(S)$$

est une variété différentielle avec le submersion  $\tilde{S} \times G \rightarrow P$ , alors  $P$  est une fibré principal sur  $S$  muni d'un connexion plate  $A$  avec  $\rho([\gamma]) = \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1}$ .

□

### 3.4 Cohomologie des groupes et des algèbres de Lie

**Cohomologie des groupes** Soient  $G$  un groupe qui agit sur un espace vectoriel  $V$ ,

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Soit les espaces :

$$C^0(G, V) = V,$$

$$C^k(G, V) = \{\text{les applications } \omega : G \times \dots \times G \longrightarrow V\}.$$

On définit un opérateur  $\delta : C^k(G, V) \longrightarrow C^{k+1}(G, V)$ , par :

$$\begin{aligned} (\delta\omega)(g_1, \dots, g_{k+1}) &= g_1 \cdot \omega(g_2, \dots, g_{k+1}) + \sum_{i=1}^k (-1)^i \omega(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{k+1}) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \omega(g_1, \dots, g_k). \end{aligned}$$

- $(\delta\omega)(g) = g \cdot \omega - \omega$ , (pour  $k = 0$ ).
- $(\delta\omega)(g, h) = g \cdot \omega(h) - \omega(gh) + \omega(g)$ , (pour  $k = 1$ ).

On peut vérifier que  $\delta$  est un opérateur de cobord, c'est-à-dire  $\delta \circ \delta = 0$ , ceci permet de définir les espaces de cohomologie :

$$H^k(G, V) = \frac{\ker\{\delta : C^k(G, V) \rightarrow C^{k+1}(G, V)\}}{\text{Im}\{\delta : C^{k-1}(G, V) \rightarrow C^k(G, V)\}}$$

On dit que  $\omega \in V$  est un 0-cocycle, pour l'action du groupe  $G$  sur  $V$ , si

$$g \cdot \omega = \omega, \quad \text{pour tout } g \in G.$$

On dit qu'une application  $\omega : G \rightarrow V$  est un 1-cocycle, pour l'action du groupe  $G$  sur  $V$ , si pour tout  $g, h \in G$

$$\omega(gh) = \omega(g) + g \cdot \omega(h) \tag{3.3}$$

et  $\omega \in C^k(G, V)$  est un  $k$ -cocycle, pour l'action du groupe  $G$  sur  $V$ , si  $\delta\omega = 0$ .

**Cohomologie des algèbres de Lie** Soit  $(\mathfrak{g}, [ , ])$  une algèbre de Lie réelle de dimension finie  $n$ , et soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Une représentation de  $\mathfrak{g}$  est un morphisme d'algèbres de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

tel que pour tout  $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\rho([X, Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X).$$

On dit aussi que  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module.

Une  $k$ -forme sur  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $V$  est une application  $\omega : \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow V$ ,  $k$ -linéaire alternée. On notera l'ensemble de ces  $k$ -formes par  $C^k(\mathfrak{g}, V)$ , avec la convention  $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$  et  $C^1(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, V)$ .

On définit l'opérateur de cobord  $\delta : C^k(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$  par

$$\begin{aligned} (\delta\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i) \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

- Pour  $k = 0$ ,  $(\delta\omega)(X) = \rho(X) \cdot \omega$ , pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\omega \in V$ .
- Pour  $k = 1$ ,  $(\delta\omega)(X, Y) = \rho(X) \cdot \omega(Y) - \rho(Y) \cdot \omega(X) - \omega([X, Y])$ .

**Proposition 10.**  $\delta$  est un opérateur de cobord, c'est-à-dire  $\delta \circ \delta = 0$ .

*Démonstration.* compléter... □

Un  $k$ -cocycle est une  $k$ -forme fermée, c'est-à-dire  $\omega \in C^k(\mathfrak{g}, V)$  et  $\delta\omega = 0$ . On note leur ensemble par  $Z^k(\mathfrak{g}, V)$ .

Un  $k$ -cobord est une  $k$ -forme exacte, c'est-à-dire  $\omega \in C^k(\mathfrak{g}, V)$  et il existe  $\eta \in C^{k-1}(\mathfrak{g}, V)$  telle que  $\omega = \delta\eta$ . On note leur ensemble par  $B^k(\mathfrak{g}, V)$ .

**Lemme 3.1.**  $B^k(\mathfrak{g}, V)$  et  $Z^k(\mathfrak{g}, V)$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, et  $B^k(\mathfrak{g}, V)$  est un sous-espace de  $Z^k(\mathfrak{g}, V)$ .

*Démonstration.* C'est immédiat. Le deuxième point résulte de la Proposition ci-dessus. □

On appelle  $k^{\text{ème}}$  groupe de cohomologie de  $\mathfrak{g}$ , à coefficients dans  $V$  (ou par rapport à la représentation  $\rho$ ), l'espace vectoriel quotient

$$H^k(\mathfrak{g}, V) = Z^k(\mathfrak{g}, V)/B^k(\mathfrak{g}, V).$$

Si  $G$  est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , alors l'espace  $\Omega_L^*(G)$  des 1-formes différentielles invariantes à gauche sur  $G$  est un sous-complexe du complexe de de Rham de  $G$  qui est naturellement isomorphe au complexe de Chevalley-Eilenberg  $C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  pour l'action triviale de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbb{R}$ , qui implique que leurs cohomologies sont isomorphes :

$$H_L^*(G) \cong H^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R}). \quad (3.4)$$

(L'isomorphisme de  $\Omega_L^*(G)$  sur  $C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  associe toute 1-forme invariante à gauche à sa valeur en l'élément neutre  $e$  de  $G$ , après identification de  $\mathfrak{g}^*$  avec  $T_e G$ ). En particulier, lorsque  $G$  est compact le processus de la moyenne  $\alpha \mapsto \int_G L_g^\alpha dg$  ( $\alpha$  dénote une forme différentielle sur  $G$ , et  $L_g$  dénote la translation à gauche par  $g \in G$ ) induit un isomorphisme de  $H_{dR}^* G$  dans  $H_L^*(G)$ , et on a  $H_{dR}(G) \cong H^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ .

**Théorème 9** (Whitehead1). *Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie, alors  $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$  et  $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$ .*

**Théorème 10** (Whitehead2). *Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie, et  $V^{\mathfrak{g}} = 0$  où  $V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V, \rho(x) \cdot v = 0, \text{ pour tout } x \in \mathfrak{g}\}$  est l'ensemble des éléments de  $V$  qui sont invariants par l'action de  $\mathfrak{g}$ , alors*

$$H^k(\mathfrak{g}, V) = 0, \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$



# Conclusion

Nous avons étudié dans ce mémoire la structure des représentations d'un groupe de surface à valeur dans un groupe de Lie  $G$  :

$$\text{Hom}(\pi_1(S), G).$$

Nous avons aussi étudié la structure symplectique de la variété des caractères :

$$\text{Hom}(\pi_1(S), G)/G,$$

qui est le quotient par rapport à l'action par conjugaison du groupe  $G$ . Nous avons exploré son lien avec l'espace de modules des connexions plates sur les  $G$ -fibrés principaux de base  $S$  (modulo l'action du groupe de jauge).

Voici quelques questions naturelles qu'on peut rencontrer lors de l'étude de ces espaces :

1. Étudier des représentations à valeur dans  $U(1)$ ,  $SO(3)$ ,  $SU(2)$  et  $U(2)$ .
2. Combien de composantes connexes chaque espace possède-t-il?
3. Quelles sont les dimensions de ces espaces?
4. Quelles sont les singularités de ces espaces?
5. Analysez plus en détail ces espaces lorsque la surface est un tore.

L'étude de ces questions est importante et on ne peut pas la trouver facilement dans la littérature. Il est donc intéressant d'obtenir une description concrète et précise dans chaque cas. Beaucoup a été fait mais il y a peut-être plus à faire.



# Bibliographie

- [1] M. Atiyah & R. Bott, *The Yang–Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308, pages 523–615, 1982.
- [2] M. Audin, *Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Birkhäuser, 2004.
- [3] W. Goldman, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Advances in Mathematics. Vol 54, pages 200–225, 1984.
- [4] W. Goldman, *Representations of fundamental groups of surfaces*, Geometry and Topology Vol 1167, pages 95–117, 1985.
- [5] F. Labourie, *Lectures on Representations of Surface Groups*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics EMS 2013.
- [6] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, 2011.
- [7] D. McDuff & D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 2017.
- [8] D. Michiels, *Moduli Spaces of Flat Connections*, Mémoire de Master, KU Leuven, 2013.
- [9] F. Palesi, *Dynamique sur les espaces de représentations de surfaces non-orientables*. Thèse de Doctorat Grenoble 2009.
- [10] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 2016.

## Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'espace de modules des représentations d'un groupe de surface et l'analyse des résultats de Goldman [3] qui montre que, sous certaines conditions sur  $G$ , l'espace de modules  $\text{Hom}(\pi, G)/G$  est une variété différentielle. Nous avons aussi étudié la construction de la forme symplectique sur cet espace quotient qui est basée sur deux approches :

- En terme de cohomologie de groupes.
- Par la théorème de réduction de Marsden-Meyer-Weinstein.

Nous avons montré la structure symplectique de l'espace de modules à l'aide du théorème de réduction.

**Mots clefs :** groupe de surface, espace de modules,  $G$ -fibrés plats, forme symplectique.

---

## Abstract

The object of this thesis is to study the moduli space of surface group representations and to analyze the results of Goldman [3] who shows that the moduli space  $\text{Hom}(\pi, G)/G$  is a smooth manifold under certain conditions on  $G$ . We study also the construction of the symplectic form on this space which is based on two approaches :

- In terms of group cohomology.
- The Marsden-Meyer-Weinstein reduction theorem.

We have shown the symplectic structure of the moduli space using the reduction theorem.

**Keywords :** surface group, moduli space, flat  $G$ -bundles, symplectic form.