UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
MASTER

N° d'ordre :
N° de série :

Mémoire

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Présenté par : HADJI Hanane

Thème

Etude d'un problème hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé avec un terme viscoélastique

Soutenu publiquement le : 04/10/2020

Devant le jury composé de :

Mohamed KOUIDRI	MCB	Université KASDI MERBAH- Ouargla	Président
Abdelkader AMARA	MCA	Université KASDI MERBAH- Ouargla	Examinateur
Mabrouk MEFLAH	MCA	Université KASDI MERBAH- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

A mes très chers parents :

A mon père Rahimaho Allah

et ma mère Allah te protège

pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A directeur et Meflah pour ses conseils, des instructions et ses directions

A le jury pour accepté discuter du projet de master

A toute ma famille mes frères et mes sœurs leur soutien tout au long de mon parcours universitaire. Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et de votre soutien infaillible.

Merci d'être toujours là pour moi

pour tous aux qui m'ont aider, tous les membres de ma class, tous mes professeurs.

Remerciement

Tout d'abord, je remercie mon Dieu pour la santé, le courage qu'Il m'accordé tout au long de ma cursus, en particulier durant la période de réalisation de ce projet. Je tiens à remercier les membres du jury pour leur présence, pour leur lecture attentive de ma thèse ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail. Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de mémoire Mr. MEFLAH Mabrouk, professeur à l'université KASDI MERBAH de Ouargla, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université KASDI Merbah de Ouargla, pour tous leurs efforts durant ces années. Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès et m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire. Enfin, je remercie mes amis qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide. À tous ceux-ci, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des figures

Table des matières

Notations

✓ m : masse

✓ l : longueur

✓ t : temps

✓ T : température

✓ f : force

✓ L :l'operateur de Lamé où : $L = \mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla div.$

✓ f, g : fonction

✓ $divu$ la divergence de u

$$divu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

✓ g : fonction de relaxion.

la fonction de relaxation g :

$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$\begin{cases} \mu - \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0 \\ g(0) > 0 \end{cases}$$ Il existe deux constantes k_0 et k_1 avec $(k_0, k_1) \subset \mathbb{R}_+^2$

$$\begin{cases} k_0 \leq g'(t) \leq 0 \\ 0 \leq g''(t) \leq k_1 \end{cases}$$

✓ $\Delta u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: Laplacien de u.

✓ $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = grad\, u$: le gradient de u .

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

✓ $(.,.)_X$: le produit scalaire de X

✓ $\|.\|_X$: la norme de X

✓ $x_n \to x$: la converge forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X

✓ $x_n \rightharpoonup x$: la converge faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X

✓ $x_n \overset{\star}{\rightharpoonup} x$: la converge faible étoile de la suite (x_n) vers l'élément x dans X

✓ $p.p$: presque partout

Introduction

Les premières recherches sur le problème de vibrations d'un fil élastique ont été traitées par d'Alembert $(1717-1793)$ et Euler $(1707-1783)$, a proposé le modiele suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

il a remarqué que les configurations du déplacement du fil sont données par :

$$u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$$

Dans ce travail, le problème principal etude d'un problème hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé avec un terme viscoélastique la méthode régularisation .

Le travail est divisé de trois parties :

La première partie : en particulier, on peut citer les problèmes d'ondes linéaire que se propagent dans un milieu élastique homogène $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
La duxiéme partie qu'étudier l'équation d'onde hyperpolique non linéaire avec gouvernée par le système de Lamé.

La troisiéme partie qu'étudier du problème similaire aux problème similaire télégraphe.

En est passe par quatre chapitres.

Dans le premier, on donne des rappels d'analyse fonctionnelle utilises dans les trois autres chapitres.
Dans le deuxième chapitre, je travaille sur la modélisation de l'équation des ondes linéaire pour trouver l'équation suivent :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}$$

Et on pose le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad sur \quad x \in [0, l] \\ \begin{cases} \text{Les condition aux limites} \\ u(0,t) = 0, \quad \forall t \\ u(l,t) = 0, \quad \forall t \end{cases} \\ \begin{cases} \text{Les condition initiales} \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases} \end{cases}$$

Et étudie l'existence, l'unicité par deux méthode la méthode de séparation des variables et la méthode de caractéristique

Dans le chapitre trois on s'intéresse, hyperbolique non linéaire guvernée par le système de Lamé

Et on pose le problème suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u|^\rho u = f \quad sur \quad \mathcal{Q} = \Omega \times]0, +\infty[\quad \text{(I)} \\ u(x,t) = 0, \quad sur \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[\quad \text{(II)} \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \quad \text{(III)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = u_1(x), \text{ sur} \quad \Omega \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

Où

➤ ρ donné(on peut pourrait supposer seulement $\rho > -1$)

L est opérateur de Lamé, on note $L = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla div$.

On trouve que les problémes généralisent qui est proposé par J.L Lions [4].

Dans le chapitre qutre on s'intéresse, etude du problème similaire aux problème similaire télégraphe.

Et on pose le problème suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + u - \underbrace{Lu}_{\text{opérateur Lamé}} + \underbrace{\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau}_{\text{terme viscoélastique}} + \underbrace{|u|^\rho u}_{\text{terme non linéaire}} = f(x,t) \quad sur \quad \mathcal{Q} \end{cases} \tag{1}$$

et vérifiant aussi les condition (4.1)

$$\begin{cases} u(x,t) = 0, \quad sur \quad \Sigma = \Gamma\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = u_1(x), \ \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

➤ g la fonction de relaxation. On établit alors facilement par la méthode de régularisation, un théorème d'existence et d'unicité.

On trouve que les problèmes généralisent qui est proposé par J.L Lions [4].

Dans ce travail on suivra le plan suivant :

Chapitre 01 : Dans ce chapitre, on introduit rappels et notations générales.

Chapitre 02 : Dans ce chapitre, on donne deux method (séparation de variable et caractéristique) pour d'étude le problème d'onde linéaire .

Chapitre 03 : Dans ce chapitre, on donne le méthode de Galerkin d'étude le problème hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé.

Chapitre 04 : Dans ce chapitre, on donne la méthode de régularisation d'étude du problème similaire aux problème similaire télégraphe

1 Rappels et notations générales

Dans ce chapitre, nous donnerons quelques définitions de base, des théories importantes et des inégalités qui nous aideront et les utiliseront dans nos recherches. Nous avons puisé ces concepts à partir de plusieurs références et sources :$\left([3]-[1]-[9]-[15],\right)$ Nous avons essayé de les formuler séquentiellement pour que l'idée devienne claire :

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces fonctionnels

Les espaces de Sobolev sont un outil omniprésent dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Leur compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de **H. Brezis [[3]]** sur le sujet. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev .

Soit Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$

L'espace $\mathbf{L}^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables (pour la tribu de Borel) intégrables (pour la mesure de Lebesgue dx) sur Ω. On note :

$$||\mathbf{f}||_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \int_\Omega |\mathbf{f}|dx$$

On définit ensuite pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace :

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \left\{\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbf{f} \text{ mesurable et } |\mathbf{f}|^p \in \mathbf{L}^1(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \left(\int_\Omega |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega) = \{\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbf{f} \text{ mesurable et } \exists C \in \mathbb{R}_+, |\mathbf{f}| \leq C \text{ p.p}\}$$

dont la norme est :

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} = \inf\{C, |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq C \text{ p}, \text{p}\}$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note p' le conjugué de p, c'est á dire le réel p' tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

1.1.2 Espaces $L^p(0,T,X)$

Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Ici et dans toute la suite X désigne un espace de Banach et $T > 0$. . On définit les espaces suivants :

$$C\big([0,T];X\big) = \{u : [0,T] \Longrightarrow X \text{ continue}\},$$

$L^p(0,T,X) = \{u : (0,T) \to X$ mesurable ; $\exists c > 0, ||u(t)||_X < c$ p.p$\}$
muni de la norme :

$$||u||_{L^\infty(0,T,X)} = \inf\{c > 0,\ ||u(t)||_X < c \text{ p.p}\}$$

Remarque 1.1.1 *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0,T,X)$ *est un espace de Banach et* $C\big([0,T];X\big)$ *est dense dans* $L^p(0,T,X)$

1.1.3 Espaces $H^1(\Omega)$

Définition 1.1.2 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *L'espace de Sobolev* $\mathbf{H^1}(\Omega)$ *est défini par :*

$$\mathbf{H^1}(\Omega) = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \textit{tel que, } \forall i \in \{1,2,...,n\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}$$

où est la dérivée partielle faible de v *au sens des distributions. Muni du produit scalaire :*

$$< u, v > = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))dx \tag{1.1}$$

et de la norme

$$||u||_{\mathbf{H^1}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

1.1.4 Espaces $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $\mathbf{H^1}(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.1.3 *Soit $\mathcal{C}_c^\infty$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.*
On verra un peu plus loin que $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est en fait le sous-espace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ constitué des fonctions de trace nulle sur le bord $\partial\Omega$.
Muni du produit scalaire (1.1) l'espace de Sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.1.5 Espaces $\mathrm{H}^m(\Omega)$

Définition 1.1.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel.*

On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $\mathrm{H}^m(\Omega)$. L'ensemble :

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \left\{u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\, D^\alpha u \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\right\}$$

Où

$$D^\alpha \mathbf{u} = \frac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$ *désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec*

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

1.1.6 Quelques propriétés des espaces $\mathbf{H}^m(\Omega)$

(i) On munit l'espace $\mathbf{H}^m(\Omega)$ du produit scalaire :
$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})_{L^2}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$ La norme associée étant donnée par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{H}^m(\Omega)}} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha \mathbf{u})^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.
(ii) Pour $m = 0$ on a $\mathbf{H}^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a :

$$\mathrm{H}^{m_1}(\Omega) \subset \mathrm{H}^{m_2}(\Omega) \text{ avec injection continue.}$$

(iii) Pour tout $m \geq 0, \mathrm{H}^m(\Omega)$ est un espace séparable. (iv) Pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $\mathrm{H}_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}\,\text{dans}\,H^m(\Omega)$$

et par $\mathbf{H}^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $\mathbf{H}_0^m(\Omega)$ (v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) / \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial \eta^j} = 0, \forall j = 0, \dots, m-1 \right\}$$

oú : $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u suivant la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x)\eta_i, \quad \forall x \in \Gamma$$

1.2 Topologie faible

Définition 1.2.1 *Soit E un espace normé et E' sin dual topologique. On appelle topologie faible sur E et que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$. On peut recenser les ouverts qui doivent appartenir a la topologie faible de la manière suivante :*
Si $f \in E'$ et $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$; il faut que $f^{-1}(U)$ soit un ouvert de $\sigma(E, E')$. Mais, comme les intervalles ouvert forment une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, on voit que ceci revient a dire que pour tout intervalle I et tout $f \in E'$, $f^{-1}(I)$ est dans $\sigma(E, E')$. On vient de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.2.2 *La topologie $\sigma(E, E')$ est la moins fine contenant touts les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in E'$ et tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.*
Donnons une base de voisinage commode pour $\sigma(E, E')$.

Corollaire 1.2.3 *Les ouverts de la forme $\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(I_i)$, où $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$ et $I_i = 1, ..., k$, sont des intervalles ouverts quelconques de $\mathbb{R}$ forment une base de voisinages de $\sigma(E, E')$. Alors, les ouverts de la forme :*

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}\left(\Big| f(x) - \varepsilon, f(x) + \epsilon \Big|\right), \, k \in \mathbb{N}, f_i \in E', \varepsilon > 0,$$

Forment une base de voisinages de $x \in E$.

Définition 1.2.4 *Si* $x_n \to x$ *dans* $\sigma(E, E')$, *On dit que* x_n *converge faiblement vers* x *dans* E. *on notera :*

$$x \rightharpoonup x_n \Leftrightarrow f(x) \to f(x_n) \quad \forall f \in E'$$

.

Preuve. (voir H. Brezis [3]). ■

1.3 Topologie faible étoile

Soit E un espace de Banach, E' son dual (muni de la norme $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{\substack{x \in E, \\ \|x\| \leq 1}} |< f, x >|$,

E' dual topologique muni de la norme :

$$||\xi||_{E''} = \sup_{\substack{f \in E', \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\xi(f)|$$

On a une injection canonique $J : E \longrightarrow E'$. En effet, tout élément $x \in E$ définit un élément $J_x \in E''$ par :

$$J_x(f) = f(x)$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur E' puisque :

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq ||x||_E ||f||_{E'}.$$

En fait $||J_x||_{E''} = ||x||_E$ car :

$$||J_x||_{E''} = \sup_{\|f\| \leq 1} |J_x(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = ||x||_E$$

On adonc $J(E) \subset E''$. Cela va nous permettre de définir une nouvelle topologie sur E'.

Définition 1.3.1 *La topologie faible étoile, notée par* $\overset{\star}{\rightharpoonup}$. $\sigma(E, E')$ *est la topologie la mois fine rendant continues les formes linéaires* $f \to f(x)$, *pour tout* $x \in E$. *On a la base de voisinages de* $f_0 \in E'$ *pour la topologie faible.*

$$U = \{f \in E', \| < f - f_0, x_i > \| < \varepsilon, \ i = 1, ...n, \ x_i \in E, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 1.3.2 *Soit* E *un espace de Banach, si* (f_n) *est une suite de* E', *alors* f_n *converge vers* f *pour la topologie faible si et seulement si* $f_n(x) \to f(x)$, *pour tout* $x \in E$

1.4 Espaces réflexifs, espaces séparables

1.4.1 Espaces réflexifs

Définition 1.4.1 *Soit E un espace de Banach, et soit* j *l'injection canonique de* E *dans* E''. *On dit que* E *est réflexif si* $J(E) = E''$

On donne le résultat

Théorème 1.4.2 *Soit* E *un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

1.4.2 Espaces séparables

Définition 1.4.3 *On dit qu'un espace métrique est séparable sil existe un sous-ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense.*

Proposition 1.4.4 *Soit E un espace métrique séparable et soit* **F** *un sous-ensemble de* **E** *. Alors* **F** *est séparable.*

Preuve. Soit (u_n) une suite dénombrable dense dans E. Soit (r_m) une suite de réels positifs avec $r_m \to 0$. On choisit (arbitrairement) $a_{m,n} \in \mathbf{B}\,(u_n, r_m) \cap F$ lorsque cet ensemble est non vide. Il est clair que la suite $(a_{m,n})$ constitue un ensemble dénombrable dense dans F.
■

Corollaire 1.4.5 *Soit E un espace de Banach.*
Alors (E réflexif et séparable) $\Leftrightarrow$ E' *(réflexif et séparable)*

Preuve. Voir H. Brezis [3] (le démonstration de Corollaire III.24, page 48) ■

1.5 Opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert

Définition 1.5.1 *Soit* H *un espace de Hilbert, un opérateur linéaire continue* T *de* H *dans* H *est dit compact* s'il *transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.*

Proposition 1.5.2 *Un opérateur linéaire et compact si et seulement s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous suite fortement convergente.*

Remarque 1.5.3 *Le résultat de la proposition (1.5.2) peut remplacer la définition précé-dente*

Théorème 1.5.4 *On suppose que* H *est un espace de Hilbert séparable. Soit* T *un opérateur auto adjoint compact. Alors* H *admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de* T.

Preuve. Voir H. Brezis [3] (Théorème VI.11, page 97) ■

Proposition 1.5.5 *Tout opérateur symétrique* T *défini sur un espace de Hilbert* H, *à valeurs dans ce même espace* H *est un opérateur borné et auto adjoint.*

Preuve. Voir K. Yosida [16] (Proposition VIII.3.2, page). ■

Lemme 1.5.6 ***(cf. Lions [8] page 12)*** *Soit* $\mathcal{O}$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, *si* $\mathbf{g}_\mu \in \mathbf{L}^q(\mathcal{O})$ *et* $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^q(\mathcal{O})$ *avec* $(1 < q < \infty)$ *telles que :*

$$\begin{cases} \|g_\mu\|_{\mathbf{L}^q(\mathcal{O})} \leq C \\ g_\mu \to g \qquad \textit{p.p dans } \mathcal{O} \end{cases}$$

Alors :

$$g_\mu \overset{\mathbf{L}^q(\mathcal{O})}{\rightharpoonup} g\ , \quad (\textit{converge faible dans } \mathbf{L}^q(\mathcal{O}))$$

Preuve. (voir cf.Lions[8] lemme (1.3)page 13)) ■

1.6 Quelques inégalités important

1.6.1 Inégalité de Holder généralisée

Soit $1 \leq q, p \leq \infty$ et soient $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ avec :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

Alors, le produit $fg \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ et l'on a :

$$\underbrace{\left(\int_\Omega |fg|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}}_{||fg||_{\mathbf{L}^r(\Omega)}} \leq \underbrace{\left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}_{||f||_{\mathbf{L}^p(\Omega)}} \underbrace{\left(\int_\Omega |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{||g||_{\mathbf{L}^q(\Omega)}}$$

Lemme 1.6.1 *Soit* $f_1, f_2, ..., f_k \big(k$ *fonctions* $\big)$ *avec* $f_i \in \mathbf{L}^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ *et :*

$$\frac{1}{p} = \underbrace{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k}}_{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}} \leq 1,$$

Alors le produit $f_1 f_2 \ldots . f_k \ \left(= \prod_{i=1}^{k} f_i\right) \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ *et*

$$\left|\left|f_1 f_2 \ldots . f_k\right|\right|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \left|\left|f_1\right|\right|_{\mathbf{L}^{p_1}(\Omega)} \ldots . . \left|\left|f_k\right|\right|_{\mathbf{L}^{p_k}(\Omega)}$$

1.6.2 Inégalité d'interpolation

soit $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, q]$ et

$$\|\mathbf{f}\|_{L^r(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \|\mathbf{f}\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

1.6.3 Inégalité de Young

Soit p,q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^p + \frac{1}{2\varepsilon} b^q.$$

1.6.4 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Soit p un réel supérieur ou égal à 1 ; alors il existe une constante positive C telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Corollaire 1.6.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme :*

$$\|v\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left|\nabla v(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

est un norme sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induit par celle de $\mathbf{H}^1(\Omega)$

Théorème 1.6.3 ((Théorème de la trace)) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. On définit l'application trace γ_0 par :*

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\partial\Omega})$$

$$v \longrightarrow \gamma_0(v) = v\big|_{\partial\Omega}$$

Cette application γ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue telle que, pour toute fonction* $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. *On a*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

1.6.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace vectoriel. (u, v) est produit scalaire sur H . Alors

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2}.$$

1.6.6 Inégalité d'inclusion

Théorème 1.6.4 *Supposons que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est un ouvert avec* $|\Omega| = \int_\Omega dx = 1$. *Alors*

$$\mathbf{L}^q(\Omega) \subset \mathbf{L}^p(\Omega), \qquad \forall 1 \leq p \leq q < \infty$$

il existe une constante C*(dans notre cas,* $C = |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$*) telle que*

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \qquad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$$

1.7 Formule de Green

Rappelons qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et de frontière Γ est dit de classe C^k si Γ est une variété de dimension n-1 est de classe C^k

Théorème 1.7.1 (formule de green) *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^n$ *(par exemple* Ω *de classe* C^1 *avec* Γ *borné); alors pour tout* $u, v \in H^1(\Omega)$ *on a la formule de Green :*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)d\Gamma, \qquad i = 1, ..., n$$

η_i *est le* $i^{\text{ème}}$ *cosinus directeur de la normale* n *sortante.*

Preuve. On pourra consulter Raviart et Thomas [12] (Théorème 1.4.5, page 27). Cette formule est une " intégration par partie généralisée ". Sont importance est extrême par la suite.

■

Comme conséquence de ce théorème, on a :

Corollaire 1.7.2 *Si* $u, v \in H^1(\Omega)$ *et si* $\Delta u \in L^2(\Omega)$, *alors :*

$$\int \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)d\Gamma$$

Où

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n} \quad \textit{est le vecteur gradient de } u$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$$

Finalement, on rappelle certains lemmes et concepts utilisé souvent dans la démons- tration de l'existence et de l'unicité de la solution.

Lemme 1.7.3 (Gronwall) *Soient* $y \in L^\infty(]0;T[)$ *et* $x \in L^1(]0;T[)$ *deux fonctions positives et* y_0 *une constante positive, telles que :*

pour presque tout $t \in]0,T[$

$$y(t) \leqslant y_0 + \int_0^t x(s)y(s)ds$$

Alors, on a : pour presque tout $t \in]0,T[$

$$y(t) \leqslant y_0 \exp\left(\int_0^t x(s)ds\right)$$

Preuve. La démonstration est détaillée dans le livre de J. P. Demailly [4] ■

1.8 Définitions de l'opérateur a

Définition 1.8.1 *On dit que l'opérateur* a, *définit de* V *dans* V', *est*

1)a *est borné s'il existe* $C > 0$ *tel que :*

$$\|a(u)\|_{V'} \leq C\|u\|_v, \forall u \in V$$

2)a *est Coercive s'll existe* $\alpha > 0$ *tel que :*

$$(a(u), u) \geq \alpha\|u\|_V^p, \forall u \in V, \alpha > 0, 1 < p < \infty$$

où bien

$$\frac{(a(u), u)}{\|u\|_V} \longrightarrow +\infty, \quad \textit{quand } \|u\|_v \longrightarrow +\infty$$

3) Monotone de V dans V' *sil vérifie :*

$$\forall u, v \in V : (a(u) - a(v), u - v)_{V',V} \geq 0$$

4) Hémicontinu de V dans V' *s'il vérifie la propriété suivante :*

$\forall u, v, w \in V$ *la fonction* $\lambda \to (a(u + \lambda v), w)_{V',V}$ *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *.*

Remarque 1.8.2 *La monotonie généralise la notion de fonction croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

2 Equation d'onde linéaire

2.1 Description de l'équation d'onde

On considère une corde inextensible, de masse linéique ρ tendue horizontalement avec une force constante $\mathbf{F}$.

A l'équilibre, la corde est horizontale.

On supposera dans la suite que la pesanteur n'intervient pas (sinon, la forme de la corde serait une chainette).

On se propose d'étudier les petits mouvements au voisinage de cet équilibre, avec le modèle suivant :

✓ L'élément de corde situé au point de coordonnées $(x, 0)$ à l'équilibre se trouve au point de coordonnées $(x, y(x, t))$ hors équilibre ; autrement dit, on néglige son déplacement le long de (Ox).

✓ L'angle $\alpha(x, t)$ que fait la tangente à la corde au point d'abscisse x à l'instant t est un infiniment petit ($\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha \approx \alpha$.

✓ Si on considère une coupure fictive au point d'abscisse x, l'action exercée par la partie gauche de la corde sur la partie droite se réduit à une force tangente à la corde notée $\overrightarrow{T}_g(x, t)$.

De même, l'action exercée par la partie droite sur la partie gauche se réduit à une force $\overrightarrow{T}_d(x, t)$.

D'après le principe des actions réciproques, $\overrightarrow{T}_d(x, t) = -\overrightarrow{T}_g(x, t)$.

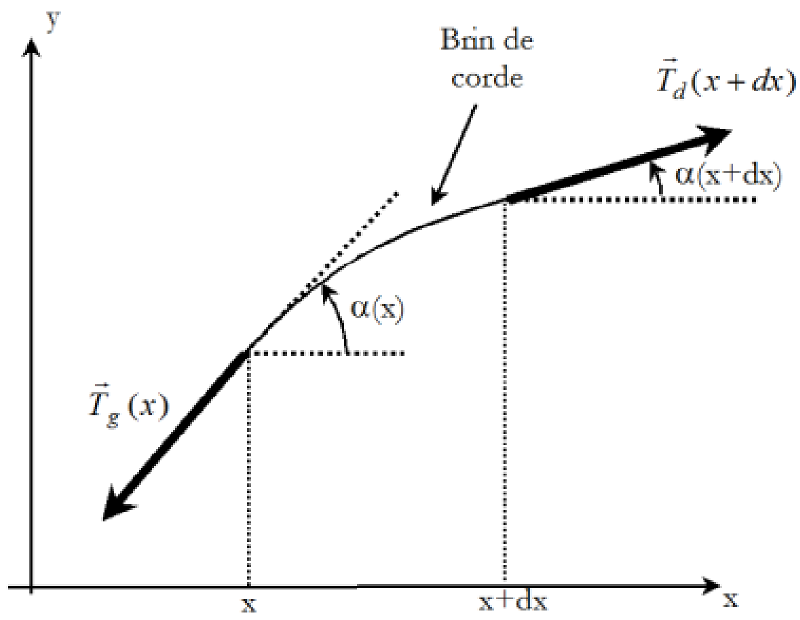


FIGURE 2.1 : Etablissement de l'équation d'onde

Le théorème du CI appliqué à un élément de corde situé entre les abscisses x et $x + dx$ donne :

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}_g(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t) = -\vec{T}_d(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t)$$

En projection, et en notant $T = ||\vec{T}_d||$:

$$\begin{cases} 0 = -T(x,t)\cos\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t) & (1) \\ \rho dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x,t)\sin\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\sin\alpha(x+dx,t) & (2) \end{cases}$$

Si on se limite à l'ordre 1, l'équation (1) donne :

$$T(x+dx) = T(x) = cste = F$$

L'équation (2) se réécrit :

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F\alpha(x,t) + F\alpha(x+dx,t) = F\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

Or

$$\tan\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x} \approx \alpha$$

D'où :

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

On retrouve là encore l'équation d'ondes de d'Alembert.

Dans le cas de la corde, l'onde est dite transversale (le déplacement a lieu selon Oy).

2.1.1 Résolution par la méthode de séparation des variables

1. **Séparation des variables :**

   On pose l'équation de la corde vibrante dans le problème $\hat{\mathcal{P}}$ suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad sur \quad x \in [0, l] \\ \begin{cases} \text{Les condition aux limites} \\ u(0,t) = 0, \quad \forall t \\ u(l,t) = 0, \quad \forall t \end{cases} \\ \begin{cases} \text{Les condition initiales} \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases} \end{cases}$$

   On pose que la solution $u(x,t)$ écrit comme le produit de deux fonction à variables séparées :

$$u(x,t) = v(x).w(t)$$

   Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}.w(t) \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}.w(t) = v_{xx}.w(t) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(x).\frac{\partial w}{\partial t} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x).\frac{\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)}{\partial t} = v(x).w_{tt} \tag{2.2}$$

   On remplace l'équation (2.1) et l'équation (2.2) dans le problème ($\hat{\mathcal{P}}$) on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff v_{xx}.w(t) = \frac{1}{c^2}v.w_{tt} \iff \frac{v_{xx}}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{w_{tt}}{w}$$

Comme il s'agit de deux variables x et t qui sont indépendantes, les expressions dans chaque membre de droite et de gauche ne peuvent être en tous temps égaux que seilles sont égales à un constant arbitraire k :

$$\frac{1}{c^2}\frac{w_{tt}}{w} = \frac{v_{xx}}{v} = k$$

On obtient deux équation séparées .ces équations sont des équations différentielles ordinaires du second ordre.

$$v_{xx} - kv = 0$$

$$w_{tt} - c^2 kw = 0$$

2. **On détermine $v(x)$:**

$$v_{xx} - kv = 0$$

$$\begin{cases} \text{Si } k = 0 \text{ alors} & \\ & v(x) = ax + b \quad (*) \\ \text{Si } k > 0 & \\ & v(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x} \quad (**) \\ \text{Si } k < 0 & \\ & v(x) = A\cos(\sqrt{k}x) + B\sin(\sqrt{k}x) \quad (***) \end{cases}$$

Vérifier les conditions aux limites :

On remplace la solution (*) dans les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0,t) = v(0).w(t), \forall t \\ \\ u(l,t) = v(l).w(t) = 0, \forall t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ \\ v(l) = 0 \end{cases}$$

On démontrer que les deux premier formes ne peuvent exister puisque

$$\begin{cases} v(0) = a(0) + b \implies b = 0 \\ \\ v(l) = a(l) + 0 \implies a = 0 \end{cases} \Longrightarrow v(x) = 0\,\forall x \implies u(x,t) = 0\,\forall x$$

On remplace la solution (**) dans les conditions aux limites

$$\begin{cases} v(0) = v(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x} = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \\ \text{ensuite } v(l) = c_1 e^{\sqrt{k}.l} + c_2 e^{-\sqrt{k}.l} = 0 \implies c_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0 \implies v(x) = 0\ \forall x \\ \\ v(l) = 0 \end{cases}$$

Il reste alors que (***) .on remplace (***) dans les conditions aux limites

$$v(0) = A\cos(\sqrt{k}.0) + B\sin(\sqrt{k}.0) = 0 \implies A = 0$$

Ensuite $\quad v(l) = 0.\cos(\sqrt{k}.l) + B\sin(\sqrt{k}.l) = 0 \implies \begin{cases} B = 0 \\ \sin(\sqrt{k}l) = 0 \end{cases}$

On choisit $\quad B \neq 0 \implies \sin(\sqrt{k}l) = 0$

Alors $\sqrt{k}l = n\pi \implies \sqrt{k} = \frac{n\pi}{l}$

Donc la forme de solution de $v(x)$ est :

$$v_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x), \qquad n \in \mathbb{N}$$

3. **Conséquence sur la fonction temporelle $w(t)$:**

$$w_{tt} - c^2 k w = 0$$

$$\begin{cases} \text{pour } c^2k = 0 \text{ alors} \\ \qquad w(t) = at + b \quad (1) \\ \text{pour } c^2k > 0 \\ \qquad w(t) = c_1 e^{\sqrt{k}t} + c_2 e^{-\sqrt{k}t} \quad (2) \\ \text{pour } c^2k < 0 \\ \qquad w(t) = A\cos(\sqrt{k}t) + B\sin(\sqrt{k}t) \quad (3) \end{cases}$$

De la même manière pour les solutions $v_n(x)$ Or seule la solution (3) à est retenir puisqu'on avait déjà restreint :

$$K = -(\frac{n\pi}{l}) = i^2(\frac{n\pi}{l})^2 < 0$$

On multiplions par c^2 on trouve

$$c^2K = -c^2(\frac{n\pi}{l}) < 0$$

Puisque c la constante physique de propagation, ne peut être imaginaire. En conséquence, nous avons également ensemble de solutions pour $w(t)$

$$w(t) = A_n \cos(\frac{cn\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{cn\pi}{l}t) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

On déduit qu'il ya l'ensemble de solution dans la forme générale :

$$u_n(x,t) = v_n(x).w_n(x)$$

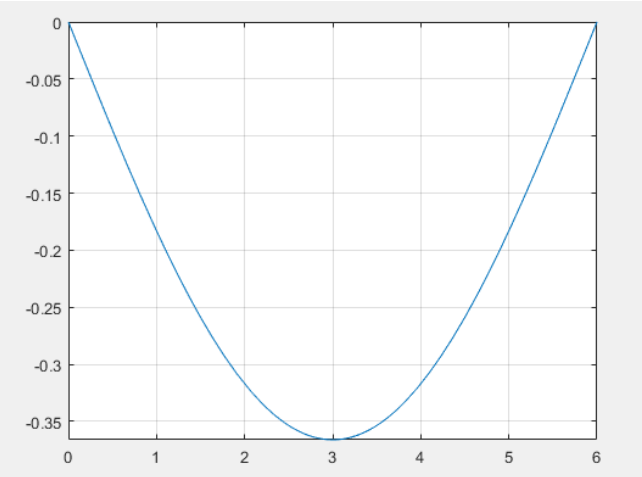
$$u_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi}{l}x).\Big(A_n \cos(\frac{cn\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{cn\pi}{l}t)\Big)$$

Avec

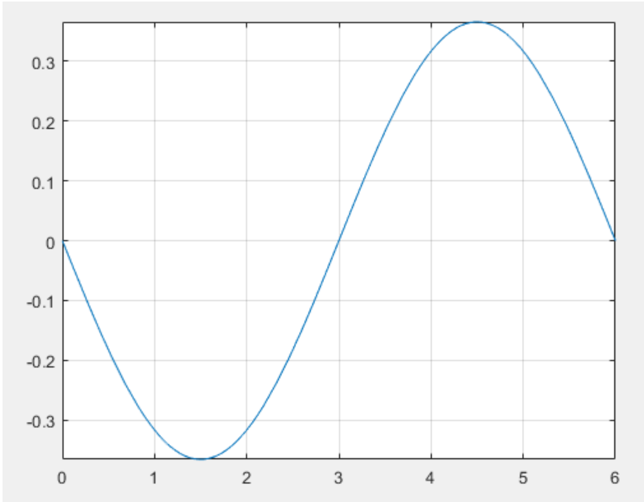
$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx \\ B_n = \dfrac{2}{cn\pi}\displaystyle\int_0^l g(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx \end{cases}$$

Interprétation

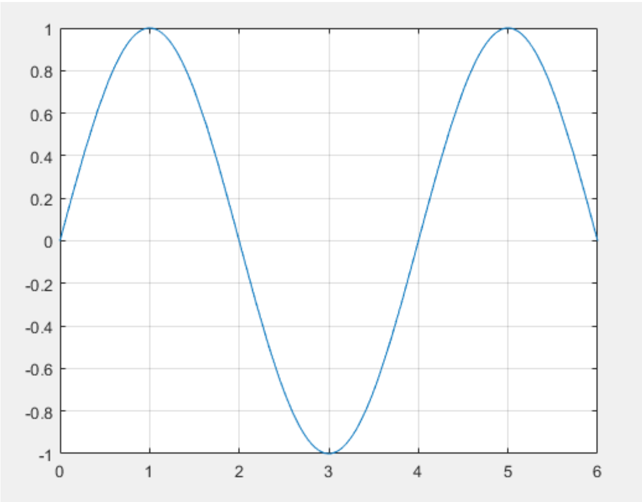
Pour chaque x fixé le mode $\sin(\frac{n\pi}{l}x)(A_n\cos(\frac{nc\pi}{l}t) + B_n\sin(\frac{nc\pi}{l}t))$ est juste un temps constant $\cos(\frac{nc\pi}{l}t)$ plus un temps constant $\sin(\frac{nc\pi}{l}t)$, lorsque t augmente d'une seconde



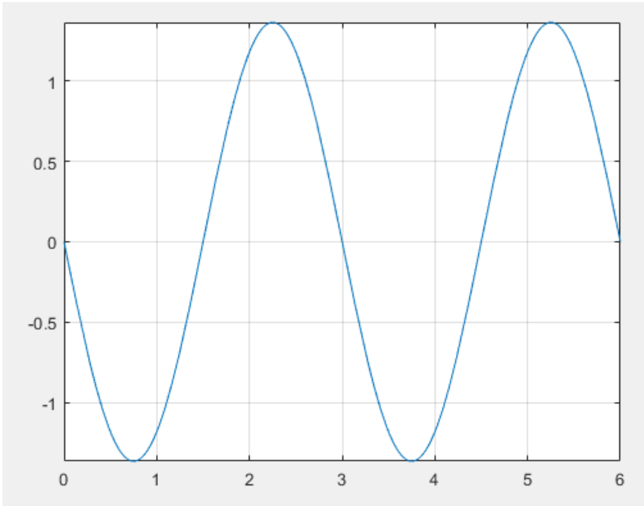
n=1



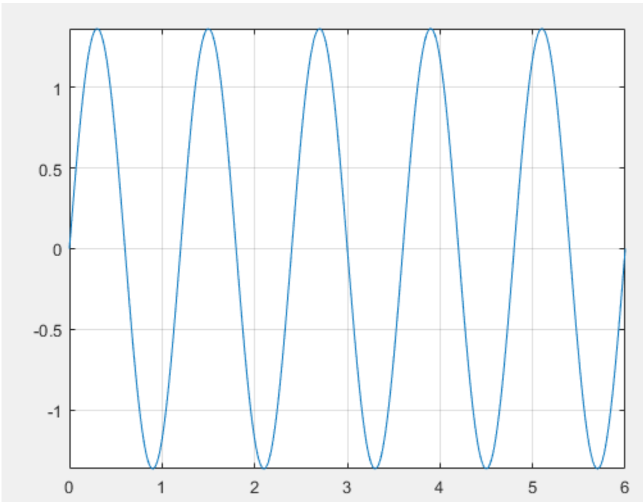
n=2



n=3



n=4



n=10

FIGURE 2.2 : Le changement de solution $u_n(x, t)$ en termes de changement de n

l'argument $\frac{nc\pi}{l}t$ des deux $\cos(\frac{nc\pi}{l}t)$ et $\sin(\frac{nc\pi}{l}t)$ augmente de $\frac{nc\pi}{l}$, lequel est $\frac{nc}{2l}$ cycles (c'est -à-dire périodes). Donc, le fondamental oscille à $\frac{c}{2l}$ le premier harmonique oscille à $2\frac{c}{2l}t$ la deuxième harmonique oscille à $3\frac{c}{2l}$ Le troisième harmonique oscille à $4\frac{c}{2l}$ Le quatrième harmonique oscille à $5\frac{c}{2l}$...etc. Neuvième harmonique oscille à $10\frac{c}{2l}$etc. Si la chaîne a une densité ρ, tension F et $c = \sqrt{\frac{T}{\rho_0}}$

4. **Solution complète de problème $\hat{\mathcal{P}}$**

   Soit $u_n(x,t) = v_n(x).w_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x).\left(A_n \cos(\frac{cn\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{cn\pi}{l}t)\right)$ Alors on a les propriétés suivant

   ✓ Chaque valeur de n conduit à un mode de vibration

   ✓ fonction $u_n(x,t)$ est appelait **une fonction propre**, et chaque angle $\alpha_n = \frac{n\pi c}{l}$ est appelé **une valeur propre**

   ✓La solution générale est **une combinaison linéaire** de tout les forme solution :

$$u_g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{cn\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{cn\pi}{l}t)\right) \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

   La solution générale est un produit scalaire d'une série de Fourier d'une fonction temporelle pour une série de Fourier en x

5. **Détermination des coefficients de Fourier A_n et B_n**

   On a :

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{cn\pi}{l}0) + B_n \sin(\frac{cn\pi}{l}0)\right) \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

   Après calculer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n\right) \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

   Nous permettons de calculer les coefficients A_n selon les formes connues d'Euler pour les fonction périodiques $p = 2l$:

$$A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x) \sin\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi}{l}x dx$$

   , Avec $f(x) sin\frac{n\pi}{l}x$ une fonction paire.

   Par introductions de la 2ème condition initiale $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = g(x)$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{A_n cn\pi}{l}\sin\frac{cn\pi}{l}t + \frac{B_n cn\pi}{l}\cos\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{cn\pi}{l}x\right]|_{t=0} = g(x)$$

   Donc

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n cn\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Il s'agit, une fois encore, de calculer les coefficients B_n selon les formules d'Euler pour les fonction périodiques $p = 2l$:

$$\begin{aligned}\frac{B_n cn\pi}{l} &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\ &= \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \Longrightarrow B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^{+l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\end{aligned}$$

Avec $g(x)$ une fonction impaire.

Donc la solution générale est :

$$u_g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.\cos\frac{cn\pi}{l}t + \frac{2}{cn\pi}\int_0^{+l} g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.\sin\frac{cn\pi}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2.1.2 Résolution par la méthode de caractéristique

On pose l'équation d'onde pour $u(x,t)$:

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2.3}$$

On considère le problème de Cauchy en domaine ouvert avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = g(x)\end{cases}$$

En utilise le changement de variables $\varphi = x + ct$ et $\psi = x - ct$.

L'équation d'onde se transforme en :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial\psi} = 0$$

En effet :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = c\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c\left[\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial\psi})}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial\psi})}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] \\ &= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial\psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{\partial u}{\partial\psi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\left[\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{\partial u}{\partial\psi})}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial\psi})}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] \tag{2.5}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$$

On remplace (2.4) et (2.5) dans (2.3), on trouve :

$$4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} = 0 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} = 0$$

D'autre manière :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right) = 0$$

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = G'(n)$$

En intégrant maintenant par rapport à ψ avec φ fixe,on obtient :

$$u(x,t) = G(\psi) + F(\varphi)$$

Ou

$$u(x,t) = G(x - ct) + F(x + ct)$$

Calculer maintenant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} = F'(\varphi) - G'(\psi)$$

En $t = 0$, en soit que $u(x,0) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = g(x)$, on l'exprime en fonction des résultats précédents

$$F(x) + G(x) = f(x)$$

$$F'(x) - G'(x) = -\frac{g(x)}{c}$$

On résoudre pour G' et F' comme suite :

$$G' = \frac{1}{2}\left(f'(x) + \frac{g(x)}{c}\right)$$

Et

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) + \frac{g(x)}{2c}\right)$$

En intégrant, on trouve :

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g'(x')dx' + C$$

Et

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g'(x')dx' - C$$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= G(x-ct) - F(x-ct) \\
&= \frac{(f(x-ct)+f(x+ct)}{2} - \frac{1}{2c}\left[\int_0^{x-ct} g(x')dx' - \int_0^{x+ct} g(x')dx'\right] \\
&= \frac{(f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x-ct} g(x')dx'
\end{aligned}
$$

2.2 Résultat sur Mathématica Wolfram

2.2.1 Résoudre le problème dans D1

Dans cette partie, nous représentons les résultats numérique dans le programme Mathématica Wolfram, et nous avons également crée un code pour l'onde élastique

le résultat de D1 sur Mathématica Wolfram

Out[5]=
$$\left\{\left\{u \to \text{Function}\left[\{x, t\}, \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{4\,(1+2\,(-1)^m)\,\text{Cos}[t\,m]\,\text{Sin}[x\,m]}{m^3}\right]\right\}\right\}$$

Out[6]=
$$4\,\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[x] - \frac{3}{2}\,\text{Cos}[2\,t]\,\text{Sin}[2\,x] + \frac{4}{27}\,\text{Cos}[3\,t]\,\text{Sin}[3\,x] - \frac{3}{16}\,\text{Cos}[4\,t]\,\text{Sin}[4\,x]$$

FIGURE 2.3 : La solution laquelle converge la solution de l'équation d'onde

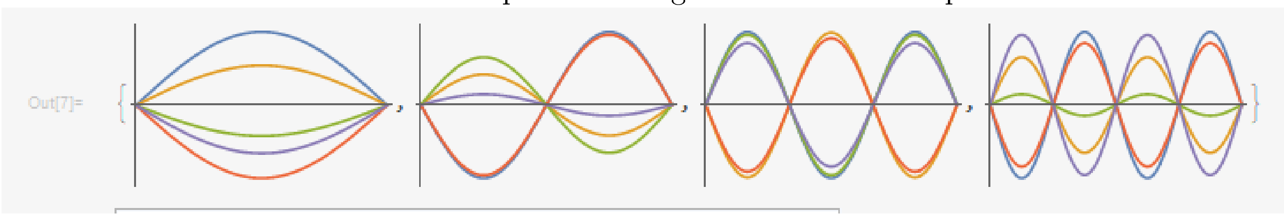
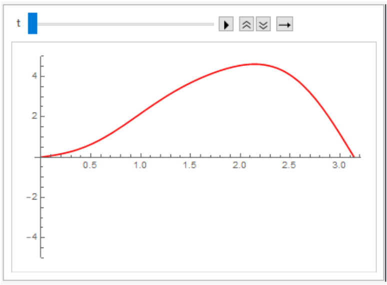
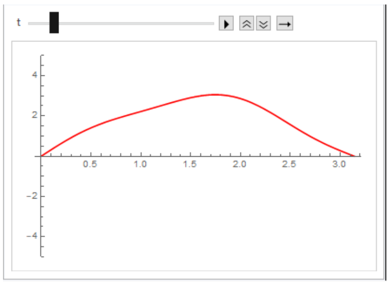


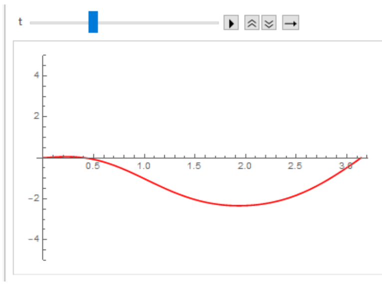
FIGURE 2.4 : Représentation du changement de solution de l'équation d'onde



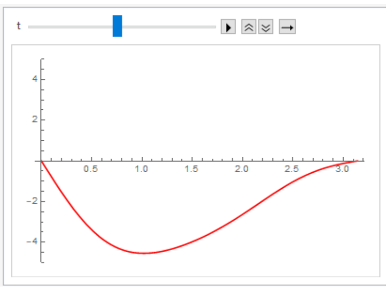
l'instant $t = 0.10s$



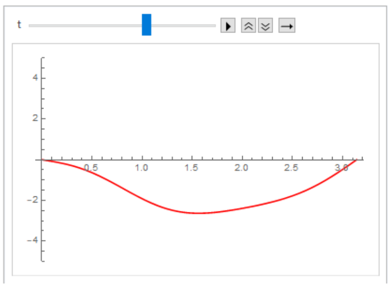
l'instant $t = 0.19s$



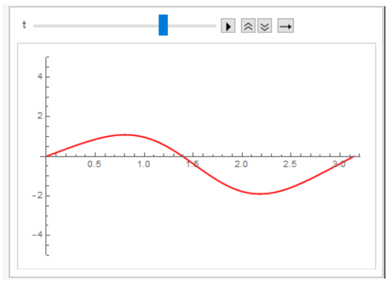
l'instant $t = 2.0s$



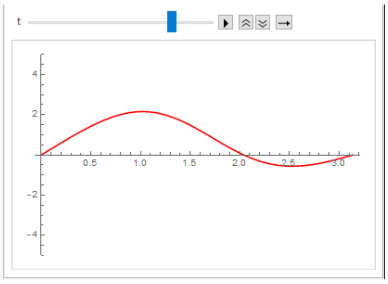
l'instant $t = 2.10s$



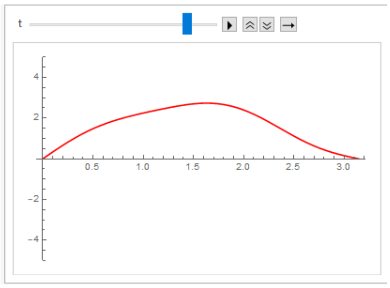
l'instant $t = 2.17s$



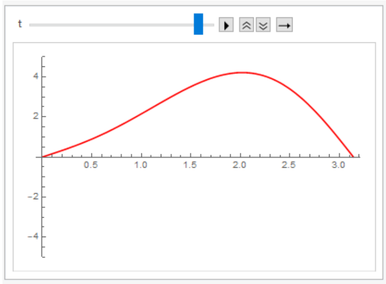
l'instant $t = 2.21s$



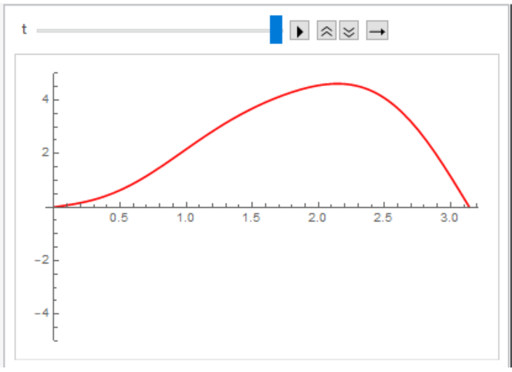
l'instant $t = 3.10s$



l'instant $t = 2.26s$



l'instant $t = 2.29s$



l'instant $t = 3.19s$

FIGURE 2.5 : Représentation la forme d'ondes dans D1 sur le programme Séquentiellement

2.2.2 Résoudre le problème dans D2

Dans la deuxième partie, nous représenterons l'équation d'onde en dimension 2 sur le programme Mathémathica Wolfram

le résultat de D2 sur Mathématica Wolfram

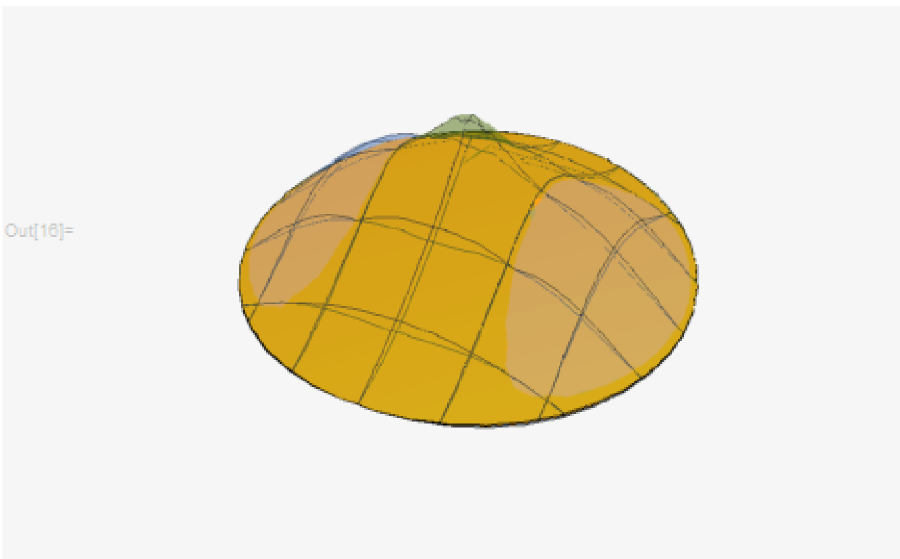


FIGURE 2.6 : Représentation la forme d'ondes dans D2 sur le programme

3 Etude du problème hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé

3.1 proposition de problème

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec Γ sa frontière de Ω, on supposera que Γ est assez régulière. On désigne par $\mathcal{Q}$ le cylindre de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$: $\mathcal{Q} = \Omega \times]0, T[$,T fini
et par Σ la frontière latérale de $\mathcal{Q}$: $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$

On considérions le problème $\mathcal{P}$ suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + |u|^\rho u = f \quad sur \quad \mathcal{Q} = \Omega \times]0, +\infty[\quad \text{(I)} \\ u(x,t) = 0, \quad sur \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[\quad \text{(II)} \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \quad \text{(III)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = u_1(x), \text{ sur} \quad \Omega \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

Où

- ρ donné(on peut pourrait supposer seulement $\rho > -1$)
- f est donnée
- L est opérateur de Lamé, on note $L = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla div$.

L'équation (II) est la condition aux limites de Dirichlet.
Les équation (III) et (IV) traduisant l'étant initiale du système (déplacement initial $U_0(x)$ et la vitesse initiale $v_0(x)$ supposons que Ω de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec Γ borné.

3.2 L'existence et l'unicite de solution

3.2.1 Formulation variationnelle

A fin de trouver la formule variationnelle de problème de $\mathcal{P}$,on va faire ce que suit :
Multiplions (I) par une fonction $v \in (H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega))^n$ où $p = \rho + 2$, et intégrons sur Ω, après

en utilisant la formule de Green

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}\right) + a(u, v) + (|u|^{p-2}u, v) = f \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))^n$$

telle que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire définie comme suit :

$$a(u, v) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\lambda + \mu) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{3.1}$$

3.2.2 L'existence de solution

Les technique qu'on utilisera seront celles de la méthode de compacité et la méthode de Faedo-Galerkin

Théorème 3.2.1 *[8] On suppose que Ω est un ouvert borné avec les hypothèses*

$$\mathbf{f} \in L^2(\mathcal{Q}) \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)\right) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{u}_1 \in L^2(\Omega) \tag{3.4}$$

Il existe alors une fonction u vérifiant :

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)\right), \quad p = \rho + 2 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right) \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial t^2} - Lu + |u|^\rho u = f \quad \textit{dans } \mathcal{Q} \tag{3.7}$$

$$u(x, t) = 0, \quad \text{sur} \quad \Sigma \tag{3.8}$$

$$u(t, 0) = u_0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0, x) = u_1 \tag{3.10}$$

cette solution est existe sous condition sur ρ

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \quad \left(\rho \textit{ fini quelconque si } n = 2\right)$$

Preuve. :

La plan de démonstration est la suit :

1- On construit des solution «approchée» par la méthode de **Faedo-Galerkin** ;

2- On établit, sur ces solution approchées, des estimation a priori ;

3- On passe à la limite, grâce **des propriétés de compacité** (pour passer á la limite dans les termes non linéaires).

Etape 1 : Solution approchée

Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t} \ ; v" = \frac{\partial v^2}{\partial t^2}, ..., \text{etc.}$$

Un autre façon on a l'espace V=($H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$)est séparable

On introduit une suite $w_1, w_2, ..., w_m, ...$ de fonctions ayant les propriétés suivants :

$$\begin{cases} w_i \in V, \quad \forall i, \\ \forall m \ \ w_1, w_2, ..., w_m \qquad \text{sont linéaires indépendants;} \\ \text{les combinaisons linéaires finies des } w_i \text{ sont denses dans } V \end{cases}$$

Une telle suite existe d'après le lemme(1,1)

On cherche alors $u_m = u_m(t)$ solution " approchée" du problème, s'écrit sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i \ ;$$

les g_{im} étant á déterminer par les conditions suivant :

$$(u''_m(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \quad , 1 \leq j \leq m \tag{3.11}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_m(0) = u_{0_m}, \ u_{0_m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \to u_0 \text{ dans } V \text{ lorsque } m \to \infty \\ u'_m(0) = u_{1_m}, \ u_{1_m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \to u_1 \text{ dans } \ L^2(\Omega) \text{ lorsque } m \to \infty \end{cases} \tag{3.12}$$

D'après les résultats généraux sur les système d'équations différentielles on est assuré de l'existence d'une solution de ((3.11), (3.12)) (noter que $\det(w_i, w_j) \neq 0$ grace â linéaire indépendance de $w_1, ..., w_1$),dans un intervalle $[0, t_m]$; les estimations a priori qui suivent montreront que $t_m = T \ \ \forall m \in \mathbb{N}^*$

Etape 2 : Estimation á priori

On multiplions l'équation (3.11) par $g'_{jm}(t)$ et on somme sur j, on trouve :

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^p u_m(t), u'_m(t)) = \big(f(t), u'_m(t)\big) \tag{3.13}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u'_m(t)|^2 + a(u_m(t), u_m(t))\right] + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(x,t)|^p dx = \big(f(t), u'_m(t)\big)$$

En effet

$$\frac{1}{2}\left(\left|u'_m(t)\right|^2 + \left|\left|u_m(t)\right|\right|^2\right) + \frac{1}{p}\left|\left|u_m(t)\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(\left|u_{1m}\right|^2 + \left|\left|u_{0m}\right|\right|^2\right) + \frac{1}{p}\left|\left|u_m(0)\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \left|f(\sigma)\right|u'_m(\sigma)\left|d\sigma\right.$$

$$\text{D'après}((3.12),(3.13))\text{le deuxième} \leq C + \underbrace{\int_0^t \left|f(\sigma)\right|\left|u'_m(\sigma)\right|d\sigma}_{\psi} \tag{3.14}$$

(les C désignent des constantes diverses indépendant de m)

Pour $\psi = \int_0^t \left|f(\sigma)\right|\left|u'_m(\sigma)\right|d\sigma$, on applique l'inégalité de Young (1.6.3) suivant :
On prend $a = \left|f(\sigma)\right|$ et $b = \left|u'_m(\sigma)\right|$ avec $\varepsilon = 1 > 0$ on trouve :

$$\big(\left|f(\sigma)\right| - \left|u'_m(\sigma)\right|\big)^2 = \left|f(\sigma)\right|^2 + \left|u'_m(\sigma)\right|^2 - 2\left|f(\sigma)\right|\left|u'_m(\sigma)\right| \quad (*)$$

Un autre part

$$0 \leq \big(\left|f(\sigma)\right| - \left|u'_m(\sigma)\right|\big)^2 \quad (**)$$

Alors par $(*)$et$(**)$

$$2\left|f(\sigma)\right|\left|u'_m(\sigma)\right| \leq \left|f(\sigma)\right|^2 + \left|u'_m(\sigma)\right|^2$$

On multiplions par 2

$$\left|f(\sigma)\right|\left|u'_m(\sigma)\right| \leq \frac{1}{2}\left|f(\sigma)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u'_m(\sigma)\right|^2$$

On intégrons sur l'intervalle $[0.t]$ on a la suite :

$$\int_0^t \left|f(\sigma)\right|\left|u'_m(\sigma)\right|d\sigma \leq \frac{1}{2}\int_0^t \left|f(\sigma)\right|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \left|u'_m(\sigma)\right|^2 d\sigma \tag{3.15}$$

Donc on remplace (3.14) et (3.15) dans (3.13) on trouve :

$$\frac{1}{2}\left(\left|u'_m(t)\right|^2 + \left|\left|u_m(t)\right|\right|^2\right) + \frac{1}{p}\left|\left|u_m(t)\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \leq C + \frac{1}{2}\int_0^t \left|f(\sigma)\right|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \left|u'_m(\sigma)\right|^2 d\sigma \tag{3.16}$$

D'après (3.2) on a $\mathbf{f} \in L^2(\mathbf{Q})$, c'est-á- dire

$$\int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma \leq C_1$$

On déduire donc, en particulier de (3.16) on a :

$$\begin{aligned}
|u'_m(t)|^2 &\leq \underbrace{(2C + C_1)}_{C_2} + \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma \\
&\leq \underbrace{C_2 + C_3}_{C_4}, \quad \text{oú} \quad \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma \leq C_3 \text{ a cause de } u'_m(t) \in L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

Alors le resulta est $|u'_m(t)| \leq K$ où $K = \sqrt{C_4}$.

D'ou résulte que :

$$||u_m(t)|| + ||u_m(t)||_{L^p(\Omega)} \leq \text{constante} \tag{3.17}$$

On en déduit que $t_m = T$, de plus a le même avec étape 1 (estimations a priori)du problème $\mathcal{P}$:

$$\text{quand } m \to \infty : \begin{cases} \mathbf{u}_m \text{ demeure dans un ensemble borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right) \\ \mathbf{u}'_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right) \end{cases} \tag{3.18}$$

Etape 3 : Passage á la limite

D'après le théorème de Dunford-pettis (cf.par exemple Yosida [16]) :
L'espace $\mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)$ est le dual de $\mathbf{L}^1\left(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \cap \mathbf{L}^{p\prime}(\Omega)\right)$ o'up$\prime = \frac{\rho+2}{\rho+1}$.
L'espace $\mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ est le dual de $\mathbf{L}^1\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ oú $p' = \dfrac{\rho+2}{\rho+1}$ par conséquence on peut extraire de $\mathbf{u}_m$ par une suite $\mathbf{u}_\mu$ telle que :

$$\mathbf{u}_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.19}$$

$$\mathbf{u}'_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \mathbf{u}' \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right). \tag{3.20}$$

En particulier on sait que (3.18) que :

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n\right),$$

L'injection de $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{Q})$ est compacte. Alors on peut supposer que la suite $\mathbf{u}_\mu$ extraite de $\mathbf{u}_m$ vérifie :

$$\mathbf{u}_\mu \to \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbf{Q}) \quad ((\text{forte}) \text{ et presque partout } (\mathbf{p.p})). \tag{3.21}$$

Un autre part : $|\mathbf{u}_m|^\rho \mathbf{u}_m$ demeure dans un borné $\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^{p\prime}(\Omega))$.
On supposer que :

$$|\mathbf{u}_m|^\rho \mathbf{u}_m \overset{\star}{\rightharpoonup} \mathcal{Z} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^{p\prime}(\Omega)) \tag{3.22}$$

Le point essentiel-et c'est cela une des difficultés les plus typiques des problèmes non linéaires
On va montrer que :

$$\mathcal{Z} = |\mathbf{u}|^{\rho}\, \mathbf{u}, \tag{3.23}$$

Où (3.23) c'est le résulta de (3.21) ; (3.22) et de le lemme 1.5.6
Quand on pose : $\mathcal{O} = \mathcal{Q}$ et $g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu$, d'après (3.21)

$$\mathbf{u}_\mu \to \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbf{Q}) \quad (\mathbf{p.p})$$

Donc

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup |u|^\rho u = g \quad (\text{p.p}) \text{ dans } \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$$

$\left(\text{telle que : } p' = \frac{\rho+2}{\rho+1} = q\right)$ et d'après (3.22) :

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \mathcal{Z} \quad \text{dans } \mathbf{L}^\infty(0.T, L^{p'}(\Omega))$$

puisque **la limite est unique** donc :

$$g = |u|^\rho u = \mathcal{Z}$$

Maintenant, on montre que cette solution vérifie l'équation (3.11) donc quand on pose $m = \mu$ et on fixe j tel que $\mu > j$, alors

$$(u_\mu''(t), w_j) + a(u_\mu(t), w_j) + (|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), w_j) = (f(t), w_j) \tag{3.24}$$

D'après (3.21) et (3.23)

$$(u_\mu'(t), w_j) \rightharpoonup (u'(t), w_j) \quad \text{dans } \mathbf{L}^\infty(0.T)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\big(u_\mu'(t), w_j\big) = \big(u_\mu''(t), w_j\big) \to \big(u''(t), w_j\big) \text{ dans } \mathcal{D}'\big(0.T\big) \tag{3.25}$$

D'où

$$a(u_\mu, w_j) \rightharpoonup a(u, w_j) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0.T)$$

et d'après (3.22) et (3.23)

$$\big(|u_\mu|^\rho\, u_\mu, w_j\big) \rightharpoonup \big(|u|^\rho\, u, w_j\big) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0.T)$$

On déduit donc de (3.22) que

$$\frac{d^2}{d^2t}(u, w_j) + a(u, w_j) + (|u|^\rho u, w_j) = (f, w_j)$$

D'après la densité de la base w_0 dans l'espace séparable $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)$ On a

$$\frac{d^2}{d^2t}(u, v) + a(u, v) + (|u|^\rho u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n \tag{3.26}$$

Alors la solution u satisfait (IV),(3.2) et (3.3)

Reste á montrer que la solution u vérifie les condition initiales $u(0) = u - 0$, $u' = u_1$

D'après (3.19) et (3.20) on a :

$$u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.27}$$

$$u'_\mu \to \frac{du_\mu}{dt} = \mathbf{u}' \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.28}$$

Donc u_μ est continue sur $[0, T]$, alors continue en 0 et on a :

$$u_{0\mu} = u_\mu(0) \to u(0) \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)$$

d'où (3.4). Et encore :

$$\left(u''_\mu, w_j\right) \to \left(u'', w_j\right) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(\Omega)$$

$$\left(u'_\mu, w_j\right) \to \left(u', w_j\right) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(\Omega) \tag{3.29}$$

Alors

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right) \to \left(u', w_j\right)\Big|_{t=0} = \left(u'(0), w_j\right)$$

et d'après

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i \ ;$$

On a

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right) \to \left(u_1, w_j\right)$$

On a

$$\left(u'(0), w_j\right) = \left(u_1, w_j\right) \qquad \forall j$$

alors

$$u'(0) = u_1$$

d'où (3.5) ∎

3.2.3 l'unicité de solution

Comme on a déjà indique, on ignore s'il y a unicité de la solution dans le cadre du théorème (3.2.1) .On a dans ce sens le résultat pareil suivant :

Théorème 3.2.2 *[8] On se place dans le hypothèse du théorème (3.2.1), avec :*

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \quad \left(\rho \text{ fini quelconque si } n = 2\right) \tag{3.30}$$

Alors la solution $\mathbf{u}$ *obtenue au théorème (3.2.1) est* ***unique****.*

Preuve.

Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux solutions au sens du théorème (3.2.1).
On pose :

$$\varphi = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

Vérifie :

$$\varphi'' - L\varphi = |v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = 0, \\ \varphi_1(x,0) = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

$$\varphi(x,t) = 0, \ \ sur \quad \Gamma \times]0,T[\tag{3.33}$$

$$\begin{cases} \varphi \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) \\ \varphi_1 \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,T; \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) \end{cases} \tag{3.34}$$

Multiplions les deux membres de (3.31) par φ', et intégrons sur Ω. ensuite, en applique la formule de Green :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|\varphi'|^2 + ||\varphi'||^2\right] = \int_{\Omega} \left(|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u\right) \varphi' dx \tag{3.35}$$

Un autre part, le deuxième membre de(3.35) est majoré en valeur absolue par :

$$(\rho+1) \int_{\Omega} \sup\left(|u|^{\rho} u, |v|^{\rho} v\right) |\varphi| |\varphi'| dx$$

Ce qui est majoré d'après l'inégalité de Holder :
Où $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$

$$C\left(\left|\left||v|^{\rho}\right|\right|_{(\mathbf{L}^n(\Omega))^n} + \left|\left||u|^{\rho}\right|\right|_{(\mathbf{L}^n(\Omega))^n}\right) ||\phi||_{(\mathbf{L}^q(\Omega))^n} + ||\phi'||_{(\mathbf{L}^2(\Omega))^n}$$

Remarque 3.2.3 ([12]) *Pour* $u \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$ *,on a* $u_i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *, alors d'après le théorème de sobolev,* $u_i \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ *avec :*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ si } n \geq 3 \,(q \text{ fini, quelconque pour } n = 2)$$

Donc

$$u \in (\mathbf{L}^q(\Omega))^n$$

On a

$$\frac{1}{q} = \frac{n-2}{2n}$$

Alors

$$q = \frac{2n}{n-2}$$

Mais d'après (3.30)

$$\rho n \leq \frac{2n}{n-2}$$

Alors

$$\left|\left||u|^\rho\right|\right|_{(\mathbf{L}^n(\Omega))^n} = \left(\int_\Omega |u|^{\rho n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left|\left|u\right|\right|^\rho_{(\mathbf{L}^{\rho n}(\Omega))^n} \leq \left|\left|u\right|\right|^\rho_{\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n} \tag{3.36}$$

On a donc

$$\left|\int_\Omega \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u\right).\phi' dx\right| \leq C\left(\left|\left|v(t)\right|\right|^\rho_{\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n} + \left|\left|u(t)\right|\right|^\rho_{\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n}\right)\left|\left|\phi(t)\right|\right|\left|\phi'(t)\right| \tag{3.37}$$

D'autre part on a : $u, v \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right)$

Finalement

$$\left|\int_\Omega \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u\right).\phi' dx\right| \leq C\left|\left|\phi\right|\right|\left|\left|\phi'\right|\right|$$

Alors (3.35) donne

$$\left|\phi'(t)\right|^2 + \left|\left|\phi(t)\right|\right|^2 \leq \frac{C}{2}\int_0^t \left|\left|\phi(\sigma)\right|\right|^2 + \left|\phi'(t)\right|^2 d\sigma$$

En utilisant le lemme de Gronwall que :

$$\phi = 0,$$

par suite

$$u = v,$$

Ce qui preuve l'unicité de la solution

■

4 Etude du problème similaire aux problème similaire télégraphe

4.1 Motivation

Dans ce chapitre on va étudier par la méthode de Régularisation élliptique un problème non linéaire aux un terme viscoélastique similaire aux problème transmission similaire télégraphe.

4.2 La viscoélasticité

La viscoélasticité est la propriété de matériaux qui présentent deux caractéristiques visqueuse et élastique lors subir de déformation. Matériaux visqueux, comme le miel, résistent à l'écoulement de cisaillement et de déformation linéairement avec le temps quand une contrainte est appliquée. Matériaux élastiques souche instantanément lorsqu'il est étiré et tout aussi rapidement revenir à leur état initial une fois que le stress est supprimé. Matériaux viscoélastiques des éléments des deux de ces propriétés et, en tant que tels, présentent contrainte dépendant du temps. Alors que l'élasticité est généralement le résultat d'obligataires qui s'étend le long des plans cristallographiques dans un solide ordonnée, la viscosité est le résultat de la diffusion d'atomes ou de molécules à l'intérieur d'un matériau amorphe.

4.3 Généralités sur le problème et notations

Supposons maintenant que le corps Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$, soit $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω qui est assez régulière.

On désigne $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ un vecteur sur $\mathcal{Q}$ $\left(\text{le cylindre de } \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t\right)$ avec $\mathcal{Q} = \Omega\times]0, T[$; où T est un réel fini

On désigne aussi $\Sigma = \Gamma\times]0, T[$;

Soit L désigne le système de Lamé défini par : $\mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla div$, λ, μ : sont les constantes de Lamé avec ($\mu > 0$ et $\lambda + \mu > 0$). (u_0, u_1, f) des fonctions données , $\rho > 0$.

On s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une fonction $u = u(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in]0,T[$ solution de problème que ce pose suivant :

On cherche u qui vérifie le problème $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + u - Lu + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau + |u|^\rho u = f \quad sur \quad \mathcal{Q} = \Omega \times]0,T[\\ \text{avec les conditions aux limites et initiales :} \\ \begin{cases} u(x,t) = 0, \quad sur \quad \Sigma = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = u_1(x), \ \text{sur} \quad \Omega \end{cases} \end{cases} \tag{4.1}$$

• $g(t)$ et la fonction de relaxation.

On suppose pour la fonction de relaxation g :

$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$\begin{cases} \mu - \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0 \\ g(0) > 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Il existe deux constantes k_0 et k_1 avec $(k_0, k_1) \subset \mathbb{R}_+^2$

$$\begin{cases} k_0 \leq g'(t) \leq 0 \\ 0 \leq g''(t) \leq k_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

Lemme 4.3.1 *Pour tout* $t > 0$ *on a :*

$$\int_0^{+\infty} g(s)ds \leq \mu - l \tag{4.4}$$

L'inégalité (4.4) est un résultat de suit :

Preuve. Puisque g est positive alors :

$$\int_0^t g(s)ds \leq \int_0^{+\infty} g(s)ds \tag{4.5}$$

On multiplie (4.5) par (-1) ,ensuite on ajoute μ a les deux membres

$$\mu - \int_0^t g(s)ds \geq \underbrace{\mu - \int_0^{+\infty} g(s)ds}_{=l} (= l \text{ par } (4.2))$$

Par conséquent

$$\int_0^t g(s)ds \geq \mu - l$$

■

4.4 Proposition de problème

Notre problème consiste à étudier une équation hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé, perturbé avec un terme viscoélastique

$$\begin{cases} \mathbf{f} \in L^2\big(0,T;(L^2(\Omega)^n\big) \\ \mathbf{u}_0 \in \big(H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\big)^n, \quad p=\rho+2 \\ \mathbf{u}_1 \in \big(L^2(\Omega)\big)^n \end{cases} \tag{4.6}$$

On cherche u que vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^\infty\big(0,T;\big(H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\big)^n\big) \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^\infty\big(0,T;(L^2(\Omega)^n\big) \end{cases} \tag{4.7}$$

solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial u}{\partial t}+u-\underbrace{Lu}_{\text{opérateur de Lamé}}+\underbrace{\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau}_{\text{terme viscoélastique}}+\underbrace{|u|^\rho u}_{\text{terme non linéaire}}=f(x,t)\quad \text{sur}\quad \mathcal{Q} \end{cases} \tag{4.8}$$

et vérifiant aussi les condition (4.1)

$$\begin{cases} u(x,t)=0, \quad sur \quad \Sigma=\Gamma\times]0,T[\\ u(x,0)=u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)|_{t=0}=u_1(x), \ \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

4.5 Existence et unicité de la solution

Début, on va étudie l'existence et l'unicité de problème $\mathcal{P}_2$.Alors on applique le théorème suivant :

Théorème 4.5.1 *soit Ω un domain borné ouvert de $\mathbb{R}^n$, on donné f avec $f\in L(\mathcal{Q})$*
Alors elle existe a fonction u avec $u=w_0+w$ vérifie le probléme $\mathcal{P}_2$ (4.1) , et vérifie :

$$\begin{cases} w_0 \in H_0^1(\Omega)+W^{2,q}(\Omega)\cap W_0^{2,q}(\Omega) \\ w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ w' \in L^p(\mathcal{Q}). \end{cases}$$

Preuve. Nous utilisons une approche due à G. Prodi [11] nous avons :

$$\begin{cases} u = w_0 + w \\ w_0 \text{ indépendant de } t \\ \displaystyle\int_0^T w dt = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Nous introduisons l'idée Prodi (4.9) dans $(\mathcal{P}_2)$ Nous avons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u - Lu + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau + |u|^\rho u - f = f + Lu_0 \tag{4.10}$$

On considère la dérivée de (4.10) on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u - Lu + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau + |u|^\rho u\Big) = \frac{df}{dt} \tag{4.11}$$

Et

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t u dt = 0 \\ u(T) = u(0) \\ u'(x,0) = u'(x,T) \end{cases} \tag{4.12}$$

On en déduit (4.11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau + |u|^\rho u - f = h_0 .\text{avec } h_0 \text{ indépendant de t.}$$

Maintenant, on pose $L = -A;\ B(u) = |u|^\rho u$. Et nous définissons l'espace fonctionnel V

$$V = \begin{cases} v : v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \quad v' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\mathcal{Q}) \\ v'' \in L^2(0,T,L^2(\Omega)); \quad \displaystyle\int_0^t v(t)dt = 0;\ v(T) = v(0);\ v'(T) = v'(0) \end{cases} \tag{4.13}$$

La structure de Banach de V est définie par

$$||v||_V = ||v||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||v'||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||v||_L^p(\mathcal{Q}) + ||v||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

On définit la forme bilinéaire

$$b(u,v) = \int_0^T \Big[(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v) + (Au, v) + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(x,\tau), v)d\tau + (B(u), v)\Big]. \tag{4.14}$$

La formulation faible de (4.11) et (4.12) est de trouver $u \in V$ tel que

$$b(u,v) = \int_0^T (f, v')dt \quad \forall\, v \in V \tag{4.15}$$

Mais (4.15) pas coercive.

Puis on suit une idée de Lions pour obtenir la régularisation elliptique, étant donné δ et $u, v \in V$, on définit

$$\pi_\delta(u,v) = \delta \int_0^T [(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v'') + (Au', v')] ds + \int_0^T \big(u'' + Au + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(x,\tau) d\tau + B(u), v'\big) ds \tag{4.16}$$

L'application $v \to \pi_\delta(u,v)$ est continue sur V donc il existe une application

$$B_\delta \in V' : \pi_\delta(u,v) = (B_\delta(u), v)$$

L'opérateur linéaire $B_\delta : V \to V'$ satisfait les quatre propriétés :

B_δ est borné dans V' pour tout ensemble borné dans V et est un hémi-continu est un strictement monotone et est coercive.

Au vu de ces propriétés et comme conséquence du théorème de Lions [8], il existe une fonction unique $u_\delta \in V$:

$$\pi_\delta(u_\delta, v) = \int_0^T (f, v') dt \quad \forall v \in V \tag{4.17}$$

4.5.1 Estimations a priori I

Explicitement la régularisation elliptique (4.17) et nous mettons $v = u_\delta$, on obtient

$$\delta \int_0^T \big[|u_\delta''|^2 + \|u_\delta'\|^2\big] dt + \int_0^T \big[|u_\delta'|^2 dt + (B(u), u') + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u_\delta(x,\tau), u_\delta') d\tau = \int_0^T (f, u_\delta) \tag{4.18}$$

D'autre part :

$$\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u_\delta(\tau), u_\delta'(t)) d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^t g(t-\tau)\Delta u_\delta(\tau), u_\delta'(t)d\tau \\
&=-\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_\delta'(t).\nabla(\tau)u_\delta dxd\tau \\
&=-\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_\delta'.(\nabla u_\delta(\tau)-\nabla u_\delta)dxd\tau \\
&\quad-\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_\delta'(t)\nabla u_\delta(t)dxd\tau \\
&=\int_0^t g(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\nabla \mathbf{u}_\delta(x,t)-\nabla \mathbf{u}_\delta(x,\tau))^2dxd\tau \\
&\quad-\int_0^t g(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\nabla \mathbf{u}_\delta(x,t))^2dxd\tau \\
&=\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\frac{d}{dt}\left\|\nabla \mathbf{u}_\delta(t)-\nabla \mathbf{u}_\delta(\tau)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}_\delta(t)\right\|^2d\tau \\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla \mathbf{u}_\delta(t)-\nabla \mathbf{u}_\delta(\tau)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}d\tau\right) \\
&\quad-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left\|\nabla \mathbf{u}_\delta(t)-\nabla \mathbf{u}_\delta(\tau)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}d\tau \\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\left\|\nabla \mathbf{u}_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}\right)+\frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla \mathbf{u}_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

En remplaçant (4.19) dans(4.18) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\delta\int_0^T \left[|u_\delta''|^2+\|u_\delta'\|^2\right]dt+\int_0^T \left[|u_\delta'|^2dt+(B(u),u')\right]dt \\
&+\int_0^T\left[-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u_\delta\right)(t)+\frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla u_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}\right] \\
&-\int_0^t g(\tau)d\tau\left\|\nabla u_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}+\left(g\circ\nabla u_\delta\right)(t)=\int_0^T\left(f(t),u_\delta'(t)\right)
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

avec

$$
(g\circ v)(t)=\int_0^t g(t-\tau)\|v(t)-v(\tau)\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}d\tau,\quad \forall v\in\left(L^2(\Omega)\right)^n
$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$
\int_0^T (B(u),u')\leq\frac{1}{p}||u||^{p-1}||u'||^p_{L^p(\mathcal{Q})}\leq\frac{1}{p}||u'||^p_{L^p(\mathcal{Q})}
$$

et

$$
\int_0^T udt=0\implies ||u||^2_{L^2(0,T;H_0^1)}\leq C||u'||_{L^2(0,T;H_0^1)}
$$

On a

$$
u' \text{ est borné dans } L^p(\mathcal{Q}) \text{ quand } \delta\to 0 \tag{4.21}
$$

Ce resultat avec l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura

$$\begin{aligned}
&\delta\int_0^T\left[|u_\delta''|^2+\|u_\delta'\|^2\right]dt+\int_0^T\left[|u_\delta'|^2dt+(B(u),u')\right]dt\\
&+\int_0^T\left[-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u_\delta\right)(t)+\frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla u_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}\right]\\
&-\int_0^t g(\tau)d\tau\left\|\nabla u_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}+\left(g\circ\nabla u_\delta\right)(t)\\
&\leq\delta\int_0^T\left[|u_\delta''|^2+\frac{1}{2}\left\|u_\delta'\right\|^2+\frac{1}{2}\left|u_\delta'\right|^2+\frac{1}{p}\left\|u_\delta'\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right]dt+\int_0^T\left|f(\sigma)\right|\left|u_\delta'(\sigma)\right|d\sigma
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Maintenant, utilisant l'inégalité de Poincaré, et l'inégalité suivant :

$$\begin{aligned}
&\left\|u_\delta(t)\right\|^2=\mu\left\|\nabla u_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}+(\mu+\lambda)\left\|u_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}\\
\Longrightarrow\quad&\left\|u_\delta(t)\right\|^2\geq\mu\left\|\nabla u_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}.
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbf{u}_\delta(t)\right\|^2-\int_0^t g(\tau)d\tau\left\|\nabla\mathbf{u}_\delta(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}\\
\geq&\underbrace{\left(\mu-\int_0^t g(\tau)d\tau\right)}_{\geq l}\left\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\right\|^2_{\left(L^2(\Omega)\right)^n}\quad(B)
\end{aligned}$$

On a :

$$\left(\mu-\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\geq l,$$

Donc

$$(B)\geq l\,C_p\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2$$

avec : C_p : constante de Poincaré. Le deuxième membre de (4.22), on appliquer l'inégalité de Young avec $\varepsilon=1$ (comme le chapitre 3, Etape 2 voir (3.15)).

Alors, en particulier

$$\begin{aligned}
&\delta\int_0^T\left[|u''|^2\frac{1}{2}\left|u_\delta'(t)\right|^2+\frac{1}{2}l\,C_p\left\|u_\delta(t)\right\|^2+\frac{1}{p}\int_\Omega|u_\delta(x,t)|^pdx\right]dt-\frac{1}{2}\int_0^t\left(g'\circ\nabla u_\delta\right)(\sigma)d\sigma+\left(g\circ\nabla u_\delta\right)(t)\\
&\leq\delta\int_0^T\left[|u_\delta''|^2+\frac{1}{2}\left\|u_\delta'\right\|^2+\frac{1}{2}\left|u_\delta'\right|^2+\frac{1}{p}\left\|u_\delta'\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right]dt+\frac{1}{2}\int_0^t\left|f(\sigma)\right|^2d\sigma+\frac{1}{2}\int_0^t\left|u_\delta'(\sigma)\right|^2d\sigma
\end{aligned}\tag{4.23}$$

Mais

$$\mathbf{f}\in L^2(\mathbf{Q})\quad\Longrightarrow\quad\int_0^t\left|f(\sigma)\right|^2d\sigma\leq\text{Constant}$$

en déduit donc, en particulier de (4.23) que :

$$\delta \int_0^T |u'_\delta(t)|^2 \leq C' + \int_0^t \left|u'_\delta(\sigma)\right|^2 d\sigma \tag{4.24}$$

D'après l'inégalité de Gronwall

$$|u'_\delta(t)| \leq \text{Constante} \tag{4.25}$$

d'ou résulte que

$$\delta \int_0^T \left[||u''_\delta||^2 \, |u'_\delta(t)|^2 + \left|\left|u_\delta(t)\right|\right|^2\right] dt + \left(g \circ u_m\right)(t) + \int_{\mathcal{Q}} \left|u_\delta(x,\sigma)\right|^p d\sigma \leq \text{Constante} \tag{4.26}$$

$$\delta \int_0^T ||u_\delta||^2 dt \leq \delta \int_0^T \left[||u''_\delta||^2 \, |u'_\delta(t)|^2 + \left|\left|u_\delta(t)\right|\right|^2\right] dt + \left(g \circ u_m\right)(t) + \int_{\mathcal{Q}} \left|u_\delta(x,\sigma)\right|^p d\sigma \leq \text{Constante}$$

Donc

$$\delta \int_0^T ||u_\delta||^2 dt \leq \text{Constante}$$

4.5.2 Estimations a priori II

En changer (4.17) v par :

$$v(t) = \int_0^T u_{?\delta}(s)dt - \frac{1}{T}\int_0^T (T-s)u_\delta(s)ds \tag{4.27}$$

Nous vérifions que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0 \quad \forall v \in V \\ v' = u_\delta \end{cases} \tag{4.28}$$

En prenant en compte (4.27) dans (4.17) on obtient

$$\begin{aligned}
&\delta \int_0^T \Big[(u''_\delta, u'_\delta) + (u'_\delta, u_\delta) + (Au'_\delta, u_\delta)\Big] dt + \int_0^T \Big[(u''_\delta, u_\delta) + (u'_\delta, u_\delta)\Big] dt \\
&+ \int_0^T ||u_\delta|| + \int_0^T (B(u_\delta), u'_\delta) dt + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u_\delta(x,\tau), u'_\delta) d\tau dt \\
&= \int_0^T (f, u_\delta) dt
\end{aligned} \tag{4.29}$$

En utilisant la périodicité de $u_\delta, u'_\delta \in V$ on obtient

$$\int_0^T (u''_\delta, u'_\delta) dt = \int_0^T (Au'_\delta, u_\delta) dt = 0 \tag{4.30}$$

Et

$$\int_0^T (u''_\delta, u_\delta) dt = (u'_\delta(T), u_\delta(T)) - (u'_\delta(0), u_\delta(0)) - \int_0^T (u'_\delta, u'_\delta) dt$$

$$= -\int_0^T |u'_\delta|^2 dt \tag{4.31}$$

Par (4.30) et (4.29) nous avons

$$\left| \int_0^T (u''_\delta, u_\delta) dt \right| \leq C \qquad \text{quand } \delta \to 0 \tag{4.32}$$

Aussi, à partir de (4.21) on obtient

$$\left| \int_0^T (B(u_\delta), u_\delta) dt \right| \leq \|B(u_\delta)\|_{L^p((Q))} \|u_\delta\|_{L^p(Q)} \leq C' \tag{4.33}$$

En combinant (4.30), (4.31), (4.32), ((4.33)) avec ((4.19) et (4.22)) on en déduit

$$\int_0^T \|u_\delta\|^2 dt \leq C \tag{4.34}$$

4.5.3 Passage à la limite

En deuxième étape on a u_δ borné dans $\mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n\right)$, alors elle est bornée dans $\mathbf{L}^2\left(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)$.

Comme l'espace $\mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)$ est le dual de $\mathbf{L}^1\left(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \cap \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right)$ où et l'espace $\mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ est le dual de $\mathbf{L}^1\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ où $p' = \dfrac{\rho+2}{\rho+1}$, il existe une sous suite $\mathbf{u}_\mu$ de $\mathbf{u}_\delta$ telle que :

$$a(u_\mu, e_j) \to a(u, e_j) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0.T)$$

$$(u'_\mu, e_j) \to (u', e_j) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0.T)$$

$$(u''_\mu, e_j) = \frac{d}{dt}((u'_\mu, e_j)) \to (u'', e_j) \text{ dans } \mathcal{D}'(0.T)$$

$$(\left|u_\mu(t)\right|^\rho u_\mu(t), e_j) \to (\left|u(t)\right|^\rho u(t), e_j) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0.T) \tag{4.35}$$

Pour $\delta = \mu$ et j fixe, on voit que

$$\int_0^T \Bigg[\Big(u''_\mu(t), e_j \Big) + \Big(u'(t), e_j \Big) + \Big(u(t), e_j \Big) + a(u_\mu(t), e_j)$$

$$+ \int_0^t g(t-\tau) \Big(\Delta u_\mu(\tau), e_j \Big) d\tau + \Big(|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), e_j \Big) \Bigg] dt = \int_0^T \Big(f, e_j \Big) dt \quad \forall 1 \leq j \leq m \tag{4.36}$$

Par passage ã la limite dans les termes des équation (4.36) dans $\mathcal{D}'$ (par exemple), on a

$$\int_0^T \Bigg[\Big(u''(t), e_j \Big) + \Big(u'(t), e_j \Big) + \Big(u(t), e_j \Big) + a(u(t), e_j)$$

$$+ \int_0^t g(t-\tau) \Big(\Delta u(\tau), e_j \Big) d\tau + \Big(\chi, e_j \Big) \Bigg] dt = \int_0^T \Big(f, e_j \Big) dt \quad \forall 1 \leq j \leq m \tag{4.37}$$

Par conséquent

$$\int_0^T \Big[\Big(u''(t), v\Big) + \Big(u'(t), v\Big) + \Big(u(t), v\Big) + a(u(t), v)$$
$$+ \int_0^t g(t-\tau)\Big(\Delta u(\tau), v\Big) d\tau + \Big(\chi, v\Big)\Big] dt = \int_0^T \Big(f, v\Big) dt$$
$$\forall v \in \left(H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)\right)^n \tag{4.38}$$

et donc

$$u'' + u' + u - Lu + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau) d\tau + \chi = f$$

D'où l'existence de la solution ■

4.5.4 Unicité de la solution

Théorème 4.5.2 *Sous les hypothèses de théorème d'existence, on considère deux solutions* u *et* v *du problème alors* $u = v$,

Preuve. on soustrait l'équation (4.5) correspondant à u et v et on Pose

$$\mathcal{W} = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

Vérifie :

$$\mathcal{W}'' + A\mathcal{W} + \int_0^t g(t-\tau)\Delta\mathcal{W} d\tau + B(u) - B(v) = 0 \tag{4.39}$$

$$\begin{cases} \mathcal{W}(x, 0) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall x \in \Omega \\ \mathcal{W}_1(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

$$\mathcal{W}(x, t) = 0, \ sur \quad \Gamma \times]0, T[\tag{4.41}$$

En notant η la séquence de régularisation un argument similaire de Brézis [3] on obtient

$$W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta = W \star \eta'_\delta \star \eta_\delta \tag{4.42}$$

Par conséquent, en utilisant (4.5.1), nous avons

$$W = \phi + W_0 : \qquad W_0 \in V, \ \text{ et } \phi \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$$

À partir de (4.42) on obtient

$$W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta = W \star \eta'_\delta \star \eta_\delta = \varphi' \star \eta_\delta \star \eta_\delta \tag{4.43}$$

Montre que

$$\int_0^T (W'', W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt = 0$$

Quand

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(W'', W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt$$

$$\int_0^T (W'', W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt + \int_0^T (W', W'' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt = 0 \tag{4.44}$$

Donc

$$\int_0^T (W'', W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(W', W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt = 0 \tag{4.45}$$

W' et W' périodiques alors on a

$$\int_0^T (W, W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt = \int_0^T (W', W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt = \int_0^T (AW, W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta) dt \tag{4.46}$$

De (4.39) ; (4.45) et (4.46) on obtien

$B(u) - B(v)$ est majoré en valeur absolue par

$$(\rho + 1) \int_\Omega \sup\left(|v|^\rho, |u|^\rho\right) dx \tag{4.47}$$

D'après l'inégalité de Holder avec on remplace $W' \star \eta_\delta \star \eta_\delta$ par $\mathcal{W}$, et comme $u, v \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \left(\mathbf{H}_1^0(\Omega)\right)^n\right)$

Finalement

$$\left|\int_0^T \left(B(u) - B(v)\right).\mathcal{W}'\right| = \left|\int_0^T \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u\right).\mathcal{W}'\right| \leq C \|\mathcal{W}\| \, |\mathcal{W}'|$$

Un autre part

Nous montrons que

$$\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\mathcal{W}(\tau), \mathcal{W}'(t)\right) d\tau$$

s'écrit comme la somme de la dérivée en temps d'une quantité plus un terme de dissipation positive

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\mathcal{W}(\tau), \mathcal{W}'(t)\right) d\tau &= -\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla\mathcal{W}'(t)\cdot\nabla\mathcal{W}(\tau) dx d\tau \\
= \quad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla\mathcal{W})(t) - \frac{1}{2}\left(g' \circ \nabla\mathcal{W}\right)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\|\nabla\mathcal{W}(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} d\tau\right) \\
+ & \frac{1}{2} g(t)\|\nabla\mathcal{W}(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}
\end{aligned}$$

Donc on obtient le système

$$\|\mathcal{W}(t)\|^2 + |\mathcal{W}'(t)|^2 - \tfrac{1}{2}\int_0^t (g' \circ \nabla \mathcal{W}_m)(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\|\mathcal{W}(\sigma)\|^2 d\sigma$$

$$\leqslant \int_0^t \left(\frac{C}{2}\| \ \mathcal{W}(\sigma)\| + \frac{C}{2}| \ \mathcal{W}'(\sigma)|\right) d\sigma \tag{4.48}$$

d'après la condition de (4.3) g' est négative et d'après la définition de $(g' \circ \nabla \mathcal{W}_m)(\sigma)$ on a

$$(g' \circ \nabla \mathcal{W}_m)(\sigma) \leq 0$$

En particulier, de (4.48), que

$$\|\mathcal{W}(t)\|^2 + |\mathcal{W}'(t)|^2 \leqslant \int_0^t \left(\frac{C}{2}\|\mathcal{W}(\sigma)\| + \frac{C}{2}|\mathcal{W}'(\sigma)|\right) d\sigma \tag{4.49}$$

En particulier de 4.49 on trouve

$$\mathcal{W}(t) = 0 \implies u - v = 0 \iff u = v$$

D'où l'unicité de la solution . ■

Conclusion

Le but de ce recherche est l'étude du problème similaire aux problème similaire télégraphe par elliptic régularisation.
Nous avons commencé par un équation d'onde linéaire. On donne deux méthode pour résoudre ce problème :la méthode de séparation des variables , la méthode de caractéristique, et on a modélisé le problème pour trouvé la solution dans le programme Mathématica Wolfram. On aussi utilise la Programme Matlab.
Dans le troisième chapitre, nous avons étudié l'existence, l'unicité d'un problème hyperbolique non linéaire gouvernée par le systeme de Lamé. Le quatrième chapitre, nous avons étudié l'existence, l'unicité d'un problème similaire aux problème similaire télégraphe Dans le chapitre trois et quatre est basé par la méthode de régularisation pour étudie les deux problèmes.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev space, Academic Press 1976.

[2] D.Bouazza, Sur Un Probleme Hyperbolique Gouvernée Par Un Terme Viscoélastique,Mèmoire de Mastre 2019.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et application. Dunod, paris-1999.

[4] Demailly J.P., (1991) , Analyse numérique et Équations différentielles, Presses universitaires de Grenoble, 1991.J.

[5] A. Keddi, Etude de quelques problèmes de thermo-visco-élasticité ,mèmoire de Magister de ouargla 2012.

[6] M.Khelif , Modélisation et Résolution de Quelque Problémes Des Ondes, Mèmoire de Master 2019.

[7] Lions J.L., Magenes E. - Problemes aux limites non homogenes et applications. Volume 1-Dunod (1968)

[8] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod. (1969).

[9] M. Mabrouk, Sur Une Equation Hyperbolique Non Linéaire

[10] M. Mabrouk, Asimilar Nonlinear telegraph problem Governed By Lamé Systeme, Chaotic Modeling and Simulation 5CMSIM) 4 :601-606,2012.

[11] M. Meflah, A Nonlinear Elasticity Problem by Elliptic Regularization Technics, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol 6, 2011, no. 25, 1221-1229.

[12] M. Meflah, Etude de quelqueproblème d'élasticité non linéaires couplés par la méthode de compacité, Mémoire de Magister, Université F. Abbas de Sétif, Juillet 2005

[13] S.A. Messaoudi, Decay and gradient estimate for solutions of a semilinear heat equation, Arab journal of Math. Sciences vol. 9] 2 (2003), 1-7.

[14] S.A. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation. J.Math. Anal. Appl. 341, 2008, 1457-1467.

[15] Raviart et J. M Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson-1992.

[16] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968.

[17] ww.mathworks.com/products/matlab .

[18] ww.wolfram.com/mathematica/ .

Annexes

Description de l'équation d'onde :

Code Matlab

```
clear all;
close
clc
syms x
l=input('donne l')
t=0.5;
for n=[1,2,3,4,10]
fplot(sin((n*pi/l)*x)*(cos((n*pi/l)*t)+sin((n*pi/l)*t)),[0 l])
pause(.1)
end
grid on
```

.

Résultat sur Mathématica Wolfram

Résoudre le problème dans D1 :

Code mathématica wolfram

```
In[1]:=
weqn = D[u[x, t], {t, 2}] == D[u[x, t], {x, 2}];
bc = {u[0, t] == 0, u[π, t] == 0};
ic = {u[x, 0] == x^2 (π - x),
u^(0,1)[x, 0] == 0};
ic = {u[x, 0] == x^2 (π - x),
u^(0,1)[x, 0] == 0};
dsol = DSolve[{weqn, bc, ic}, u, {x, t}] /. {K[1] -> m}
asol[x_, t_] = u[x, t] /. dsol[[1]] /. {∞ -> 4} // Activate
Table[Show[
  Plot[Table[asol[x, t][[m]], {t, 0, 4}] // Evaluate, {x, 0, Pi},
   Ticks -> False], ImageSize -> 150], {m, 4}]
   Animate[Plot[asol[x, t], {x, 0, π}, PlotRange -> {-5, 5},
  ImageSize -> Medium, PlotStyle -> Red], {t, 0, 2 Pi},
 SaveDefinitions -> True]
```

Résoudre le problème dans D2 :

Code mathématica wolfram

```
In[9]:= eqn = D[u[t, x, y], t, t] == c^2 Laplacian[u[t, x, y], {x, y}];
         ics = {u[0, x, y] == Exp[-((a x)^2 + (b x)^2)],
           Derivative[1, 0, 0][u][0, x, y] == 0};
           bcs = DirichletCondition[u[t, x, y] == 0, True];
           pfun = ParametricNDSolveValue[{eqn, ics, bcs},
           u, {t, 0, 5}, {x, y} ∈ Disk[], {a, b, c}];

        ifda = D[pfun[a, 1, 1], a] /. {a -> 1};
        ifda = D[pfun[1, b, 1], b] /. {b -> 1};
        ifdc = D[pfun[1, 1, c], c] /. {c -> 1};
        Plot3D[Evaluate[(pfun[a, b, c][τ, x,
              y] + .5 {0, 1, -1} D[pfun[a, b, c][τ, x, y], a]) /. {a ->
             1, b -> 1, c -> 1, τ -> 3}], {x, y} ∈ Disk[],
         PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False, Mesh -> 5,
         PlotStyle -> {Automatic, Opacity[0.3], Opacity[0.3]}]
```

ملخص

في هذا العمل، قمنا بحل مايلي:
الجزء الأول: درسنا معادلة الأمواج الخطية كمشاكل موجات الاهتزاز التي تنشر في الوسط المرن، حيث درسنا وجود ووحدانية الحل، وكذ قمنا بنمذجتها في برنامج ماثيماتيكا.
الجزء الثاني: درسنا مشكلة القطع الغير خطية، و وجود الحل ووحدانيته.
الجزء الثالث: ندرس معادلة الأمواج مع المرونة اللزوجية بتأثير مؤثر لامي.
في هذه الحالة درسنا وجود ووحدانية الحل .
الكلمات المفتاحية: معادلة الأمواج، المرونة اللزوجية، إعادة التنظيم، دالة الاسترخاء، مؤثر لامي.

Abstract

In this work, we solve the following :
The first part : We have studied the equation of linear waves as the problems of vibrational waves that propagate in the flexible medium, where we have studied the existence and unicity of the solution, and we have also modeled it in the Mathematica program.
Second part : We have studied the nonlinear hyperbolic Problem, as well as the existence and unicity of the solution.
The third part : we study the nonlinear hyperbolic problem governed by the Lamé system with a viscoelastic term.
In this case, we have studied the existence and uncity of the solution.
Keywords : Wave equation, the viscoelastic system, regularization, relaxation function, Lamé operator.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié les problèmes suivant :
La première partie : Nous avons étudié l'équation des ondes linéaires comme les problèmes des ondes de vibration qui se propagent dans le milieu flexible, où nous avons étudié l'existence et l'unité de la solution, et nous l'avons également modélisée dans le programme Mathematica.
Deuxième partie : Nous avons étudié le probléme hyperbolique non linéaire , ainsi que l'existence et l'unité de la solution.
La troisième partie : nous étudions le problème hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé avec un terme viscoélastique.
Dans ce cas, nous avons étudié l'existence et l'unité de la solution.
Mots clés : Équation de onde, le systéme viscoélastique, régularisation, fonction de relaxation, opérateur de Lamé.