



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière



DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option: Modélisation et Analyse numérique

Par: CHINOUNE HANANE

Thème

**Éléments finis inversé pour
approcher un problème elliptique en
demi-ligne**

Soutenu publiquement le: 29/09/2020

Devant le jury composé de:

Dr. Mohamed Kouidri	M.C.B Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Dr. Salima Azouz	M.C.B. Ecole Normale Supérieure- Ouargla	Examinateur
Dr. Kaliche Keltoum	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicace

Je dédie ce travail à mes parents et à mes frères et soeurs, à tous les membres de ma famille, à mes amies
A tous ceux qui a donné un mot pour la force de continuer.

Remerciement

En préambule à ce mémoire, je remercie ALLAH qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

En second lieu, je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur **Mlle :Kaliche keltoum** sur ses précieux conseils et je remercie également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail .

Table des matières

Dédicace	i
Remerciement	ii
Notations	vi
Introduction	1
1 Le cadre fonctionnel : Les espaces de Sobolev avec poids	3
1.1 Les espaces de Sobolev à poids	3
1.1.1 Notations et définitions	3
1.1.2 l'espace sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	5
1.1.3 Les espaces de Sobolev à poids	6
1.1.4 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$	7
1.1.5 Les espaces de traces	8
1.2 Inégalités de Hardy	9
2 Discrétisation du problème par les éléments finis inversés	10
2.1 La formulation variationnelle du problème	11
2.2 L'existence et l'unicité	12
2.3 Discrétisation du problème	16
2.3.1 L'espace discret	16
2.3.2 Estimation d'erreur	19

3	Quelques tests numériques	20
3.1	Fonctions de base. La matrice de rigidité	21
3.2	Résultats numériques	25
3.2.1	Code de calcul	27

Table des figures

2.1	Décomposition du domaine $\Omega =]\eta, +\infty[$	16
2.2	La transformation Ω_∞ à $\hat{\Omega}$	16
2.3	Une illustration d'un maillage gradué de l'intervalle $]0, 1[$ pour $\mu = 0.2, 0.5, 1$. . .	18
3.1	La solution exacte et la solution approchée dans l'intervalle $[-1, 50]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 10$, $\gamma = -0.5$, $\alpha = 0.5$	26
3.2	Les solutions exacte et approchée dans l'intervalle $[-1, 10]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 4.5$, $\gamma = 0.5$	27

Notations

- ✓ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; ouvert.
- ✓ $\partial\Omega$; frontière de Ω .
- ✓ $\langle, \rangle_{E', E}$; produit de dualité E', E .
- ✓ δ_{ij} ; symbole de Kronecker.
- ✓ ∇u ; gradient de u défini par $\nabla u \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.
- ✓ $a \lesssim b$; signifie qu'il existe une constante $c > 0$ tel que $a \leq c b$.

Introduction

Une grande classe des problèmes rencontrés en physique et ingénierie tels que l'aérodynamique, la mécanique des fluides, la chimie quantique et l'astrophysique à des équations aux dérivées partielles posées en domaine non bornés, tels que l'espace tout entier, des domaines extérieurs, ou les demi-ligne. Plusieurs méthodes numériques sont abordées pour résoudre tels problèmes. L'une de ces méthodes est la méthode des éléments finis inversés [9].

L'avantage de cette méthode est qu'elle préserve l'infini du domaine. Son idée principale est de diviser le domaine géométrique en deux parties choisies librement : une partie bornée où les éléments finis usuelles sont utilisés et une partie non bornée où les éléments finis inversés sont utilisés. Cette dernière partie est transférée à une partie bornée par une transformation inversée.

L'objectif de ce travail est d'utiliser cette méthode pour résoudre une équation elliptique du second ordre de la forme

$$-\frac{d}{dx} \left(a(\cdot) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{dans } x \in]\eta, +\infty[\quad (1)$$

posée sur le demi-ligne de type $] \eta, +\infty[$ avec $\eta \in \mathbb{R}$. La méthode repose sur l'utilisation des espaces de Sobolev à poids. Ces espaces sont des extensions des espaces de Sobolev classiques, mais qui sont munis de poids permettant de décrire la décroissance ou la croissance des fonctions à l'infini.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre est devouè aux notations, définitions et quelques propriétés fondamentales des espaces de Sobolev usuels et des espaces de Sobolev à poids.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des équation elliptiques du second ordre dans le demi-ligne, où nous donnons d'abord une formulation variationnelle, ensuite nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème. Après, nous présentons la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés et à la fin nous donnons une estimation de l'erreur.

Le troisième chapitre sera consacré au calcul de la matrice de rigidité ; des résultats numériques sera présenter pour confirmer la convergence de la méthode et ses performances.

Le cadre fonctionnel : Les espaces de Sobolev avec poids

1.1 Les espaces de Sobolev à poids

1.1.1 Notations et définitions

Soit Ω un domaine (ouvert et connexe) de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) non nécessairement borné ayant une frontière $\partial\Omega$ régulière.

Soit u une fonction défini sur Ω . On dit que u est intégrable sur Ω si

$$\int_{\Omega} |u| dx < +\infty.$$

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point générique de \mathbb{R}^n , on note $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ et on note $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ la distance entre x et l'origine. On note

$$D^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}} \quad \text{avec } |\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ son dual (l'espace de distributions).

On définit ensuite pour $1 \leq p < +\infty$ l'espace suivant :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable tel que } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty;$$

quand $p = \infty$, on a la définie suivante :

$$L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\},$$

dont la norme est :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u(x)|.$$

Le symbole de kronecker est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz [3]) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , on a l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$, on note p' le conjugué de p défini par la relation suivante :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Définition 1.1. (Inégalité de hölder [3]). Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$. Alors

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega) \\ \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Remarque : Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout entier k , on note \mathbb{P}_k l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k . $\mathring{\mathbb{P}}_k$ le sous espace de \mathbb{P}_k formé par tout polynômes $P \in \mathbb{P}_k$ tel que $P(0) = 0$ (avec la convention $\mathbb{P}_k = \{0\}$ pour $k < 0$).

Définition 1.2. (Inclusion continue [3]). Soit A et B deux espaces de Banach.

On dit que A s'injecte continement dans B , et on note par : $A \hookrightarrow B$ si :

- (i) $A \subset B$.
- (ii) $\exists c > 0 : \|u\|_A \leq c \|u\|_B, \quad \forall u \in A$.

Théorème : (Représentation de Riesz-Fréchet [3].)

Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in H'$

une forme linéaire continue sur H .

Alors il existe un unique y dans H alors il existe un unique $y \in H$ tel que :

$$\forall x \in H, \quad f(x) = \langle y, x \rangle$$

Théorème (Lax-Milgram[6]) : Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$.

(i) a est une forme bilinéaire continue coercive sur $V \times V$:

$$\exists C > 0, |a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V.$$

et

$$\exists \beta > 0, a(u, v) \geq \beta \|u\|_V^2 \quad \forall (u, v) \in V \times V.$$

(ii) L est une forme linéaire continue sur V ,

$$\exists \gamma > 0, |L(v)| \leq \gamma \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Alors, il existe une unique solution $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

1.1.2 l'espace sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.2 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on désigne par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

muni de la norme suivante

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

et de semi norme suivante :

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Noter que pour $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace $L^p(\Omega)$.

En générale l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Nous soulignons ici quelques propriétés fondamentales de $W^{m,p}(\Omega)$:

1. L'espace $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.
2. Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est espace séparable .
3. Si $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est espace réflexif .

1.1.3 Les espaces de Sobolev à poids

Dans tout la suite, $\langle x \rangle$ désigne la fonction poids de base, définir par

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}.$$

Définition 1.1.3 ([1] et [8]) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'espace de Sobolev à poids, $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$, par

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\lambda| \leq m, \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Cet espace est un espace de Banach équipé de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|\langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u\|_p^p \right)^{1/p},$$

et de semi-norme

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x \rangle^\alpha D^\lambda u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Pour $m = 2$ et $\alpha = 0$, l'espace $W_0^{2,p}(\Omega)$ est

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \langle x \rangle^{-2}u, \langle x \rangle^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Et pour $m = 1$ et $\alpha = 0$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \langle x \rangle^{-1}u, \frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

1.1.4 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

On considère quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ ([2] et [1]) suivantes :

1. $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$
2. l'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$
3. On a les inclusions continues suivantes

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$$

4. Dans le cas $p = 2$, on note $W_\alpha^m(\Omega)$ au lieu de $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$. $W_\alpha^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsque munit du produit scalaire :

$$(u, v)_{W_\alpha^m(\Omega)} = \sum_{|\lambda| \leq m} \int_\Omega \langle x \rangle^{(\alpha-m+|\lambda|)} D^\lambda u \bar{D}^\lambda v dx.$$

5. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \varphi u \in W^{m,p}(\Omega)$$

est linéaire continue.

6. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \langle x \rangle^\beta u \in W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\Omega)$$

est un isomorphisme¹. L'application $u \mapsto \langle x \rangle^{-\beta} u$ est l'isomorphisme inverse.

7. Pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$ avec $|\lambda| \leq m$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto D^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est linéaire et continue.

On note $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ et on note $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$ son espace dual .

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a l'égalité

$$\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

1. un isomorphisme est un application linéaire et bijective

1.1.5 Les espaces de traces

Définition 1.1.4 [1] Pour $1 < p < +\infty, s \in]0, 1[$ on pose

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^{-s} u \in L^p(\mathbb{R}^n); \forall i = 1, \dots, n, \\ \int_0^{+\infty} t^{-1-sp} dt \int_{\mathbb{R}^n} |u(x + te_i) - u(x)|^p dx < \infty\}$$

avec e_1, e_2, \dots, e_n désignent les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Pour $s \in \mathbb{R}_+$, on désigne par $[s]$ la partie entière de s . On introduit l'espace $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.1.5 [1] Pour $1 < p < +\infty, s \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in W_{[s]-s}^{[s],p}(\mathbb{R}^n) \mid \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, |\lambda| = [s], \mathcal{D}^\lambda u \in W_0^{s-[s],p}(\mathbb{R}^n)\}$$

et

$$W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^\alpha u \in W_0^{s,p}\}.$$

Rappelons la définition de la trace d'ordre j pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}_+^n)$.

$$(\gamma_j \varphi)(x') = (D_n^j \varphi)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^j \varphi}{\partial x_n^j}(x', 0).$$

avec $x' = x_1, \dots, x_{n-1}$.

Théorème 1.1.6 [1] Il existe une application linéaire continue $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ avec les propriétés suivantes

- 1) Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$, $\gamma u = \left(u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial y}(x', 0), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x', 0)\right)$.
- 2) γ est un application surjectif.
- 3) $\gamma^{-1}(0) = \mathring{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

Nous pouvons alors définir l'espace

$$\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega); \gamma_0 u = \gamma_1 u = \dots = \gamma_{m-1} u = 0\}.$$

1.2 Inégalités de Hardy

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement important dans les espaces à poids.

lemme 1. 2. 1 (*Inégalité de Hardy [2]*)

Soient $1 < p < +\infty, \beta \neq 1$ et f une fonction mesurable positive sur $[0, +\infty[$ de sorte que

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^p t^{\beta+p} dt < +\infty.$$

On pose

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{+\infty} f(t) dt & \text{si } 1 > \beta, \\ \int_0^x f(t) dt & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} x^{-\beta} (F(x))^p dx \leq \left(\frac{p}{|\beta-1|}\right)^p \int_0^{+\infty} x^{p-\beta} (f(x))^p dx. \quad (1.2)$$

On renvoie à [5] et [7] pour tous les détails de la preuve. La conséquence suivante joue un rôle fondamental dans l'étude des problèmes. Il s'agit d'une extension des inégalités de Poincaré.

Corollaire 1.2.1 Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. On suppose que

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \dots, m\}.$$

Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall u \in \dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega), \quad \|u\|_{\dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C_1 |u|_{m,\alpha,\Omega}.$$

où

$$|u|_{m,\alpha,\Omega} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x \rangle^\alpha D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le corollaire reste vraie pour $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \omega$, où ω est un domaine borné non vide et lipshitzien.

Discrétisation du problème par les éléments finis inversés

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution du problème elliptique de la forme suivante

$$-\frac{d}{dx} \left(a(\cdot) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad x \in \Omega$$

par la méthode des éléments finis l'inversés. D'abord on cherche la formulation variationnelle associée à ce problème où on choisit comme cadre fonctionnel l'espace $W_0^1(\Omega)$. Ensuite, on montre l'existence et l'unicité du problème par le théorème de Lax-Milgram. Après, on donne la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés et à la fin on donne une estimation d'erreur.

2.1 La formulation variationnelle du problème

On considère l'équation elliptique définie par :

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.1)$$

où Ω le demi-ligne $]\eta, +\infty[$ avec $\eta \in \mathbb{R}$, f est une fonction donnée et $a(x), b(x), c(x)$ sont des coefficients variables.

En plus, on considère la condition au limite de Dirichlet suivante :

$$u(\eta) = 0 \quad (2.2)$$

On cherche une solution de (2.1) dans l'espace $W_0^1(\Omega)$, dont ses fonctions vérifient

$$\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{x^2 + 1} dx < +\infty, \int_{\Omega} |u'(x)|^2 dx < +\infty.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\langle x \rangle^2} + \int_{\Omega} |u'(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous recherchons la formulation variationnelle du problème.

En multipliant l'équation(2.1) par une fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, et en intégrant les deux cotés sur l'espace $]\eta, +\infty[$, on obtient :

$$-\int_{\Omega} (a(x)u'(x))'v(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

En appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} (a(x)u'(x))v'(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Nous introduisons l'espace

$$\mathring{W}_0^1(\Omega) = \{u \in W_0^1(\Omega) \mid u(\eta) = 0\}$$

et d'après la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathring{W}_0^1(\Omega)$, la formulation faible s'écrit sous la forme suivante

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathring{W}_0^1(\Omega) \text{ telque} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathring{W}_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec

la forme bilinéaire :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (a(x)u'(x))v'(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx$$

et la forme linéaire :

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

2.2 L'existence et l'unicité

Dans cette section, on va montrer l'existence et l'unicité du problème (2.1). Premièrement, on considère les hypothèses suivantes

(H₁) $a \in L^{\infty}(\Omega)$ et il existe une constante $a_0 > 0$ telle que

$$a(x) \geq a_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

(H₂) $b \in W_2^{1,\infty}(\Omega)$, et $c \in W_2^{0,\infty}(\Omega)$ c'est-à-dire qu'il existe trois constantes b_1, b_2 et c_1 telles que

$$|b(x)| \leq \frac{b_1}{\langle x \rangle}, \quad |b'(x)| \leq \frac{b_2}{\langle x \rangle^2}, \quad |c(x)| \leq \frac{c_1}{\langle x \rangle^2}, \quad \text{sur } \Omega.$$

(H₃) $f \in W_0^{-1}(\Omega)$.

La dernière hypothèse (H₃) est notamment valable lorsque $f \in W_1^0(\Omega)$ c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} (|x|^2 + 1) |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

lemme 2. 2. 2 [10] *Supposons que les hypothèses (H₁), (H₂) et (H₃) sont vérifiées. Une fonction $u \in W_0^1(\Omega)$ est une solution de (2.1) si et seulement si*

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in W_0^1(\Omega), \quad (2.4)$$

Preuve.

(2.1) \Rightarrow (2.4) il est clair. On va montrer que (2.4) \Rightarrow (2.1)

Comme u est une solution de (FV) et puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset \dot{W}_0^1(\Omega)$. On a pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

on intègre par partie donc

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} (a(x)u'(x))'v(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx &= \int_{\Omega} f(x)v(x)dx & \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \\
\int_{\Omega} (-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x))v(x)dx &= \int_{\Omega} f(x)v(x)dx & \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \\
\int_{\Omega} ((-a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx &= 0 & \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).
\end{aligned}$$

donc

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) - f(x) = 0 \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Pour la condition au limite on a

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathring{W}_0^1(\Omega),$$

et comme u est solution dans $\mathring{W}_0^1(\Omega)$ donc $u(\eta) = 0$. ■

Dans la suite, nous allons utiliser l'inégalité de Hardy suivante:

lemme 2. 2. 3 [10] *il existe une constante $\pi_0 > 0$ telle que:*

$$\forall u \in \mathring{W}_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |u'(x)|^2 dx \geq \pi_0 \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2 + 1} dx. \quad (2.5)$$

On suppose que

(H_4) Il existe une constante $\pi'_0 < \pi_0$ telle que

$$c(x) - \frac{b'(x)}{2} \geq -\pi'_0 \frac{a_0}{\langle x \rangle^2}, \quad \text{dans } \Omega.$$

Proposition 2.2.1 *Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors, le problème (2.3) admet une solution unique $u \in W_0^1(\Omega)$, vérifiant*

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\Omega)}. \quad (2.6)$$

Preuve. Pour montrer l'existence et l'unicité du problème (2.1), on applique le théorème de Lax-Milgram(2.4).

Nous montrons la continuité de la forme linéaire $L(\cdot)$. On a

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \langle x \rangle f(x) \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx \right| \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \langle x \rangle^2 f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \frac{|v(x)|^2}{\langle x \rangle^2} dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \|\langle x \rangle^{-1} v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{d'après l'hypothèse } (H_3)) \\
&\leq \tilde{C} \|v\|_{W_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Passant maintenant à la continuité de $a(\cdot, \cdot)$. Une intégration par parties de $a(u, v)$ donne :

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} a(x)u'(x)v'(x)dx - \int_{\Omega} (b(x)v(x))'u(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx \\
&= \int_{\Omega} a(x)u'(x)v'(x)dx - \int_{\Omega} b'(x)u(x)v(x)dx - \int_{\Omega} b(x)u(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx. \\
&= \int_{\Omega} a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} (c(x) - b'(x))u(x)v(x)dx - \int_{\Omega} b(x)u(x)v'(x)dx.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |a(x)u'(x)v'(x)|dx + \int_{\Omega} |(c(x) - b'(x))u(x)v(x)|dx + \int_{\Omega} |b(x)u(x)v'(x)|dx \\
&\leq \int_{\Omega} |a(x)||u'(x)||v'(x)|dx + \int_{\Omega} \langle x \rangle |b(x)| \frac{|u(x)|}{\langle x \rangle} |v'(x)|dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \langle x \rangle^2 (|c(x)| + |b'(x)|) \frac{|u(x)|}{\langle x \rangle} \frac{|v(x)|}{\langle x \rangle} dx.
\end{aligned}$$

De l'hypothèse (H_1) et (H_2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq a_1 \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + b_1 \|\langle x \rangle^{-1} u\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + (c_1 + b_2) \|\langle x \rangle^{-1} u\|_{L^2(\Omega)} \|\langle x \rangle^{-1} v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq a_1 \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} + b_1 \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} + (c_1 + b_2) \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} \\
&\leq \max(a_1, c_1 + b_2, b_1) \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} \\
|a(u, v)| &\leq C \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

d'où la continuité.

Pour la coercivité de $a(., .)$, on a

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_{\Omega} a(x)|v'(x)|^2 dx + \int_{\Omega} b(x)v'(x)v(x) dx + \int_{\Omega} c(x)|v(x)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} a(x)|v'(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} b'(x)|v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)|v(x)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} a(x)|v'(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \left[c(x) - \frac{b'(x)}{2} \right] |v(x)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} a(x)|v'(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \langle x \rangle^2 \left[c(x) - \frac{b'(x)}{2} \right] \frac{v(x)^2}{\langle x \rangle^2} dx
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H_1) , (H_4) et de l'inégalité de Hardy, il en résulte que

$$\begin{aligned}
a(v, v) &\geq a_0 \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx - \pi'_0 a_0 \int_{\Omega} \frac{|v(x)|^2}{\langle x \rangle^2} dx \\
&\geq a_0 \left(1 - \frac{\pi'_0}{\pi_0} \right) \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \\
&\geq c |v|_{W_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Donc toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, alors le problème (2.1) admet une solution unique dans $W_0^1(\Omega)$.

De plus, l'unique solution satisfait :

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\Omega)} \quad (2.7)$$

En effet, l'estimation (2.7) est s'obtient en prenant $v = u$ dans (2.3) et en utilisant la continuité de la forme L et la coercivité de la forme bilinéaire a :

$$C \|u\|_{W_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \|f\|_{W_0^{-1}(\Omega)} \|u\|_{W_0^1(\Omega)}$$

avec $C = a_0 \left(1 - \frac{\pi'_0}{\pi_0} \right)$. On obtient

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\Omega)}$$

■

2.3 Discrétisation du problème

2.3.1 L'espace discret

On décompose le demi-ligne $\Omega =]\eta, +\infty[$, en deux sous-domaines tel que:

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_\infty,$$

avec

- $\Omega_0 =]\eta, R[$ un domaine borné, tel que $R > 0$ une paramètre fixé.
- $\Omega_\infty =]R, +\infty[$ un domaine non borné.

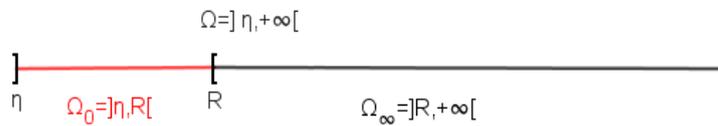


FIGURE 2.1 – Décomposition du domaine $\Omega =]\eta, +\infty[$.

Nous considérons l'application d'inversion

$$x \mapsto t(x) = \frac{R^2}{x}, \quad (2.8)$$

qui transforme le sous-domaine non borné Ω_∞ en domaine borné $\hat{\Omega} =]0, R[$.

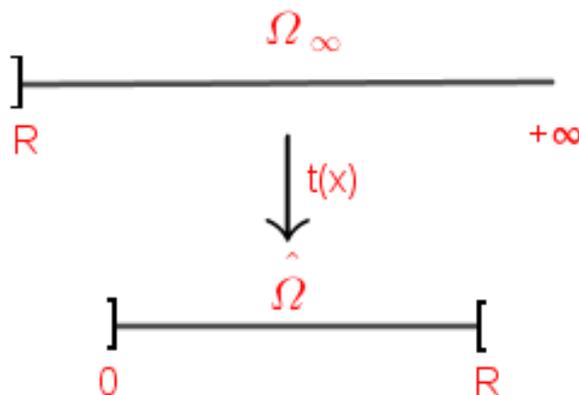


FIGURE 2.2 – La transformation Ω_∞ à $\hat{\Omega}$.

Étant donné une fonction w définie sur Ω_∞ , Nous désignons par \hat{w} la fonction définie sur $\hat{\Omega}$ par :

$$\hat{w}(x) = \left(\frac{R}{x}\right)^\gamma w(t(x)), \quad \forall x \in \hat{\Omega} \quad (2.9)$$

où γ est un paramètre réel fixé.

Définition 2.3.1 Soient $m \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty[$, on note $V_\theta^{m,p}(\hat{\Omega})$ l'espace composé des fonctions satisfaisant

$$\forall k \leq m, \quad |x|^{\theta+k-m} u^{(k)} \in L^p(\hat{\Omega}).$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{V_\theta^{m,p}(\hat{\Omega})} = \left(\sum_{k \leq m} \int_{\hat{\Omega}} |x|^{(\theta+k-m)p} |u^{(k)}|^p dx \right)^{1/p}.$$

lemme 2. 3. 4 [10] Soit $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on a $\hat{w} \in V_\delta^{1,2}(\hat{\Omega})$ avec

$$\delta = \gamma + 1.$$

La discrétisation sur Ω_∞ est obtenue à partir de la discrétisation sur $\hat{\Omega} =]0, R[$, en utilisant la transformation définie en (2.8).

Dans le domaine Ω_0 , nous utilisons des éléments finis standard. Nous considérons une partition habituelle $x_0 = \eta < x_1 < \dots < x_N = R$ de Ω_0 et on note

$$h = \max_{i \in I} |x_{i+1} - x_i| \text{ et } \Delta_i =]x_i, x_{i+1}[\text{ pour } i \in I, \text{ où } I = \{0, \dots, N-1\}.$$

Sur le domaine $\hat{\Omega}$, on construit une partition graduée comme suit.

Définition 2.3.2 Étant donné un nombre réel μ ($0 < \mu \leq 1$). On dit qu'une famille de partition $((\hat{x})_{1 \leq i \leq M})$ de l'intervalle $]0, R[$ est μ -graduée s'il existe trois constantes $\kappa_i > 0, i = 1, 2, 3$, ne dépendant pas de la partition, telle que

$$\kappa_1 \hat{h}^{1/\mu} \leq \hat{x}_1 \leq \kappa_2 \hat{h}^{1/\mu},$$

$$\forall 1 \leq i \leq k-1, \quad \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i \leq \kappa_3 \hat{h} \hat{x}_i^{1-\mu},$$

où $\hat{h} = \max_{1 \leq i \leq K-1} (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)$.

Un moyen de construire une famille de maille de μ -graduée est comme suit ; considérons la suite finie croissante $(\theta_i^*)_{1 \leq i \leq K}$ définie par $\theta_1^* = 1, \theta_{i+1}^* = \theta_i^* + (\theta_i^*)^{1-\mu}$, pour $1 \leq i < M$.

Alors, la partition de $\hat{\Omega} =]0, R[$ est donné par

$$\hat{x}_i = \frac{\theta_i^*}{\theta_M^*} R, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq M$$

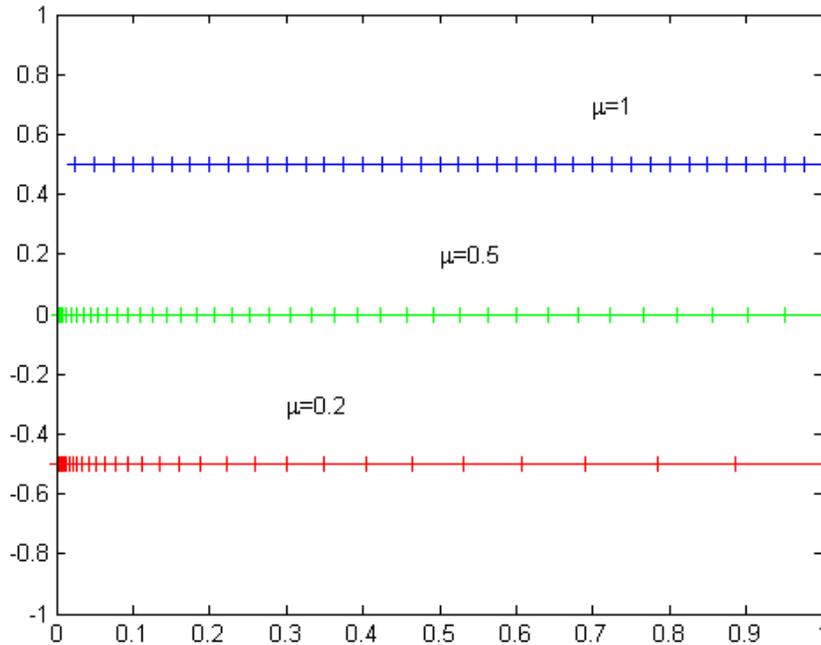


FIGURE 2.3 – Une illustration d'un maillage gradué de l'intervalle $]0, 1[$ pour $\mu = 0.2, 0.5, 1$.

Considérons maintenant une partition de μ -graduées de $\hat{\Omega}$

$\hat{x}_0 = 0 < \dots < \hat{x}_M = R$, on note $\hat{\Delta}_i =]\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}[$, pour $i \in J = \{0, 1, \dots, M-1\}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'espace discret qui approche l'espace $\dot{W}_0^1(\Omega)$ par

$$W_h(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}); v|_{\Delta_i} \in \mathbb{P}_k(\Delta_i), \forall i \in J \right. \\ \left. \hat{v}|_{\hat{\Delta}_i} \in \mathbb{P}_k(\hat{\Delta}_i), \forall i \in J, \text{ et } \hat{v}(0) = 0 \right\}$$

$$\dot{W}_h(\Omega) = \{v_h \in W_h(\Omega) \mid v_h(\eta) = 0\}$$

on remarque que l'espace W_h dépend du choix de sous-domaines Ω_0 et Ω_∞ (le paramètre R), des paramètres de maillage h et μ et de paramètre γ convenablement fixé.

De plus, nous avons

lemme 2.3.5 [10] *Supposons que $\gamma > \frac{-3}{2}$. Alors*

$$\dot{W}_h(\Omega) \subset \dot{W}_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Donc, on suppose que

$$\gamma > \frac{-3}{2}.$$

Alors, le problème approché associé au problème variationnelle est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \dot{W}_h(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in \dot{W}_h(\Omega) \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce problème est bien posé et admet une solution unique dans $\dot{W}_h(\Omega)$.

2.3.2 Estimation d'erreur

Théorème 2.3.3 [10] *Supposons que les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) soient vérifiées.*

Supposons aussi que $u \in W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega)$ pour certains vrais $\eta > 0$ et que

$$\eta - \frac{3}{2} < \gamma < \eta - \frac{1}{2}.$$

Alors l'estimation suivante est vérifiée

$$\|u - u_h\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + \hat{h}^{k \min(\mu^*, \mu)/\mu} \|u\|_{W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega_\infty)},$$

tel que $\mu^ = \frac{\eta}{k} > 0$.*

Notons que l'inégalité d'estimation de l'erreur est presque identique à celle de la méthode des éléments finis avec l'apparition du facteur $(\min \mu^*)$ qui suggère que l'erreur décroît si μ décroît.

Pour la démonstration de ce théorème voir [10].

———— Chapitre 3 ————

Quelques tests numériques

Dans ce chapitre, nous expliquons comment calculer la matrice de rigidité. Puis, on donne des résultats numérique qui montrent le rôle et l'efficacité de cette méthode.

3.1 Fonctions de base. La matrice de rigidité

Soit $w_i, i \in I$, les fonctions de base des éléments finis habituelles définies sur Ω et satisfaisant :

pour tout $i \in I$

- $w_i \in \mathring{W}_h(\Omega)$.
- $w_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in I$
- $w_i(x_N) = 0$.

De même, on définit la famille des fonctions de base $(w_i^*)_{i \in J}$ comme suit :

- $w_i^* \in \mathring{W}_h(\Omega)$.
- $\widehat{w}_i^*(\hat{x}_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in I$
- $\widehat{w}_i^*(\hat{x}_M) = 0$.

La dernière fonction de base, notée ici par w_N , est mixte ; son support s'étend aux régions MEF et MEFI. C'est la fonction unique de $\mathring{W}_h(\Omega)$ satisfaisant

- $w_N(\hat{x}_N) = \widehat{w}_N(\hat{x}_M) = 1$.
- $w_N(x_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq N-1$.
- $\widehat{w}_N(\hat{x}_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq M-1$.

On peut facilement prouver que la famille composée des fonctions

$(w_i)_{0 \leq i \leq N-1}, (w_i^*)_{0 \leq i \leq M-1}$ et w_N forme une base de $\mathring{W}_h(\Omega)$.

La dimension de l'espace $\mathring{W}_h(\Omega)$ est

$$\dim \mathring{W}_h(\Omega) = (N + M) - 1. \quad (3.1)$$

Maintenant, on note $(\psi_m)_{1 \leq m \leq d}$, avec $d = (N + M) - 1$, cette base.

Pour tout $u_h \in \mathring{W}_h(\Omega)$, u_h est décomposé de la forme suivante

$$u_h = \sum_{i=1}^d u_i \psi_i,$$

on note w_i la restriction de ψ_i sur Ω_0 et w_i^* la restriction de ψ_i sur Ω_∞ , donc

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i(x_i) w_i + \sum_{i=1}^{M-1} \widehat{u}_i(\hat{x}_i) w_i^*.$$

Proposition 3.1.1 *Le problème discret (2.11) est équivalent au système linéaire*

$$AU = B, \quad (3.2)$$

avec $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ telle que $A_{ij} = a(\psi_i, \psi_j)$, $B_i = l(\psi_i)$ et U est l'inconnu .

Preuve. D'après le problème approché,

$$a(u_h, v_h) = L(v_h)$$

et on a

$$u_h = \sum_{i=1}^d u_i \psi_i.$$

Donc

$$a\left(\sum_{i=1}^d u_i \psi_i, v_h\right) = L(v_h), \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h(\Omega)$$

On choisit $v_h = \psi_j$ alors

$$a\left(\sum_{i=1}^d u_i \psi_i, \psi_j\right) = L(\psi_j), \quad j = 1, \dots, d$$

et comme $a(\cdot, \cdot)$ est forme bilinéaire, alors

$$\sum_{i=1}^d u_i a(\psi_i, \psi_j) = L(\psi_j), \quad j = 1, \dots, d$$

qui est un système linéaire avec $A = A_{i,j} = a(\psi_i, \psi_j)$ et $B = B_i = L(\psi_j)$.

Maintenant, on explique comment calculer les coefficients de la matrice A,

$$A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i) = a(w_i, w_j) + a(w_i^*, w_j^*)$$

avec

$$\begin{aligned} a(w_i, w_j) &= \int_{\Omega_0} a(x) w_i'(x) w_j'(x) dx + \int_{\Omega_0} b(x) w_i'(x) w_j(x) dx + \int_{\Omega_0} c(x) w_i(x) w_j(x) dx, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N-1. \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\Delta_k} a(x) w_i'(x) w_j'(x) dx + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\Delta_k} b(x) w_i'(x) w_j(x) dx + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\Delta_k} c(x) w_i(x) w_j(x) dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a(w_i^*, w_j^*) &= \int_{\Omega_\infty} a(x) w_i^{*\prime}(x) w_j^{*\prime}(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_\infty} b(x) w_i^{*\prime}(x) w_j^*(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_\infty} c(x) w_i^*(x) w_j^*(x) dx, \quad \forall 1 \leq i, j \leq M-1. \end{aligned}$$

On pose

$$I^1 = \int_{\Omega_\infty} a(x)w_i^{\star\prime}(x)w_j^{\star\prime}(x)dx,$$

$$I^2 = \int_{\Omega_\infty} b(x)w_i^{\star\prime}(x)w_j^{\star}(x)dx,$$

$$I^3 = \int_{\Omega_\infty} c(x)w_i^{\star}(x)w_j^{\star}(x)dx,$$

On pose $x = t(s)$, donc on a

$$\begin{aligned} \widehat{w}^{\star}(s) &= \left(\frac{R}{s}\right)^\gamma w^{\star}(t(s)), \quad \forall s \in \widehat{\Omega} \\ w^{\star}(t(s)) &= \left(\frac{R}{s}\right)^{-\gamma} \widehat{w}^{\star}(s) = \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}^{\star}(s), \quad \forall s \in \widehat{\Omega}. \end{aligned}$$

Par dérivation, on trouve

$$(w^{\star}(t(s)))' = \frac{\gamma}{R} \left(\frac{s}{R}\right)^{\gamma-1} \widehat{w}^{\star}(s)(s) + \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}^{\star\prime}(s)$$

alors

$$w^{\star\prime}(t(s)) * t'(s) = \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}^{\star}(s) + \widehat{w}^{\star\prime}(s)\right]$$

donc

$$-w^{\star\prime}(t(s)) \left(\frac{R}{s}\right)^2 = \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}^{\star}(s) + \widehat{w}^{\star\prime}(s)\right]$$

d'où

$$w^{\star\prime}(t(s)) = - \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}^{\star}(s) + \widehat{w}^{\star\prime}(s)\right] \left(\frac{s}{R}\right)^2$$

Alors, le premier intégrale I^1 s'écrit

$$\begin{aligned} I^1 &= \int_{\Omega_\infty} a(x)w_i^{\star\prime}(x)w_j^{\star\prime}(x)dx \\ &= - \int_{\widehat{\Omega}} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_i^{\star}(s) + \widehat{w}_i^{\star\prime}(s)\right] \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_j^{\star}(s) + \widehat{w}_j^{\star\prime}(s)\right] \left(\frac{R}{s}\right)^2 \left(\frac{s}{R}\right)^4 ds \\ &= - \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\widehat{\Delta}_k} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_i^{\star}(s) + \widehat{w}_i^{\star\prime}(s)\right] \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_j^{\star}(s) + \widehat{w}_j^{\star\prime}(s)\right] \left(\frac{R}{s}\right)^2 \left(\frac{s}{R}\right)^4 ds \\ &= - \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\widehat{\Delta}_k} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_i^{\star}(s) + \widehat{w}_i^{\star\prime}(s)\right] \left[\frac{\gamma}{s} \widehat{w}_j^{\star}(s) + \widehat{w}_j^{\star\prime}(s)\right] \left(\frac{s}{R}\right)^2 ds \\ &= - \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\widehat{\Delta}_k} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left[\frac{\gamma}{R} \widehat{w}_i^{\star}(s) + \frac{s}{R} \widehat{w}_i^{\star\prime}(s)\right] \left[\frac{\gamma}{R} \widehat{w}_j^{\star}(s) + \frac{s}{R} \widehat{w}_j^{\star\prime}(s)\right] ds \end{aligned}$$

On explicite maintenant, le calcul de la deuxième intégrale, on a

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\Omega_\infty} b(x)w_i^*(x)w_j^*(x)dx \\
&= - \int_{\hat{\Omega}} b(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^2 \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left[\frac{\gamma}{s}\widehat{w}_i^*(s) + \widehat{w}_i^{*\prime}(s)\right] \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}_j^*(s) \cdot - \left(\frac{R}{s}\right)^2 ds \\
&= \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_k} b(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^2 \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left[\frac{\gamma}{s}\widehat{w}_i^*(s) + \widehat{w}_i^{*\prime}(s)\right] \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}_j^*(s) \left(\frac{R}{s}\right)^2 ds \\
&= \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_k} b(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \left[\frac{\gamma}{s}\widehat{w}_i^*(s) + \widehat{w}_i^{*\prime}(s)\right] \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}_j^*(s) ds \\
&= \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_k} b(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma-1} \left[\frac{\gamma}{R}\widehat{w}_i^*(s) + \frac{s}{R}\widehat{w}_i^{*\prime}(s)\right]\widehat{w}_j^*(s) ds
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
I^3 &= \int_{\Omega_\infty} c(x)w_i^*(x)w_j^*(x)dx \\
&= - \int_{\hat{\Omega}} c(t(s)) \left[\left(\frac{R}{s}\right)^{-2\gamma} \widehat{w}_i^*(s)\widehat{w}_j^*(s)\right] \left(\frac{R}{s}\right)^2 ds \\
&= - \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_k} c(t(s)) \left[\left(\frac{R}{s}\right)^{-2\gamma} \widehat{w}_i^*(s)\widehat{w}_j^*(s)\right] \left(\frac{R}{s}\right)^2 ds \\
&= - \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_k} c(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma-2} \widehat{w}_i^*(s)\widehat{w}_j^*(s) ds
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$B_i = L(\psi_i) = L(w_i) + L(w_i^*)$$

avec

$$\begin{aligned}
L(w_i) &= \int_{\Omega_0} f(x)w_i(x)dx \\
L(w_i) &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\Delta_k} f(x)w_i(x)dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L(w_i^*) &= \int_{\Omega_\infty} f(x)w_i^*(x)dx, \quad \forall 1 \leq i \leq M-1. \\
L(w_i^*) &= - \int_{\hat{\Omega}} f(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^\gamma \widehat{w}_i^*(s) \left(\frac{R}{s}\right)^2 ds \\
L(w_i^*) &= - \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\hat{\Delta}_k} f(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{\gamma-2} \widehat{w}_i^*(s) ds
\end{aligned}$$

■

En pratique, pour calculer les intégrales sur $\hat{\Delta}_k$, nous utilisons les Formules de Gauss-Lobatto et les Formules de quadrature [4].

3.2 Résultats numériques

On mise en oeuvre la méthode des éléments finis inversés pour le problème (1.2) en utilisant les éléments de lagrange $\mathbb{P}1$ dans la région des éléments finis et la région des éléments finis inversés. Le domaine que nous considérons est le demi-ligne $\Omega =] - 1, +\infty[$. Dans $\Omega_0 =] - 1, R[$ le nombre des points équidistants discrétisés est N et M dans $\hat{\Omega}$ avec $M = 2N$. Notre code de calcul est écrit dans matlab.

Exemple 1 : On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{dans } \Omega =] - 1, +\infty[. \\ u(-1) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte $u(x) = \frac{x+1}{(1+(x+1)^2)^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Et la fonction donnée $f(x) = \frac{6\alpha(x+1)}{(1+(x+1)^2)^{\alpha+1}} - \frac{4\alpha(\alpha+1)^3}{(1+(x+1)^2)^{\alpha+2}}$.

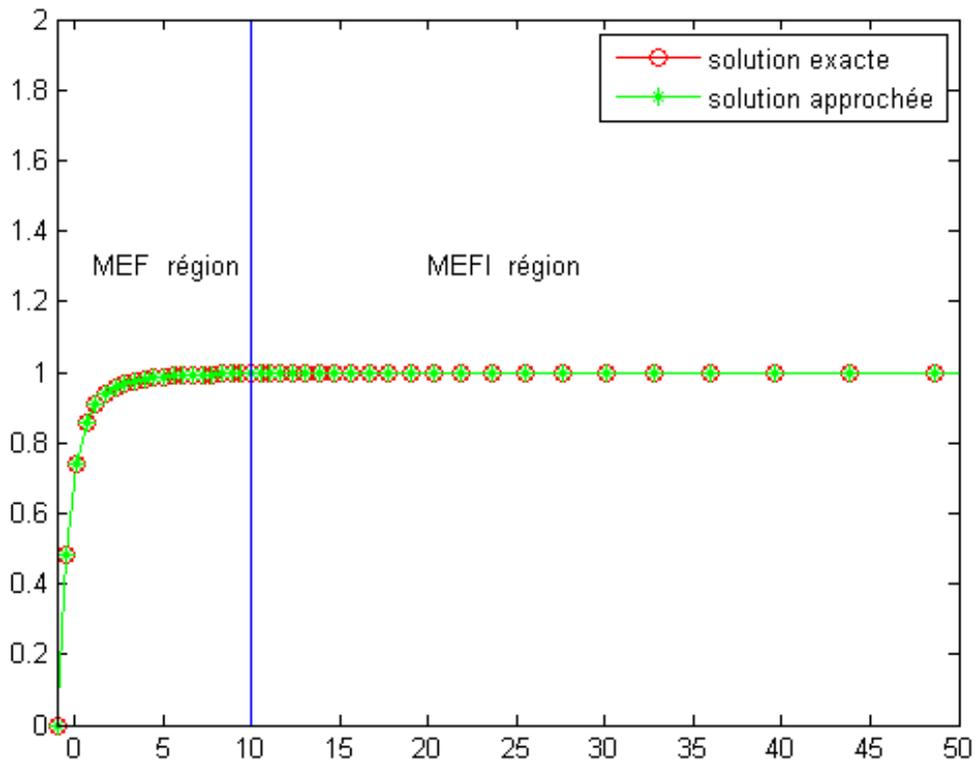


FIGURE 3.1 – La solution exacte et la solution approchée dans l'intervalle $[-1, 50]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 10$, $\gamma = -0.5$, $\alpha = 0.5$.

Exemple 2 : On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x) & \text{dans } \Omega =]-1, +\infty[. \\ u(-1) = 0 \end{cases}$$

avec

$$a(x) = 1 + (1/5)\sin(20(x+1)).$$

La solution exacte est donnée par :

$$u(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{((x+1)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}.$$

à partir de solution $u(x)$ nous trouvons $f(x)$.

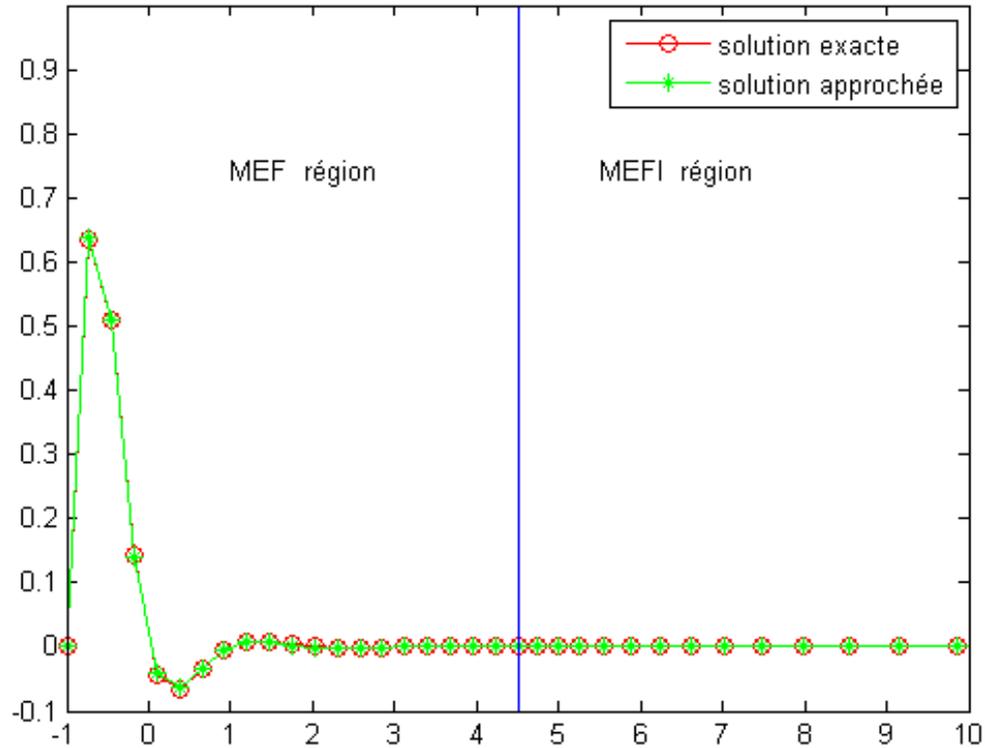


FIGURE 3.2 – Les solutions exacte et approchée dans l'intervalle $[-1, 10]$ pour $M = 2N$ avec $N = 20$ et $R = 4.5$, $\gamma = 0.5$.

3.2.1 Code de calcul

Dans cette paragraphe, nous présentons les étapes essentielles que nous avons suivi dans notre programme Matlab ;

- 1- Faire la déclaration des paramètres suivantes

R =la taille de l'intervalle borné.

N =le nombre des points de discrétisation sur $\Omega_0 =]\eta, R[$.

M =le nombre des points de discrétisation sur $\hat{\Omega} =]0, R[$.

μ =paramètre de gradation du maillage.

γ =l'exposant de la transformation de Ω_∞ à $\hat{\Omega}$

- 2- Construire le maillage de $\Omega =]\eta, \infty[$. On définit un maillage uniforme sur Ω_0 et un maillage gradué sur $\hat{\Omega}$.

-
- 3- Calculer la matrice A et le vecteur B ; on calcule séparément la matrice A (repr. le vecteur B) sur Ω_0 et sur $\hat{\Omega}$.
 - 4- Résoudre le système linéaire $AU = B$.
 - 5- Donner un exemple pour le tester.
 - 6- Afficher les résultats numérique obtenus.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode des éléments finis inversés pour approcher la solution d'un problème elliptique du second ordre posé sur le demi-ligne $]\eta, +\infty[$. Parmi les avantages de cette méthode, on cite ; l'absence de toute frontière artificielle et la facilité de sa mise en oeuvre.

Les résultats numériques obtenus confirment l'efficacité de la méthode et son énorme potentiel.

Perspectives :

- Traiter des problèmes en domaine extérieur.
- Comparer cette méthode avec d'autres méthodes.

Bibliographie

- [1] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 46: 227–272, 1971.
- [2] Bolley, J. Camus. Quelque résultat sur les espaces de Sobolev avec poids. Pub. Sémin. Mat. Inf. Univ. Rennes, 1968-1969.
- [3] Brezis,H. : Functional Analysis,Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York 2011.
- [4] Gautschi, W. and S. Li (1991). Gauss–Radau and Gauss–Lobatto quadratures with double end points. J. Comput. Appl. Math. 34(3), 343–360.
- [5] G.H.Hardy ; J. E. Littlewood ; G. Pòlya : Inequalities , Cambridge University Press, 1952.
- [6] J-L. Guermond A. Ern. Eléments finis: théorie, applications, mise en oeuvre. Springer, 2001.
- [7] Kadlec et Kufner , Characterisation of functions with zero traces by integrals with weight functions (I and II) ; Casopis pro pestovani matematiky, 92 (1967).
- [8] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space: an approach using weighted spaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 26(8) : 633–669, 2003.
- [9] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problems in unbounded domains. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39(1) :109–145, 2005.

-
- [10] T. Z. Boulmezaoud, S. Mziou, and T. Boudjedaa. Numerical approximation of second-order elliptic problems in unbounded domains,. *Journal of Scientific Computing*, 60(2): 295-312, 2014.

العنوان: عناصر منتهية معكوسة لمقاربة مشكلة إهليلجية في نصف مستقيم.

الكلمات المفتاحية: مشكلة إهليلجية ، مجال غير محدود ، عناصر منتهية معكوسة ، فراغات سوبوليف بالوزن.

الملخص: الهدف من هذا العمل هو حل معادلة إهليلجية من الدرجة الثانية مطروحة على نصف مستقيم باستخدام طريقة العناصر المنتهية المعكوسة. ميزة هذه الطريقة انها تحافظ على لامحدودية المجال الهندسي. بداية نعرف إطارا تابعيا مناسباً يصف سلوك الدوال في مالانهاية. بعد تطبيق هذه الطريقة ودراسة تقاربها ، نقدم بعض النتائج العددية التي تم الحصول عليها ببرنامج ماتلاب ذو بعد واحد.

Title: Finite elements inverted to approximate elliptical problem in half-line.

Keywords: Elliptic problem, unbounded domains, inverted finite elements, weighted Sobolev spaces.

Abstract : The aim of this work is to solve an elliptical equation of second order posed on half-line by the inverted finite element method. The advantage of this method is the preserve the infinity of the geometric domain. First, we present an appropriate functional framework that describes the behavior of functions at the infinity. After, implementing the method and analyzing its convergence, we will show some numerical results obtained with a one-dimensional code of matlab.

Titre : Éléments finis inversé pour approcher un problème elliptique demi-ligne.

Mots-clè: Problème elliptique, domaine non bornés, éléments finis inversés, espaces de Sobolev à poids.

Résumé: L'objectif de ce travail est de résoudre une équation elliptique du second ordre posé sur demi-ligne par la méthode éléments finis inversés. L'avantage de cette méthode est qu'elle préserve l'infinité du domaine géométrique. Dans un premier temps, nous présentons un cadre fonctionnel approprié qui permet de décrire le comportement des fonctions à l'infini. Après avoir implémenter la méthode et analyser sa convergence, on présentera quelques résultats numériques obtenus avec un code de matlab unidimensionnel.