N° d'ordre :
N° de série :

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieure Et
de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière
Département des Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Présenté par
Messaoudi Rania

Thème

Résolution du problème du temps d'arrêt optimal en horizon fini

SPÉCIALITÉ : Mathématiques

Devant le jury composé de :

Mr.M.Akti	**Université KASDI Merbah- Ouargla**	**président**
Mr.B.Mansoul	**Université KASDI Merbah- Ouargla**	**Examinateur**
Mr.A.Boussaad	**Université KASDI Merbah- Ouargla**	**Rapporteur**

Année Universitaire 2019/2020

Remerciement

Tout d'abord, remercier Dieu de me donner force et patience pour mener à bien ce travail.
Mes sincères remerciements et reconnaissances vont à mon encadreur Pr.Baheddi.Aissa et D.Boussaad.Abdelmalek pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'elle m'a prodiguée durant la réalisation de ce travail.
Je remercie mon père, ma mère, mes frères et tous les professeurs de la faculté de mathématiques.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail. Enfin, je tient également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

MERCI.

Contents

Notations

✓ T: Le temps terminal

✓ P : La probabilité

✓ E.D.S :Équation Différentielle stochastique

✓ $(B_t)_{t\geq 0}$: Un mouvement Brownien

✓ $(W_t)_{t\geq 0}$: Un mouvement Brownien

✓ $(\Omega, \mathcal{F}, p)$:Un espace de Probabilité complet.

✓ $(\mathcal{F}_r)_{\geq 0}$: La filtration.

✓ $(\Omega, A(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, p)$ Un espace de Probabilité filtré.

✓ $\mathcal{C}^2$: est l'espace des fonctions à dérivée partielle d'ordre 2 sont continue.

✓ $\mathbb{R}^n$: est un espace réel euclidien de dimension n.

Introduction

Historiquement: La théorie du contrôle optimale est très liées à la mécanique classique,en particulier aux principes variationnels de la mécanique le point clé de cette théorie est la principe de maximum de Pontryagain par L.S.Pontryagain en 1956 qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimale ($voir$[1]).

Dans la théorie des temps d'arr$\hat{e}$t optimaux on a le problème de contr$\hat{o}$le stochastique en horizon fini qui consiste à minimiser une fonction de co$\hat{u}$t($voir$[4]) qui donné par:

$$T(t, x, u) = \mathbb{E}(\int_0^T l(x_t, u_t)dt + h(X_t))$$

Ce problème à une dynamique du système est modélisé par une équation différentielle d'évolution et d'écrit par un processus de diffusion solution d'une équation différentielle stochastique suivante:

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

- Le problème d'arr$\hat{e}$t optimal se trouve dans les domaines des statistiques, l'économie et la finance mathématiques.
- Dans ce contexte,notre mémoire explique la résolution du problème du temps d'arr$\hat{e}$t optimal en horizon fini, C'est pourquoi nous avons choisi le modèle de Black-scholes pour l'étude, qui représente un modèle de l'évolution des prix au fil du temps d'arrêt pour les des instruments financiers tels que les actions, il s'agit d'une équation différentielle partielle qui régit l'évolution des prix pour le modèle d'options, C'est-à -dire la résolution des problèmes de tarification des options financières, et à partir de dernier nous présentons le problème suivant:

Détermination et calcul du temps d'arrêt optimal en horizon fini.
Ce mémoire est structuré de la manière suivant:

- CHAPITRE 1: Dans ce chapitre, les méthodes et les outils adoptés dans l'étude sont présentés comme suit: le processus stochastique qui inclut le processus de Markov dont l'utilisation est jugée nécessaire en cas de décision impliquant un risque dans le temps d'arrêt, la filtration et le temps d'arrêt, comme nous l'avons utilisé le processus d'Itô, les martingales, variation quadratique,temps d'arrêt optimal, envellope de snell, En plus les équations différentielles stochastique.

- CHAPITRE 2: Afin de formuler le problème du temps d'arrêt optimal en horizon fini, nous avons adoptés une étude des dérivées partielles différentielles de Black-scholes.

1 PRÉSENTATION DES OUTILS ET MÉTHODES

Dans ce chapitre on présente les outils et les méthodes principale au calcul stochastique comme les équations différentielle stochastique,l'envellope de snell,le temps d'arrêt et les martingales.

1.1 PROCESSUS STOCHASTIQUE

Le processus stochastique est une famille $X_t, t \in T$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ à valeur dans l'espace des états $(\mathbb{E}, \xi)$ telle que X_t est une variable aléatoire ou t étant le temps. Le processus stochastique est un processus de Markov si conditionnellement à sa valeur présent au temps t,son évolution future est indépendante de son passé.

1.1.1 Processus de Markov

Voir [5]

Définition 1.1.1 *Le processus stochastique* X_n *pour tout* $n > 0$ *à valeur dans l'espace d'états* $\mathbb{E}$ *ensemble fini ou dénombrable est un chaine de Markov si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, pour tout* $x_0, ..., x_n, y \in \mathbb{E}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_n = x_n) \tag{1.1}$$

Voir [13]

Définition 1.1.2 *On appelle* ***matrice de transition*** *la matrice* $P = (p_{x,y})_{x,y \in E}$*:*

$$p = \begin{pmatrix} p_{x_0,x_0} & p_{x_0,x_1} & \cdots \\ p_{x_1,x_1} & p_{x_1,x_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

C'est une matrice finie ou dénombrable, suivante que l'ensemble des états est fini dénombrable.

Proposition 1.1.1 *Tout matrice de transition vérifie les propriétés suivantes:*

(i) $\forall x \in \mathbb{E} : \sum_{y \in \mathbb{E}} P_{xy} = 1,$

(ii) $\forall (x, y) \in E$ *on a* $P_{xy} > 0.$

1.1.2 Filtration

Voir [3]

Définition 1.1.3 *Une filtration de* $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ *est une suite croissante* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de sous tribu de* $\mathbb{A}$*.*
On dit alors que $(\Omega, \mathbb{A}, (F_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé filtré.*

Définition 1.1.4 *Une filtration* $F = (F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est continue à droite si pour tout* $t \in \mathbb{T}$
$F_{t_+} = \bigcap F_s = F_t$ *tel que* $s > t$
On dit que la filtration $F = (F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *sur l'espace probabilité* $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *est complet pour la probabilité* $\mathbb{P}$ *si* F_0 *contient tous les ensembles négligeable de* F *pour* $\mathbb{P}$ *avec* F_0 *est la plus petite filtration.*

Définition 1.1.5 *Un processus* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est adapté à la filtration* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* X_n *est mesurable par rapport à la tribu* (F_n)*.*
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un processus sur* $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$*, on définit* F_n^X *comme étant la plus petite tribu rendant les variables aléatoires* $X_0, ..., X_n$ *mesurables :*

$$F_n^X = \sigma(X_0, ..., X_n)$$

Alors: $(F_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une filtration appelée filtration canonique du processus aléatoire* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.3 Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathbb{A}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré. On pose:

$$F_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0} F_n)$$

Définition 1.1.6 *Une variable aléatoire* $T : \Omega \mapsto \mathbb{N}\cup\infty$ *est appelée temps d'arrêt si pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *on a:*

$$T = n \in F_n$$

Proposition 1.1.2 *Soit* S *et* T *deux temps d'arrêt,alors* $S + T$, $S \wedge T$ *et* $S \vee T$ *sont des temps d'arrêts.*
En particulier,pour $k \in \mathbb{N}$; $T \wedge K$ *est un temps d'arrêt bornée.*
Par généralisation on a, si $(T_k)_{k\geq 0}$ *est un suite de temps d'arrêt, alors* $\inf T_k, \sup T_k$ *et* $\liminf T_k$ *et* $\limsup T_k$ *sont aussi des temps d'arrêt.*

Définition 1.1.7 *Si* T *est un temps d'arrêt,on appelle tribu des événements antérieurs à* T *la tribu suivante*

$$F_n = \{A \in F_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, A \cup \{T = n\} \in F_n\}$$

Elle vérifie que si $T = n$ *alors* $F_T = F_n$.

Proposition 1.1.3 *Soit* S *et* T *sont deux temps d'arrêt, alors:*

$$S \leq T \Rightarrow F_s \subset F_T$$

Preuve. Soit $A \in F_s$, alors on a:

$$A \cup \{T = n\} = \cap_{k=0}^{n} [A \cup \{S = k\} \cup \{T = n\}]$$

or

$$\text{e } A \cup \{S = k\} \in F_k \subset F_n$$

Dòu par passage à la réunion

$$A \cup \{T = n\} \in F_n$$

■

1.2 MOUVEMENT BROWNIEN

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique* (B_t) *à valeurs réelles est appelé un mouvement Brownien* $(\mathsf{standard})$ *s'il vérifiée quatre propriété suivantes:*

i - $B_0 = 0$

ii - *pour tout* $s \leq t$ *l'accroissement* $(B_t - B_s)$ *suit la loi normale centrée de variance* $(t - s)$

iii - *Si* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ *les accroissements:*
B_{t_1}, $(B_{t_2} - B_{t_1})$,...,$(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ *sont indépendants.*

iv -*En dehors d'un ensemble de probabilité nulle,les trajectoires* $t \rightarrow B_t(w)$ *sont continues.*

Définition 1.2.2 *Un processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *a valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*c'est une mouvement Brownien issu de* "0" *si c'est un processus à accroissements indépendants a trajectoires presque surement continues avec* $B_0 = 0$,*et si pour tout* $s \leq t$,$(B_t - B_s)$ *suit la loi* $\mathcal{N}(0, (t - s)\, \mathrm{Id}_d)$

1.3 PROCESSUS D'ITÔ

Voir [2]

Définition 1.3.1 *Soient* $(\Omega, F, F_t, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité muni d'une filtration et* W *est un* $(F_t)_{t\in[0,T]}$ *mouvement brownien.*
On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que,* $\forall t \leq T$

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW$$

Avec X_0 *est* F_0*-mesurable,* K *et* H *est* $(F_t)_{t\geq 0}$*-adaptés tel que* $\mathbb{P}$ *p.s* $\forall t \geq 0, \int_0^t K_s ds \leq \infty$.

1.4 MARTINGALES

Définition 1.4.1 *Soit* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(F_n, n \geq 0)$ *une filtration définie sur l'espace* $(\Omega, A, \mathbb{P})$.
Une suite $(M_n, n \geq 0)$ *des variables aléatoires réelles est une* F_n*-martingale si les conditions suivantes sont vérifiée:*
(i) $(M_n, n \geq 0)$ *est un* F_n*-adapté,* $\forall n \geq 0$,
(ii) $\mathbb{E}(|M_n|) \leq \infty$,
(iii) $\mathbb{E}(M_{n+1}/F_n) = M_n$.

Proposition 1.4.1 *Toute martingale* M *vérifie*

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve. On a:

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t/F_0]] = \mathbb{E}[M_0]$$

pour tout $t \in [0, T]$. ■

Proposition 1.4.2 *Soit* M *une* F*-martingale de carré intégrable,alors*

$$\mathbb{E}[|M_t - M_s|^2/F_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2/F_s]$$

Remarque 1.4.1 *Une martingale est un jeu équitable,une sur-martingale un jeu perdant, et une sous-martingale un jeu gagnant*

1.4.1 Sous-martingale

Définition 1.4.2 *Une suite* $\{X_n, n \geq 0\}$ *de variables aléatoires réelles est une sur-martingale si:*
(i) X_n *est* F_n*-mesurable,*
(ii) $\mathbb{E}(X_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$,
(iii) $\mathbb{E}(X_{n+1}/F_n) \geq X_n$ *presque sûrement* $\forall n \geq 0$.

1.4.2 Martingale locale

Voir [9]

Définition 1.4.3 *Un processus* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est appelé une martingale locale,si* $(X_t)_{t\in T}$ *est un processus adapté à trajectoires continues tel qu'il existe une suite croissante* $(U_n)_{n\geq 0}$ *de temps d'arrêt tendant vers* ∞ *et pour tout* n*, le processus arrêt* X^{U_n} *est une martingale uniformément intégrable.*

1.4.3 Semi-martingale

Voir [10]

Définition 1.4.4 *Un processus aléatoire* X *est une semi-martingale continue s'il admet une décomposition de la forme :*

$$X = X_0 + M + A$$

où M *est une martingale locale continue nul en 0 et* A *un processus adapté est nul en 0,cette décomposition est unique.*

1.5 VARIATION QUADRATIQUE D'UNE MARTINGALE LOCALE

Voir [11]

Théorème 1.5.1 *Soit une martingale locale continue.Il existe un processus croissant notée* $<M>:=(<M_t>)_{t\geq 0}$.
Unique indistinguabilité prés tel que $M_t^2 - <M_t>$ *soit une martingale locale et* $<M_0>$.
De plus,pour tout $t \geq 0$,*si* $0 = t_0^n \geq t_1^n \geq ... \geq t_{p_n}^n = t$ *est une suite de subdivisions emboîtée de [0,t] de pas tendant vers* 0 *alors:*
$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 =< M_t >$ *en probabilité.*

1.6 TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL

Voir [6]

Définition 1.6.1 *On dit que* T^* *est un temps d'arrêt optimal,pour* $t = 0$ *tel que le problème d'arrêt optimal est* $((Z_t)_{t\geq 0}, (F_t)_{t\geq 0})$ *si*

$$\mathbb{E}(Z_{T^*}) = \mathbb{E}(U_0) = \sup_{t\in T_{[0,\infty]}} \mathbb{E}(Z_t).$$

Proposition 1.6.1 *Soit* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *un processus adapté et intégrable.*
Son envelloppe de snell $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ *est une surmartingale.La variable aléatoire* T^* *définie par*

$$T^* = \inf\{k \geq 0/U_k = X_k\}$$

Est un temps d'arrêt et le processus arrêté $(U_k^{T^*})_{0\leq k\leq n}$ *est une martingale.*

1.7 Enveloppe de Snell

voir [6]

Définition 1.7.1 *L'enveloppe de snell d'un processus adapté et intégrable* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *est le processus* $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par les relations de récurrence suivantes:*

$$U_k = X_k$$

et

$$U_k = max\{X_k, \mathbb{E}[U_{k+1}/F_k]\}$$

Pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$.

Proposition 1.7.1 *L'enveloppe de Snell est la plus petite sur martingale continu à droite majorant l'obstacle* (Z_t)*, c'est à dire:*
- On a p.s: $U_t \geq Z_t, \forall t$ *et* (U_t) *est une sur-martingale.*
- Si p.s: $V_t \leq Z_t, \forall t$*,* (V_t) *est une sur-martingale c-à-d, alors p.s* $\forall t, V_t \geq U_t$.

1.8 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Voir [5]

Définition 1.8.1 *Une équations différentielle stochastique est une équation de la forme:*

$$dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)dB_t, \forall t \geq 0$$
$$f, g : \mathbb{R}\ X\ [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Tel que : f *et* g *sont deux fonctions déterministe mesurables avec* f *est appelée coefficient de dérive et* g *est appelée coefficient de diffusion.*

1.8.1 Différents type d'équation différentielles stochastiques

Soit l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \tag{1.2}$$

1.8.2 Équations différentielles stochastiques à bruit additif

Définition 1.8.2 *On dit que l'équation différentielle stochastique* (1.2) *est une équation linéaire à bruit additif si le coefficient de diffusion est* $b(t, X_t) = b\,(t)$.

On a trois types de E.D.S à bruit additif sont:

I)Équation homogène à coefficient constant

Elle s'écrit sous la forme:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t \tag{1.3}$$

La solution général s'écrit sous la forme:

$$X_t = e^{-\alpha t}(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s)$$

II)Équation non homogène à coefficient constant

Elle s'écrit sous la forme:

$$dX_t = (\alpha X_t + b)dt + c dW_t \tag{1.4}$$

La solution général s'écrit sous la forme:

$$X_t = e^{\alpha t}[X_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-\alpha t}) + c \int_0^t e^{-\alpha s} dW_s]$$

III)Équation à coefficients variables

Elle s'écrit sous la forme:

$$dX_t = [a(t)X_t + k(t)]dt + c(t)dW_t \tag{1.5}$$

La solution général s'écrit sous la forme:

$$X_t = \beta(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \beta^{-1} k(s) ds + \int_{t_0}^t \beta^{-1} c(s) dW_s$$

Telle que: $\beta = e^{(\int_{t_0}^t a(s)ds)}$

1.8.3 Équation différentielle stochastique linéaire à bruit multiplicatif

On a trois types des équations différentielle stochastiques:

I)Équation homogène à coefficient constant

Elle s'écrit sous la forme:

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t \tag{1.6}$$

La solution général s'écrit sous la forme:

$$X_t = X_0 \exp((\alpha - \tfrac{\beta^2}{2})t + \beta W_t)$$

II)Équation non homogène à coefficient constant

Elle s'écrit sous la forme:

$$dX_t = (\alpha X_t + c)dt + (\beta X_t + d)dW_t \tag{1.7}$$

Donc la solution général est:

$$X_t = h_t(X_{t_0} + (c - bd)\int_{t_0}^{t} h_s^{-1} ds + d\int_{t_0}^{t} h_s^{-1})$$

Telle que:

$$h_t = \exp((\alpha - \tfrac{\beta^2}{2})t + \beta dW_t)$$

III)Équation homogène à coefficient variables

Elle s'écrit sous la forme:

$$dX_t = \alpha(t)X_t dt + \beta(t)dW_t \tag{1.8}$$

La solution général s'écrit sous la forme:

$$X_t = X_0 \exp(\int_0^t (\alpha(s) - \frac{b^2(s)}{2})$$

1.8.4 Conditions d'existence d'une solution forte

Théorème 1.8.1 *(Théorème d'existence).*
Soit:

$$dX_t = f(X_t, t) + g(X_t, t)dB_t, \forall t \geq 0$$

Supposons que les fonction f *et* g *satisfait les conditions suivantes:*
(i) ***Les fonctions*** f ***et*** g ***sont continues****,*
(ii) ***Condition de Lipschitz local****,*
Pour tout compact $C \subset \mathbb{R}$ *,il existe un constant* $K = K(C)$ *telle que:*

$$|f(x,t) - f(y,t)| + |g(x,t) - g(y,t)| \leq K|x - y|, \forall x, y \in C \textit{ et } t \in [0, T]$$

(iii) ***Condition de croissance borné*** *: il existe un constant L telle que:*

$$|f(x,t)^2| + |g(x,t)^2| \leq L(1 + |x^2|)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T]$.
(iv) ***La condition initial*** X_0 ***est indépendante de*** $B_{t \geq 0}$ ***est carré intégrable****.*

2 FORMULATION DU PROBLÈME DU TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL EN HORIZON FINI

Dans ce chapitre on modélise le modèle de Black-scholes pour formule le problème du temps d'arrêt optimal en horizon fini qu'il base sur les équations différentielle stochastique.

2.1 PROBLÈME AVEC STRUCTURE MARKOVIENNE

On considère les problèmes d'arrêt optimal (**horizon fini**) pour lequel le processus de gains Y est une fonction connue d'un chaine de Markov X pour la filtration f.

On montre que pour cette classe de problème la fonction valeur Z a une forme simple.Un processus de Markov X pour la filtration f a valeurs dans l'espace dénombrable S est une processus adapté $(X_n)_{n\geq 1}$ à f tel que:$X_n : \Omega \to S$ et que:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x/f_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x/X_n) = \mathbb{P}_n(X_n, x) \forall x \in S \forall n \geq 1$$

Avec $\mathbb{P}$ est le noyau de transition du processus de Markov au temps n tel que $\mathbb{P}_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y/X_n = x)$ que vérifier $\sum_{y\in S} \mathbb{P}_n(x, y) = 1 \forall x \in S, \forall n \geq 1$
Si $\mathbb{P}_n(x, y) = \mathbb{P}(x, y)$ le processus de Markov est homogène et $\mathbb{P}_n$ est appelé matrice de transition.

2.1.1 Processus de Markov et propriété de Markov

On a le processus de Markov $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_1 = x_1, X_0 = x_0)$ et la matrice de transition $P = (\mathbb{P}(x, y); x, y \in \mathbb{E})$ avec $\mathbb{P}(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y/X_n = x)$
La loi de $(X_0, ..., X_n)$ est déterminer par P est la loi de X_0 noté μ_0

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_1 = \mu_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2)...P(x_{n-1}, x_n)$$

La loi de X_N est $\mu_N = \mu_0 P^N, \mu_N(x) = (\mu_0 P^N)(x)$
Soit $(X_n)_{n\leq 0}$ une processus de Markov de matrice de transition P sur $\mathbb{E}$,avec $P(X_0 = x_0) = 1$.Et $E(f(X_N)) = \mu_N f = \mu_0 P^N f = \sum_{x\in\mathbb{E}} \mu(x)(P^N f)(x)$.

Théorème 2.1.1 *Soit* $U(n, x), n = 0, ..., N, x \in \mathbb{E}$ *la solution unique de:*

$$U(n, x) = \sum_{y\in\mathbb{E}} P(x, y)U(n + 1, y), \forall n < N$$
$$U(N, x) = f(x)$$

Alors $E(f(X_N)) = \mu(0, x_0)$

Preuve.
$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_N = x_N) = P(X_0 = x_0)P(x_0 = x_1)...P(X_N = x_N)P(x_{N-1}x_N)$
En sommant sur toutes les valeurs de $x_0, ..., x_{n-1}$ et $x_{n+1}, ..., x_{N-1}$ on obtient la loi de X_n, X_N :

$$P(X_n = x_n, X_N = x_N) = P(X_n = x_n)P^{N-n}(x_n, x_N)$$

Et:

$$E(f(X_N \mathbf{1}_{X_N = x_n})) = P(X_n = x_n) \sum_{x_N\in\mathbb{E}} P^{N-n}(x_n, x_N)f(x_N) = P(X_n = x_n)(P^{N-n}f)(x_n).$$

■

2.2 APPLICATIONS

Soit $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,et F une filtration de σ-algèbre.

Rappel

Définition 2.2.1 *Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ *est un temps d'arrêt par rapport à* F *si:*

$$\forall t > 0 \{\tau \leq t\} \in F_t.$$

En d'autre terme l'ensemble des $\omega \in \Omega$ *tel que* $\{\omega/\tau(\omega) \leq t\}$,*qui est un ensemble* F_t*-mesurable.*

Théorème 2.2.1 *Si* τ_1 *et* τ_2 *sont deux temps d'arrêt par rapport à* F *alors:*
$\tau_1 \wedge \tau_2 = \min$ *(τ_1,τ_2) est un temps d'arrêt.*
$\tau_1 \vee \tau_2 = \max(\tau_1, \tau_2)$*est aussi un temps d'arrêt.*

2.2.1 Formule d'Itô avec temps d'arrêt

Voir [5]
Soient $\sigma, b : \mathbb{R}_+$ X $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et W un mouvement brownien.
Si X est un processus adapté continue et la solution de l'équation stochastique:

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

et u est une fonction de classe C^2.
$du(X_t, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)dt + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_t, t)dX^{(i)} + \frac{1}{2}(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}(X_t, t) \sum_{l=1}^{m} B^{il}B^{jl}dt)$
Donc:

$$U(X_t, t) = U(X_0, 0) + \int_0^t (\frac{\partial u}{\partial t} Lu)ds + \int_0^t DuBdW$$

avec:

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} b^{(i)} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j})$$

où:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (B^{ik})(B^{jk})^t = (B^{i1}, ..., B^{im}) \begin{pmatrix} B^{j1} \\ s \quad \cdots \\ B^{jm} \end{pmatrix}$$

$$DuBdW = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} B^{ik} dW^{(k)}$$

2.2.2 Arrêt optimal

Le but du contrôle optimal est de trouver un choix des contrôles permettant de minimiser le coût.
Le problème de contrôle stochastique le plus simple survient lorsqu'il est impossible de modifier l'équation différentielle stochastique contrôlant l'évolution du processus X,mais qu'il est seulement envisageable de décider un temps ou arrêter le processus.

Arrêt d'une E.D.S

Soient E un domaine borné régulier de R^n tel que:

$$b : R^n \to R^n$$

$$B : R^n \to M_{n\times m}(R)$$

b et B satisfait aux conditions habituelles d'existence et d'unicité de la solution des E.D.S suivante:

$$dX = b(X)dt + B(X)dw$$

$$X_0 = x \forall x \in E$$

Notons $\tau = \tau_x$ le temps d'atteint de ∂E d'une trajectoire de X.
Pour O un temps d'arrêt par rapport à F,on définit l'espérance de coût de X en O et τ par:

$$J_x(O) = \mathbb{E}(\int_O^{\tau \wedge O} f(X_s)ds + g(X_{O \wedge \tau}))$$

En s'arrêtant en O,le coût est une fonction g de l'état courant du système $X(O)$.Si le processus n'est pas arrêté avant que la trajectoire ait atteint ∂E.
Si $O \geq \tau$ le coût est dans ce cas $g(X_\tau)$.
Enfin,le coût de fonctionnement par unité de temps f est ajouté et en modélisant les dépenses de fonctionnement du processus jusqu'au temps O et τ.

2.2.3 Condition d'optimalité

Soit u et g sont deux fonctions régulière
δE est la frontière d'un trajectoire d'atteint
θ est le temps d'arrêt
θ_* le temps d'arrêt optimal
J_x est la fonction objective.

S'il est possible de s'arrêt au début,
$(\theta = 0) \forall x \in E u(x) \leq g(x)$, de plus $\tau = 0$ si $x \in \delta E, u(x) = g(x)$
Si $x \in E$ et $\tau > 0$, le système n'est pas arrêt au temps tau alors le nouvel de système au temps τ est X_τ donc le coût possible est $u(X_\tau)$, car $u(x) = \inf_{\theta = t} J_x(\theta)$ donc $u(x) \leq E\big(\int_0^\tau f(X_1)ds + u(X_\tau)\big)$
D'après la formule d'Itô:

$$E(u(X_\tau)) = u(x) + E(\int_0^\tau Lu(X_s)ds)$$

avec: $Lu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x_i}$

où $a^{(ij)} = \sum_{k=1}^{m} B^{ik}B^{jk}$

Ainsi:$0 \leq E\big(\int_0^\tau f(X_s)ds + Lu(X_s)ds\big).......(*)$

En divisant par τ l'expression $(*)$ et on faisant tendre τ vers 0, on obtient $f(x) + Lu(x)$ où $Mu \leq f(x), x \in E$, tel que $M = -L$

Donc: pour $x \in E$, on a $u(x) < g(x)$ et $Mu = f$, alors les conditions d'optimalité sont:

$$\begin{cases} Max(Mu - L, u - g) = 0 & surE \\ u = g & sur\delta E \end{cases}$$

2.2.4 Générateur infinitésimal

Voir [5]

Théorème 2.2.2 *Soit* f *une fonction de classe* $C^2(\mathbb{R}^n)$ *à dérivées bornés et soit* X_t *une solution de:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dw_s$$

Avec: w_s *est une* $\mathcal{F}^{\sqcup}$ *mouvement Brownien* p*-dimensionnel alors:*

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(X_s)\,ds$$

Est une $\mathcal{F}_{\sqcup}$*-martingale tel que:*

$$Af = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Avec: $a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^t$,*c'est à dire* $a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \sigma_{ik}\sigma_{jk}$
L'opérateur A *est appelé le générateur infinitésimal de la diffusion.*

Proposition 2.2.1 *Le générateur de la diffusion d'Itô est l'opérateur différentiel*

$$L = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (gg^T)^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}$$

Exemple 2.2.1 *(Générateur de mouvement brownien)*
Soit B_t *le mouvement brownien de dimension* m*, c'et un cas particulier de diffusion, avec* $f = 0$ *et* $g = 1$*. son générateur est donnée par*

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2}\Delta$$

C'est donc le laplacien à un facteur $\frac{1}{2}$ *prés.*

2.2.5 Notion de l'arbitrage

- L'arbitrage de la possibilité de réaliser un profit sans risque et sans économie, en combinant deux ou plusieurs opérateurs. L'exemple le plus simple des mêmes actions cotées sur deux bourses différents est offert à deux prix différents.
- L'achat au prix le plus bas et la vente simultanée au prix le plus élevé sont disponibles sans risque et sans acompte.
- Il est clair qu'une telle situation ne peut perdurer si le marchés fonctionnent correctement, c'est-à-dire si les informations sont publiées rapidement si les coûts de transaction ne sont pas excessifs.

2.2.6 Présentation de modèle black scholes

Voir [5]
Le modèle de Black et Scholes unidimensionnel contient:

Un actif sans risque,dont nous supposerons le prix $S^0 = (S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ déterministe à taux d'intérêt $\tau \geq 0$ constant, soit pour tout $t \in [0, T], S_t^0 = e^{\tau t}$.
Un actif dont le prix $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$ est donné par un mouvement Brownien géométrique pour tout $t \in [0, T], S_t = S_0 \exp(ut - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t)$, avec $u \in \mathbb{R}, \sigma \leq 0$, S_0 une variable aléatoire F_0-mesurable de carré intégrable et W un mouvement Brownien standard.

2.2.7 Problème de base

On cherche à étudier le prix St d'un actif S qui évolue selon:
Soit l'DES suivant:

$$dS_t = uS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.1}$$

tel que

$$S_0 = s_0$$

La solution de l'DES précédent est il existe si les coefficients u et σ sont bornées.

Modélisation

1- Au temps T on a:

$$u(s, t) = max(s - \mathbb{P}) = (S_t - \mathbb{P})$$

donc, si $s = 0$ alors $S_t = 0$ et $u(0, t) = 0, \forall 0 \leq t \leq T$.
On définit le processus stochastique $C_t = u(S_t, t)$.
D'après la formule d'Itô on a:

$$dC = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial s}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(ds)^2$$

$$dC = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial s}(uS_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\left(\sigma^2 S_t^2 dt\right)$$

$$dC = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S_t\frac{\partial u}{\partial s}dW_t \tag{2.2}$$

L'introduction de la notion de couverture passe par la duplication de C dans un portefeuille contenant des actifs S et des obligations B.
Si B est un investissement sans risque qui suit l'évolution suivante:

$$B_t = e^{rt}$$
$$C_b = f(S_t, B_t)$$

Soit:

$$dB_t = rB_t dt \tag{2.3}$$

Tel que:

$$B_0 = 1$$

il s'agit de trouver f c'est à dire trouver α et β tel que:

$$C_t = \alpha S_t + \beta B_t, \forall t \in [0, T] \tag{2.4}$$

Le changement des valeurs de portefeuille dépend que de S_t et B_t
D'après les équations précédente on a:

$$dC_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} dW_t$$
$$dC_t = \alpha_t \left(uS_t dt + \sigma S_t dW_t\right) + \beta dB_t$$

Donc:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} dW_t = (\alpha u S_t + \beta r B_t)dt + \alpha\sigma S_t dW_t$$

Ce qui implique:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \alpha_t u S_t + \beta_t r B_t$$

$$\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha_t \sigma S_t \tag{2.5}$$

Alors:

$$\alpha_t = \frac{\partial u}{\partial s}(S_t, t) \tag{2.6}$$

Donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = beta_t r B_t$$

D'après l'équation (2.6):

$$\beta_t B_t = C_t - \alpha_t S_t = C_t - \frac{\partial u}{\partial s} S_t$$
$$\beta_t B_t = u(S_t, t) - S_t \frac{\partial u}{\partial s}(S_t, t)$$

On a:

$$dC_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} dW_t = \alpha_t \left(uS_t dt + \sigma S_t dW_t\right) + \beta_t B_t dt$$

$$dC_t = (\alpha_t u S_t dt + \beta r B_t)dt + \sigma S_t dW_t$$

Ce qui implique:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \alpha_t u S_t - \beta_t r B_t = 0$$
$$\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} - \sigma S_t = 0$$

2- Pour $S_t = s \geq 0$ et $0 \leq t \leq T$,on note $u(s, t)$ le prix de l'option à l'instant t sachant que $S_t = s$.
Au temps T on a:

$$u(s,t) = max(s - \mathbb{P}, 0) = (s - \mathbb{P})_+$$

Si $s = 0$ alors $S_t = 0$ et $0 \leq t \leq T$, $u(0,T) = 0$ donc on cherche que $C_0 = u(s_0, 0)$.

On définit pour $0 \leq t \leq T$ le processus stochastique $C_t = u(s_t, t)$, en utilisant l'équation (2.3) et la formule d'Itô, on obtient:

$$dC_t = du = \tfrac{\partial u}{\partial t}dt + \tfrac{\partial u}{\partial s}ds + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}(dS)^2$$
$$dC_t = \tfrac{\partial u}{\partial t}dt + \tfrac{\partial u}{\partial s}(uS_t dt + \sigma S_t dW_t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2 dt$$

Donc:

$$dC_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} dW_t \tag{2.7}$$

Il s'agit de trouver f c'est-à-dire α_t et β_t tels que $\forall t \in [0, T]$ on a:

$$C_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$$

Le changement de valeur de portefeuille ne dépendant que des changement de S_t et B_t.

En combinant les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) on obtient:

$$dC_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} dW_t \tag{2.8}$$

On a:

$$dC_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t = \alpha_t = \alpha_t(uS_t dt + \sigma S_t dW_t) + \beta_t r B_t dt$$

Alors:

$$dC_t = (\alpha_t u S_t + \beta_t r B_t)dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t \tag{2.9}$$

Donc d'après l'égalité de deux équations (2.8) et (2.9) on trouve:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uS_t\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \alpha_t u S_t + \beta_t r B_t$$
$$\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha_t \sigma S_t$$

Alors:

$$\alpha_t = \frac{\partial u}{\partial s}(S_t, t), \forall t \in [0, T]$$

On a:

$$\beta_t B_t = C_t - \alpha_t S_t = u(S_t, t) - S_t\frac{\partial u}{\partial s}(S_t, t)$$

Donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S_t, t) + rS_t\frac{\partial u}{\partial t}(S_t, t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(S_t, t) - ru(S_t, t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (2.10)$$

Et pour assurer $C_t = u(S_t, t)$, on impose donc à $u(s, t)$ de vérifier l'équation aux dérivées partielle de Black-Scholes-Merton.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S_t, t) + rS_t\frac{\partial u}{\partial t}(S_t, t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(S_t, t) - ru(S_t, t) = 0, \forall t \in [0, T]$$

On remarque que le terme dérive u n'apparaîtrait plus ainsi pour répondre au problème posé de la déterminer de la meilleur valeur C_0, il s'agit de trouver $u(s_0, 0)$ et donc u vérifie:

$$u = 0, \text{ si } s = 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T$$
$$u = max(s - \mathbb{P}), \text{ si } s > 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(S_t, t) + rS_t\frac{\partial u}{\partial t}(S_t, t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(S_t, t) - ru(S_t, t) = 0, \text{ si } s < 0 \forall t \in [0, T]$$

Donc le problème peut être résolu explicitement le système ci dessus admet une unique solution $C_t = u(S_t, t)$

2.3 Application en finance

2.3.1 Modèle Black Scholes

Le modèle de black-sholes est basé sur cinq variables qui sont:

- S: prix de marché
- K: prix de l'option
- t: date de début
- r: taux d'intérêtêt̂ sans risque
- σ: volatilité boursière.

La formule de tarification des options d'achat et de vente selon le modèle de black-sholes peut être exprimée comme suite

$C = S[N(d_1)] - Ke^{-rt}[N(d_2)]$ tel que: $N[d]$ fonction de distribution accumulée.

Pour trouver d_1 et d_2 résoudre l'équation suivante

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \sigma \times 0.5)^t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

- Afin de clarifier l'application du modèle de Black-sholes, nous avons pris le modèle d'une des sociétés du monde comme échantillon pour l'étude suivante:

Voir [13]

type of option	Call option
Stock Price(S_0)	$\$100,00$
Exercise (Strike) Price (K)	$\$110,00$
Time to Maturity (in years) (t)	0.25Ğ
Annual Risk Free Rate(r)	5.00
Annualized Volatility (σ)	30.00Ğ
Option Price	284
Additional Calculation Parameters	
$\ln(\frac{S_0}{K})$	(0.095)
$(r+\frac{\sigma^2}{2})t$	0.024
$(\sigma\sqrt{t})$	0.150
d_1	(0.477)
d_2	(0.627)
$N(d_1)$	0.317
$N(d_2)$	0.265
$N(-d_1)$	0.683
$N(-d_2)$	0.735
e^{-rt}	0.98758

Conclusion

Dans ce mémoire nous sommes intéressés aux problèmes du temps d'arrêt optimal en horizon fini de système gouverne par des équations différentielle stochastique et calcul stochastique en général
Le modèle de Black-scholes est un modèle de variation des prix au fil du temps pour les instruments financiers tels que les actions, et pour cela nous sommes appuyés sur des équations différentielle partielle dans l'étude et nous sommes concentrés dans le mémoire sur la propriété de Markov qui est considéré comme nécessaire dans le cas d'une décision qui inclut le risque dans le temps.
Le modèle de Black-scholes est utilisé pour résoudre les problèmes et évaluer les options financiers.
Finalement nous éspérons ainsi que ce mémoire puisse être utile bien pour les étudiants que pour des chercheurs intéresses par ce demain.

Bibliography

[1] R.V.Gamkrelidze, Discovery of the maximum principale,journal of dynamical and control systems,Vol.5,No.4,1999,437-451.

[2] Baheddi.Aissa.Cours de calcul stochastique master 1 probabilité statistique universitéb Kasdi Merbah Ouargla 2018-2019.

[3] Monique Jeanblanc.Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY.Septembre 2006.

[4] Alizée Geeraert. *Contrôle optimale stochastique des processus de Markov déterministes par mourceaux et application à l'optimisation de maintenence.*, thèse soutenue le 6 juin 2017 pour obtenir le grade de docteur de l'université de Bordeaux.

[5] Jean-Philippe Chancelier et Angès Sulem. *Méthodes numériques en contrôle stochastique.*, 22 février 2005.

[6] Garey Ogey. *Arrêt optimal et application à la valorisation des options américaines.*, Mémoire de magistère soutenue le 12 Octobre 2011.

[7] Vincent Gagnon. *Problème de Snell et application aux options bermudiennes* ., Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade du maître en probabilité 15 avril 2008 département de mathématique et statistique Facultés des arts et des sciences Université de Montériéal.

[8] Pandry Wilson - Sob Tchuakem. *Optimisation stochastique et aplication financiere.*, Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade du maître en mathématique Université du OUEBEC à Montériéal, octobre 2010.

[9] F.Bienvenu Duheille.Processus Stochastique,université Clande Bernard Layon,2006-2007.

[10] Erhani.çinlar. Probability and Stochastique,liver,university Prineton,2001.

[11] Lorenzo.Zambotti,calcul stochastique et processus de diffusion,université Peirre-Et-Marie-Curie,M2"Probabilités et Modèle Aléatoires",2017-2018.

[12] Jean-Jacques Ruch-Marie-Line Chabanol,Chaine de Markov,Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1,2012-2013.

[13] http://corporatefinanceinstitute.com/.

Résumé

Cette mémoire est basée sur le thème de la résolution du problème d'arrêt optimal en horizon fini qui dépend dans son étude de calcul stochastique, c'est-à-dire la modélisation de décision dérivée de la théorie de la décision et de la probabilité.
- nous avons adopté le domaine des investissements financiers comme échantillon d'étude.

Afin de résoudre le problème d'arrêt optimal, nous avons adopté l'application Black-Sholes, où nous avons pu la programmer et tires des conclusions.

Mots clé : Processus stochastique (Markov), filtration, temps d'arrêt optimal,martingale,enveloppe de snell,equation différentielle stochastique.

ملخص

تستند هذه الاطروحة على موضوع حل مشكلة التوقف الامثل في الافق المحدود التي تعتمد في دراستها على الحساب العشوائي المستمدة من نظرية القرار و الاحتمال.

اعتمدنا مجال الاستثمارات المالية كعينة لدراسة، و من اجل حل مشكلة التوقف الامثل اعتمدنا تطبيق بلاك شولز حيث تمكنا من برمجته و استنباط النتائج.

الكلمات المفتاحية

سيرورة ماركوف، وقت التوقف الامثل، التضعيفات، المعادلات التفاضلية العشوائية.

Abstract

In this work is based on the issue of solving the optimal stopping problem in the limited horizon that depends in its study on random calculation i.e decision modeling derived from decision theory and probability.
- We adopted the fieled of financial investments as a study sample.
- In order to solve the optimal hiatus problem, We adopted the Black-Sholes application, where we able to program it and draw conclusions.

Keywords : Stochastic process(Markov),optimal downtime,martingale,snell envelope,stochastic differential equation.