

# Diagnostic de défaut Capteur à base de multiobservateur à entrées inconnues

A.Djeddi

Université Kasdi Merbah Ouargla.

Département de Génie Électrique.

Faculté des Sciences et de la Technologie et des Sciences de la Matière, Ouargla

## Résumé

Dans cet article, une méthode de diagnostic de défauts d'un système linéaire soumis à l'influence d'entrées inconnues est proposée. Après la synthèse d'un observateur basé sur l'élimination des entrées inconnues, la détection de défaut sera basée sur l'utilisation de la statistique SPE (Squared Prediction Error), et pour la localisation de défauts des capteurs, on va utiliser le calcul des contributions, en utilisant la reconstruction de la variable en défaut. Un exemple illustre les performances de l'observateur et de la méthode proposées.

**Mots clés :** Système à entrées inconnues, Détection de défauts, localisation de défauts, Système LMI, Observateurs à entrées inconnues.

## 1. Introduction

Un système est souvent piloté simultanément par des entrées connues et inconnues. Les mesures effectuées en sortie du système ne donnent pas une information complète sur les états internes de ce système, car une partie de ces états n'est pas mesurable directement. De plus, pour des raisons purement technologiques et de coût, le nombre de capteurs est limité. De ce fait, l'idée utilisée, depuis plusieurs années, est le remplacement des capteurs matériels par des capteurs logiciels ou observateurs d'état, qui permettent de reconstruire les informations internes (états, entrées inconnues, paramètres inconnus) du système à partir du modèle du système, des entrées connues et des sorties mesurées.

## 2. Approche multimodèle

L'approche multimodèle représente les systèmes non linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles en général linéaires (ou affines) locaux. Les modèles locaux étant ensuite agrégés au moyen d'un mécanisme

d'interpolation [1]. Dans ce cadre de nombreux travaux concernant l'analyse de la stabilité, la synthèse de multirégulateur et de multiobservateur ont été développés [2]. Cette approche, dite de multimodèle, s'inspire des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S).

En effet, un multimodèle réalise une partition floue de l'espace caractéristique dit aussi espace de décision (c'est l'espace caractérisé par l'ensemble des variables caractéristiques (de décision) qui peuvent être des variables d'état mesurables et/ou la commande). On suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire du système.

## 3. Conception de multiobservateur à entrées inconnues

Considérons un système non linéaire représenté sous forme multimodèle soumis à l'influence des entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u + R\bar{u} + D_i) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

Où  $x(t) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in R^m$  est le vecteur des entrées,  $\bar{u}(t) \in R^q$ ,  $q < n$ , est le vecteur des entrées inconnues et  $y(t) \in R^p$  représente le vecteur des sorties mesurables.

Pour le  $i^{\text{ème}}$  modèle local,  $A_i \in R^{n \times n}$  est la matrice d'état,  $B_i \in R^{n \times m}$  est la matrice d'entrée connue,  $R \in R^{n \times q}$  et  $D_i \in R^{n \times 1}$  représente un vecteur dépendant du point de fonctionnement ;  $C \in R^{p \times n}$  est la matrice de sortie. Enfin,  $\xi(t)$  représente le vecteur de décision dépendant de l'entrée connue et/ou des variables d'état.

Considérons le multiobservateur, d'état  $\hat{x}(t)$ , décrit de la façon suivante [3] :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(N_i x(t) + G_{i1} u + G_{i2} + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - E y(t) \end{cases} \quad (2)$$

$N_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_{i1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  est le gain du  $i^{\text{ème}}$  observateur local,  $G_{i2} \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur constant et  $E$  est une matrice de transformation.

**Remarque :** Les valeurs propres de  $A - LC$  peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si la paire  $(A, C)$  est observable.

En utilisant l'expression de l'erreur de reconstruction d'état donnée par l'équation suivante [4] :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

L'expression de  $\hat{x}(t)$  donnée par l'équation (2).

L'erreur devient:

$$e(t) = (I + EC)x(t) - z(t) + EF\bar{u}(t) \quad (3)$$

Dans la dérivée de  $e(t)$  posons:

$$P = I + EC$$

et  $K_i = N_i E + L_i$ . Si l'on impose les conditions suivantes :

$$\begin{cases} N_i = PA_i - K_i C \\ PR_i = K_i F \\ G_{i1} = PB_i \\ G_{i2} = PD_i \\ EF = 0 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) N_i \text{ avec valeurs propres à parties} \\ \text{réelles négatives} \end{cases} \quad (4)$$

L'erreur de reconstruction d'état tend asymptotiquement vers zéro et (4) se réduit à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i e(t) \quad (5)$$

Il est important de noter que la stabilité des matrices  $N_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$ , ne garantit pas forcément la stabilité de la matrice  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i$  [5]. Ce point est traité dans le paragraphe qui suit.

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état est garantie par la résolution des conditions (4) selon les trois étapes suivantes :

1. Calcul de la matrice  $E$  en utilisant la relation (4.a), on en déduit alors la matrice  $P$  à l'aide de (4.b).
2. Calcul des matrices  $N_i$  et  $K_i$  garantissant la stabilité de la matrice  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i$ , ce point technique concernant la méthode de résolution fait l'objet du paragraphe (4.2.).
3. Déduction des matrices de gain  $L_i$ ,  $G_{i1}$  et  $G_{i2}$  des matrices précédentes.

#### 4. Convergence globale du multiobservateur

L'équation dynamique (5) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , telle que :

$$N_i^T X + X N_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (6)$$

Comme  $N = PA - KC$ , l'inégalité (6) devient :

$$(PA - KC)^T X + X (PA - KC) < 0 \quad (7)$$

On remarque malheureusement que l'inégalité précédente (7) présente l'inconvénient d'être non linéaire (bilinéaire) par rapport aux variables  $K$  et  $X$ . Deux méthodes de résolution peuvent être utilisées :

- Linéarisation par rapport aux variables  $K$  et  $X$ ,
- Changement de variables.

#### 4.1. Linéarisation par rapport aux variables

On peut utiliser une méthode "locale", basée sur la linéarisation des inégalités, par rapport aux variables  $K$  et  $X$ , autour de valeurs initiales  $K_0$  et  $X_0$  "bien choisies".

On pose :

$$K = K_0 + \partial K \text{ et } X = X_0 + \partial X \quad (8)$$

A partir de l'inégalité (7), on obtient :

$$\begin{cases} ((PA - (K_0 + \partial K)C) + (PA - (K_0 + \partial K)C)^T)(X_0 + \partial X) + \\ (X_0 + \partial X)((PA - (K_0 + \partial K)C) + (PA - (K_0 + \partial K)C)^T) < 0 \\ X_0 + \partial X > 0 \end{cases} \quad (9)$$

En négligeant les termes du second ordre de l'inégalité (9), on obtient alors :

$$\begin{cases} ((PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T)\partial X + \partial X((PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T) - \\ \partial K C X_0 - (C X_0)^T \partial K^T - C^T \partial K^T X_0 - X_0 \partial K C + \\ ((PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T)X_0 + X_0((PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T) < 0 \\ X_0 + \partial X > 0 \end{cases} \quad (10)$$

Le système (10) est alors un problème de type de LMI (inégalité linéaire matricielle) et sa résolution par rapport à  $\partial K$  et  $\partial X$  est standard [6].

Notons que le choix des valeurs initiales  $K_0$  et  $X_0$  demeure l'inconvénient principal de cette méthode et d'ailleurs la convergence vers une solution n'est pas toujours garantie. Malheureusement, d'un point de vue pratique, on peut être amené à examiner divers choix de valeurs initiales afin d'obtenir une solution.

**Remarque :** Le système LMI (10) n'est valide qu'au voisinage de  $K_0$  et  $X_0$ ; ceci nous a encouragé, afin d'améliorer la résolution, à proposer, pour limiter les variations des matrices  $\partial K$  et  $\partial X$ , les contraintes additionnelles suivantes:

$$\begin{cases} \|\partial K_0\| < \varepsilon \|K_0\| \\ \|\partial X_0\| < \varepsilon \|X_0\| \end{cases}, \text{ avec } 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (11)$$

La formulation LMI de ces contraintes (11) est décrite par les inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \|X_0\| I_{n \times n} & \partial X \\ \partial X & \varepsilon \|X_0\| I_{n \times n} \end{bmatrix} > 0 \text{ et } \begin{bmatrix} \varepsilon \|K_0\| I_{m \times m} & \partial K \\ \partial K & \varepsilon \|K_0\| I_{m \times m} \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

Si les systèmes LMI (10) sont réalisables et si la paire  $(A, C)$  est observable alors, l'observateur (2) estime asymptotiquement l'état du système linéaire à entrées inconnues (1).

#### 5. Placement de pôles

Pour améliorer les performances du multiobservateur, notamment on peut assurer une certaine dynamique de convergence de l'erreur d'estimation d'état, on définit dans le plan complexe la région  $S(\alpha, \beta)$  comme l'intersection entre un disque, de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $\beta$ , et du demi-plan gauche limité par une droite d'abscisse  $(-\alpha)$ .

Pour garantir que les valeurs propres de la matrices  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i$  appartiennent à la région  $S(\alpha, \beta)$ , la résolution de l'équation (19) de l'étape 2 de la démarche précédente est remplacée par la résolution des inégalités suivantes [7] :

$$\begin{bmatrix} -\beta X & P A_i^T X - C^T W_i^T \\ X P A_i - W_i C & -\beta X \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$P A_i^T X + W P A_i - C^T W_i^T - W_i C + 2\alpha X < 0$$

Dans cette dernière partie, nous avons montré, comment passer des contraintes BMI (inégalités bilinéaires matricielles) à des contraintes LMI (inégalités linéaires matricielles) en utilisant des changements de variables. La convergence du multiobservateur (2) est garantie par la résolution d'un ensemble de contraintes "égalités et inégalités" qui peut être résolu par des techniques classiques LMI.

## 6. Estimation des entrées inconnues

Plusieurs travaux ont été réalisés pour l'estimation des entrées inconnues dans le cadre des systèmes dynamiques linéaires [9] et [10]. Liu et Peng ont présenté, en utilisant un observateur de Luenberger, l'estimation des états inconnus d'un système dynamique linéaire soumis à des perturbations. [11].

En régime permanent, l'erreur d'estimation d'état tend vers zéro ; en remplaçant  $x(t)$  par  $\hat{x}(t)$  dans l'équation (1) nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{u}(t) + D_i) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + F \hat{u}(t) \end{cases} \quad (14)$$

Remarquons que dans l'équation (14) la seule variable inconnue est bien la variable  $\hat{u}(t)$  qui représente une estimation de l'entrée inconnue, l'équation peut être réécrite de la manière suivante [5]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) \\ C \hat{x}(t) \end{pmatrix} + W \hat{u} \quad (15)$$

$$W = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \\ F \end{pmatrix} \quad (16)$$

Sous l'hypothèse que cette matrice que nous appelons  $W$  soit de plein rang colonne, alors on est ramené à un système d'équation linéaire en  $\hat{u}(t)$  qui est équivalent à un problème d'optimisation linéaire qu'on sait résoudre avec la méthode des moindres carrés. La solution numérique de ce problème est basée sur le calcul de la pseudo-inverse de la matrice  $W$ .

En fin l'expression de l'estimation de l'entrée inconnue est donnée par l'équation suivante :

$$\hat{u}(t) = (W^T W)^{-1} W^T \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y(t) - C \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

**Remarque :** Dans le cas où la matrice  $F$  est de plein rang colonne le calcul de l'estimation de l'entrée inconnue peut s'effectuer de façon plus simple [5]:

$$\hat{u}(t) = (F^T F)^{-1} F^T (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (18)$$

## 6. Détection de défauts

### 6.1. Détection par SPE

La statistique **SPE**, également connue sous l'appellation **Q** (Squared Prediction Error) est une statistique obtenue à partir de l'erreur d'estimation des variables  $e(t)$ , elle nous renseigne donc sur l'évolution des mesures et de leur variation. Dès l'apparition d'une anomalie, la valeur de l'erreur d'estimation croît, entraînant par la même occasion une augmentation de l'indice **SPE** ou **SWE**. Dans la détection de défauts par des tests statistiques, il faut avoir recours à des seuils de confiance. Les seuils de confiance représentent la tolérance de la statistique à une valeur du seuil suivant la qualité de la détection souhaitée.

## 7. Localisation de défauts

Il existe de multiples techniques capables de déterminer la localisation des variables en défaut. Pour ce qui est de la localisation de défauts par observateurs, nous proposons les deux approches suivantes :

### 7.1. Localisation par calcul des contributions

Nous présentons une approche de localisation de défauts qui est la localisation par calcul des contributions des variables. L'idée derrière cette approche est que chaque variable contribue ou participe avec une proportion dans l'indice de détection, la variable qui contribue le plus dans cet indice sera considérée comme la variable en défaut.

On utilise la même chose pour localiser les défauts détectés par l'indice SWE.

## 8. Exemple de simulation et comparaison

### 8.1. Exemple et résultats de simulation

Considérons le multimodèle suivant, composé de deux modèles locaux et comportant cinq sorties et trois états.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) + v(t) \end{cases} \quad (19)$$

Dans cet exemple, le vecteur des variables de décision est le vecteur des deux entrées connues  $u(t)$ . La sortie  $y(t)$  supporte un bruit additif  $v(t)$  avec. Les valeurs numériques des matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $R_i$ ,  $C$  et  $F$  sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.9 & 1.2 & 0.1 \\ 1.1 & -2.7 & 0 \\ 1.7 & 0.1 & -5.6 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(x(0) = [1 \ 0.5 \ 0]^T \text{ et } \hat{x}(0) = [-1 \ 1 \ 0]^T)$$

Le multiobservateur capable d'estimer l'état du multimodèle (30) est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t))(N_i z(t) + G_{i1} u(t) + G_{i2} + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - E y(t) \end{cases} \quad (20)$$

En appliquant la méthode de résolution présentée, les valeurs numériques des matrices du multiobservateur (20) sont :

$$N_1 = \begin{bmatrix} -4.4146 & -0.3717 & 0.3629 \\ 0.3717 & -4.414 & 0.3943 \\ -0.3629 & -0.3943 & -4.4147 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -4.4147 & -0.2183 & -0.7138 \\ 0.2183 & -4.4147 & -0.2526 \\ 0.7139 & 0.2525 & -4.4146 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.1188 & -0.1740 & -0.8007 & 0.7399 & 0.1160 \\ -0.0197 & -0.1908 & -1.0812 & 1.1645 & 0.1272 \\ 0.2573 & -0.0218 & -0.5758 & 0.3258 & 0.0145 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_{11} = \begin{bmatrix} 2.2853 \\ 2.3641 \\ 1.1318 \end{bmatrix}, G_{21} = \begin{bmatrix} 1.6642 \\ 0.1799 \\ 0.0634 \end{bmatrix}$$

## 8.2. Discussion

### 8.2.1. Conception du multiobservateur

Les figures (1), (2), (3) et (4) montrent la comparaison entre les variables d'état du multimodèle (19) et leurs estimations respectives par le multiobservateur (20).

On constate que dans chaque figure les deux tracés sont superposés sauf au voisinage de l'origine; cela est dû au choix des conditions initiales du multiobservateur.

Les sorties du multimodèle et celles du multiobservateur sont aussi superposées sauf dans la zone du défaut.

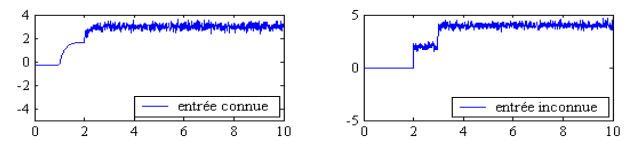


Figure 1. Estimation des états

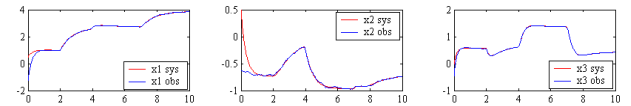


Figure 2. Estimation des états

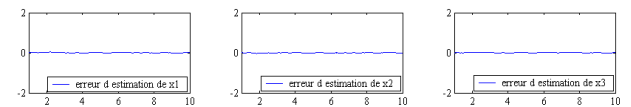


Figure 3. Erreurs d'Estimation des états

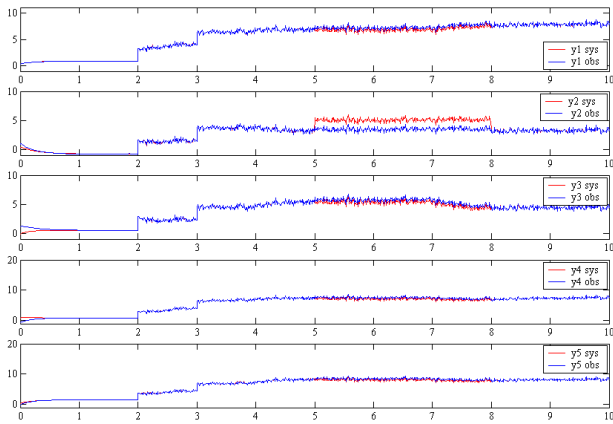


Figure 4. Estimation des sorties avec défaut affectant la deuxième sortie

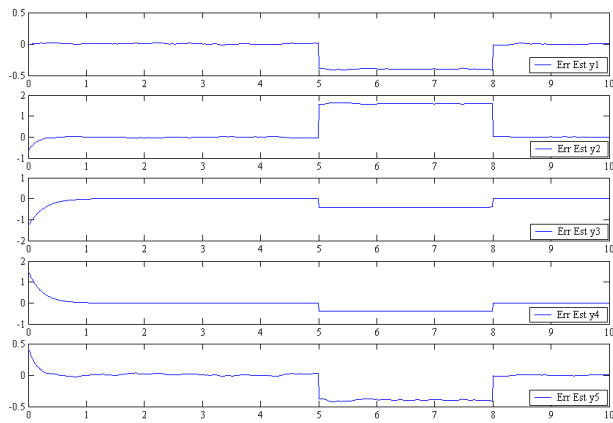


Figure 5. Erreurs d'estimation des sorties

### 8.2.2. Détection de défaut

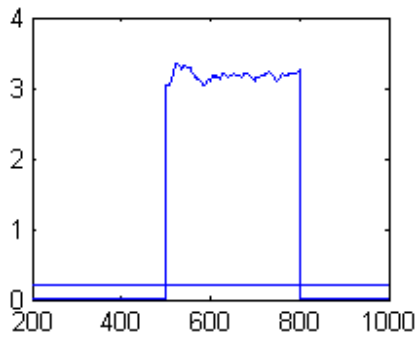


Figure 6. Dépassement du seuil SPE

On remarque le dépassement du seuil de l'indice statistique SPE.

### 8.2.3. Localisation de défaut

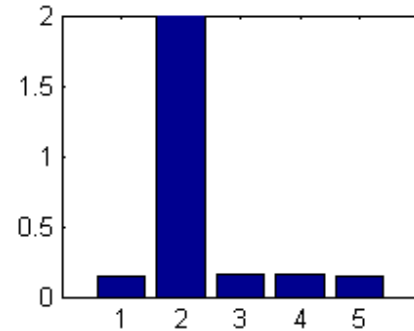


Figure 7. Localisation de défaut par calcul des contributions

On observe que le défaut est localisé sur la deuxième variable.

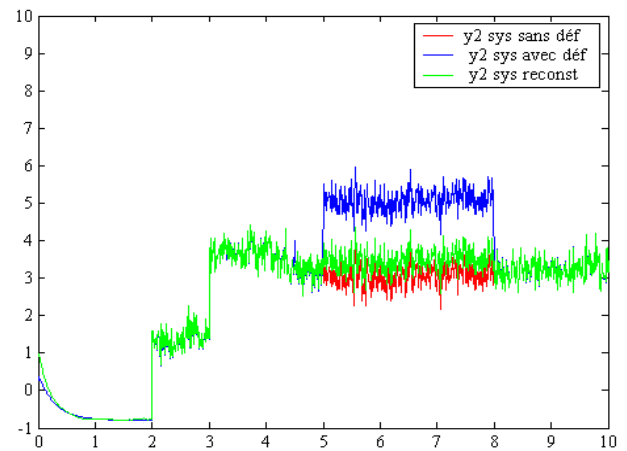


Figure 8. Variable de remplacement calculée pour la sortie en défaut

On peut constater facilement, que la variable de remplacement calculée pour le remplacement de la variable en défaut est proche de la variable sans défaut.

## 9. Conclusion

1. Dans cet article, nous avons montré comment concevoir un multiobservateur pour un système dynamique non linéaire soumis à l'influence d'entrées inconnues. La détermination des gains du multiobservateur pour garantir sa convergence et assurer certaines performances dynamiques conduit à la résolution d'un problème du type BMI (inégalités bilinéaires matricielles).

La résolution de ces contraintes BMI est effectuée par la méthode basée sur un changement de variables et qu'on peut qualifier de méthode globale permet une détermination plus aisée des matrices décrivant l'observateur. Un tel changement de variable n'est pas toujours possible, cela dépend de la structure de l'équation bilinéaire initiale.

2. Après nous avons pu réaliser la détection et la localisation de défaut affectant un capteur.

- **La détection**, a été réalisée par observation du dépassement du seuil de l'indice statistique SPE. Le seuil a été fixé par apprentissage.

- **La localisation** de défaut a été réalisée par calcul des contributions

3. Et finalement nous avons calculé la valeur de remplacement de la sortie en défaut.

## Références

- [1] J. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control," *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [2] K. Tanaka, T. Ikeda, and Y. Y. He, "Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based design," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6(1), pp. 250-256, 1998.
- [3] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Multiple observer with unknown input. Application to a three tank system*, IAR Annual meeting, Grenoble, France, 21 November 2002.
- [4] D. Maquin J. Ragoet, *Diagnostic des systèmes linéaires*, Edition Hermès Paris, 2000.
- [5] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Design of robust fuzzy observer for uncertain Takagi-Sugeno models*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Fuzz-IEEE, Budapest, Hungary, 25-29 July, 2004.
- [6] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia : SIAM, 1994.
- [7] A. Akhenak, *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle*, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, 2003.
- [8] M. Chadli, D. Maquin, J. Ragot, *On the stability of multiple model systems*, Proceedings of the European Control Conference, pp. 1894-1899, 2001.
- [9] D. Maquin, B. Gaddouna et J. Ragot, *Estimation Of Unknown Inputs In Linear Systems*, American Control Conference, Vol. 1, pp. 1195-1197, 1994.
- [10] A. Stotsky et I. Kolmanovsky, *Simple unknown input estimation techniques for automotive applications*, American Control Conference, pp. 3312-3317, 2001.
- [11] C. S. Liu et H. Peng, *Inverse-dynamics based state and disturbance observers for linear time-invariant systems*, *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, Vol. 124, 375-381, 2002.
- [12] M. Harkat, *Détection et localisation de défauts par analyse en composante principales*, Doctorat de l'Institut national polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-Lès-Nancy, 2003.