RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par : Benarabi Soumia

Thème

Les inclusions et ses applications sur les inéquations variationnelles

Soutenu publiquement le : 30/09/2020

Devant le jury composé de :

Mr.Chacha A.Djamal	Prof. Université Kasdi Merbah-Ouargla	Président
Mr.Merabet Ismail	M.C.A Université Kasdi Merbah-Ouargla	Examinateur
Mr.Ghazal Abdrrazek	M.C.A Université Kasdi Merbah-Ouargla	Examinateur
Mr.Bensayah Abdallah	M.C.A Université Kasdi Merbah-Ouargla	Rapporteur

Promotion : 2019/2020

Dédicace

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères, que je dédie ce modeste travail de fin d'étude à mes chers parents qui ont sacrifié leur vie pour ma réussite.

À mon père pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices,

À ma mère pour son soutien et ses encouragements,

J'espère qu'un jour, je pourrais leurs rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi, que dieu leur prête bonheur et longue vie.

Je dédie aussi de ce travail à mon frère "*Tarek*", mes sœurs "*Amel, Roumaïssa*", mon fiancé "*Ilyes*", mes amies "*Sabrina, Roumaïssa, Ikram, Aya, Mouna,*$\cdots$", mes professeurs qui m'ont enseigné et à tous ceux qui me sont chers.

Remerciement

J'adresse en premier lieu ma reconnaissance à ***ALLAH*** mon ***Dieu*** tout puissant, de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur : "***Mr.BENSAYAH Abdallah***" pour sa patience, sa disponibilité et surtout des judicieux conseils, qui m'ont aidé à bien mener ce mémoire.

Je tiens également à remercier les membres de jury, qui ont bien voulu accepter de porter leur jugement sur ce modeste travail que je souhaite à la mesure et leur satisfaction.

Mes remerciements s'étendent aussi à tous mes ***professeurs*** qui m'enseigné et qui par leur compétence m'ont soutenu dans la poursuite de mes études et qui ont contribué à ce couronnement.

Notation

X, Y	espaces de Banach réels.
$\|.\|_X$	la norme de X.
X^*	duale topologique de X.
$\langle ., . \rangle_X$	produit dualité de X et X^*.
2^{X^*}	la collection des sous-ensembles de X^*.
$\rightarrow$	la convergence forte.
$\rightharpoonup$	la convergence faible.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	la convergence faible*.
$\mathcal{L}(X, Y)$	l'espace des opérateurs linéaires continus de X à Y.
Δ_p	l'opérateur de p-laplacien.
∇	le gradient.
∂K	la frontière d'un espace K.
$\overline{M}$	la fermeture d'un ensemble M.
$\lvert . \rvert$	la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.
$co(K)$	l'enveloppe convexe d'un ensemble K.
$supp(f)$	support de $f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.
$vect\{Y\}$	espace vectoriel engendré par Y.
$C_c^\infty(\Omega)$	espace des fonctions test.
$W^{1,p}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)$	espaces de Sobolev.
$L^p(\Omega)$	$= \{u$ mesurable sur Ω et $\int_\Omega \lvert u \rvert dx < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.

Table des matières

Introduction

Il est bien connu que plusieurs problèmes surgissant dans l'analyse non linéaire tels que les inclusions, les problèmes d'inéquations variationnelles, problèmes d'optimisation, programmation mathématique, problèmes de point fixe,...etc.

Le sujet principal de cette thèse est l'étude des inclusions et quelques applications aux problèmes d'inéquations variationnelles. Les inclusions sont aussi appelés équations généralisées. elles sont suffisamment générales pour englober les problèmes variationnels, les problèmes d'inéquation variationnelle, les problèmes de complémentarité et les problèmes d'optimisation.

Les inclusions impliquant différents types d'opérateurs qui sont utiles et ont une large gamme d'applications dans l'industrie, la finance mathématique, les sciences de la décision, l'écologie, les sciences de l'ingénierie, etc. L'une des techniques les plus populaires pour résoudre le problème d'inclusion dans le cadre de Banach remonte au travail de Browder [2],[14].

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre, est consacré à rappeler quelques notions et propriétés des opérateurs univoques et présenter ses généralisations dans la théorie des opérateurs multivoques, et citer des théorèmes et des principes qui sont utilisés dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre, est destiné à prouver le théorème de Rockafellar et étudier l'existence de la solution d'inclusion perturbé et non perturbé avec une présentation de la théorie du point fixe pour les opérateurs multivoques.

Et dans le troisième chapitre, on fait l'étude de l'inéquation variationnelle et en l'utilisant avec les résultats donnés dans le chapitre précédent pour étudier l'existence de la solution de l'inéquation quasi-variationnelle elliptique, qui est une généralisation de l'inéquation variationnelle, puis nous appliquons à l'opérateur p-laplacien.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappel

On définit d'abord quelques notions des opérateurs univoques, considérons l'opérateur $A : X \to X^*$:

Définition 1.1 *([2], page 555) L'opérateur A est dit* ***borné*** *si pour tout ensemble borné $M \subseteq X$, l'ensemble $A(M)$ est borné dans X^*.*

Définition 1.2 *([2], page 500)*

▷ *L'opérateur A est dit* ***monotone*** *si et seulement si*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geq 0 \quad \textit{pour tout } u, v \in X.$$

▷ *L'opérateur A est dit* ***strictement monotone*** *si et seulement si*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X > 0 \quad \textit{pour tout } u, v \in X \textit{ avec } u \neq v.$$

▷ *L'opérateur A est dit* ***coercif*** *si et seulement si*

$$\lim_{\|u\| \longrightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_X}{\|u\|_X} = +\infty.$$

Définition 1.3 *([6], page 546) L'opérateur A est dit **maximal monotone** s'il est monotone et que : $\langle Au - w, u - v\rangle_X \geq 0$ pour tout $u \in X$ implique $w = Av$.*

Définition 1.4 *([2], page 515) L'opérateur $A : M \subset X \to X^*$ est dit **pseudo-monotone** si et seulement si pour tout $u \in M$ et pour chaque suite (u_n) dans M :*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{quand } n \to \infty \quad \textit{et} \quad \limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \leq 0,$$

implique que

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X \geq \langle Au, u - w\rangle_X \qquad \textit{pour tout} \quad w \in X.$$

Définition 1.5 *([2], page 554) L'opérateur A est dit **hémicontinu** si et seulement si la fonction réelle*

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w\rangle_X$$

est continue sur [0,1] pour tout $u, v, w \in X$.

Définition 1.6 *([2], page 554) A est dit **demi-continu** si et seulement si*

$$u_n \to u \quad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

implique $Au_n \rightharpoonup Au$ quand $n \to \infty$.

Proposition 1.1 *([2], page 586) Si A est monotone est hémicontinue, alors A est pseudo-monotone.*

Preuve: (Voir [2], page 586) Soit $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to \infty$ et

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \leq 0$$

Comme l'opérateur A est monotone, on obtient que

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle_X \geq \langle Au, u_n - u\rangle_X \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

Ce qui implique

$$\langle Au_n, u_n - u\rangle_X \to 0 \quad quand \quad n \to \infty.$$

Soit $z = u + t(w - u)$ avec t>0. La monotonie de A nous donne

$$\langle Au_n - Az, u_n - z\rangle_X \geq 0$$

donc

$$t\langle Au_n, u - w\rangle_X \geq \langle -Au_n, u_n - u\rangle_X + \langle Az, u_n - u\rangle_X + t\langle Az, u - w\rangle_X.$$

ce qui implique

$$\langle Az, u - w\rangle_X \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X \quad \text{pour tout } w \in X.$$

L'opérateur A est hémicontinu. Ainsi, $t \to 0$, on obtient

$$\langle Au, u - w\rangle_X \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X \quad \text{pour tout } w \in X.$$

c'est à dire, A est pseudo-monotone. ∎

Définition 1.7 *([1], page 756) Soit $M \subseteq X$.*

▷ *L'ensemble M est dit **compact** si et seulement si de tout recouvrement ouvert de M, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

▷ *L'ensemble M est dit **relativement compact** si et seulement si La fermeture $\overline{M}$ est compact.*

Définition 1.8 *([2], page 507) Soit $C \subseteq X$.*

▷ *L'ensemble C est dit **convexe** si et seulement si*

$$\forall u, v \in C \quad et \quad \forall t \in [0, 1] \quad implique \quad (1 - t)u + tv \in C$$

▷ *La fonction* $f : C \to \mathbb{R}$ *est dite convexe dans* C *si et seulement si*

$$f((1-t)u+tv) \leq (1-t)f(u)+tf(v) \quad \forall u,v \in C \ \ et \ \forall t \in [0,1]$$

Théorème 1.1 *([4], page 38) Soit* $C \subseteq X$ *un convexe. Alors,* C *est faiblement fermé si et seulement s'il est fermé.*

Preuve: (Voir [4], page 38) ■

Définition 1.9 *([10],page 120) On dit qu'une fonction* $\varphi : X \to]-\infty,+\infty]$ *est* ***propre*** *si l'ensemble* $\{x \in X : \varphi(x) < +\infty\}$ *est non vide.*

Définition 1.10 *([4], page 8) Soit la fonction* $\varphi : X \to]-\infty,+\infty]$ *:*

▷ φ *est dite* ***semi-continue inférieurement*** *si pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

l'ensemble $\{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ *est fermé,*

ou bien, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *tel que* $x_n \to x$*, on a*

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

▷ φ *est dite* ***semi-continue supérieurement*** *si pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

l'ensemble $\{x \in X : \varphi(x) \geq \lambda\}$ *est fermé,*

ou bien, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *tel que* $x_n \to x$*, on a*

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(x).$$

Définition 1.11 *([5], page 46)*

▷ *La fonction* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *est dite* ***faiblement semi-continu supérieurement*** *sur* X *si* $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} \varphi(v_n) \leq \varphi(v)$ *pour chaque suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *converge faiblement vers* v*.*

▷ *La fonction* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *est dite* ***faiblement semi-continu inférieurement*** *sur* X *si* $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} \varphi(v_n) \geq \varphi(v)$ *pour chaque suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *converge faiblement vers* v*.*

Définition 1.12 *([1], page 755) Soit* $M \subseteq X$ *et* $N \subseteq M$*,*

▷ *On dit que* N *est* ***relativement ouvert*** *dans* M *si et seulement s'il existe un ouvert* O

dans X *tel que* $N = M \cap O$.

$\triangleright$ *On dit que* N *est* ***relativement fermé*** *dans* M *si et seulement s'il existe un fermé* C *dans* X *tel que* $N = M \cap C$.

Proposition 1.2 *([1], page 755) Soit* $N \subseteq M$.

$\triangleright$ *Si* M *est ouvert, alors* N *est relativement ouvert si et seulement si* N *est ouvert.*

$\triangleright$ *Si* M *est fermé, alors* N *est relativement fermé si et seulement si* N *est fermé.*

1.1.1 Partition de l'unité

Définition 1.13 *([1], page 756) Soit* $f : M \subseteq X \to \mathbb{R}$ *une fonction de valeur réel. Le support de f, on écrit supp(f), est la fermeture de l'ensemble* $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$.
Soit X un espace paracompact (exp. espace métrique ou un espace topologique compact). Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *un recouvrement ouvert de X. Alors il existe une partition de l'unité* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *(indexée par le même ensemble I) subordonné au* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, *c'est à dire, il existe une famille des fonctions continues de valeur réel* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *avec les propriétés suivantes :*

(i) $0 \leq f_\alpha(x) \leq 1$, $\forall x \in X$ *et* $\forall \alpha \in I$.

(ii) $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1$, $\forall x \in X$.

(iii) Le recouvrement $\{supp(f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ *de X est localement fini, c'est à dire, pour tout* $x \in X$ *il existe un voisinage U(x) de x tel que toutes les fonctions* f_α *soient nulles sur ce voisinage à l'exception d'un nombre fini d'entre elles.*

(iv) Le recouvrement $\{supp(f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ *de X est un raffinement de* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, *c'est à dire, pour chaque* $\alpha \in I$ *il existe* $\beta \in I$ *avec* $supp(f_\alpha) \subseteq U_\beta$. *S'il existe un nombre fini d'ensembles* $U_1, \cdots, U_n$, *puis on peut choisir* $f_1, \cdots, f_n$ *alors* $supp(f_i) \subseteq U_i$ *pour tout i.*

1.1.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Proposition 1.3 (Point fixe de Brouwer (1912)) *([1], page 51) On suppose que M est un sous-ensemble non vide, convexe et compact de* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *et* $f : M \to M$ *est continue. Alors f admet un point fixe.*

Preuve: (Voir [1], page 51)

■

1.1.3 La dérivée de Fréchet et de Gâteau

Notation : pour un opérateur $r : U(0) \subseteq X \to Y$, on peut écrire :

$$r(x) = o(\|x\|), x \to 0 \quad \text{si et seulement si } r(x)/\|x\| \to 0 \text{ quand } x \to 0;$$

$$r(x) = o(1), x \to 0 \quad \text{si et seulement si } r(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0;$$

Définition 1.14 *([1], page 135) Soit $f : U(x) \subseteq X \to Y$, tel que $U(x)$ est un voisinage de x.*

(1) L'opérateur f est différentiable au sens de Fréchet au point x si et seulement s'il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que

$$f(x+h) - f(x) = Th + o(\|h\|), \quad h \to 0$$

pour tout h dans un voisinage de zéro. S'il existe, T est appelé la dérivé de f au sens de Fréchet au point x et on écrit $f'(x) = T$. La différentielle au sens de Fréchet au point x est défini par $df(x; h) = f'(x)h$.

(2) L'opérateur f est différentiable au sens de Gâteau au point x si et seulement s'il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que

$$f(x+tk) - f(x) = tTk + o(t), \quad t \to 0$$

pour tout k avec $\|k\| = 1$ et pour tout t un nombre réel dans un voisinage de zéro. T est appelé la dérivé de f au sens de Gâteau au point x et on écrit $f'(x) = T$. La différentielle au sens de Gâteau au point x est défini par $d_G f(x; h) = f'(x)h$.

(3) Si la dérivée au sens de Fréchet (resp. au sens de Gâteau) $f'(x)$ existe pour tout

$x \in A$, alors l'opérateur

$$f' : A \subseteq X \to \mathcal{L}(X, Y) \quad \textit{défini par} \quad x \mapsto f'(x)$$

est appelé la dérivée de f au sens de Fréchet (resp. au sens de Gâteau) dans A.

Remarque 1.1 *On définit la dérivée au sens de Gâteau par*

$$f'(x, k) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x + tk) - f(x)}{t}$$

De plus, $f'(x; .)$ est positivement homogène, c'est à dire,

$$f'(x; tk) = tf'(x; k) \qquad \textit{pour tout } t > 0$$

et il est une fonction propre et convexe dans X.

1.1.4 Les espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.15 *([4], page 149) L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i \in 1, \cdots n\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Définition 1.16 *([4], page 171)*

▷ *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

▷ *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; et il est réflexif si $1 < p < \infty$.*

▷ *On désigne $W^{-1,q}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Proposition 1.4 (Inégalité de Poincaré) *([4], page 174) On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C(dépendant de Ω et p) telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty)$$

En particulier, l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_W^{1,p}(\Omega)$.

1.2 Les opérateurs multivoques

On considère quelque notion de base pour les opérateurs multivoques.

Définition 1.17 *([2], page 850) Soit $T : X \to 2^Y$ un opérateur multivoque c'est à dire T assigne à chaque point $u \in X$ un sous-ensemble Tu de Y.*

- *L'ensemble D(T)=$\{u \in X : Tu \neq \phi\}$ est appelé le domaine efficace de T.*
- *L'ensemble R(T)=$\cup_{u \in X} Tu$ est appelé le rang de T.*
- *L'ensemble G(T)=$\{(u, v) \in X \times Y : u \in D(T), v \in Tu\}$ est appelé le graphe de T.*

Définition 1.18 *([2], page 851) L'inverse de l'opérateur multivoque $T^{-1} : Y \to 2^X$ est défini par :*

$$T^{-1}(v) = \{u \in X : v \in Tu\}$$

tel que $D(T^{-1}) = R(T)$ et

$$(u, v) \in G(T) \quad \text{si et seulement si} \quad (v, u) \in G(T^{-1}).$$

Définition 1.19 *([2], page 851) Soit $M \subseteq X$, pour les opérateurs multivoques données*

$$A, B : M \to 2^Y$$

et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on définit la combinaison linéaire

$$\alpha A + \beta B : M \to 2^Y$$

par :

$$(\alpha A + \beta B)(u) = \begin{cases} \alpha Au + \beta Bu & si\ u \in D(A) \cap D(B), \\ \phi & sinon. \end{cases}$$

et on a : $D(\alpha A + \beta B) = D(A) \cap D(B)$.

Remarque 1.2 *([2], page 851) En terme des ensembles, l'opérateur multivoque* $A : M \to 2^Y$ *est un sous-ensemble de* $M \times Y$*. Par conséquent, le graphe G(A) est identique au sous-ensemble* A *de* $M \times Y$.

Remarque 1.3 *([2], page 851) Chaque opérateur univoque A :D(A)*$\subseteq M \to Y$ *peut être identifiée avec un opérateur multivoque* $\bar{A} : M \to 2^Y$ *en définissant :*

$$\bar{A}u = \begin{cases} \{Au\} & si\ u \in D(A), \\ \phi & sinon. \end{cases}$$

puis $D(\bar{A}) = D(A)$ *et* $R(\bar{A}) = R(A)$.

Définition 1.20 *([2], page 851) L'opérateur* $B : M \to 2^Y$ *est appelé une extension de l'opérateur* $A : M \to 2^Y$ *si et seulement si* $G(A) \subseteq G(B)$.

Définition 1.21 *([5], page 47) On dit qu'un opérateur multivoque* $A : M \subseteq X \to 2^Y$ *est fermé si son graphe* $G(A)$ *est fermé dans* $X \times Y$,
c'est à dire, soit $(x_n, y_n) \in M \times Y$ *tel que* $y_n \in Ax_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $x_n \to x$ *dans* X *et* $y_n \to y$ *dans* Y *implique* $y \in Ax$.

Définition 1.22 *([2], page 851) Soit l'opérateur multivoque* $A : M \to 2^{X^*}$, *où M est un sous-ensemble de l'espace de Banach X.*

(a) *Un sous-ensemble* S *de* $M \times X^*$ *est dit monotone si et seulement si*

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geqslant 0 \qquad pour\ tout \quad (u, u^*), (v, v^*) \in S$$

(b) *Un sous-ensemble S de $M \times X^*$ est dit maximal monotone si et seulement s'il est monotone et qu'il n'y a pas d'extension monotone propre dans $M \times X^*$.*

(c) *L'opérateur multivoque A est dit monotone si et seulement si le graphe G(A) est un ensemble monotone dans $M \times X^*$, c'est à dire :*

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \quad (u, u^*), (v, v^*) \in G(A)$$

(d) *L'opérateur multivoque A est dit maximal monotone si et seulement si le graphe G(A)est un ensemble maximal monotone dans $M \times X^*$, c'est à dire :*
A monotone et $(u, u^*) \in M \times X^*$ et

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A)$$

implique que $(u, u^*) \in G(A)$.

Proposition 1.5 *([2], page 851) Soit X un espace de Banach réflexive, l'opérateur multivoque A :$X \to 2^{X^*}$ dans X est maximal monotone si et seulement si son inverse $A^{-1} : X^* \to 2^X$ est maximal monotone.*

Preuve: (Voir [2], page 854) D'après la réflexivité on a :

$$\langle u^*, u \rangle_X = \langle u, u^* \rangle_{X^*} \qquad \text{pour tout} \quad (u, u^*) \in X \times X^*$$

Et on a : $G(A^{-1}) = \{(u^*, u) \in X^* \times X : (u, u^*) \in G(A)\}$,
Soient (u, u^*) et $(v, v^*) \in G(A)$:
$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X = \langle u - v, u^* - v^* \rangle_{X^*} \geqslant 0$ (car A^{-1} est monotone) d'où A est monotone.
D'autre part,
soit $(u, u^*) \in X \times X^*$ et $\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geqslant 0$ pour tout $(v, v^*) \in G(A)$
et comme $\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X = \langle u - v, u^* - v^* \rangle_{X^*} \geqslant 0$ pour tout $(v^*, v) \in G(A^{-1})$,
on obtient $(u^*, u) \in G(A^{-1})$ (car A^{-1} est maximal monotone)
ainsi $(u, u^*) \in G(A)$. Donc A est maximal monotone. ■

Proposition 1.6 *([2], page 854) Si* $A : M \rightarrow 2^{X^*}$ *est maximal monotone dans un espace de Banach réel* X*, donc l'ensemble* Au *est convexe et* $faiblement^*$ *fermé dans* X^* *pour tout* $u \in X$*.*

Preuve: ([2], page 854) Soit $u_o^*, u_1^* \in Au$. Posons $u_t^* = (1-t)u_0^* + tu_1^*, 0 \leqslant t \leqslant 1$.
Pour tout $(v, v^*) \in A$,

$$\langle u_t^* - v^*, u - v\rangle = (1-t)\langle u_0^* - v^*, u - v\rangle + t\langle u_1^* - v^*, u - v\rangle \geqslant 0$$

ainsi $u_t^* \in Au$.
Soit u_α^* une suite généralisée [1] dans Au telle que $u_\alpha^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$ dans X^*. Comme

$$\langle u_\alpha^* - v^*, u - v\rangle_X \geqslant 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A),$$

On obtient $\langle u^* - v^*, u - v\rangle_X \geqslant 0$ pour tout $(v, v^*) \in G(A)$. Ainsi $u^* \in Au$.

■

Définition 1.23 *([6], page 546) Soit* X *un espace de Banach réflexif réel.*
L'opérateur multivoque $T : X \rightarrow 2^{X^*}$ *est pseudo-monotone généralisé si pour toute suite* $\{u_n\} \subset X$ *et* $\{u_n^*\} \subset X^*$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $X, u_n^* \in Tu_n$ *pour* $n \geqslant 1$*,*
$u_n^* \rightharpoonup u^*$ *et* $\limsup\limits_{n \longrightarrow \infty} \langle u_n^*, u_n - u\rangle_X \leqslant 0$*, nous avons* $u^* \in Tu$
et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \langle u_n^*, u_n\rangle_X = \langle u^*, u\rangle_X$*.*

1.3 Le sous-gradient

Le sous-gradient généralise le concept classique d'un dérivée. Dans ce contexte, la formule suivante

$$f(v) \geqslant f(u) + \langle u^*, v - u\rangle_X \qquad \text{pour tout} \quad v \in X \tag{1.1}$$

1. suite de Moore-Smith, ou filet définit dans ([13], page 73)

est crucial.

Définition 1.24 *([2], page 856) Soit $f : X \to [-\infty, \infty]$ un fonctionnel dans un espace de Banach réel X.*

▷ Le fonctionnel u^* dans X^* est appelé le ***sous-gradient*** *de f au point u si et seulement si $f \neq \pm\infty$ et (1.1) vérifiés.*

▷ L'ensemble des sous-gradients de f au point u est appelé le ***sous-différentiel*** *$\partial f(u)$ au point u.*

▷ S'il n'existe aucun gradient, nous mettons $\partial f(u) = \phi$.

▷ En particulier, soit $\partial f(u) = \phi$ si $f = \pm\infty$.

▷ Si $\partial f(u) \neq \phi$, alors $f(v) > -\infty$ pour tout $v \in X$, par (1.1).

Exemple 1.1 *([2], page 857) pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le sous-différentielle au point u égale l'ensemble des pentes $u^* \in \mathbb{R}$ des droites qui passe par le point (u,f(u)) qui se trouve au-dessous du graphe de f.*
Si la dérivée f'(u) existe, alors $\partial f(u)$ est univoque, c'est à dire,

$$\partial f(u) = \{f'(u)\}. \tag{1.2}$$

Maintenant, on va généraliser la relation (1.2) dans les espaces de Banach.

Proposition 1.7 *([2], page 857) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ un fonctionnel dans l'espace de Banach X, alors :*

- **(a)** *si f est convexe et si f possède la dérivée de Gâteau $f'(u)$ au point u, alors (1.2) réalisée.*
- **(b)** *réciproquement, si $\partial f : X \to X^*$ est une application unique et hémi-continue, alors f est différentiable au sens de Gâteau sur X et (1.2) réalisée pour tout $u \in X$.*

Preuve: (Voir [2], page 857)

- **(a)** Posons $\varphi(t) = f(u + th)$. Où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe,

$\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$. Par conséquent

$$f(u+h) - f(u) \geq \langle f'(u), h\rangle \qquad \text{pour tout} \quad h \in X,$$

c'est à dire $f'(u) \in \partial f(u)$.

Réciproquement, si $u^* \in \partial f(u)$, alors

$$f(u+th) - f(u) \geq \langle u^*, th\rangle \qquad \text{pour tout} \quad h \in X, t > 0$$

et alors $\langle f'(u), h\rangle \geq \langle u^*, h\rangle$ pour tout $h \in X$. Ce qui implique $u^* = f'(u)$.

(b) Soit $t > 0$. On a

$$f(u+th) - f(u) \geq \langle \partial f(u), th\rangle,$$

$$f(u) - f(u+th) \geq -\langle \partial f(u+th), th\rangle,$$

On obtient

$$\begin{aligned}\langle \partial f(u), h\rangle &\leq \liminf_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(u+th) - f(u)}{t}\\ &\leq \limsup_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(u+th) - f(u)}{t} \leq \langle \partial f(u), h\rangle\end{aligned}$$

pour tout $h \in X$, c'est à dire $f'(u) = \partial f(u)$.

■

Proposition 1.8 (Principe de minimum) *([2], page 858) Soit $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ un fonctionnel dans un espace de Banach réel X avec $f \neq \pm\infty$. Alors, u est une solution du problème de minimum*

$$f(u) = \min_{v \in X} f(v) \quad u \in X,$$

si et seulement si

$$0 \in \partial f(u).$$

Preuve: (Voir [2], page 858) Ce découle immédiatement de (1.1). ■

Définition 1.25 *([2], page 859) L'opérateur multivoque $A : X \rightarrow 2^{X^*}$ dans un espace de*

Banach réel X est appelé cyclique monotone si et seulement si l'inégalité

$$\langle u_1^*, u_1 - u_2\rangle + \langle u_2^*, u_2 - u_3\rangle + \cdots + \langle u_n^*, u_n - u_{n+1}\rangle \geq 0$$

est réalisée pour tout $(u_i, u_i^*) \in G(A)$, *i=1,$\cdots$,n, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *où on pose* $u_{n+1} = u_1$. *De plus, A est appelé maximal cyclique monotone si et seulement si A est cyclique monotone et il n'y a pas d'application cyclique monotone* $B : X \to 2^{X^*}$ *tel que* $G(A) \subset G(B)$.

Définition 1.26 *([7], page 502) Pour tout* $\epsilon > 0$, *on définit* ***la relation du sous-différentiel approximatif*** $\partial_\epsilon f$ *par*

$$\partial_\epsilon f(x) = \{x^* \in X^* / f(u) \geq [f(x) - \epsilon] + \langle x^*, y - x\rangle \ \textit{pour tout}\ y \in X\}$$

Si f(x) est fini, $\partial_\epsilon f(x)$ *est un sous-ensemble non vide faiblement* fermé et convexe de* X^* *pour tout* $\epsilon > 0$, *et*

$$\partial_\epsilon f(x) \to \partial f(x) \quad \textit{quand} \quad \epsilon \to 0.$$

1.4 L'opérateur de dualité

Définition 1.27 *([2], page 860) Soit* $\varphi(u) = 2^{-1}\|u\|^2$ *pour tout* $u \in X$, *où X est un espace de Banach réel. L'opérateur de dualité*

$$J : X \to 2^{X^*}$$

de X est défini pour être $J = \partial\varphi$.

Proposition 1.9 *([2], page 861) Soient X un espace de Banach réflexif, et* X^* *strictement convexe. Soit* $\varphi(u) = 2^{-1}\|u\|^2$.
Alors, l'opérateur multivoque $J : X \to 2^{X^*}$ *est univoque, surjective, demi-continu, maximal monotone, bornée et coercive.De plus*

$$J(u) = \varphi'(u) \quad \forall u \in X \tag{1.3}$$

tel que φ' est la dérivée de φ au sens Gâteaux, et

$$\langle Ju, u\rangle_X = \|u\|^2 \quad et \quad \|Ju\| = \|u\|. \tag{1.4}$$

Preuve: (Voir [2], page 862) ∎

Proposition 1.10 (Kadec(1959) et Troyanski(1971)) *([2], page 862) Dans chaque espace de Banach réflexif X, une norme équivalente peut être introduite pour que X et X^* soient localement uniformément convexes et donc strictement convexes par rapport aux nouvelles normes sur X et X^*.*

Corollaire 1.1 *([2], page 862) Soit X un espace de Banach réel réflexif. Alors on peut introduire une norme équivalente dans X, donc par rapport à la nouvelle norme dans X et X^*, $J : X \to X^*$ est strictement monotone, maximal monotone, borné, coercive et les relations (1.3) et (1.4) ci-dessus sont satisfaites.*
L'opérateur inverse $J^{-1} : X^* \to X$ est l'opérateur de dualité d'espace dual X^*.

1.5 Principe d'existence des systèmes d'inéquations

On va trouver $u \in K$ qui est une solution de l'inéquation

$$\langle f - Tu, v - u\rangle_X \geq 0 \text{ pour tout } (v, f) \in M \tag{1.5}$$

Proposition 1.11 (Debrunner, Flor (1964)) *([1], page 61) Soit K un sous ensemble non vide compact et convexe d'un espace de Banach X, et soit M un sous ensemble monotone de $K \times X^*$, c'est à dire,*

$$\langle f - g, v - w\rangle_X \geq 0 \qquad pour\ tout \quad (v, f), (w, g) \in M \tag{1.6}$$

De plus, soit $T : K \to X^*$ continue. Alors le problème (1.5) admet au moins une solution

$u \in K$.

Preuve: (Voir [1], page 62) On suppose, le contraire, que (1.5) n'admet aucune solution dans K.

(1) **Partition de l'unité.** On définit l'ensemble

$$U(v,f) = \{u \in K : \langle f - Tu, v - u\rangle_X < 0\}.$$

$U(v,f)$ est relativement ouvert dans K(1.12). Par hypothèse, comme (1.5) n'admet aucune solution , La collection (famille) de $U(v,f)$, pour tout $(v,f) \in M$, forme un recouvrement de l'ensemble K. Mais K est compact, donc le recouvrement est déjà formé par un ensemble fini des ensembles $U(v_i, f_i)$, i=1,$\cdots$,m. Par (1.13), il existe une partition d'unité subordonné, c'est à dire, il existe des fonctions continues

$$\begin{aligned} &\beta_i : K \to \mathbb{R},\ \text{avec } supp\beta_i \subseteq U(v_i, f_i),\ \text{tel que} \\ &\sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) = 1, 0 \le \beta_i(u) \le 1,\ \text{pour tout } u \in K, i = 1, \cdots, m. \end{aligned} \tag{1.7}$$

(2) **Théorème du point fixe de Brouwer.** Soit $K_1 = co(\{v_1, \cdots, v_m\})$ [2], et on définit

$$p(u) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) v_i, \quad q(u) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) f_i, \quad \text{pour tout } u \in K_1.$$

Par (1.7), p associe K_1 continûment par lui-même. D'après la proposition (1.3), p admet un point fixe, $u^* = p(u^*)$, $u^* \in K_1$.

(3) **Construction de la contradiction.** Soit

$$\Delta_{ij} = \langle f_i - Tu^*, v_j - u^*\rangle_X.$$

2. ([11], page 182)l'enveloppe convexe de V=$\{v_1, \cdots, v_m\}$, c à d, la plus petite partie convexe de K qui contient V.

Alors

$$\Delta_{ij} + \Delta_{ji} = \Delta_{ii} + \Delta_{jj} + \langle f_i - f_j, v_j - v_i \rangle_X.$$

Par la monotonie de M (1.6), on obtient $\langle f_i - f_j, v_j - v_i \rangle_X \leq 0$, Donc

$$\Delta_{ij} + \Delta_{ji} \leq \Delta_{ii} + \Delta_{jj}.$$

De $p(u^*) = u^*$ et par la définition de p et q on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q(u^*) - Tu^*, p(u^* u^*\rangle_X \\ &= \sum_{i,j=1} \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\Delta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1} \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)(\Delta_{ij} + \Delta_{ji})/2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

Alors

$$0 \leq \sum_{i,j=1} \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)(\Delta_{ii} + \Delta_{jj})/2. \tag{1.9}$$

Si $\beta_i(u^*)\beta_j(u^*) \neq 0$, donc $u^* \in U(v_i, f_i) \cap U(v_j, f_j)$. Par construction de $U(v, f)$, on a $\Delta_{ii} < 0$ et $\Delta_{jj} < 0$. D'après (1.9), on obtient $\beta_i(u^*) = 0$ pour tout i=1,$\cdots$,m. Puisque $u^* \in K$, c'est contredit avec (1.7).

■

1.6 Principe d'intersection finie

Proposition 1.12 *([1], page 756)*

Une famille d'ensembles $\aleph$ est dit centrée si et seulement si l'intersection d'un nombre fini d'ensembles dans $\aleph$ est non vide.

Un sous-ensemble M de X est compact si et seulement si toute famille d'ensembles centrée qui sont relativement fermés dans M a une intersection non vide.

1.7 Théorème de Alaoglu—Bourbaki—Eberlein—Šmuljan

Théorème 1.2 *([1], page 777)*

Pour X un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est réflexif.

(ii) Toute suite (x_n) borné dans X admet un sous-suite converge faiblement.

(iii) La boule d'unité fermé dans X est faiblement compact.

(iv) Tout ensemble borné fermé convexe dans X est faiblement compact.

(v) Tout ensemble borné faiblement fermé dans X est faiblement compact.

Chapitre 2

Quelques théorèmes principaux (Browder, Rockafellar, point fixe)

2.1 Théorème de Rockafellar

Nous supposons l'hypothèse suivant :

($\mathcal{H}$) Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convexe et semi-continu inférieurement dans un espace de Banach X et soit $f \not\equiv +\infty$

Lemme 2.1 *([7], page 503) Supposons ($\mathcal{H}$). Soit $x \in X$, $x^* \in X^*$, et $\epsilon > 0$ tels que $x^* \in \partial_\epsilon f(x)$. Pour tout λ avec $0 < \lambda < \infty$. Alors il existe $\bar{x} \in X$ et $\bar{x}^* \in X^*$ tels que*

$$\|\bar{x} - x\| \leq \lambda, \quad \|\bar{x}^* - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad \bar{x}^* \in \partial f(\bar{x})$$

Il y a une relation élémentaire entre le sous-gradient et la dérivée au sens de Gâteau : Si $f(x)$ fini,

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f'(x; y) \geq \langle x^*, y \rangle \quad \forall y \in X \tag{2.1}$$

$\triangleright$ Soit C^* un sous-ensemble non vide faiblement* fermé et convexe de X^*. On note la fonction d'appui[1] de C^* dans X par $\sigma(C^*;.)$. Alors

$$\sigma(C^*;y) = \sup\{\langle x^*, y\rangle : x^* \in C^*\}$$

pour tout $y \in X$, et $\sigma(C^*;.)$ est fonction positivement homogène, semi-continue inférieurement, convexe et propre dans X. La formule (2.1) nous donne, si $\partial f(x) \neq \phi$,

$$f'(x;y) \geq \sigma(\partial f(x);y) \quad \forall y \in X$$

Le théorème suivant dit que, $\partial f(x)$ est l'intersection de $\partial_\epsilon f(x)$ pour $\epsilon > 0$, donc $f'(x;.)$ est le minimum des fonctions d'appui (semi-continue inférieurement) des $\partial_\epsilon f(x)$ pour $\epsilon > 0$.

Théorème 2.1 *([7], page 504) Soit X un espace localement convexe, et soit f une fonction semi-continue inférieurement, propre et convexe dans X. Soit $x \in X$ tel que $f(x) < \infty$ Alors, pour tout $y \in X$,*

$$\sigma(\partial_\epsilon f(x);y) \to f'(x;y) \quad quand \quad \epsilon \to 0$$

Proposition 2.1 (Rockafellar(1966)) *([2], page 860) Si ($\mathcal{H}$) est réalisée, alors le sous-gradient $\partial f : X \to 2^{X^*}$ est maximal monotone.*

Preuve: (Voir [7], page 508)

Étape 1 On montre que l'opérateur ∂f est monotone

Pour $(u, u^*), (v, v^*) \in G(\partial f)$, on a : $u^* \in \partial f(u)$ et $v^* \in \partial f(v)$. Donc :

$$f(v) - f(u) \geq \langle u^*, v-u\rangle \quad et \quad f(u) - f(v) \geq \langle v^*, u-v\rangle.$$

et par l'addition de ces deux inégalités, on obtient :

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0.$$

1. cité dans [12], page 288

Étape 2 On suppose que $z \in X$ et $z^* \in X^*$ tels que

$$\langle x^* - z^*, x - z \rangle \geq 0 \quad \forall (x, x^*) \in G(\partial f). \tag{2.2}$$

On doit montrer que $z^* \in \partial f(z)$.

Effectivement,on remplace f par

$$h(x) = f(z + x) - \langle z^*, x \rangle$$

Si nécessaire, on peut supposer que $z = 0$ et $z^* = 0$. Ainsi il est suffisamment de prouver le suivant : Si

$$0 \notin \partial f(0) \tag{2.3}$$

Alors il existe $\bar{x}$ et $\bar{x}^*$ tels que

$$\bar{x}^* \in \partial f(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle < 0 \tag{2.4}$$

Maintenant, (2.3) implique par définition que $f(0)$ n'est pas le minimum de f dans E. Alors il existe x_0 avec

$$f(0) > f(x_0).$$

Soit $Q(\lambda) = f(\lambda x_0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. donc Q est une fonction semi-continue inférieurement, propre et convexe dans $\mathbb{R}$ et $Q(0) > Q(1)$. Ainsi, il existe λ_0 tel que

$$0 < \lambda_0 \leq 1, \quad Q(\lambda_0) < \infty, \quad Q'_{-}(\lambda_0) < 0, \tag{2.5}$$

où Q'_{-} est le dérivée à gauche de Q. En terme de f et sa dérivée au sens de Gâteau, (2.5) nous donne

$$f(\lambda_0 x_0) < \infty, \quad -f'(\lambda_0 x_0; -x_0) < 0.$$

Ainsi pour $x = \lambda_0 x_0$ on a

$$f(x) < \infty, \quad f'(x; -x) > 0. \tag{2.6}$$

Choisissons $\epsilon > 0$. Et par (2.6) et le théorème (2.1), il existe x^* avec

$$x^* \in \partial_\epsilon f(x) \quad et \quad \langle x^*, -x \rangle > 0.$$

On applique le lemme (2.1) avec $\lambda^2 = \epsilon$, on peut prendre $\bar{x}$ et $\bar{x}^*$ avec

$$\|\bar{x} - x\| \leq \epsilon^{1/2}, \quad \|\bar{x}^* - x^*\| \leq \epsilon^{1/2}, \quad \bar{x}^* \in \partial f(\bar{x}).$$

Puisque $\langle x^*, x \rangle < 0$, on a aussi $\langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle < 0$ tels que ϵ suffisamment petit. Ce qui montre que (2.4) est satisfaite, d'où le résultat. ∎

Corollaire 2.1 (Rockafellar(1970)) *([2], page 860) Pour un opérateur multivoque $A : X \to 2^{X^*}$ dans un espace de Banach X, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $A = \partial f$ et f satisfait $(\mathcal{H})$.

(ii) A est maximal cyclique monotone.

Preuve: (Voir [7], page 505) ∎

2.2 Le théorème principal sur la perturbation pseudo-monotone de l'opérateur multivoque maximal monotone

Notre objectif est de résoudre l'inclusion perturbée suivante :

$$b \in Au + Bu, \qquad u \in C \tag{2.7}$$

où $A : C \subseteq X \to 2^{X^*}$ est maximal monotone et $B : C \to X^*$ est pseudo-monotone. Explicitement, l'inclusion (2.7) signifie ce qui suit. Pour un donné $b \in X^*$, trouver $u \in C$ tel que

$$b = u + w, \qquad \text{où} \quad v \in Au \quad \text{où} \quad w \in Bu.$$

Si A et B sont univoques, alors (2.7) est équivalent à l'équation de l'opérateur

$$b = Au + Bu, \qquad u \in C.$$

Supposons que :

($\mathcal{H}1$) C est un ensemble non vide fermé convexe dans un espace de Banach réflexif X.

($\mathcal{H}2$) L'opérateur multivoque $A : C \to 2^{X^*}$ est maximal monotone.

($\mathcal{H}3$) L'opérateur multivoque $B : C \to X^*$ est pseudo-monotone, borné et demi-continue.

($\mathcal{H}4$) Si l'ensemble C est non borné, alors l'opérateur B est A-coercive par rapport à l'élément fixe $b \in X^*$, c'est à dire, il existe un point $u_0 \in C \cap D(A)$ et un nombre $r > 0$ tel que :

$$\langle Bu, u - u_0\rangle > \langle b, u - u_0\rangle \qquad \text{pour tout} \quad u \in C \quad \text{avec} \quad \|u\| > r.$$

Théorème 2.2 (Browder (1968)) *([2], page 867) Soit $b \in X^*$ et supposons ($\mathcal{H}1$), ($\mathcal{H}2$), ($\mathcal{H}3$) et ($\mathcal{H}4$), alors le problème original (2.7) admet au moins une solution.*

Ce théorème représente un résultat fondamental dans la théorie des opérateurs monotones. Avant de prouver le théorème (2.2), on va démontrer les corollaires suivants :

Corollaire 2.2 *([2], page 867) on suppose ($\mathcal{H}1$), ($\mathcal{H}2$) et ($\mathcal{H}3$) tenir, et supposons que l'un des deux conditions suivantes est satisfaite :*

(i) C est borné.

(ii) C est non borné, et B est A-coercive, c'est à dire , il existe $u_0 \in C \cap D(A)$ tel que :

$$\frac{\langle Bu, u - u_0\rangle_X}{\|u\|_X} \to +\infty \qquad \textit{quand} \quad \|u\|_X \to \infty \quad \textit{dans } C.$$

Alors, $R(A+B) = X^*$. Autrement dit, pour chaque $b \in X^*$, l'inclusion $b \in Au+Bu, u \in C$ admet au moins une solution.

Preuve: (Voir [2], page 868) il reste à montrer $(\mathcal{H}4)$. Par la définition de la limite de la deuxième condition (ii) :

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0 : \quad \langle Bu, u - u_0 \rangle_X > \epsilon \|u\| \quad \forall \|u\| > r$$

On peut prendre $\epsilon = \frac{|\langle b, u-u_0 \rangle_X|}{\|u\|}$ pour tout $b \in X^*$, ce qui implique :

$$\langle Bu, u - u_0 \rangle_X > \langle b, u - u_0 \rangle_X$$

D'où le résultat. ∎

Corollaire 2.3 *([2], page 868) on suppose que :*

(i) L'opérateur multivoque $A : X \to 2^{X^*}$ est maximal monotone dans un espace de Banach réflexif réel X.

(ii) L'opérateur $B : X \to X^*$ est monotone, hémicontinu et borné.

(iii) B est A-coercive, c'est à dire, il existe $u_0 \in D(A)$ tel que :

$$\lim_{\|u\| \longrightarrow \infty} \frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle_X}{\|u\|_X} = +\infty.$$

Alors, $R(A + B) = X^*$.

Preuve: (Voir [2], page 868) D'après la proposition (1.1), l'opérateur B est pseudo-monotone. Ainsi, Le résultat découle de le corollaire (2.2). ∎

On va étudier maintenant l'inclusion **non perturbée** :

$$b \in Au, \qquad u \in C \tag{2.8}$$

Corollaire 2.4 *([2], page 868) on suppose que :*

(i) C est un ensemble non vide convexe et fermé dans un espace de Banach réflexif réel X.

(ii) l'opérateur multivoque $A : C \to 2^{X^*}$ est maximal monotone.

(iii) Si l'ensemble C est non borné, alors l'opérateur A est coercive par rapport à l'élément fixe $b \in X^*$, c'est à dire, il existe $u_0 \in D(A)$ et r>0 tel que :

$$\langle u^*, u - u_0 \rangle > \langle b, u - u_0 \rangle \qquad \textit{pour tout} \quad (u, u^*) \in G(A) \quad \textit{avec} \quad \|u\| > r$$

Alors, l'inclusion (2.8) admet au moins une solution.

Preuve: (Voir [2], page 868) On utilise la méthode de régularisation. Au lieu de (2.8), nous étudions les inclusions régularisées :

$$b \in Au_n + \varepsilon_n J(u_n - u_0) \qquad u_n \in C, \quad n = 1, 2, \cdots , \tag{2.9}$$

où $J : X \to X^*$ est l'opérateur de dualité, et (ε_n) est une suite de nombres réels positifs avec $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$. D'après la proposition (1.10), on introduit une norme équivalente sur X de sorte que X et X^* soient localement uniformément convexe. Par le corollaire (1.1), l'opérateur de dualité $J : X \to X^*$ est univoque, continu, borné, coercive et strictement monotone. Notez que A reste maximal monotone et coercive par rapport à b, lors du passage à des normes équivalentes.

(1) **Solution de l'inclusion régularisée (2.9).**

De $\langle J(u - u_0), u - u_0 \rangle = \|u - u_0\|^2$ il s'ensuite que

$$\lim_{\|u\| \longrightarrow \infty} \frac{\langle J(u - u_0), u - u_0 \rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

D'après corollaire (2.3), pour chaque n, l'inclusion (2.9) admet au moins une solution u_n.

(2) **Estimation à priori.**

Par (2.9), pour chaque n, il existe $u_n^* \in Au_n$ tel que

$$b = u_n^* + \varepsilon_n J(u_n - u_0). \tag{2.10}$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle b, u_n - u_0\rangle =& \langle u_n^*, u_n - u_0\rangle + \varepsilon_n \langle J(u_n - u_0), u_n - u_0\rangle \\ &= \langle u_n^*, u_n - u_0\rangle + \varepsilon \|u_n - u_0\|^2\end{aligned} \tag{2.11}$$

et $(u_n, u_n^*) \in G(A)$ pour tout n. Ce qui implique

$$\langle b, u_n - u_0\rangle \geq \langle u_n^*, u_n - u_0\rangle.$$

Par hypothèse (iii), la suite (u_n) est bornée, c'est à dire, il existe $r > 0$ tel que $\|u_n\| \leq r$.

(3) **La convergence faible de la méthode de régularisation.** Comme (u_n) est borné, il existe une sous-suite, notons aussi par (u_n) tel que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Donc $u \in C$, car C est faiblement fermé, d'après (i).

Puisque A est monotone, il découle de $(u_n, u_n^*) \in G(A)$ que :

$$\langle u_n^* - v^*, u_n - v\rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A).$$

Par (2.10)

$$\langle b - \varepsilon_n J(u_n - u_0) - v^*, u_n - v\rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A) \tag{2.12}$$

et pour tout n. Notons

$$\|\varepsilon_n J(u_n - u_0)\| = \varepsilon_n \|u_n - u_0\| \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Par $n \to \infty$, il découle de(2.12) que

$$\langle b - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A).$$

Comme A est maximal monotone, $b \in Au$.

■

Preuve du théorème 2.2

L'idée de la preuve est la suivante :

(a) Nous utilisons la méthode de Galerkin c'est à dire nous travaillons avec les inéquations de Galerkin.

(b) Les inéquations de Galerkin sont résolues par le principe d'existence des inéquations dans $\mathbb{R}^n$ (proposition 1.11). Dans ce cas, on utilise la méthode de troncature.

(c) La coercivité implique l'estimation à priori pour les solutions des inéquations de Galerkin.

(d) La convergence de la méthode de Galerkin est basée sur la pseudo-monotonicité de l'opérateur B.

Comme $A : C \to 2^{X^*}$ est maximal monotone, G(A) es non vide, c'est à dire, il existe $(u_0, u_0^*) \in G(A)$. Supposons que $u_0 = 0$ et $u_0^* = 0$, c'est à dire, $(0,0) \in G(A)$.

Autrement, on passe de l'équation $b \in Au + Bu$, $u \in C$, à l'équation modifiée

$$b - u_0^* \in \bar{A}v + \bar{B}v, \qquad v \in C - u_0,$$

où on pose $\bar{A}v = A(v + u_0)$ et $\bar{B}v = B(v + u_0) - u_0^*$ pour tout $v \in C - u_0$.

Étape 1 : **Inéquation variationnelle équivalente.**

Trouver $u \in C$ tel que

$$\langle b - Bu - v^*, u - v \rangle_X \geq o \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A) \tag{2.13}$$

Ce problème est équivalent au problème initial (2.7). En effet, $u \in C$ est une solution de (2.13) si et seulement si $b - Bu \in Au$, puisque A est maximal monotone.

Étape 2 : **Estimation à priori.**

Soit u une solution (2.13). Comme $(0,0) \in G(A)$, on obtient

$$\langle b - Bu, u \rangle \geq 0.$$

Par La condition de coercivité $(\mathcal{H}4)$ avec $u_0 = 0$, on obtient $\|u\| \leq r$ pour $r > 0$ fixé.

Étape 3 : **Les inéquation de Galerkin**

Soit $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble de tous les sous-espaces de dimension finie Y de l'espace de Banach original X, c'est à dire,

$$Y \in \mathcal{L} \qquad \text{implique} \qquad Y \subseteq X \quad \text{et} \quad dimY < \infty.$$

Fixons $Y \in \mathcal{L}$. Au lieu de l'inéquation variationnelle (2.13), considérons le problème approximatif

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v \rangle_Y \geq 0, \tag{2.14}$$

Pour tout $(v, v^*) \in G(A)$ avec $v \in C \cap Y$, où nous cherchons $u_Y \in C \cap Y$.

Dans ce cas, on a : $X^* \subseteq Y^*$, et

$$\langle u^*, u \rangle_Y = \langle u^*, u \rangle_X \qquad \text{pour tout} \quad (u^*, u) \in X^* \times Y.$$

Étape 4 : **Solution de (2.14) par la méthode de troncature.**

(4-1) **Problème de troncature.** Soit R>0. Pour $Y \in \mathcal{L}$ fixé, nous remplaçons (2.14) par le problème de troncature

$$\langle b - Bu_R - v^*, u_R - v \rangle_Y \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G_R \tag{2.15}$$

et l'inconnue $u_R \in K_R$. On pose

$$K_R = \{v \in C \cap Y : \|v\| \leq R\},$$

$$G_R = \{(v, v^*) \in G(A) : v \in K_R\}.$$

(4-2) **Solution de (2.15) par le principe d'existence pour les inéquations variationnelles de dimension finie.** D'après la proposition (1.11), le problème (2.15) a une solution $u_R \in K_R$.

(4-3) **Solution de (2.14) par la propriété d'intersection finie.** Fixons $Y \in \mathcal{L}$. Soit $\mathcal{S}_R$ désigne l'ensemble des solutions $u_R \in K_R$ de (2.15), c'est à dire,

$$\mathcal{S}_R \subseteq K_R \qquad \text{pour tout} \quad R > 0.$$

Comme dans l'étape 2 ci-dessus, nous obtenons l'estimation à priori

$$\|u_R\| \leq r \qquad \text{pour tout} \quad u_R \in \mathcal{S}_R \quad \text{et tout} \quad R > 0$$

où r indépendant de R et Y. Puisque B est demi-continue, l'ensemble $\mathcal{S}_R$ est fermé. De plus, $\mathcal{S}_R$ se trouve dans l'ensemble compact

$$\{u \in C \cap Y : \|u\| \leq r\}.$$

Si $r \leq R \leq R'$, alors $G_R \subseteq G_{R'}$. Par conséquent,

$$\mathcal{S}_R \supseteq \mathcal{S}_{R'} \qquad \text{pour tout } R, R' > 0 \quad \text{avec } R' \geq R \geq r.$$

Donc par le principe d'intersection finie (proposition 1.12), il existe un élément u_Y tel que

$$u_Y \in \bigcap_{R \geq r} \mathcal{S}_R.$$

Clairement, Cet élément u_Y est une solution de notre problème approximatif(2.14). De plus, nous obtenons que

$$\|u_Y\| \leq r \qquad \text{et} \qquad u_Y \in C \cap Y. \tag{2.16}$$

(5) **Convergence de la méthode de Galerkin par le principe d'intersection**

finie.

Pour chaque $Y \in \mathcal{L}$, le problème approximatif (2.14) a une solution u_Y. Nous voulons montrer que (u_Y) converge dans certain sens vers une solution u du problème initiale (2.13). À cette fin, nous utiliserons la monotonie maximale de A et la pseudo-monotonicité de B.

(5-1) **Le principe d'intersection finie.** Soient $Y, Z \in \mathcal{L}$. On pose

$$M_Z = \{(u_Y, Bu_Y) \in X \times X^* : u_Y \text{ est une solution de(2.14) avec } Y \supseteq Z\}.$$

Nous voulons montrer qu'il existe une paire ordonnée (u, u^*) tel que

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z \tag{2.17}$$

où $\overline{M}_Z$ désigne la fermeture de M_Z par rapport à la topologie faible dans l'espace produit $X \times X^*$. En outre, nous montrerons ci-dessous que u la solution souhaitée du problème initiale (2.13).

Maintenant, nous prouvons (2.17). Selon (2.16), il existe une boule fermé K dans $X \times X^*$ tels que

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} M_Z \subseteq K.$$

Dans ce cas, notez que l'opérateur B est borné.

Puisque X est réflexif, X^* et $X \times X^*$ sont aussi réflexifs. Par conséquent, K est faiblement compact, d'après le théorème (1.2). Comme $\overline{M}_Z$ est un sous-ensemble faiblement fermé de l'ensemble faiblement compact K, alors l'ensemble $\overline{M}_Z$ est faiblement compact et

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z \subseteq K$$

Soit $Y, Z \in \mathcal{L}$ et $S = vect\{Y, Z\}$. Alors

$$M_Y \cap M_Z \supseteq M_S.$$

Ce qui implique

$$\overline{M}_Y \cap \overline{M}_Z \neq \phi \qquad \text{pour tout} \quad Y, Z \in \mathcal{L}.$$

Le même argument montre que l'intersection de plusieurs ensembles finis $\overline{M}_Y$ n'est pas vide, c'est à dire,

$$\overline{M}_{Y_1} \cap \cdots \cap \overline{M}_{Y_n} \neq \phi \qquad \text{pour tout} \quad Y_1, \cdots, Y_n \in \mathcal{L}.$$

Par le principe d'intersection finie (proposition 1.12), il existe (u, u^*) tel que (2.17) réalisée.

(5-2) **Construction d'une paire ordonnée par la monotonie maximale de A.** Il existe $(v_0, v_0^*) \in G(A)$ tel que

$$\langle b - u^* - v_0^*, u - v\rangle_X \leq 0. \tag{2.18}$$

autrement dit, nous avons

$$\langle b - u^* - v^*, u - v\rangle_X > 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A).$$

Ce qui implique $b - u^* \in Au$, car A est maximal monotone. Posons $v = u$ et $v^* = b - u^*$, on obtient $(v, v^*) \in G(A)$ et $\langle b - u^* - v^*, u - v\rangle_X = 0$. C'est une contradiction.

(5-3) **Un argument d'approximation spéciale.** Fixons $Y \in \mathcal{L}$. L'ensemble $\overline{M}_Y$ est faiblement fermé dans l'espace de Banach $X \times X^*$, et nous avons $(u, u^*) \in \overline{M}_Y$, selon (2.17). Ainsi, il existe une suite d'élément (u_n, u_n^*)

dans M_Y tel que

$$(u_n, u_n^*) \rightharpoonup (u, u^*) \quad \text{dans } X \times X^* \qquad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.19}$$

et

$$\langle b - Bu_n - v^*, u_n - v \rangle_Y \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A) \quad \text{avec} \quad v \in Y. \tag{2.20}$$

selon(2.14). Puisque C est fermé et convexe (ça veut dire faiblement fermé), on obtient $u \in C$.

(5-4) **Pseudo-monotonicité de B.** nous voulons montrer que

$$\langle Bu, u - v \rangle \leq \langle v^* - b, v - u \rangle \quad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A) \text{ avec } v \in Y. \tag{2.21}$$

Dans la preuve suivante de (2.21), nous considérons seulement que $Y \in \mathcal{L}$ avec $v_0 \in Y$, où l'élément v_0 satisfait (2.18). Notons que

$$\bigcup_{Y \in \mathcal{L}, v_0 \in Y} Y = X. \tag{2.22}$$

Maintenant, fixons $Y \in \mathcal{L}$. De (2.20), il s'ensuite que

$$\langle Bu_n, u_n - w \rangle \leq \langle v^* - b, v - u_n \rangle + \langle Bu_n, v - w \rangle. \tag{2.23}$$

pour tout $w \in C, (v, v^*) \in G(A)$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $w = v$, on obtient

$$\langle Bu_n, u_n - v \rangle \leq \langle v^* - b, v - u_n \rangle \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A) \quad \text{avec} \quad v \in Y, \tag{2.24}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Choisissons $w = u, v = v_0$, et $v^* = v_0^*$ dans (2.23), on obtient

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq \langle v_0^* - b + u^*, v_0 - u \rangle,$$

puisque $Bu_n \rightharpoonup u^*$ quand $n \to \infty$.

Par (2.18), $\langle v_0^* - b + u^*, v_0 - u\rangle \leq 0$ et donc

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0.$$

De plus, nous avons $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \longrightarrow \infty$. Car $B : C \to X^*$ est pseudo-monotone, on obtient

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle Bu_n, u_n - v\rangle \qquad \text{pour tout} \quad v \in C. \tag{2.25}$$

Maintenant, la relation (2.24) implique (2.21).

(5-5) **Solution du problème initiale (2.13).** De (2.21) et (2.22) ; il s'ensuite que

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \langle v^* - b, v - u\rangle \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A),$$

c'est à dire, u est la solution de (2.13).

Ceci complète la preuve du théorème (2.2).

2.3 Points fixes des opérateurs multivoques

Définition 2.1 *([1], page 447) Soit $T : M \subseteq X \to 2^Y$ un opérateur multivoque. On dit que x est un point fixe de T si et seulement si $x \in T(x)$.*

2.3.1 Théorème généralisé du point fixe de Banach

On introduit d'abord le concept de distances entre les ensembles, à savoir la distance de Hausdorff D(.,.).

Définition 2.2 *([1], page 449) Soit (X,d) un espace métrique. Si $A, B \subseteq X$ deux ensembles, alors on définit la distance D(A,B) entre eux par :*

$$D(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\},$$

où $d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$ est la distance entre le point a et l'ensemble B. Évidement, si X est borné, alors l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés non vides de X avec D(.,.) devient un espace métrique.

Exemple 2.1 *([1], page 449) Soit $X = \mathbb{R}$, A=[0,1], B=[2,4]. Alors $\sup_{a\in A} d(a,B) = 2$, $\sup_{b\in B} d(b,A) = 3$, et D(A,B)=3.*

Théorème 2.3 (Théorème généralisé du point fixe de Banach) *([1], page 449). On suppose que :*

(i) $T : M \subseteq X \to 2^M$ est un opérateur multivoque dans un espace métrique complet (X,d),

(ii) M est non vide et fermé, T(x) est fermé pour tout $x \in M$, est la condition généralisée de k-contraction :

$$D(T(x),T(y)) \leq kd(x,y) \tag{2.26}$$

est satisfait pour tout $x, y \in M$ et $k \in [0,1[$ fixe.

Alors T admet un point fixe.

Preuve: (Voir [1], page 450)

■

2.3.2 Semi-continuité supérieure et inférieure des opérateurs multivoques

Notre objectif est une généralisation du concept de continuité aux opérateurs multivoques

Définition 2.3 *([1], page 450) Soit $T : M \to 2^N$ un opérateur multivoque, où M et N sont des espaces topologiques (exp. sous-ensembles d'espaces de Banach ou locaux convexes)*

1. *Soit $A \subset N$. L'image inverse $T^{-1}(A)$ est définie par l'ensemble de tous $x \in M$ avec $T(x) \cap A \neq \phi$.*

2. *L'opérateur multivoque T est dit semi-continu supérieurement si et seulement si $T^{-1}(A)$ est fermé pour tous les ensembles fermés A dans N.*

3. *L'opérateur multivoque T est dit semi-continu inférieurement si et seulement si $T^{-1}(A)$ est ouvert pour tous les ensembles ouverts A dans N.*

Proposition 2.2 (Critère de continuité) *([1], page 451) Selon les condition de la définition 2.3, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) l'opérateur T est semi-continu supérieurement ;

(b) pour chaque $x \in M$ et chaque ensemble ouvert V dans N avec $T(x) \subseteq V$, il existe un voisinage $U(x)$ tel que $T(U(x)) \subseteq V$.

De plus, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) l'opérateur T est semi-continu inférieurement ;

(b) pour chaque $x \in M$ et chaque voisinage $V(y)$ pour chaque $y \in T(x)$, il existe un voisinage $U(x)$ tel que

$$T(u) \cap V(y) \neq \phi \qquad \text{pour tout } u \in U(x).$$

2.3.3 Théorème généralisé du point fixe de Schauder

Théorème 2.4 (Théorème généralisé de Kakutani (1941)) *([1], page 452)On suppose que*

(i) l'opérateur multivoque $T : K \to 2^K$ est semi-continu supérieurement ;

(ii) K est un ensemble non vide, compact, convexe dans un espace localement convexe X ;

(iii) l'ensemble $T(x)$ est non vide, fermé et convexe pour tout $x \in K$.

Alors T admet un point fixe.

Corollaire 2.5 (Théorème du point fixe de Tihonov(1935)) *([1], page 452)*
Soit $T : K \subseteq X \to K$ continue, où K est un ensemble non vide, compact et convexe dans un espace localement convexe X. Alors T admet un point fixe.

Corollaire 2.6 (Deuxième théorème du point fixe de Schauder(1927)) *([1], page 452) On suppose que*

(i) X est un espace de Banach réflexif et séparable ;

(ii) l'opérateur $T : M \subseteq X \to M$ est faiblement continu séquentiellement, c'est à dire, si $x_n \rightharpoonup x$ quand $n \to \infty$, alors $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$;

(iii) l'ensemble M est non vide, fermé, borné et convexe.

Alors T admet un point fixe.

Corollaire 2.7 (Bohnenlust et Karlin (1950)) *([1], page 452) On suppose que*

(i) l'opérateur $T : M \to 2^M$ est semi-continu supérieurement, où M est un ensemble non vide, fermé, convexe dans un espace de Banach X ;

(ii) l'ensemble T(M) est relativement compact ;

(iii) l'ensemble T(x) est non vide, fermé et convexe pour tout $x \in M$.

Alors T admet un point fixe.

2.3.4 Les inéquations variationnelle et le théorème du point fixe de Browder

Proposition 2.3 *([1], page 453) Un opérateur multivoque $T : K \to 2^K$, où $K \subseteq X$, admettra un point fixe si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) X est un espace localement convexe et l'ensemble K est non vide, compact et convexe ;

(ii) l'ensemble T(x) est non vide et convexe pour tout $x \in K$, et l'inverse $T^{-1}(y)$ est relativement ouvert par rapport à K pour tout $y \in K$

On va étudier maintenant l'inéquation variationnelle :

$$\langle T(x_0), x_0 - x \rangle_X \geq 0 \qquad \text{pour tout } x \in K \tag{2.27}$$

Proposition 2.4 *([1], page 453) L'inéquation variationnelle (2.27) admet au moins un solution $x_0 \in K$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) l'opérateur $T : K \subseteq X \to X^*$ est continu, où K est un ensemble localement convexe, et X^* l'espace dual correspondant avec la topologie forte;*

(ii) l'ensemble K est non vide, compact et convexe.

$\circ$ *Si X un espace de Banach, alors la topologie forte* dans X^* est la même topologie du norme usuelle sur X^*.*

Preuve: (Voir [1], page 454) ■

Théorème 2.5 *(Théorème du point fixe de Browder (1968) pour les opérateurs multivoques avec les conditions limites)([1], page 454)On suppose que*

(i) l'opérateur $T : K \to 2^X$ est semi-continu supérieurement, et K un ensemble non vide, compact et convexe dans un espace localement convexe X;

(ii) l'ensemble $T(x)$ non vide, fermé et convexe pour tout $x \in K$;

(iii) l'un des conditions limites suivantes est satisfait :

$$\begin{gathered} \text{pour chaque } x \in \partial K \text{ il existe des points } y \in T(x) \text{ et } u \in K, \\ \text{et un nombre } \lambda > 0 \text{ tel que } y = x + \lambda(u - x); \end{gathered} \tag{2.28}$$

$$\begin{gathered} \text{pour chaque } x \in \partial K \text{ il existe des points } y \in T(x) \text{ et } u \in K, \\ \text{et un nombre } \lambda < 0 \text{ tel que } y = x + \lambda(u - x). \end{gathered} \tag{2.29}$$

Alors T admet un point fixe.

Chapitre 3

Les inéquations variationnelles elliptiques

3.1 L'inéquation variationnelle

On considère l'inéquation variationnelle

$$\langle b - Au, v - u\rangle_X + \varphi(u) \leq \varphi(v) \qquad \text{pour tout } v \in M \tag{3.1}$$

pour $u \in M$. Parallèlement à cela, l'inclusion d'opérateur multivoque :

$$b \in Au + \partial\varphi(u), \qquad u \in M \tag{3.2}$$

Selon les hypothèses suivantes :

($\mathcal{H}_1$) X est un espace de Banach réel et réflexif.

($\mathcal{H}_2$) M est un sous-ensemble de X non vide, fermé et convexe.

($\mathcal{H}_3$) $\varphi : M \to]-\infty, +\infty]$ est convexe, semi-continu inférieurement et $\varphi \not\equiv +\infty$.

Dans ce qui suit, on pose que le prolongement de φ dans X est défini par $\varphi(v) = +\infty$(par définition) pour $v \in X - M$. Alors $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$ est convexe et semi-continu inférieurement.

($\mathcal{H}_4$) $A : M \subseteq X \to X^*$ est pseudo-monotone, demi-continu et borné.

Pour l'instant, ces hypothèses sont remplies quand $A : M \subseteq X \to X^*$ est monotone, hémicontinu et borné.

$(\mathcal{H}_5)$ **Coercivité.** Si M est non borné, alors il existe $u_0 \in M$,$v_0 \in X^*$ tels que $v_0 \in \partial\varphi(u_0)$, c'est à dire, $\varphi(u_0) < +\infty$ et

$$\varphi(u_0) + \langle v_0, u - u_0 \rangle_X \leq \varphi(v) \qquad \text{pour tout } v \in M$$

aussi

$$\frac{\langle Au, v - u_0 \rangle_X}{\|u\|} \to +\infty \qquad \text{quand } \|u\| \to +\infty, \quad u \in M.$$

$(\mathcal{H}_6)$ b est un élément fixe dans dans X^*.

La condition de φ dans $(\mathcal{H}_5)$ est remplie, par exemple, lorsque $v_0 = \varphi'(u_0)$ et $\varphi'(u_0)$ existe en tant que la dérivée de Gâteau.

Théorème 3.1 *([3], page 551) Avec les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_6)$, les deux assertions suivantes sont réalisées :*

(a) ***Équivalence.*** *(3.1) et (3.2) sont équivalents.*

(b) ***Existence.*** *(3.1) admet au moins une solution.*

Preuve: (Voir [3], page 551)

(a) C'est une conséquence directe de la définition de $\partial\varphi$.

(b) D'après la proposition (2.1), l'opérateur $\partial\varphi : X \to 2^{X^*}$ est maximal monotone. Alors la restriction de $\partial\varphi$ dans M est aussi maximal monotone. D'où d'après le théorème (2.2), l'inéquation variationnelle (3.2) admet au moins une solution.

■

Lemme 3.1 *([5], page 42) Selon les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_6)$, un élément $u \in M$ vérifie l'inéquation (3.1) si et seulement s'il vérifie l'inéquation :*

$$\langle b - Av, v - u \rangle_X + \varphi(u) \leq \varphi(v) \quad \forall v \in K \tag{3.3}$$

De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (3.1) est convexe et fermé *dans X.*

Preuve:

($\Rightarrow$) On suppose que $u \in M$ est une solution de (3.1).

D'après la monotonicité de A c'est à dire

$$\langle Av - Au, v - u\rangle_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X,$$

On a

$$\langle b - Au, v - u\rangle_X + \varphi(u) \leq \varphi(v) + \langle Av - Au, v - u\rangle_X \quad \forall v \in M$$

Ce qui implique $\langle b - Av, v - u\rangle_X + \varphi(u) \leq \varphi(v)$, alors, u est une solution de (3.3).

($\Leftarrow$) On suppose que $u \in M$ est une solution de (3.3).

Soient $w \in M$ et $\lambda \in [0, 1]$, on pose $u_\lambda = \lambda w + (1 - \lambda)u$ et $u_\lambda \in M$ car M est convexe.

On remplace v par u_λ dans l'inéquation (3.3), on obtient

$$\langle b - Au_\lambda, \lambda w + (1 - \lambda)u - u\rangle_X + \varphi(u) \leq \varphi(\lambda w + (1 - \lambda)u)$$

On utilise la convexité de φ et divisons sur $\lambda > 0$

$$\langle b - Au_\lambda, w - u\rangle_X + \varphi(u) \leq \varphi(w) \quad \forall w \in M$$

Puisque A est hémicontinu on prend $\lambda = 0$, puis on déduit l'inéquation (3.1).

Il reste à montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (3.1) est convexe et fermé.

• *Convexe :* Soient $u_1, u_2 \in M$ deux solutions de (3.1), et soit $t \in [0, 1]$.

On a $tu_1 + (1 - t)u_2 \in M$ car M est convexe, et

$$\begin{aligned}
&\langle Av, v - (tu_1 + (1 - t)u_2)\rangle_X + \varphi(v) - \varphi(tu_1 + (1 - t)u_2) \\
&\quad = \langle Av, (tv + (1 - t)v) - (tu_1 + (1 - t)u_2)\rangle_X + (t\varphi(v) + (1 - t)\varphi(v)) - \varphi(tu_1 + (1 - t)u_2) \\
&\quad \geq t[\langle Av, v - u_1\rangle_X + \varphi(v) - \varphi(u_1)] + (1 - t)[\langle Av, v - u_2\rangle_X + \varphi(v) - \varphi(u_2)]
\end{aligned}$$

car φ est convexe. Et puisque u_1 et u_2 sont des solution de l'inéquation, on obtient

$$\langle Av, v-(tu_1+(1-t)u_2)\rangle_X+\varphi(v)-\varphi(tu_1+(1-t)u_2)$$
$$\geq t\langle b, v-u_1\rangle_X+(1-t)\langle b, v-u_2\rangle_X=\langle b, v-(tu_1+(1-t)u_2)\rangle_X$$

donc $(tu_1+(1-t)u_2)\in M$ est une solution de l'inéquation variationnelle (3.1).

• *Fermé :* Soit u_n solution de (3.1) et $u_n\to u$ quand $n\to\infty$ dans X, c'est à dire,

$$\langle Av-b, v-u_n\rangle_X+\varphi(v)\geq\varphi(u_n)$$

Par passage à la limite et comme φ est semi-continu inférieurement

$$\begin{aligned}\langle Av-b, v-u\rangle_X+\varphi(v)&\geq\lim_{n\longrightarrow\infty}\varphi(u_n)\\&\geq\liminf_{n\longrightarrow\infty}\varphi(u_n)\geq\varphi(u)\end{aligned}$$

Donc, u est une solution de (3.1), d'où le résultat. ■

3.2 L'inéquation quasi-variationnelle

On va faire l'extension de l'inéquation (3.1) avec remplacer le fonctionnel φ par un fonctionnel de deux variables :

$$\langle b-Au, v-u\rangle_X+\varphi(u,u)\leq\varphi(u,v)\qquad\text{pour tout } v\in M \tag{3.4}$$

où :

— X est un espace de Banach réel et réflexif.

— M un sous-ensemble non vide, fermé et convexe.

— $A: X\to X^*$ est un opérateur.

Théorème 3.2 *On suppose les hypothèses suivantes :*

$$A \text{ est un opérateur monotone,hémicontinu et borné,} \tag{3.5}$$

$$\varphi \textit{ est faiblement semi-continu inférieurement dans } M \times M, \tag{3.6}$$

$$\forall v \in X, \varphi(., v) : M \to]-\infty, +\infty] \textit{ est faiblement semi-continu} \\ \textit{supérieurement dans } M, \tag{3.7}$$

$$\forall u \in M, \varphi(u, .) : M \to]-\infty, +\infty] \textit{ est convexe et semi-continu} \\ \textit{inférieurement dans } M \textit{ et } \varphi(u, .) \not\equiv +\infty. \tag{3.8}$$

Alors, l'inéquation quasi-variationnelle (3.4) admet au moins une solution dans M si l'une des deux conditions est satisfaite :

$$M \textit{ est borné}, \tag{3.9}$$

$$\exists v_0 \in M \textit{ tel que } \lim_{\substack{\|v\| \longrightarrow +\infty \\ v \in M}} \frac{\langle Av, v - v_0 \rangle_X + \varphi(v, v) - \varphi(v, v_0)}{\|v\|} = +\infty \tag{3.10}$$

Théorème 3.3 *([8], page 4) Soient X un espace de Banach réflexif et $M \subset X$ est non vide, fermé et convexe. Supposons l'application multivoque $S : M \longrightarrow 2^M$ tel que pour tout $u \in M$, l'ensemble $S(u)$ est non vide, fermé, convexe et le graphe de S séquentiellement faiblement fermé.*

Si M est borné ou $S(M)$ est bornée, alors l'application S admet au moins un point fixe dans M.

Preuve du théorème (3.2)

►On suppose l'hypothèse (3.9) est satisfait.

Étape 1 Pour $u \in M$ fixé, on considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } w \in M \text{ tel que} \\ \langle b - Aw, v - w \rangle_X + \varphi(u, w) \leq \varphi(u, v) \quad \forall v \in M \end{cases} \tag{3.11}$$

Ce qui est équivalente à l'inclusion (théorème 3.1)

$$b \in Aw + \partial\varphi_u(w) \quad \forall w \in M \tag{3.12}$$

telle que $\forall u \in M, \varphi_u(.) = \varphi(u, .)$.

D'après les hypothèses (3.5) et (3.8), et par le théorème (2.2), l'inclusion (3.12) admet au moins une solutions $w \in M$. Puis en appliquant le théorème (3.1) et le lemme (3.1), on obtient que l'ensemble des solution du problème (3.11) est non vide convexe et fermé.

Étape 2 On va définir un opérateur $S : M \to 2^M$ tel que

$$S(u) = \{w \in M : w \text{ est solution de } (3.11)\}$$

Remarquons que S est bien défini d'après l'existence de la solution de (3.11). Ainsi, il est claire que tout point fixe de S est une solution de l'inéquation (3.4). Donc, on va montrer que S admet un point fixe, d'où on vérifie que S satisfait les hypothèses du théorème (3.3) :

- On a S(u) est non vide ; convexe et fermé d'après le théorème (3.1) et le lemme (3.1).
- Le graphe de S est séquentiellement faiblement fermé :

  Soit $u_n, w_n \in M$ tel que $w_n \in S(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_n \rightharpoonup u$, $w_n \rightharpoonup w$ dans X quand $n \to +\infty$. Et d'après le lemme (3.1), on a

  $$\langle b - Av, v - w_n\rangle_X + \varphi(u_n, w_n) \leq \varphi(u_n, v) \quad \forall v \in M$$

  autrement dit

  $$\langle Av - b, v - w_n\rangle_X + \varphi(u_n, v) \geq \varphi(u_n, w_n) \quad \forall v \in M$$

  Par passage à la limite et en utilisant (3.7) et (3.6), on obtient

  $$\begin{aligned} \langle Av - b, v - w\rangle_X + \varphi(u, v) &\geq \limsup_{n \longrightarrow +\infty}[\langle Av - b, v - w_n\rangle_X + \varphi(u_n, v)] \\ &\geq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(u_n, w_n) \geq \varphi(u, w) \quad v \in M, \end{aligned} \tag{3.13}$$

  D'où $w \in S(u)$.

Alors l'inéquation (3.4) admet au moins une solution.

► Ensuite, on suppose que la condition de coercivité (3.10) est satisfaite. Soit $R > \|v_0\|$ est suffisamment grand tel que $M_R = M \cap B(0,R) \neq \phi$ où $B(0,R) = \{v \in X : \|v\| \leq R\}$. En appliquant le théorème (3.1) et le premier partie du preuve pour le sous-ensemble non vide, convexe et borné K_R, par conséquent, il existe un élément $u_R \in K_R$ tel que

$$\langle b - Au_R, v - u_R\rangle_X + \varphi(u_R, u_R) \leq \varphi(u_R, v) \quad \forall v \in K_R \tag{3.14}$$

On va montrer que la condition de la coercivité (3.10) implique $\|u_R\| < R$. Supposons par contradiction $\|u_R\| \geq R$.
Si (3.10) est vrai, alors

$$\langle Au_R, u_R - v_0\rangle_X + \varphi(u_R, u_R) - \varphi(u_R, v_0) > \langle b, u_R - v_0\rangle_X,$$

C'est à dire

$$\langle b - Au_R, v_0 - u_R\rangle_X + \varphi(u_R, u_R) > \varphi(u_R, v_0).$$

On doit toujours supposer que R est suffisamment grand tel que $R \geq \|v_0\|$. Donc, de (3.14) avec $v = v_0 \in K_R$, on obtient la contradiction

$$\langle b - Au_R, v_0 - u_R\rangle_X + \varphi(u_R, u_R) \leq \varphi(u_R, v_0).$$

On conclue que $\|u_R\| < R$.
Il reste à montrer que u_R est une solution de (3.4). Soit $w \in K - K_R$, on prend $0 < \epsilon \leq \frac{R - \|u_R\|}{\|w\| - \|u_R\|} < 1$ et $v = u_R + \epsilon(w - u_R)$, d'où $v \in K_R$. Alors, à partir de (3.14) avec ce dernier v, on obtient

$$\epsilon\langle b - Au_R, w - u_R\rangle_X + \varphi(u_R, u_R) \leq \varphi(u_R, u_R + \epsilon(w - u_R)) \quad \forall w \in K,$$

En appliquant la convexité du $\varphi(u_R, .)$ et divisons sur $\epsilon > 0$, on déduit

$$\langle b - Au_R, w - u_R\rangle_X + \varphi(u_R, u_R) \leq \varphi(u_R, w) \quad w \in K,$$

Donc u_R est une solution de l'inéquation quasi-variationnelle (3.4). D'autre part, chaque solution u de (3.4) vérifie l'inéquation (3.14) pour tout R>0. Si on choisit $R > \|v_0\|$ assez grand, alors de (3.14) et la condition de coercivité (3.10), d'où $\|u\| < R$. Donc il existe $R > 0$ tel que l'inéquation (3.4) admet au moins une solution.

3.3 Application : Inéquation quasi-variationnelle avec l'opérateur p-laplacien

Dans cette section, on considère le problème de l'inéquation quasi-variationnelle avec l'opérateur p-laplacien. En appliquant le théorème mentionné dans le chapitre ci-dessus pour montrer l'existence de la solution de ce problème.

Problème

Trouver $u \in M$ tel que :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Omega \phi(u(x), v(x)) dx \\ &- \int_\Omega \phi(u(x), u(x) dx \geq \int_\Omega f(x)(v(x) - u(x)) dx \quad \forall v \in M \end{aligned} \tag{3.15}$$

tel que $2 \leq p < \infty$, $u, v \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq n < \infty$, avec une frontière suffisamment lisse $\partial\Omega$,

$$\begin{cases} \phi : \mathbb{R}^2 \to]-\infty, +\infty] \text{ est une fonction faiblement semi-continue inférieurement ,} \\ \phi(., v) \text{ est faiblement semi-continue supérieurement,} \\ \phi(u, .) \text{ est faiblement semi-continue inférieurement, convexe et propre ;} \end{cases} \tag{3.16}$$

de plus, $x \mapsto \phi(u(x), v(x))$ appartient à $L^1(\Omega)$.

On donne un constant $c_0 > 0$ et on considère le sous ensemble fermé et convexe M de X :

$$M = \{v \in X \text{ tel que } |\nabla v(x)| \leq c, \forall x \in \Omega\}$$

où $|.|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.4 *Si les hypothèses du théorème (3.2) sont vérifiés alors (3.15) admet au moins une solution.*

Preuve: On note $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $A = -\Delta_p$ tel que $1 < p < \infty$.
Soit l'opérateur $A : X \to X^*$ défini par

$$\langle Au, v\rangle_X = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall u, v \in X$$

et $\varphi : M \times M \to]-\infty, +\infty]$ défini par

$$\varphi(u, v) = \int_\Omega \phi(u(x), v(x))dx$$

(a) On montre que A est borné, hémi-continu et monotone

- A borné : d'après l'expression de la norme d'un espace dual, on obtient

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \| -\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} = \sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|v\|\leq 1}} |\langle -\Delta_p(u), v\rangle|$$

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} |\langle -\Delta_p(u), v\rangle| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\right) \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\| -\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{q}}$$

Soit B un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\exists M > 0; \forall u \in B; \|u\| \leq M \text{ implique } \| -\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq M^{\frac{p}{q}}$$

Ainsi, l'image d'un borné B de $W_0^{1,p}(\Omega)$ par l'opérateur $A = -\Delta_p$ est borné dans $W^{-1,q}(\Omega)$ d'où A est borné.

- A hémi-continu : d'après la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que pour tout $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application

$$
\begin{aligned}
&: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&t \mapsto \langle -\Delta_p(u+tv), w \rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx.
\end{aligned}
$$

est continue.

- A monotone : on sait que l'application $t \mapsto |t|^p$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe, ce qui implique que sa dérivé est une fonction croissante, donc

$$\forall (t,r) \in \mathbb{R}^2, (|t|^{p-2}t - |r|^{p-2}r)(t-r) \geq 0$$

D'où

$$\langle -\Delta_p(u) - (-\Delta_p(v)), u-v \rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

Par conséquent, l'opérateur $-\Delta_p$ est monotone.

(b) φ hérite les propriétés (3.16) de ϕ.

(c) Par définition de M et d'après la proposition (1.4), on déduit que M est borné.

Alors, d'après le théorème (3.2) le problème (3.15) admet au moins une solution.

■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudier l'existence des inclusions perturbée et non perturbée.

Nous avons également montré l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle et quasi-variationnelle elliptique, puis nous avons effectué un exemple de ce dernier avec l'opérateur p-laplacien.

L'étude pourrait être élargie pour trouver les conditions qui assurent l'unicité de la solution. Et aussi l'existence pour les problèmes paraboliques et hyperboliques.

Bibliographie

[1] E.Zeidler, Nonlinear functional analysis and its application,Part 1, Fixed point theorem, Springer-Verlag, New York (1986).

[2] E.Zeidler, Nonlinear functional analysis and its application,Part 2 B, Nonlinear monotone operators, Springer-Verlag, New York (1990).

[3] E.Zeidler, Nonlinear functional analysis and its application,Part 3, Variational methods and optimization, Springer-Verlag, New York (1985).

[4] H.Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, Paris (1983).

[5] Anca Capatina, Variational inequalities and frictional contact problems, Advances in Mechanics and Mathematics 31, Springer International Publishing Switzerland (2014).

[6] W.Han, Z.Huang, C.Wang, W.Xu, Numerical analysis of elliptic hemivariational inequalities for semipermeable media, Journal of Computational Mathematics 37 (2019) 543-560.

[7] R.T.Rockafellar, Characterization of the subdifferentials of convex functions, Pacific J. Math. 17 (1966).

[8] S.Migórski, A.A.Khan, S.Zeng, Inverse problems for nonlinear quasi-variational inequalities with an application to implicit obstacle problems of p-Laplacian type2, 20/01/2019.

[9] W.Saoud, Existence de solutions d'une inéquation quasi-variationnelle, Université Kasdi Merbah Ouargla, 04/07/2019.

[10] M.Sofonea, S.Migórski, Variational-hemivariational inequalities with applications, Monographs and research notes in mathematics, Taylor and Francls Group, LLC (2018).

[11] Charalambos D. Aliprantis et Kim C. Border, Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide, Springer (2007).

[12] Charalambos D. Aliprantis et Kim C. Border, Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide, Springer, 2007, 3e éd. (1re éd. 1999).

[13] Stephen Willard, General Topology, Dover Publications (2004).

[14] F.E. Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann. 177 (1968) 283–301.

Abstract

In this work, we have shown the existence of the perturbed inclusion solution, then using it to study elliptic variational inequality. We make a generalization of this latter and we obtain the quasi-variational elliptic inequality. By using the fixed-point theory and the previous results, We discuss the existence of the quasi-variational inequality solution, with an application on the p-laplacian operator.
Key words : inclusion, variational inequality, fixed-point, quasi-variational, existence.

Résumé

Dans ce travail, nous avons montré l'existence de la solution d'inclusion perturbé, puis en l'utilisant pour étudier l'inéquation variationnelle elliptique. Nous faisons une généralisation de ce dernier et nous obtenons l'inéquation quasi-variationnelle elliptique. Á l'aide de la théorie du point fixe et les résultats précédents, nous avons abordé l'existence de la solution de l'inéquation quasi-variationnelle, avec une application à l'opérateur de p-laplacien.
Mots clés : inclusion, inéquation variationnelle, point fixe, quasi-variationnelle, existence.