UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et analyse numérique

Par : Benretmia Nessrine

Thème

Résolution de quelques équations différentielles fractionnaires semi linéaires

Version de : /09/2020

Devant le jury composé de :

M. Badidja Salim	MCB. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab Brahim	MCB. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M. Amara Abdelkader	MCB. UKMO université-Ouargla	Examinateur

Remerciements

Je dédie mon diplôme à celui qui a vidé la tasse vide, pour me donner une goutte d'amour à celui qui a récolté des épuies de mon chemin pour m'ouvrir le chemin de la connaissance ⋇**mon père Boulifa Ben retmia**⋇ et à mon âme sœur et à ma bogie derby ⋇**ma mére horia derb**⋇ et au docteur ⋇**tellab Brahim**⋇ pour son plein soutien et son empressement et à mes sœurs, mes proches et tous mes amis.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire joue un rôle très important dans la modélisation de plusieurs phénomènes dans divers domaines, citons à titre d'exemple, l'ingénierie, la physique, l'économie,...etc. De nombreux travaux sur le calcul fractionnaire en général, les équations différentielles fractionnaires et les équations intégrales fractionnaires ont été apparus voir par exemple [2, 3, 4, 5, 6].

Beaucoup de problème d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles fractionnaires ont été étudiés par de nombreux auteurs [7, 8, 9, 10]. Les équations différentielles fractionnaires avec conditions aux limites intégrales constituent une classe importante de problèmes de modélisations. Plusieurs applications sur les problèmes avec conditions aux limites intégrales ont été souvent rencontré par exemple dans l'étude de la dynamique des populations [11] et les systèmes cellulaires [12]. Un certain nombre d'auteurs ont discuté des problèmes aux limites avec conditions intégrales tels que Infante [14] , Peciutyle et al. [16], Benchohra et ses collaborateurs [15], Arara et Benchohra [13].

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire basée sur le théorème du point fixe de Schauder.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres :
Le premier chapitre est réservé aux définitions et propriétés qui seront utiles à la suite de ce travail.
Le deuxième chapitre est consacré aux définitions et propriétés dérivées fractionnaires.
Le troisième chapitre est à pour but, l'étude de l'existence de solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^{\alpha}_{0^+} u(t) = f\big(t, u(t), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(t)\big), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases}$$

Où α et β sont deux nombres réels tels que $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$. ${}^C D_{0^+}^{\alpha}$, ${}^C D_{0^+}^{\beta}$ désignent les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordres α et β respectivement et $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

CHAPITRE 1

MÉTHODES OPÉRATIONNELLES ET FONCTIONS SPÉCIFIQUES

1.1 méthode opérationnelles

le calcul opérationnel est un outil principalement utilisé pour résoudre des problèmes d'ingénierie, en particulier dans l'étude de systèmes partiels. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base sur la transformée de Laplace et la transformée de Fourier.

1.1.1 Élément sur la transformée de la place

Définition 1.1.1. *Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt$ existe, alors elle s'appelle transformée de Laplace de la fonction g et notée :*

$$G(s) = L\{g(t); s\} = L[g](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt \tag{1.1}$$

la fonction g est appelée fonction originale.

Exemple 1.1.1.

$$\begin{aligned} L(e^{kt}) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt &= \lim_{\epsilon \to +\infty} \int_0^{\epsilon} e^{(k-s)t} dt \\ &= \lim_{\epsilon \to +\infty} \frac{1}{k-s}[e^{(k-s)\epsilon} - 1] = \frac{-1}{k-s}, \quad si \quad s > k. \end{aligned}$$

En particulier, pour $k = 0$ on a $L(1) = \frac{1}{s}$, $s > 0$.

Définition 1.1.2. *Une fonction f est dite sectionnellement continue sur $[a, b]$, si elle est continue sauf en un nombre fini de points, et la discontinuité en ces points est de première espèce.*

Définition 1.1.3. *On dit que g est d'ordre exponentiel quand $t \longrightarrow +\infty$, s'il existe des constantes N ,b et t_0 telles que :*
$\mid g(t) \mid \leqslant Ne^{bt}$ pour $t > t_0$, on dit alors que g est de l'ordre e^{bt} quand $t \longrightarrow +\infty$.

Théorème 1.1.1. *Si g est sectionnellement continue sur chaque intervalle fini $[0, a]$, $a > 0$, et est de l'ordre de e^{bt} quand $t \longrightarrow +\infty$,la transformée de Laplace existe pour $s > b$*
l'originale g peut être reconstituée á partir de la transformée de Laplace $G(s)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse.

$$g(t) = L^{-1}\{G(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} G(s) ds, \quad c = Re(s) > c_0 \tag{1.2}$$

où c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace 1.2.
le calcul direct de la transformée de laplace inverse en utilisant la formule (1.2) est "Souvent compliqué", cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originale g qu'on cherche.
la transformée de Laplace de la convolution

$$g(t) * f(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{1.3}$$

de deux fonction $g(t)$ et $f(t)$,qui sont égales à zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformée de Laplace :

$$L\{g(t) * f(t); s\} = G(s)F(s) \tag{1.4}$$

sous l'hypothèse que $G(s)$ et$F(s)$ existent .
une propriété utile dont on aura besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de la fonction g :

$$\begin{aligned} L\{g^{(n)}(t); s\} &= s^n G(s) - \Sigma_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} g^{(k)}(0) \\ &= s^n G(s) - \Sigma_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \end{aligned} \tag{1.5}$$

qui peut être obtenue de la définition (1.1) par intégration par parties sous l'hypothèse qui les intégrales correspondantes existent.

1.1.2 Élément sur la transformée de Fourier

la transformée de Fourier d'une fonction continue h, absolument intégrable dans $]-\infty, +\infty[$ est définie par :

$$F_e h(t), w = \int_{+\infty}^{-\infty} H_e(w) e^{iwt} h(t) dt \tag{1.6}$$

et l'originale $h(t)$ peut être reconstituée à partir de sa transformée de Fourier $H_e(t)$ à l'aide de sa transformée de Fourier inverse

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(w) e^{-iwt} dw \tag{1.7}$$

la transformée de Fourier de la convolution

$$h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{1.8}$$

de deux fonction h et f, définies sur $]-\infty, +\infty[$, est égale au produit de leurs transformée de Fourier :

$$G_e\{h(t) * f(t); w\} = H_e(w) F_e(w) \tag{1.9}$$

sous l'hypothèse $H_e(w)$ et $F_e(w)$ existent.
une autre propriété utile de la transformée de Fourier ,qui est fréquemment utilisée dans la résolution de problèmes appliqués est la transformée de Fourier des dérivées de h. A savoir si :
$h(t), h'(t), ..., h^{(n-1)}(t)$ tendent vers zéro quand $t \longrightarrow \pm\infty$,alors la transformée de Fourier de la nième dérivée de h est

$$G_e\{h^{(n)}(t); w\} = (-iw)^n H_e(w) \tag{1.10}$$

la transformée de Fourier est un outil très puissant pour plusieurs domaines des système dynamique linéaire.

1.2 La fonction Gamma

1.2.1 Définition de la fonction Gamma

l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)$, la fonction gamma $\Gamma(\alpha)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

ou bien :

$$\Gamma(\alpha) = lim_{M \longrightarrow +\infty} \int_0^M t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) =^+ \infty$
$\Gamma(\alpha)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < \alpha \leq 1$

Exemple 1.2.1. *Calculons* $\Gamma(2)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \lim_{M \longrightarrow +\infty} \int_0^M t^{2-1} e^{-t} dt \\
&= \lim_{M \longrightarrow +\infty} \int_0^M te^{-t} dt \\
&= \lim_{M \longrightarrow +\infty} [-te^{-t} - e^{-t}]_0^M \\
&= \lim_{M \longrightarrow +\infty} (-\frac{M}{e^M} - \frac{1}{e^M} + 0 + e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

1°

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \forall n \neq 0 \tag{1.13}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\
&= \Big[-t^n e{-t} \Big]_{t=0}^{t=^+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \\
&= n\Gamma(n)
\end{aligned}$$

□

2° si n est un entier , alors

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Démonstration. Puisque $\Gamma(1) = 1$. Alors, en utilisant (1.13) nous obtenons :

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$$
$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$
$$..................$$
$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!$$

□

3°

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{1.15}$$

Démonstration. de la définition (1.11), nous avons :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

si nous posons $t = y^2$
alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \tag{1.16}$$

de façon analogue

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{1.17}$$

si nous multiplions ensemble (1.16), (1.17) nous obtenons :

$$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{1.18}$$

l'équation est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir :

$$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} drd\theta = \pi \tag{1.19}$$

ainsi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ □

4° Γ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$

1.3 la fonction Bêta

1.3.1 Définition de la fonction Bêta

la fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de premier espèce

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx, \quad n>0, \quad m>0 \tag{1.20}$$

Exemple 1.3.1. *calculons* $\beta(2,3)$:

$$\begin{aligned}
\beta(2,3) &= \int_0^1 x(1-x)^2dx \\
&= \int_0^1 x(1-2x+x^2)dx \\
&= \int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx \\
&= (\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}) \mid_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

1.3.2 la relation entre la fonction gamma et la fonction bêta

la fonction Bêta est raccordée avec la fonction Gamma par la relation :

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{1.21}$$

Démonstration. soit $D = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$
on à :

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{m-1}dx \int_0^{+\infty} e^{(-y)}y^{n-1}dy \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}x^{m-1}y^{n-1}dxdy
\end{aligned}$$

on pose : $y = u - x$; $dy = du$

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^{+\infty}\int_0^u e^{-u}x^{m-1}(u-x)^{n-1}dxdu \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^u x^{m-1}(u-x)^{n-1}dxdu
\end{aligned}$$

on pose :$x = tu$; $dx = udt$

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^1 t^{m-1}u^{m-1}(1-t)^{n-1}u^n dtdu \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{m+n-1}du\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt \\
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \Gamma(m+n)\beta(m,n),
\end{aligned}$$

par conséquent :

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

□

Exemple 1.3.2. *Calculons* $\beta(2,3)$ *:*

$$\beta(2,3) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)} = \frac{1!2!}{4!} = \frac{1}{12}$$

1.3.3 Quelques propriétés de la fonction Bêta

1º

$$\beta(m,n) = \beta(n,m) \tag{1.22}$$

Démonstration.

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

alors : $\beta(n,m) = \beta(m,n)$.

□

2º On peut prendre aussi la forme d'intégrale :

$$\beta(m,n) = 2\int_0^1 (\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta,$$

par changement de variables $t = sin^2\theta$

3° La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)},$$

où nous supposons que $Re(z) > 0$.

1.4 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle $\exp(z)$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \tag{1.23}$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en $1953 - 1954$ et elle est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.24}$$

À partir de la relation (1.24), on trouve les relations suivantes :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z).$$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2},$$

et généralement,

$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{z^k}{k!} \right\}.$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler (1.24) :

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

1.4.1 Transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres s'écrit sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a t^{\alpha}) dt = \frac{k! p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha} \pm a)^{k+1}}, \qquad (Re(p) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}).$$

En particulier, pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a\sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \pm a)^{k+1}}, \qquad (Re(p) > a^2).$$

1.5 La fonction Mellin-Ross

La fonction Mellin-Ross, $E_t(\nu, a)$, se pose lors de la recherche de l'intégrale fractionnaire d'une fonction exponentielle e^{at}. Elle est définie par :

$$E_t(\nu, a) = t^{\nu} e^{at} \Gamma^{\star}(\nu, t),$$

où

$$\Gamma^{\star}(\nu, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu) t^{\nu}} \int_0^t e^{-x} x^{\nu-1} dx, \qquad Re(\nu) > 0,$$

qui peut s'écrire aussi :

$$E_t(\nu, a) = t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\nu+1)} = t^{\nu} E_{1,\nu+1}(at).$$

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE

2.1 Intégrales et dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et lemmes utils pour la suite de nos résultats.
l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \Re_+$ de la fonction $u \in C([a,b])$ est définie par :

$$I_a^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds$$

Lorsque $a = 0$, on écrit

$$I^\alpha u(t) = u(t) * \phi_\alpha(t)$$

où $\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$,
$\phi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\phi_\alpha \longrightarrow \delta$, quand $\alpha \longrightarrow 0$

Exemple 2.1.1. *soit* $u(t) = (t-a)^\mu, \quad \mu > -1$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\alpha)^\mu ds \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variables $s = a + (t-a)x$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
I_a^\alpha u(t) &= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (1-x)^{\alpha-1}x^\mu dx \\
&= \frac{(t-s)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\mu+1) \\
&= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+\alpha+1)},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire :

$$
I_a^\alpha (t-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}(t-a)^{\mu+\alpha}.
$$

2.2 Dérivées fractionnaires

2.2.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. *Soit u une fonction intégrable sur $[a;b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α ($n-1 \leq \alpha < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\big(I^{n-\alpha}u(t)\big).
\end{aligned}
$$

Exemple 2.2.1.

1° En général la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :

$$
{}^{RL}D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
$$

2° $f(t) = (t-a)^\beta, \quad t > a, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}\big(I^{n-\alpha}f(t)\big) \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\Big(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\Big) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}.\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

2.2.2 Approche de Caputo

Définition 2.2.2. *la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Caputo d'une fonction u définie sur un intervalle $[a;b]$ est donnée par :*

$$^{c}D^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}u^{(n)}(\tau)d\tau$$

avec $\quad n = [\alpha] + 1$

Exemple 2.2.2. $u(t) = (t-a)^{\alpha}$*, p non entier et* $0 \leq n-1 < p < n$ *avec* $\alpha > n-1$*, alors on à :*

$$u^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{(\alpha-n)}d\tau$$

donc

$$^{c}D^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau$$

en effectuant le changement de variables
$\tau = a + s(t-a)$ *, on obtient :*

$$\begin{aligned}
^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_0^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

2.3 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.3.1. *[1] Pour $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation homogène*

$$^{C}D^{\alpha}_{0^+}u(t) = 0$$

est donnée par :

$$u(t) = c_0 + c_1 t + +c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

où c_i sont des constantes réelles $(i = 1, 2, ..., n-1)$, $n = [\alpha] + 1$.

Démonstration. supposons que : ${}^c D^\alpha u(t) = 0$
D'aprés la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on a :

$$I^{n-\alpha} (\frac{d}{dt})^n u(t) = 0$$

implique que

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} (\frac{d}{dt})^n u(s) ds = 0$$

puisque $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0,$ alors on trouve :

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} (\frac{d}{dt})^n u(s) ds = 0$$

et

$$t^{n-\alpha-1} . u^{(n)}(s) = 0.$$

En appliquant la transformée de la place aux deux membres de la dernière égalité, on arrive à :

$$L(t^{n-\alpha-1} . u^{(n)}(t))(p) = L(0)(p) = 0.$$

Posons :
$H(p) = L(u)(p)$, nous obtenons :

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{p^{n-\alpha}} (p^n H(p) - \Sigma_{k=1}^n p^{n-k} u^{(k-1)}(0)) = 0$$

alors :

$$p^n H(p) - \Sigma_{k=1}^n p^{n-k} u^{(k-1)}(0) = 0$$

donc :

$$H(p) = \Sigma_{k=1}^{n} p^{-k} u^{(k-1)}(0),$$

ce qui nous donne :

$$L^{-1}(H(p))(t) = L^{-1}(\Sigma_{k=1}^{n} p^{-k} u^{(k-1)}(0))(t)$$

alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= \Sigma_{k=1}^{n} u^{(k-1)}(0) L^{-1}(p^{-k})(t) \\ &= \Sigma_{k=1}^{n} u^{(k-1)}(0) . \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $i = k - 1$ on trouve :

$$u(t) = \Sigma_{i=0}^{n-1} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} t^i$$

pour $c_i = \dfrac{u^{(i)}(0)}{i!}$ on trouve $u(t) = \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i t^i$.
On applique l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha} u(t) &= {}^cD^{\alpha}(\Sigma_{i=0}^{n-1} c_i t^i) \\ &= \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i^c D^{\alpha} t^i \\ &= \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} (\frac{d}{dt})^n t^i \end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$ on a : ${}^cD^{\alpha} u(t) = 0$
ce qui termine de démonstration. □

Lemme 2.3.2. *[1] Soit $u \in C([0,1])$ telle que ${}^CD_{0+}^{\alpha} u \in C([0,1])$. Alors :*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour certain $c_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, ..., n-1)$ $n = [\alpha] + 1$.

Démonstration. Dápres la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient :

${}^cD^{\alpha}u(t) = I^{n-\alpha}u^{(n)}(t).$
On applique l'opérateur d'integration fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}u(t) &= I^{\alpha}I^{n-\alpha}u^{(n)}(t) \\
&= I^{n}D^{n}u(t) \\
&= u(t) - \Sigma_{j=1}^{n}\frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}\lim_{t\longrightarrow 0}(\frac{d}{dt})^{n-j}I^{n-n}u(t) \\
&= u(t) - \Sigma_{j=1}^{n}\frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}((\frac{d}{dt})^{n-j}u(t))(0) \\
&= u(t) - \Sigma_{j=1}^{n}\frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}u^{(n-j)}(0).
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}u(t) &= u(t) - \Sigma_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(0)t^{k}}{k!} \\
&= u(t) - \Sigma_{k=0}^{n-1}\frac{c'_{k}t^{k}}{k!} \\
&= u(t) + \Sigma_{k=0}^{n-1}\frac{c_{k}t^{k}}{k!} \\
&= u(t) + c_0 + c_1t + c_2t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.3. *[1] Soit $\alpha, \beta \geq 0$ et $u \in L^1([0,1])$. Alors :*

$$I_{0^+}^{\alpha}I^{\beta}u(t) = I_{0^+}^{\alpha+\beta}u(t) = I^{\beta}I^{\alpha}u(t),$$

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,1],$$

$$I_{0+}^{0}u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,1].$$

et

$$I_{0^+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = u(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

En particulier, on a :

$${}^{C}D_{0^+}^{\beta}u(t) = I_{0^+}^{1-\beta}u'(t), \quad 0 < \beta < 1.$$

$${}^{C}D_{0^+}^{\beta}u(t) = u'(t), \quad \beta = 1.$$

Lemme 2.3.4. *(Point fixe de Schauder) Si U est un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach X et $T : U \longrightarrow U$ est complètement continu, alors T admet un point fixe dans U.*

Chapitre 3

Problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec conditions mixtes

Dans ce chapitre on va discuter l'existence de solutions en utilisant le théorème de point fixe de Schauder pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0+}u(t) = f\big(t, u(t), {}^{C}D^{\beta}_{0+}u(t)\big), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où α et β sont deux nombres réels tels que $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$. ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}$, ${}^{C}D^{\beta}_{0+}$ désignent les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordres α et β respectivement et $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

3.1 Existence de solutions

Lemme 3.1.1. *Soit $g \in C[0, 1]$ une fonction donnée et $1 < \alpha \leq 2$. Alors l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0+}u(t) = g(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

est donnée par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \tag{3.3}$$

avec

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ -\frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

La fonction $t \longrightarrow G(t,s)$ est appelée fonction de Green pour le problème (3.2).

Démonstration. Par le lemme 2.3.2, on peut réduire l'équation du problème (3.2) en une équation intégrale équivalente :

$$\begin{aligned} u(t) &= I_{0^+}^{\alpha} g(t) - c_0 - c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds - c_0 - c_1 t, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où c_0 et c_1 sont des constantes réelles.
La condition aux limites $u(0) = 0$ donne $u(0) = -c_0$ par conséquent $c_0 = 0$. D'un autre côté, on utilisant le lemme 3.4, on trouve :

$$\begin{aligned} u'(t) &= {}^C D_{0^+}^1 u(t) \\ &= {}^C D_{0^+}^1 \left(I_{0^+}^{\alpha} g(t) - c_0 - c_1 t \right) \\ &= {}^C D_{0^+}^1 I_{0^+}^{\alpha} g(t) - c_1 \\ &= {}^C D_{0^+}^1 I_{0^+}^1 I_{0^+}^{\alpha-1} g(t) - c_1 \\ &= I_{0^+}^{\alpha-1} g(t) - c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} g(s)ds - c_1, \end{aligned}$$

d'où

$$u'(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} g(s)ds - c_1. \tag{3.6}$$

Alors de le deuxième condition aux limites $u'(1) = 0$, on tire :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} g(s)ds - c_1 = 0,$$

ce qui nous donne :

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} g(s)ds.$$

Par substitution de c_0 et c_1 dans (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\Big[\int_0^t (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds + \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds \\
&\quad -\frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_t^1 (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds \\
&= \int_0^t \Big[\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\Big]g(s)ds + \int_t^1 -\frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}g(s)ds
\end{aligned}$$

avec

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \le s \le t \le 1, \\ -\frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

□

Soit $I = [0,1]$, et $X = C^1(I)$ la classe de toutes les fonctions continues ayant des dérivées de premier ordre continues sur I.
Maintenant, on munit l'espace

$$X = \Big\{u : u \in C[0,1] / {}^C D_{0^+}^{\beta} u \in C[0,1], \quad 0 < \beta < 1\Big\}.$$

de la norme

$$\|u\|_X = \max_{0\le t\le 1} |u(t)| + \max_{0\le t\le 1} \big|{}^C D_{0^+}^{\beta} u(t)\big|.$$

Lemme 3.1.2. *L'espace $\big(X, \|u\|_X\big)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans l'espace $\big(X, \|.\|_X\big)$. Alors calairement $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\Big\{{}^C D_{0^+}^{\beta} u_n(t)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ sont des suites de Cauchy dans l'espace $C[0,1]$. Par conséquent, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\Big\{{}^C D_{0^+}^{\beta} u_n(t)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ convergent respectivement vers v et w sur $[0,1]$ uniformément et $v, w \in C[0,1]$. On a besoin de montrer que $w = {}^C D_{0^+}^{\beta} v$. Notons que :

$$\begin{aligned}
\Big|I_{0^+}^{\beta}\, {}^C D_{0^+}^{\beta} u_n(t) - I_{0^+}^{\beta} w(t)\Big| &\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta}\Big|{}^C D_{0^+}^{\beta} u_n(s) - w(s)\Big| ds \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \max_{t\in[0,1]} \Big|{}^C D_{0^+}^{\beta} u_n(t) - w(t)\Big|.
\end{aligned}$$

Par convergence de $\left\{{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ nous avons $\lim_{n\to+\infty} I_{0^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u_n(t) = I_{0^+}^{\beta}w(t)$, uniformément pour $t \in [0,1]$.
De l'autre côté par le Lemme 2.3.3, on a $I_{0^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u_n(t) = u_n(t)$. Donc $v(t) = I_{0^+}^{\beta}w(t)$, ce qui est est équivalent à $w = {}^{C}D_{0^+}^{\beta}v$. □

Lemme 3.1.3. *La fonction $t \longrightarrow |G'_t(t,.)|$ est intégrable pout tout $t \in I$ et on a :*

$$\int_0^1 |G'_t(t,s)|ds \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}. \tag{3.7}$$

Démonstration. En dérivant $G(t,s)$ par arpport à t on obtient :

$$G'_t(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-2}-(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ -\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G'_t(t,s)|ds &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}-(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds + \int_t^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}ds - \int_0^t (1-s)^{\alpha-2}ds + \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2}ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1} + \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} + \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right] \\ &= \frac{2(1-t)^{\alpha-1}+t^{\alpha-1}-1}{\Gamma(\alpha)} \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

□

Maintenant, on définit un opérateur $T : X \longrightarrow X$ par

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)f\big(s,u(s),{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u(s)\big)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f\big(s,u(s),{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u(s)\big)ds \\ &\quad -\frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}f\big(s,u(s),{}^{C}D_{0^+}^{\beta}u(s)\big)ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Alors, le problème aux limites (3.1) est équivalent au problème du point fixe $Tu = u$. Donc nous établisserons dans ce qui suit un résultat d'existence de solutions en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.1.1. *Supposons $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et les hypothèses suivantes sont satisfaites*
(H1) : Il existe une constante $\xi > 0$ et une fonction non négative $a(t) \in L^1(0,1)$ telles que :

$$|f(t,x,y)| \leq a(t) + \xi(|x| + |y|).$$

pour $0 \leq t \leq 1, \quad x, y \in \mathbb{R}$.

(H2) :

$$\Big[A + \frac{B}{\Gamma(2-\beta)} + \Big(\frac{2+\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}\Big)\xi R\Big] \leq R,$$

avec

$$A = \max_{t\in I} \int_0^1 \big|G(t,s)a(s)\big|ds, \quad B = \max_{t\in I} \int_0^1 \big|G'_t(t,s)a(s)\big|ds.$$

Alors, le problème (3.1) admet une solution dans U.

Démonstration. On fixe $R > 0$, et on définit U par :

$$U = \big\{u(t)/u(t) \in X, \ \ \|u\|_X \leq R, \ \ t \in I\big\}$$

Il est clair que U est fermé, borné et convexe.

- L'opérateur T est continue.

Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers u dans X. Alors en utilisant la continuité de f, on obtient d'une part, pour $t \in I$:

$$\begin{aligned}
\big|(Tu_n)(t) - (Tu)(t)\big| &= \Big|\int_0^1 G(t,s)\Big[f\big(s, u_n(s), {}^C D^\beta_{0^+} u_n(s)\big) - f\big(s, u(s), {}^C D^\beta_{0^+} u(s)\big)\Big]ds\Big| \\
&\leq \max_{t\in I}\Big|f\big(t, u_n(t), {}^C D^\beta_{0^+} u_n(t)\big) - f\big(t, u(t), {}^C D^\beta_{0^+} u(t)\big)\Big| \int_0^1 |G(t,s)|ds \\
&\leq \max_{t\in I}\Big|f\big(t, u_n(t), {}^C D^\beta_{0^+} u_n(t)\big) - f\big(t, u(t), {}^C D^\beta_{0^+} u(t)\big)\Big| \times \\
&\quad \int_0^t \bigg(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\bigg)ds + \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds,
\end{aligned}$$

des intégrations par parties avec quelques simplifications, nous donne :

$$\int_0^t \bigg(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\bigg)ds = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)},$$

et

$$\int_t^1 \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds = \frac{t(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Alors par substitution, il vient :

$$\begin{aligned}
&\big|(Tu_n)(t) - (Tu)(t)\big| \\
\leq\ & \Big(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)\max_{t\in I}\Big|f\big(t, u_n(t), {}^C D^\beta_{0^+} u_n(t)\big) - f\big(t, u(t), {}^C D^\beta_{0^+} u(t)\big)\Big| \\
\leq\ & \frac{2+\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\max_{t\in I}\Big|f\big(t, u_n(t), {}^C D^\beta_{0^+} u_n(t)\big) - f\big(t, u(t), {}^C D^\beta_{0^+} u(t)\big)\Big|. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

D'une autre part, on :

$$
\begin{aligned}
& \left|{}^C D^{\beta}_{0^+} Tu_n(t) - {}^C D^{\beta}_{0^+} Tu(t)\right| \\
= & \left|\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\Big((Tu_n)'(s) - (Tu)'(s)\Big)ds\right| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(\int_0^1 \left|G'_s(s,\tau)\Big(f\big(\tau,u_n(\tau),{}^C D^{\beta}_{0^+}u_n(\tau)\big) - f\big(\tau,u(\tau),{}^C D^{\beta}_{0^+}u(\tau)\big)\Big)\right|d\tau\right)ds \\
\leq & \max_{t\in I}\left|f\big(t,u_n(t),{}^C D^{\beta}_{0^+}u_n(t)\big) - f\big(t,u(t),{}^C D^{\beta}_{0^+}u(t)\big)\right|\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(\int_0^1 \left|G'_s(s,\tau)\right|d\tau\right)ds \\
\leq & \frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}\max_{t\in I}\left|f\big(t,u_n(t),{}^C D^{\beta}_{0^+}u_n(t)\big) - f\big(t,u(t),{}^C D^{\beta}_{0^+}u(t)\big)\right|. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

De (3.9) et (3.10) on en déduit que :

$$
\left\|Tu_n - Tu\right\|_X \leq \left(\frac{2+\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}\right)\max_{t\in I}\left|f\big(t,u_n(t),{}^C D^{\beta}_{0^+}u_n(t)\big) - f\big(t,u(t),{}^C D^{\beta}_{0^+}u(t)\big)\right|.
$$

Par conséquent, l'opérateur T est continu.

- $T(U) \subset U$.

Pour $u \in U$ et $t \in I$, on a :

$$
\begin{aligned}
|Tu(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s) f\big(s,u(s),{}^C D^{\beta}_{0^+}u(s)\big)\right|ds \\
&\leq \int_0^1 \left|G(t,s) f\big(s,u(s),{}^C D^{\beta}_{0^+}u(s)\big)\right|ds \\
&\leq \int_0^1 \left|G(t,s)\Big(a(s) + \xi(|u(s)| + \left|{}^C D^{\beta}_{0^+}u(s)\right|\Big)\right|ds \\
&\leq \int_0^1 \left|G(t,s)a(s)\right|ds + \xi R\int_0^1 \left|G(t,s)\right|ds \\
&\leq A + \frac{\xi R(2+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
\left|{}^{C}D^{\beta}_{0^+}Tu(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}(Tu)'(s)ds\right| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\bigg(\int_0^1 \Big|G'_s(s,\tau)f\big(\tau,u(\tau),{}^{C}D^{\beta}_{0^+}u(\tau)\big)\Big|d\tau\bigg)ds \\
&\le \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\bigg(\int_0^1 \Big|G'_s(s,\tau)a(\tau)\Big|d\tau \\
&\quad + \int_0^1 \Big|G'_s(s,\tau)\xi\Big(|u(\tau)|+\big|{}^{C}D^{\beta}_{0^+}u(\tau)\big|\Big)\Big|d\tau\bigg)ds \\
&\le \frac{B}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}ds + \frac{\xi R}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\bigg(\int_0^1 \Big|G'_s(s,\tau)\Big|d\tau\bigg)ds \\
&\le \frac{B}{\Gamma(1-\beta)}.\frac{t^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{2\xi R}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}.\frac{t^{1-\beta}}{1-\beta} \\
&\le \frac{B}{\Gamma(2-\beta)} + \frac{2\xi R}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Donc, de (3.11) et (3.12) on obtient :

$$\|Tu\|_X \le \bigg[A + \frac{B}{\Gamma(2-\beta)} + \Big(\frac{2+\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}\Big)\xi R\bigg] \le R,$$

ce qui implique que $T : U \longrightarrow U.$

- Soit $t,\tau \in I$, $t<\tau$ et $M = \max_{t\in I}\Big|f\big(t,u(t),{}^{C}D^{\beta}_{0^+}u(t)\big)\Big|$. Alors pour tout $u \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)-Tu(\tau)| &= \bigg|\int_0^1 \Big(G(t,s)-G(\tau,s)\Big)f\big(s,u(s),{}^{C}D^{\beta}_{0^+}u(s)\big)ds\bigg| \\
&\le \int_0^1 \big|G(t,s)-G(\tau,s)\big|\Big|f\big(s,u(s),{}^{C}D^{\beta}_{0^+}u(s)\big)\Big|ds \\
&\le M\bigg(\int_0^t \big|G(t,s)-G(\tau,s)\big|ds + \int_t^\tau \big|G(t,s)-G(\tau,s)\big|ds \\
&\quad + \int_\tau^1 \big|G(t,s)-G(\tau,s)\big|ds\bigg). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Maintenant on estime les trois intégrales du côté droit de (3.13). On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \big|G(t,s)-G(\tau,s)\big|ds &= \int_0^t \left|\frac{(\tau-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t-s)^{\alpha-1}-(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right|ds \\
&\le \int_0^t \frac{(\tau-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds + \int_0^t \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&\le \frac{\tau-t}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\tau^\alpha-t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_t^\tau \big|G(t,s)-G(\tau,s)\big|ds &= \int_t^\tau \left|\frac{(\tau-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right|ds \\
&\leq \int_t^\tau \frac{(\tau-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds + \int_t^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leq \frac{\tau-t}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\tau-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_\tau^1 \big|G(t,s)-G(\tau,s)\big|ds &= \int_\tau^1 \frac{(\tau-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds \\
&= \frac{\tau-t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_\tau^1 (1-s)^{\alpha-2}ds \\
&\leq \frac{\tau-t}{\Gamma(\alpha)}. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Donc de (3.14), (3.15) et (3.16), il en résulte que :

$$
|Tu(t)-Tu(\tau)| \leq M\left(\frac{3(\tau-t)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(\tau^\alpha - t^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right). \qquad (3.17)
$$

On a aussi :

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^C D_{0^+}^\beta Tu(t) - {}^C D_{0^+}^\beta Tu(\tau)\right| \\
= &\left|\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}(Tu)'(s)ds \right. \\
&\left. -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^\tau (\tau-s)^{-\beta}(Tu)'(s)ds\right| \\
= &\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left|\int_0^t (t-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G_s'(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D_{0^+}^\beta u(\theta)\big)d\theta\Big)ds \right. \\
&\left. -\int_0^\tau (\tau-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G_s'(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D_{0^+}^\beta u(\theta)\big)d\theta\Big)ds\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\Big|\int_0^t (t-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds \\
&\quad -\int_0^t (\tau-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds \\
&\quad +\int_0^t (\tau-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds \\
&\quad -\int_0^\tau (\tau-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\Big|\int_0^t (t-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds \\
&\quad -\int_0^t (\tau-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds\Big| \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\Big|\int_0^t (\tau-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds \\
&\quad -\int_0^\tau (\tau-s)^{-\beta}\Big(\int_0^1 G'_s(s,\theta)f\big(\theta,u(\theta),{}^C D^\beta_{0^+}u(\theta)\big)d\theta\Big)ds\Big| \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}\int_0^t \Big((t-s)^{-\beta}-(\tau-s)^{-\beta}\Big)ds \\
&\quad +\frac{2M}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}\int_t^\tau (\tau-s)^{-\beta}ds \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}\Big(\tau^{1-\beta}-t^{1-\beta}+2(\tau-t)^{1-\beta}\Big) \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Les seconds membres de (3.17) et (3.18) sont indépendants de u et tendent vers zéro lorsque $\tau - t \longrightarrow 0,$ donc Tu est équicontinu. Il est aussi clairement uniformément borné. Par le lemme d'Arzela-Ascoli on en déduit que $T : U \longrightarrow U$ est complètement continu. Par conséquent, le théorème de point fixe de Schauder implique que le problème (3.1) admet une solution dans U. □

Corollaire 3.1.1. *Supposons $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et il existe une constante $\xi > 0$ telle que*

$$
\Big(\frac{2+\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}\Big)\xi \leq 1. \qquad (3.19)
$$

Alors, le problème (3.1) admet une solution dans U.

Démonstration. On choisit $a(t) = 0$ et $\max\limits_{t\in I}\big|f(t,x,y)\big| = \xi(|x|+|y|).$
la condition (3.19), nous permet d'appliquer le théorème 3.1.1 qui affirme l'existence d'une solution du prblème (3.1).

□

Exemple 3.1.1. *On considère le problème aux limites suivant :*

$$
\begin{cases}
{}^{C}D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(t) = \dfrac{\left|u(t)\right| + \left|{}^{C}D_{0^+}^{\frac{1}{2}}u(t)\right|}{3+e^{t}}, \quad 0 < t < 1, \\
\\
u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

Dans cet exemple, on a : $\alpha = \dfrac{3}{2}, \quad \beta = \dfrac{1}{2}$ *et* $f(t,x,y) = \dfrac{|x|+|y|}{3+e^{t}}.$

$$
\begin{aligned}
(3.19) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{7}{2\Gamma(\frac{5}{2})} + \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{2}))^2}\right)\xi \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \xi \leq 0.2560.
\end{aligned}
$$

$$
\max_{t\in I}|f(t,x,y)| == \frac{1}{4}(|x|+|y|).
$$

Donc $\xi = 0.25$. *Les hypothèses du corollaire 3.1.1 sont remplies, par conséquent, le problème aux limites (3.20) admet une solution.*

Conclusion

L'objectif principal de ce travail est d'étudier certain résultat d'existence pour une équation différentielle d'ordre fractionnire au sens de Caputo avec conditions aux limites mixtes dans un espace de Banach. Ce résultat est obtenu en utilisant le théorème de point fixe de Schauder après transformation de notre problème aux limites en une équation intégrale. Pour la compacité, on a utilisé le lemme d'Arzela-Ascoli qui joue un rôle essentiel en analyse fonctionnelle et théorié des opérateurs. Notre travail est terminé par un exemple illustrant nos résultats théoriques.

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[2] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.

[3] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications). Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[4] S. Q. Zhang, The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 804-812.

[5] S. Q. Zhang, Existence of a positive solution for some class of nonlinear fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 136-148.

[6] Z. Bai, H. Lü, Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 495-505.

[7] R. W. Ibrahim, s. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3334(2007), pp. 1-10.

[8] S. Abbas, M. Benchohra, Existence for impulsive partial hperbolic differential equations of fractional order at variable times, Fixed Point Theory, 12(2011), 3-16.

[9] S. Xinwei, L. Landong, Existence of solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2007, 223, 3, pp. 291-298.

[10] Z. Shuqin, Existence of solution for boundary value problem of fractional order, Acta Mathematica Scentia, 2006, 26 B, 2, pp. 220-228.

[11] K. W. Blayneh, "Analysis of age-structured host-parasitoid model," Far East Journal of Dynamical Systems, vol. 4, no. 2, pp. 125-145, 2002.

[12] G. Adomian and G. E. Adomian, "Cellular systems and aging models," Computers Mathematics with Applications, vol. 11, no. 1-3, pp. 283-291, 1985.

[13] A. Arara and M. Benchohra,"Fuzzy solutions for boundary value problems with integral boundary conditions," Acta Mathematica Universitatis Comenianae, vol. 75, no. 1, pp. 119-126, 2006.

[14] G. Infante, "Eigenvalues and positive solutions of ODEs involving integral boundary conditions," Discrete and Continuous Dynamical Systems, pp. 436-442, 2005.

[15] M. Benchohra, S. Hamani, and J. Henderson, "Functional differential inclusions with integral boundary conditions," Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, vol. 2007, no. 15, pp. 1-13, 2007.

[16] S. Peciulyte, O. Stikoniene, and A. Stikonas, "Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition," Mathematical Modelling and Analysis, vol. 10, no. 4, pp. 377-392, 2005.

ملخص

في هذه العمل درسنا وجود ا لحلول لبعض المعادلات التفاضلية شبه الخطية
ذات الرتب الكسرية بمفهوم كابيتو. بشروط حدية مختلطة
و ذلك باستعمال نظرية النقطة الثابتة لشودر.

Abstract

In this work, we studied the existence of solutions of some Caputo fractional differential equations with mixed conditions using fixed point theorem of Schauder

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence de solutions de quelques équations différentielles fractionnaires aux sens de Caputo avec conditions mixtes en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.