République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITKASDI MERBAH OUARGLA

FACULT DES MATH MATIQUES ET SCIENCES DE LA MATI RE

DEPARTEMENT DE MATH MATIQUES

MEMOIRE POUR L'OTENTION DU DIPLOME :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par

BIRCH GHANIA

Titre :

Existence, périodicité et stabilité de solutions pour certaines équations différentielles fonctionnelles à retard par la technique du point fixe

Membres du Comité d'Examen :

Dr. MEFLAH MABROUK	Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Dr. MALIK BELAID	Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Dr. KOUIDRI MOHAMMED	Université KASDI Merbah-Ouargla	Encadreur

Année universitaire 2019- 2020

Existence, périodicité et stabilité de solutions pour certaines équations différentielles fonctionnelles à retard par la technique du point fixe

Par Birech Ghania
Encadreur : Dr. Belaid Malik

Table des matières

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratuitude à mes parents pour

tant d'amours et de souties moraux.

j'adresse le grand remerciement à mon encadreur Mr **Belaid Malik** qui a posé le théme de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Tous mes remirciemts vont à mes jury Mr..........,et Mr ....

Je remercie aussi Mr **meflah mabrouk** et professeurs de mathématiques. et à tous ce qui n'ont permis de faire aboutir ce travail.

et à nos amis qu'ils trouvent ici toute notre reconnaissance pour leurs aides et encouragements à terminer ce mémoire.

Introduction

La théorie du point fixe est l'un des outils les plus puissants des mathématiques modernes. Le théorème concernant l'existence et les propriétés des points fixes est connu sous le nom de théorème des points fixes. La théorie des points fixes est un beau mélange d'analyse, de topologie et de géométrie. En particulier, le théorème des points fixes a été appliqué dans des domaines tels que l'ingénierie mathématique, la physique, l'économie, la théorie des jeux, la biologie et la chimie, etc. Les résultats classiques et majeurs dans ces domaines sont : le théorème de point fixe de Banach, le théorème de point fixe de Schauder et le théorème de point fixe de Krasnoselskii .

La théorie de la stabilité a été créé à la fin du XIXéme siècle par Liapounov. Cette théorie a trouvé une large application dans divers domaines de la physique et sciences mathématiques. D'un point de vue mathématique, la théorie de la stabilité présente un cas particulier de la théorie qualitative des équations différentielles. Dans ce domaine la méthode directe de Liapounov a été, pour plus de 100 années, l'inévitable outil permettant d'étudier la stabilité pour les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Néanmoins, cette méthode a rencontré de sérieux obstacles et il existe encore un tas de problèmes qui résistent à cette méthode.

Dans ce travail on va présenter, en utilisant la technique de point fixe, des résultats de la stabilité et de la stabilité asymptotique pour une classe d'équations totalement non linéaires de type neutre à retard fonctionnel. Cette classe d'équations fait partie du nombre de problèmes qui sont résisté à la méthode de Liapounov. En général, l'insuffisance de la méthode de Liapounov se manifeste lorsque les fonctions utilisées dans les équations ne sont pas bornées en temps [15], si le délai n'est pas borné ou si la dérivée n'est pas petite ([17]-[18]). A cela s'ajoute aussi la difficulté traditionnelle celle de la construction de la fonctionnelle de Liapounov et l'aspect ponctuel, défavorable pour les calculs, des conditions imposées aux fonctions des équations différentielles. Cependant les problèmes de monde réel avec toute leurs incertitudes exigent des conditions en moyennes. Ces dernières années, plusieurs investigateurs ont essayé la stabilité en employant une nouvelle technique. En particulier, Burton, Furumochi, Becker, Zhang et d'autres ont commencé une étude dans au moyen de laquelle ils ont noté que certaines de ces difficultés disparaissent ou pourraient être surmontés théorie de point fixe (voir [2]-[3], [8]-[11],[5],[4],[14]). La stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois éléments fondamentaux.

- Une application de point fixe.
- Un espace fonctionnel convenable apte à contenir les solutions souhaitables.
- Un théorème de point fixe.

Le travail de ce mémoire est réparti comme suit :

Le premier chapitre : A été consacré pour rappeler les outils dont on a besoin dans ce projet.

Le deuxième chapitre : Etude de la stabilité pour une classe d'équation différentielle à retard.

Le dernier chapitre : Existence des solutions périodiques d'une class d'équations différentielles à retard (voir [18], [21]-[22]).

Chapitre 1

Théorème de point fixe, équations à retard et applications

1.1 Notions préliminaires

Le but de ce chapitre est d'introduire les concepts de base, les notations et les résultats élémentaires. De plus, les résultats de ce chapitre peuvent être trouvés dans la plupart des ouvrages classiques sur l'analyse fonctionnelle (voir [23], [24] et [25])

Définition 1 *Le couple* (E, ρ) *est dit un espace métrique si* E *est un ensemble arbitraire non vide et* $\rho : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *est une application vérifiant pour tout* x, y *et* z *de* E

1- $\rho(x, y) \geq 0,\ \rho(x, x) = 0,\ \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y,$

2- $\rho(x, y) = \rho(y, x),$ *(symétrie),*

3- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 2 *Un espace métrique* (E, ρ)*, est dit complet si tout suite de Cauchy de points de* E *est convergente dans* E*.*

Proposition 1.1.1 *Dans un espace métrique* (E, ρ)*, toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Remarque 1.1.1 *La réciproque est fausse en général.*

Définition 3 *Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une application de E dans$\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|.\|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$*

1-$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,

2-$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3-$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 4 *Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|.\|)$ avec E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|.\|$ est une norme sur E.*

Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé alors $\rho(x, y) := \|x - y\|$ définit une distance sur E.

Définition 5 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ qui est complet pour la métrique associée à cette norme.*

Définition 6 *Une partie M d'un espace métrique (S, d) est dite compacte si toute suite $\{x_n\}$ de M admet une sous suite convergente dans M. M est dite relativement compacte si la fermeture de M est compacte.*

Définition 7 *Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\{f_n\}$ une suite des fonctions avec $f_n : U \to \mathbb{R}^p$. Soit $|.|$ une norme quelconque de $\mathbb{R}^p$.*

a-$\{f_n\}$ est dite uniformément bornées sur U s'il existe un $M > 0$ tel que $|f_n(t)| \leq M$ pour tout n et tout $t \in U$.

b-$\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $|t_1 - t_2| < \delta$ alors, $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$ quelque soit n.

Théorème 1 ***(Arzela-Ascoli)*** *Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions réelles uniformément bornée et équicontinue définie sur un intervalle $[a, b]$, alors la suite admet une sous suite convergente uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue.*

Mais les problèmes qu'on va manipuler dans ce projet sont définis sur les intervalles infinis en temps, par conséquent une extension du théorème précédent s'impose. Le théorème 1.1 pour étendu par l'utilisation d'une norme poids ou bien en suivant la procédure donnée ci-dessous (voir9).

Théorème 2 ***([9],p.20,Théorème 1.1)*** *) Considérons $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ et soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $q(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Si $\{\phi_k\}$ est une suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ équicontinue avec $|\phi_k(t)| \leq q(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors il existe une sous suite convergent uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue ϕ telle que $|\phi(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, où $|.|$ dénote la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.*

Définition 8 *Soit A une application d'un ensemble X dans lui-même. On appelle point fixe de A tout point u tel que $Au = u$. Si un tel u existe on dit que A possède un point fixe. Il est clair que la recherche d'un point fixe pour A est équivalent à la recherche d'un $u \in X$ tel que $Au - u = 0$.*

En 1922 Stefan Banach établi un théorème qui s'applique aux fonctions contractantes définies sur des espaces métriques complets. Ce théorème a fait preuve d'une grande utilité en analyse. En particulier il à donné des résultats concluant dans le domaine de l'existence de solutions et le calcul approché pour de nombreux problèmes émanant de l'analyse non linéaire.

Théorème 3 ***(Principe de l'application contractante)*** *Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \to X$ une contraction i.e., il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, pour tout $x, y \in X$. Alors f admet un et un seul point fixe $x^* \in X$ $(: f(x^*) = x^*)$.*

Définition 9 *L'application $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dit satisfaire les conditions de Carathéodory en ce qui concerne $L^1 [0, 1]$ si les conditions suivantes sont présentes :*

i. Pour chaque $z \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \to f(t, z)$ est mesurable.

ii. Pour presque tout $t \in [0, T]$, la fonction $z \to f(t, z)$ est continue dans $\mathbb{R}^n$.

iii. Pour chaque $r > 0$, il existe $\alpha_r \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ tel que pour presque tout $t \in [0, T]$ et pour tout z tel que $|z| < r$, on a $|f(t, z)| \leq \alpha_r(t)$.

T.A.Burton a observé que le résultat de Krasnoselskii peut être plus attrayant dans les applications avec quelques modifications et formulé le théorème 1.1.4 ci-dessous (voir [9] pour la preuve).

Définition 10 ***(contraction large)*** *Soit $(\mathcal{M}, d)$ un espace métrique, et supposons que $B : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. B est dit une contraction large, si $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{M}$, avec $\varphi \neq \psi$, on a $d(B\varphi, B\psi) \leq d(\varphi, \psi)$, et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta < 1$ tel que :*

$$[\varphi, \psi \in \mathcal{M}, \quad d(\varphi, \psi) \geq \varepsilon] \Longrightarrow d(B\varphi, B\psi) \leq \delta d(\varphi, \psi).$$

Il est prouvé (9) qu'une contraction large définie sur un fermé borné et un espace métrique complète a un point fixe unique.

Théorème 4 ***(Krasnoselskii-Burton)*** *Soit $\mathcal{M}$ une sous ensemble fermée, bornée et convexe d'un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|.\|)$. Suppose que A et B deux opérateurs :$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tel que :*

– *A est un opérateur compact,*
– *B est une contraction large,*
– *$x, y \in \mathcal{M}$ implique que $Ax + By \in \mathcal{M}$.*
Alors $\exists z \in \mathcal{M}$ tell que $z = Az + Bz$

1.2 Équations différentielles à retard

Qu'est-ce qu'une équation différentielle à retard ?.
Une équation différentielle à retard est un modèle spécifique d'équations différentielles dans laquelle la solution dépend d'une donnée sur une étape postérieure (c-à-d le passé).

1.2.1 Équations différentielles à retard

Étant donné un nombre $r > 0$. On note par $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach de fonctions continues définies sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a, b] = [-r, 0]$ on pose,

$$C_0 = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$$

et on désigne la norme d'un élément ψ de C_0 par

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(s)|, -r \leq s \leq 0\}$$

où $|.|$ est une norme dans $\mathbb{R}^n$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient

$$L \geq 0, x \in C([t_0 - r, t_0 + L], \mathbb{R}^n) \text{ et } t \in [t_0, t_0 + L].$$

Alors, on définit une nouvelle fonction x_t de C_0, par

$$x_t(s) = x(t + s), s \in [-r, 0]$$

Définition 11 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard fonctionnel égal r sur U une relation de la forme*

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

où

$$x_t(s) := x(t + s), s \in [-r, 0]$$

*Notée parfois **EDR(f)**. Le nombre r est appelé le retard. En clair, le cas $r = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires.*

Il est évident qu'une condition initiale appropriée au temps $t = t_0$ exige la détermination de la fonction x sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$, i.e,

$$x(t) = \psi(t), t \in [t_0 - r, t_0],$$

où $\psi : [t_0 - r, t_0] \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée supposé continue appelée la condition initiale de l'équation à retard (1.1). Ainsi, l'équation (1.1) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x_t), t \geq t_0 \\ x(t) &= \psi(t), t \in [t_0 - r, t_0], \end{aligned} \tag{1.2}$$

avec ψ une fonction donnée sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$.

L'équation (1.1) est dite linéaire si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi$, où $L(t)$ est linéaire en chaque t. L'équation (1.1) est dite non homogène si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi + h(t)$ où $h(t) \neq 0$. L'équation (1.1) est dite autonome si $f(t, \varphi) = g(\varphi)$, g indépendant de t.

Définition 12 *Étant donnés $\psi \in C_0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, une solution du problèmes à valeur initiale*

$$x'(t) = f(t, x_t), t \geq t_0, x_{t_0} = \psi \tag{1.3}$$

est une fonction notée $x(t)$ telle que $x(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0 - r, t_0]$ et satisfaisante (1.1) si $t \in [t_0, t_0 + L], L > 0$. Une telle fonction $x(.)$ est dite solution de (1.1) à travers (t_0, ψ) et est notée souvent par $x(.) := x(., t_0, \psi)$.

Nous rappelons,dans ce paragraphe, les théorème de base sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (1.1)

Théorème 5 ***(Existence)*** *Pour l'équation (1.1),supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f(t, \varphi)$ une application continue sur Ω. Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation (1.1) passant par (t_0, ψ).*

Définition 13 *On dit que la fonction $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times C_0$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que , pour tout $(t, \varphi_i) \in K, i = 1, 2$ on a*

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq k |\varphi_1 - \varphi_2|. \tag{1.4}$$

Théorème 6 ***(Unicité)*** *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue, $f(t, \varphi)$ est lipschitzienne par rapport à φ sur tout sous ensemble compact de Ω. Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une unique solution pour l'équation (1.1) passant par (t_0, ψ).*

Méthode des étapes

La méthode des étapes est une méthode qui peut être utilisée pour résoudre analytiquement certaines EDR. Cette méthode permet nous de résoudre pratiquement toute EDR en transformant à une EDO. On prend par exemple l'équation suivante :

$$x'(t) = 2x(t-1) \tag{1.1}$$

avec la condition initiale

$$x(t) = 1,\ t \in [-1, 0]. \tag{1.2}$$

Sur $[0, 1]$:

On a $0 \leq t \leq 1$ implique que $-1 \leq t-1 \leq 0$ alors $x(t-1) = 1$ et donc l'èquation (1.1) devienne

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2, \\ \int_0^t x'(s)\,ds &= \int_0^t 2ds \end{aligned}$$

la solution générale est

$$x(t) - x(0) = 2t.$$

Avec $x(0) = 1$. Ainsi, la solution sur $[0, 1]$ est

$$x_1(t) = 2t + 1.$$

Sur $[1, 2]$:

On a $1 \leq t \leq 2$ implique $0 \leq t-1 \leq 1$

l'èquation (1.1) devienne

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x_1(t-1) \\ &= 2(2(t-1)+1) \\ &= 4t - 2. \end{aligned}$$

Par conséquent la solution générale

$$\begin{aligned} \int_1^t x'(s)\,ds &= \int_1^t 4t - 2ds \\ x(t) - x(1) &= 2t^2 - 2t. \end{aligned}$$

Avec $x(1) = 3$, on trouve la solution sur $[1, 2]$ est

$$x_2(t) = 2t^2 - 2t + 3.$$

Comme précédemment, on pourrait continuer. Dans le cas de (1.1) avec les données initiales (1.2), on peut trouver une expression x_n pour la forme générale de la solution.

Pour le cas général, on considère l'équation différentielle à retard suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \ t \geq t_0 \\ x(t) = \psi(t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Par la méthode des étapes l'équation (1.3) admet les solutions suivantes :

$$x(t) = \begin{cases} \psi(t), \text{ pour } t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ x_1(t), \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + \tau], \\ x_2(t), \text{ pour } t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau], \\ ., \\ ., \\ x_n(t), \text{ pour } t \in [t_0 + (n-1)\tau, t_0 + n\tau]. \end{cases}$$

1.2.2 Équations différentielles de type neutre

On donne ici la définition d'une équation différentielle de type neutre.

Définition 14 *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ d'éléments (t_0, ψ). Une fonction $D : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite atomique au point β de Ω si D est continue, ainsi que sa première et seconde dérivé au sens de Fréchet par rapport à ϕ et $D\phi$ sa dérivée par rapport ϕ, est atomique en β de Ω.*

Définition 15 *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $D : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonction données continue avec D atomique en zéro. La relation*

$$\frac{d}{dt} D(t, x_t) = f(t, x_t), \tag{1.5}$$

*est dite une équation différentielle de type neutre **EDTN**.*

Définition 16 *Une fonction x est dite solution de l'équation (1.5) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tels que*

$$x \in C([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n), \ (t, x_t) \in \Omega, \ t \in [t_0 - r, t_0 + \sigma],$$

$D(t, x_t)$ .... est continument différentiable et satisfait (1.5) sur $[t_0, t_0 + \sigma]$. Étant donnés $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in C_0$ et (t_0, ψ) on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.5) passant par (t_0, ψ) s'il existe $\sigma > 0$ telle que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.5) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$, on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.5) sur $[t_0 - r, \infty)$ si pour tout $\sigma > 0$, $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.5) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$.

Théorème 7 ***(Existence)*** *Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$ alors il existe une solution pour l'équation (1.5) passant par (t_0, ψ).*

Théorème 8 ***(Existence et Unicité)*** *Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne sur tout sous ensemble compact Ω, alors pour tout $(t_0, \psi) \in \Omega$, il existe une unique solution pour l'équation (1.5) passant par (t_0, ψ).*

1.3 Modèles avec retard

Les équations différentielles sont faites pour un but, celui de mieux comprendre les phénomènes compliqués de la nature. Il s'est avéré, par l'expérience, que les simples modèles n'arrivent pas à cerner la variété riche de la dynamique observée dans les systèmes naturels. Il est devenu clair que pour bien comprendre ces phénomènes un terme avec retard doit être inclus. Dans une équation différentielle, un retard peut représenter l'arrivé à maturité d'un produit, une période d'incubation, temps de gestations, délais de transport ou simplement représenter des processus compliqués qui mettent un temps pour réagir après une action. Les problèmes à retard sont innombrables en littérature. Certains de ces problèmes ont connu un intérêt particulier. On a choisi dans ce mémoire quelques modèles intervenant dans des domaines différents de monde réel.

1.3.1 Contrôle d'un Bateau de Minorsky

En 1962 Minorsky (voir ([20])a conçu un dispositif pour le contrôle automatique de la direction pour un bateau. Le modèle se décrit comme suit. Soit $x(t)$ une position angulaire fixée du gouvernail de direction du bateau et supposons qu'il existe une force de frottement proportionnelle à la vitesse, $-cx(t)$. On suppose qu'il existe un dispositif qui indique la direction du mouvement du bateau en temps réel et qu'il existe aussi un autre dispositif qui pointe la direction désirée. Ces deux instruments sont reliés à un appareil connecté à un moteur électrique qui produit une certaine force agissant sur le gouvernail dans le but de le faire pivoter (orienter) pour ramener le bateau sur le chemin désirée. De toute évidence il y a un décalage (retard) de magnitude $h > 0$, en temps entre le moment ou le moteur électrique exerce la force pour redresser le bateau et le moment ou le bateau réagit pour se réorienter.Minorsky décrit cela par l'équation suivante donnée sur $x(t)$

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t-h)) = 0,$$

où il considère que $xg(x) > 0$, si $x \neq 0$ et c une constante positive. L'objectif du problème est de chercher des conditions qui assurent le maintien de $x(t)$ près de zéro de sorte que le bateau suivra étroitement son cours approprié pour arriver à sa destination fixé.

1.3.2 Le modèle de tournesol de Somolinos

La fleur de la plante de tournesol tourne d'un coté vers l'autre d'une façon périodique. Ceci est due à une hormone qui réagit au contact de rayon solaire. En 1978 Somolinos modélisa ce mouvement par l'équation

$$x'' + \frac{a}{r}x' + \frac{b}{r}\sin x(t-r) = 0,$$

dit l'équation de tournesol. Il obtient des résultats intéressants sur l'existence de solutions périodiques ([20]).

1.4 Stabilité de solutions pour les équations différentielles à retard

Pour $r > 0$, considérons $C_0 = C([-r,0], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues sur $[-r,0]$ a valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ce dernier espace est de Banach lorsque on le muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{-r\leq t\leq 0} |\varphi(t)|$, $\varphi \in C_0$. On considére le probléme a valeur initiale a retard

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x_t) \text{ pour } t \geq t_0, && ((1.8)) \\ x(t) &= \psi(t) \text{ pour } t_0 - r \leq t \leq t_0 && ((1.9)) \end{aligned}$$

Où $\psi : [t_0 - r, t_0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, supposée continue et $f : \mathbb{R} \times C_0 \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La fonction $f(t, x_t)$ est supposée satisfaire les conditions nécessaires qui garantissent l'existence de la solution $x(t, t_0, \psi)$ à travers (t_0, ψ) du problème (1.8)−(1.9) et d'être continue en (t, t_0, ψ) du domaine de définition de f.

Définition 17 *Supposons que $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La solution triviale $x = 0$ de (1.8) est dite stable en t_0 $(t_0 \in \mathbb{R})$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ tel que si $\|\psi\| < \delta$, la solution de (1.8)−(1.9) existe sur $[t_0 - r, \infty)$ et $|x(t, t_0, \psi)| < \epsilon$ pour tout $t \leq t_0$. Dans le cas contraire on dira que la solution instable en t_0. La solution de (1.8) est dite uniformément stable si le nombre δ est indépendant de t_0.*

Définition 18 *La solution triviale $x = 0$ de (1.8) est dite asymptotiquement stable en t_0 si elle est stable en t_0 et il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ tel que toutes les fois que $\|\psi\| < \delta_1$, la solution du problème (1.8)-(1.9) satisfait*

$$\lim x(t, t_0, \psi) = 0 \text{ lorsque } t \to \infty$$

La solution triviale $x = 0$ de (1.8) est dite uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et si il existe un $\delta_1 > 0$ (indépendant de t_0) tel que pour tout t_0 et $\|\psi\| < \delta_1$, la solution x du problème (1.8)-(1.9) satisfait la condition $x(t, t_0, \psi) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ de la manière suivante : pour tout $\eta > 0$ il existe un $T = T(\eta) > 0$ tel que $|x(t, t_0, \psi)| < \eta$ pour $t \geq t_0 + T$.

1.4.1 Stabilité par la méthode de point fixe

Lorsqu'on veut étudier la stabilité de la solution triviale d'une équation différentielle à retard par la méthode de point fixe il va falloir procéder comme suit

(i) Une équation différentielle à retard exige avant tout une donnée (une fonction) initiale définie sur un intervalle initiale approprié I_{t_0} i.e. $\psi : I_{t_0} \to \mathbb{R}^n$. On doit choir aussitot après un espace convenable S de fonctions $\varphi : I_{t_0} \cup [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ qui coïncident sur I_{t_0} avec ψ. Selon les cas de besoins on peut toujours ajouter d'autres restrictions aux fonctions φ de S comme la bornétude par exemple ou la condition $\varphi(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$: Cette dernière condition s'impose si on souhaite étudier la stabilité asymptotique.

(ii) Ensuite on doit inverser l'équation différentielle pour définir ce qu'on appelle une application de point fixe i.e., une application $P : S \to S$ dont le point fixe est solution de l'équation à retard donnée (l'équation originale). Néanmoins, cette inversion peut s'avérer une tache délicate dans plusieurs cas. Par exemple si l'équation ne possède pas un EDO terme linéaire dans sa structure on ne pourra pas utiliser la variation des paramètres. Il est donc indispensable d'agir autrement et essayer si une transformation de cette équation est possible.

(iii) A l'image de l'application $P : S \to S$ obtenu en ii., un théorème de point fixe doit être choisi permettant à l'équation $P(x) = x$ d'avoir une solution. En particulier si P est une contraction on pourra appliquer le théorème de point fixe de Banach, si P est compacte, alors on appliquera le théorème de Schauder ou Schaeffer et si P se met sous forme d'une somme d'une contraction et d'une application compacte alors le théorème hybride de Krasnoselskii peut donner satisfaction.

Il devient donc clair que la méthode de stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois choses essentielles, la variation des paramètres, un espace complet et un théorème de fixe. En une étape on peut conclure l'existence (voire l'unicité) et la stabilité. En outre, on verra que cette méthode exige toujours des conditions en moyenne cependant les conditions de la méthode de Lyapounov sont toujours ponctuelles.

Chapitre 2

Etude de la stabilité pour une classe d'équation différentielle à retard

L'étude de la stabilité de certaines équations différentielles fonctionnelles qui ne possèdent pas un terme linéaire non trivial par la méthode directe de Liapounov s'est avéré très délicate voire même sans issue parfois. Les équations différentielles à retard ont montré une grande résistance à cette méthode lorsque les fonctions utilisées dans l'équation sont non bornées en temps, si le retard est non borné ou si la dérivée du retard n'est pas petite. A tout cela s'ajoute aussi la difficulté de construire la fonctionnelle de Liapounov et l'aspect ponctuel, défavorable dans les calculs, des conditions imposées aux fonctions des équations différentielles. Cependant les problèmes de monde réel avec toutes leurs incertitude exigent des conditions en moyennes. Il était donc temps, pour un bon nombre d'investigateurs clairvoyants, de rechercher et d'exploiter d'autres voies et ils tentent la technique de point fixe.

Le contenu de ce chapitre va montrer, une fois de plus, l'efficacité de la technique de point fixe dans le domaine de la stabilité. Elle surmonte, en effet, des problèmes qui ont jusque là frustré les investigateurs qui fréquentent la méthode directe de Liapunov.

Concrètement, ce travail concerne une classe d'équations qui s'exprime sous la forme suivante

$$x'(t) = -a(t)h\left(x\left(t\right)\right) + c(t)x'(t-\tau(t)) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))), \qquad (2.1)$$

avec fonction initiale continue donnée

$$x(t) = \psi(t),\ \text{pour } t \in [m_0, 0],$$

tels que $\psi \in C([m_0, 0], \mathbb{R})$, $m_0 = \inf\{t - \tau(t) : t \geq 0\}$. On suppose que $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ avec $a \in L[0, \infty)$ est bornée, $c \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\tau \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que

$$\tau'(t) \neq 1,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions de Carathéodory avec

$$h(0) = G(t, 0, 0) = 0.$$

Pour appliquer le théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton, on doit choisir un un espace de Banach convenable dépendant sur la donnée initiale ψ et construire deux applications, une contraction large et une application compacte qui obéissent aux conditions du théorème.

2.1 Transformation et inversion de l'équation

Le lemme suivant est fondamental à nos résultats.

Lemme 2.1.1 *Supposons que (2.2) et (2.5) sont satisfaites. Si $x \in X$, alors x est une solution de l'équation (2.1) si et seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) \; &= \; \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - \tau'(0)}\psi(-\tau(0))\right] e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &+ \int_0^t k(t,u)a(u)H(x(u))du + \frac{c(t)}{1 - \tau'(t)}x(t - \tau(t)) \\ &+ \int_0^t k(t,u)\left[-b(u)x(u - \tau(u)) + G(u, x(u), x(u - \tau(u)))\right] du \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec

$$b(u) = \frac{(c'(u) + c(u)a(u))(1 - \tau'(t)) + \tau''(u)c(u)}{(1 - \tau'(u))^2}, \tag{2.4}$$

et

$$k(t, u) = e^{-\int_u^t a(s)ds}, \tag{2.5}$$

$$H(x) = x - h(x). \tag{2.6}$$

Preuve. Soit x une solution de (2.1). reécrit l'équation (2.1) comme

$$\begin{aligned} & x'(t)+a(t)x(t) \\ = \; & a(t)x(t)-a(t)h\left(x\left(t\right)\right)+c(t)x'(t-\tau(t))+G(t,x(t),x(t-\tau(t))) \\ = \; & a(t)\left[x(t)-h\left(x\left(t\right)\right)\right]+c(t)x'(t-\tau(t))+G(t,x(t),x(t-\tau(t))). \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $e^{\int_0^t a(s)ds}$, puis en intégrons de 0 à t. On obtient,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[x(u)e^{\int_0^u a(s)ds}\right]' du \\ = \; & \int_0^t a(u)\left[x(u)-h\left(x\left(u\right)\right)\right]e^{\int_0^u a(s)ds}du \\ & +\int_0^t \left[c(u)x'(u-\tau(u))+G(u,x(u),x(u-\tau(u)))\right]e^{\int_0^u a(s)ds}du. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous arrivons à

$$\begin{aligned} & x(t)e^{\int_0^t a(s)ds}-\psi(0) \\ = \; & \int_0^t a(u)\left[x(u)-h\left(x\left(u\right)\right)\right]e^{\int_0^u a(s)ds}du \\ & +\int_0^t \left[c(u)x'(u-\tau(u))+G(u,x(u),x(u-\tau(u)))\right]e^{\int_0^u a(s)ds}du. \end{aligned}$$

On divisons les deux membres de l'équation ci-dessous par $e^{\int_0^t a(s)ds}$, on arrive à

$$\begin{aligned} & x(t)-\psi(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} \\ = \; & \int_0^t a(u)\left[x(u)-h\left(x\left(u\right)\right)\right]e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\ & +\int_0^t \left[c(u)x'(u-\tau(u))+G(u,x(u),x(u-\tau(u)))\right]e^{-\int_u^t a(s)ds}du \end{aligned} \tag{2.7}$$

Réécriture

$$\begin{aligned}
&\int_0^t c(u)x'(u-\tau(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&= \int_0^t (1-\tau'(u))\,x'(u-\tau(u))\frac{c(u)}{(1-\tau'(u))}e^{-\int_u^t a(s)ds}du.
\end{aligned}$$

On performant une intégration par parties il vient

$$U = \frac{c(u)}{(1-\tau'(u))}e^{-\int_u^t a(s)ds} \text{ et } dV = (1-\tau'(u))\,x'(u-\tau(u)),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t c(u)x'(u-\tau(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&= \frac{c(t)}{(1-\tau'(t))} \times x(t-\tau(t)) - \frac{c(0)}{(1-\tau'(0))} \times \psi(-\tau(0))e^{-\int_0^t a(s)ds} \\
&\quad - \int_0^t b(u)x(u-\tau(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

avec $b(.)$ donnée par (2.4). Alors substituant (2.7)et (2.8) dans (2.6) nous obtenons (2.3). L'implication inverse est facilement obtenue et la preuve est complète. ■

Théorème 9 *$q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $q(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Si $\{\varphi_n(t)\}$ est une suite équicontinue de $\mathbb{R}^m$ avec $|\varphi_n(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, alors il existe une sous-suite converge uniformément vers une fonction $\varphi(t)$ avec $|\varphi(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, avec $|.|$ dénote la norme Euclidien dans $\mathbb{R}^m$.*

2.2 Bornétude et stabilité asymptotique

Pour appliquer le théorème de point fixe de Krasnoselskii−Burton, on doit choisir un espace de Banach convenable dépendant sur la donnée initiale X et construire deux applications, une contraction large et une application compacte qui obéissent aux conditions du théorème. Pour cela, considérons C l'espace de Banach de fonctions continues et bornées $\varphi : [m_0, \infty) \to \mathbb{R}$ muni de la norme du suprémum

$$|\varphi|_w = \sup_{t\in[m_0,\infty)} \left|\frac{\varphi(t)}{w(t)}\right| < \infty.$$

Soit $R \in (0,1]$, on définie l'ensemble M

$$\begin{aligned} M \ : \ &= \{\varphi \in C : \varphi \text{ est Lipschitzienne, } |\varphi(t)| \le R,\ t \in [m_0, \infty), \\ &\varphi(t) = \psi(t) \text{ si } [m_0, 0]\}. \end{aligned}$$

Il est clair que, si $\{\varphi_n(t)\}$ est une suite de fonctions k-Lipschitzienne converge vers une fonction φ, alors

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(s)| &= |\varphi(t) - \varphi_n(t) + \varphi_n(t) - \varphi_n(s) + \varphi_n(s) - \varphi(s)| \\ &\le |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + |\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| + |\varphi_n(s) - \varphi(s)| \\ &\le k\,|t - s|, \end{aligned}$$

qd $n \to \infty$, ce qui implique que φ k-Lipschitzienne. il est clair que M est fermé, bornée et convexe.

Pour $\varphi \in M$, $t \ge 0$, on définie l'opérateur $P : M \to C$ par

$$\begin{aligned} (P\varphi)(t) &= \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1-\tau'(0)}\psi(-\tau(0))\right] e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &+ \int_0^t k(t,u)a(u)H(\varphi(u))du + \frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\varphi(t-\tau(t)) \\ &+ \int_0^t k(t,u)\left[-b(u)\varphi(u-\tau(u)) + G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right]du \end{aligned} \tag{2.9}$$

Puis, nous exprimons l'équation ci-dessus

$$(P\varphi)(t) = (A\varphi)(t) + (B\varphi)(t),$$

où $A, B : M \to C$ sont donnés par

$$\begin{aligned} (A\varphi)(t) &= \frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\varphi(t-\tau(t)) \\ &+ \int_0^t k(t,u)\left[-b(u)\varphi(u-\tau(u)) + G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right]du \end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned}(B\varphi)(t) &= \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1-\tau'(0)}\psi(-\tau(0))\right] e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &+ \int_0^t k(t,u)a(u)H(\varphi(u))du. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour $t \geq 0$, supposons que les conditions suivantes sont vérifiées

$$G(u, \varphi(u), \varphi(u-\tau(u))) \leq g_{\sqrt{2}R}(t), \tag{2.12}$$

$$\alpha_1 = \sup_{t\in[0,\infty]} \left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\right|, \tag{2.13}$$

$$|b(t)| \leq \alpha_2 a(t), \tag{2.14}$$

$$g_{\sqrt{2}R}(t) \leq \alpha_3 a(t) R, \tag{2.15}$$

$$J[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] \leq 1, \tag{2.16}$$

où $\alpha_i : 1 \leq i \leq 3$ sont des constantes positives et $J > 3$. Maintenant, soit $\alpha(t) = \frac{c(t)}{1-\tau'(t)}$ et supposons qu'ils existent des constants $l_1, l_2, l_3 > 0$, tels que pour $0 \leq t_1 < t_2$

$$|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leq l_1 |t_2 - t_1|, \tag{2.17}$$

$$|\tau(t_2) - \tau(t_1)| \leq l_2 |t_2 - t_1|, \tag{2.18}$$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} a(u)du\right| \leq l_3 |t_2 - t_1|. \tag{2.19}$$

Lemme 2.2.1 *Pour A définie dans (2.10), supposons que (2.2) et (2.12)–(2.19) sont satisfaites. Alors $A : M \to M$ et A est un opérateur compact.*

Preuve. Soit A définie par (2.10). Alors, pour $\varphi \in M$ on a

$$\begin{aligned}
\left|(A\varphi)(t)\right| &\leq \left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\varphi(t-\tau(t))\right| \\
&\quad + \int_0^t k(t,u)\left[|b(u)\varphi(u-\tau(u))| + |G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))|\right]du \\
&\leq \left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\right| R + R\int_0^t k(t,u)\left(|b(u)| + \frac{g_{\sqrt{2}R}(u)}{R}\right)du \\
&\leq \alpha_1 R + \alpha_2 R + \alpha_3 R \leq \frac{R}{J} < R.
\end{aligned}$$

Alors $\|A\varphi\| < R$. Maintenant, on va vérifier que pour $\varphi \in M$, la fonction $A\varphi$ est Lipschitzienne. Soit $\varphi \in M$, et $0 \leq t_1 < t_2$, alors

$$\begin{aligned}
&\left|(A\varphi)(t_2) - (A\varphi)(t_1)\right| \\
\leq\ &\left|\frac{c(t_2)}{1-\tau'(t_2)}\varphi(t_2-\tau(t_2)) - \frac{c(t_1)}{1-\tau'(t_1)}\varphi(t_1-\tau(t_1))\right| \\
&+\left|\int_0^{t_2} k(t_2,u)\left[-b(u)\varphi(u-\tau(u)) + G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right]du\right. \\
&\left.-\int_0^{t_1} k(t_1,u)\left[|b(u)\varphi(u-\tau(u))| + |G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))|\right]du\right|
\end{aligned} \tag{2.20}$$

D'aprés les hypothéses (2.13) et (2.17)−(2.19), on a

$$\begin{aligned}
&\left|\alpha(t_2)\varphi(t_2-\tau(t_2)) - \alpha(t_1)\varphi(t_1-\tau(t_1))\right| \\
\leq\ &\alpha_1 k\left|(t_2-t_1) - (\tau(t_2)-\tau(t_1))\right| + Rl_1|t_2-t_1| \\
\leq\ &(\alpha_1 k + \alpha_1 k l_2 + Rl_1)|t_2-t_1|,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

de même manière, ona

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_0^{t_2} k(t_2,u)\left[-b(u)\varphi(u-\tau(u)) + G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right] du \right. \\
& \left. - \int_0^{t_1} k(t_1,u)\left[\left|b(u)\varphi(u-\tau(u))\right| + \left|G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right|\right] du \right| \\
\leq\ & \left| \int_0^{t_1} k(t_1,u)\left[-b(u)\varphi(u-\tau(u)) + G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right]\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds} - 1\right) du \right| \\
& + \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,u)\left[\left|b(u)\varphi(u-\tau(u))\right| + \left|G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right|\right] du \right| \\
\leq\ & (\alpha_2+\alpha_3) R \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds} - 1 \right| \int_0^{t_1} k(t_1,u) a(u)\, du \\
& + \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,u) a(u)\left(g_{\sqrt{2}R}(u) + R\left|b(u)\right|\right) du \\
\leq\ & (\alpha_2+\alpha_3) R \int_{t_1}^{t_2} a(u)\, du + \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,u) a(u)\, d\left(\int_{t_1}^{u} \left(g_{\sqrt{2}R}(s) + R\left|b(s)\right|\right) ds \right) du
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

La formule (2.22) nous donne

$$
\begin{aligned}
& (\alpha_2+\alpha_3)\,R\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du + \left[k(t_2,u)\int_{t_1}^{u}\left(g_{\sqrt{2}R}(s)+R\,|b(s)|\right)ds\right]_{t_1}^{t_2} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,u)a(u)\int_{t_1}^{u}\left(g_{\sqrt{2}R}(s)+R\,|b(s)|\right)dsdu \\
\leq\ & (\alpha_2+\alpha_3)\,R\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du \\
& + \int_{t_1}^{t_2}\left(g_{\sqrt{2}R}(u)+R\,|b(u)|\right)du\left(1+\int_{t_1}^{t_2} k(t_2,u)a(u)\,du\right) \\
\leq\ & (\alpha_2+\alpha_3)\,R\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du + 2\int_{t_1}^{t_2}\left(g_{\sqrt{2}R}(u)+R\,|b(u)|\right)du \\
\leq\ & (\alpha_2+\alpha_3)\,R\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du + 2\,(\alpha_2+\alpha_3)\,R\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du \\
\leq\ & 3R\,(\alpha_2+\alpha_3)\,l_3\,|t_2-t_1|\,. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

D'aprés (2.21) (2.22) (2.20) on obtien

$$
\begin{aligned}
|(A\varphi)(t_2)-(A\varphi)(t_1)| &\leq (\alpha_1 k+\alpha_1 k l_2+R l_1)\,|t_2-t_1| \\
&\quad +3R\,(\alpha_2+\alpha_3)\,l_3\,|t_2-t_1| \\
&= K\,|t_2-t_1|\,,
\end{aligned}
$$

pour une constante $K>0$, $A\varphi$ est Lipschitzienne si φ est Lipschitzienne, alors AM est équicontinue, donc AM est un ensemble compacte de $(C,|.|_w)$.

Maintenant, on va montrer que A est continue, soit $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}\in M$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ quand $n \to \infty$. Alors

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{A\varphi_n(t) - A\varphi(t)}{w(t)}\right| \\
\leq\ & \left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\right| |\varphi_n(t-\tau(t)) - \varphi(t-\tau(t))|_w \\
& + \int_0^t k(t,u)\,|b(u)|\,|\varphi_n(t-\tau(t)) - \varphi(t-\tau(t))|_w \\
& + \int_0^t k(t,u)\,|G(u,\varphi_n(u),\varphi_n(u-\tau(u))) - G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))|\,du.
\end{aligned}
$$

D'aprés le **TCD,** $\lim_{n\to\infty} |A\varphi_n(t) - A\varphi(t)|_w = 0$. Alors A est continue. Donc $A : M \to M$ est un opérateur compacte ■

Maintenant, nous indiquons un résultat important de [1,Théorème3.4] et pour la commodité que nous présentons ci-dessous sa preuve. Nous en déduisons par ce théorème que les conditions suivantes sont suffisantes pour la fonction H donnée par (2.13) être une contraction large sur l'ensemble M

(H1) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue dans $[-R, R]$, et différentiable dans $(-R, R)$

(H2) La fonction h est strictement croissante dans $[-R, R]$.

(H3) $\sup_{t\in(-L,L)} h'(t) \leq 1$.

Théorème 10 *Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant (H1) et (H3). Alors l'application H définie dans (2.13) est une contraction large dans M.*

Preuve. Soit $\varphi, \psi \in M$ avec $\varphi \neq \psi$. Alors $\varphi(t) \neq \psi(t)$ pour certains $t \in \mathbb{R}$. Désignonsnous l'ensemble de tous ces t par $D(\varphi, \psi)$, i.e.,

$$D(\varphi,\psi) = \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq \psi(t)\}.$$

Pour tout $t \in D(\varphi, \psi)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
& |(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \\
\leq\ & |\varphi(t) - \psi(t) - h\varphi(t) + h\psi(t)| \leq \\
\leq\ & |\varphi(t) - \psi(t)| \left|1 - \frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)}\right|. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Comme h est une fonction strictement croissante, nous avons

$$\frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)} > 0 \text{ pour tout } t \in D(\varphi, \psi). \tag{2.25}$$

pour chaque $t \in D(\varphi, \psi)$ fixé définir l'intervalle $I_t \subset [-R, R]$ par

$$I_t = \begin{cases} (\varphi(t), \psi(t)) & \text{si } \varphi(t) < \psi(t), \\ (\psi(t), \varphi(t)) & \text{si } \psi(t) < \varphi(t). \end{cases}$$

Le théorèmede la Valeur Moyenne implique que, pour chaque $t \in D(\varphi, \psi)$ fixé, il existe un nombre réel $c_t \in I_t$ tel que

$$\frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)} = h'(c_t).$$

Par (H2) et (H3), nous avons

$$0 \leq \inf_{u \in (-R,R)} h'(u) \leq \inf_{u \in I_t} h'(u) \leq h'(c_t) \leq \sup_{u \in I_t} h'(u) \leq \sup_{u \in (-R,R)} h'(u) \leq 1. \tag{2.26}$$

Par conséquent, par (2.24)-(2.26) on obtient

$$|(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left| 1 - \inf_{u \in (-R,R)} h'(u) \right|, \tag{2.27}$$

Pour $t \in D(\varphi, \psi)$. Cela implique une contraction dans la norme supremum. Pour voir cela, choisissez un $\epsilon \in (0, 1)$ fixé et suppose que φ et ψ sont deux fonctions dans M satisfaisant

$$\epsilon \leq \sup_{t \in (-R,R)} |\varphi(t) - \psi(t)| = \|\varphi(t) - \psi(t)\|.$$

Si $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour un certain $t \in D(\varphi, \psi)$, alors nous passons (2.25) et (2.26) cela

$$|(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \leq \frac{1}{2} |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{1}{2} \|\varphi(t) - \psi(t)\|. \tag{2.28}$$

Puisque h est continue et strictement croissante, la fonction $h(u + \frac{\epsilon}{2}) - h(u)$ atteint son minimum sur l'intervalle fermé et borné $[-R, R]$. Ainsi, si $\frac{\epsilon}{2} \leq |\varphi(t) - \psi(t)|$ pour certains $t \in D(\varphi, \psi)$, puis près (H2) et (H3) nous concluent

$$1 \geq \frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)} > \lambda,$$

où

$$\lambda := \frac{1}{2R}\left\{h\left(u+\frac{\epsilon}{2}\right)-h(u) : u\in[-R,R]\right\} > 0.$$

Par conséquent, (2.24) implique

$$|(H\varphi)(t)-(H\psi)(t)| \leq (1-\lambda)\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|. \tag{2.29}$$

En conséquence, la combinaison (2.28) et (2.29) nous obtenons

$$|(H\varphi)(t)-(H\psi)(t)| \leq \delta\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|, \tag{2.30}$$

où

$$\delta = \max\left\{\frac{1}{2}, 1-\lambda\right\}.$$

La preuve est complète. ■

Le résultat prchain montre le rapport entre les applications H et B dans le sens de contractions large. Suppose que

$$\max\left\{|H(-R)|, |H(R)|\right\} \leq \frac{2R}{J}. \tag{2.31}$$

Choisissons $\gamma > 0$ telle que

$$\left[1+\left|\frac{c(0)}{1-\tau'(0)}\right|\right]\gamma e^{-\int_0^t a(u)du}+\frac{R}{J}+\frac{2R}{J} \leq R. \tag{2.32}$$

La relation obtenue à utiliser en Lemme 2.3 et Théorème 1.4 pour prouvé que si $\varepsilon = R$ et si $\|\psi\| \leq \gamma$, alors la solution satisfait $|x(t,0,\psi)| < \varepsilon$.

Lemme 2.2.2 *Soit B définie par (2.11), supposons que (2.2)–(2.19) et (H1)–(H3) et (2.31)–(2.32) sont vérifiées, alors $B : M \to M$ est une contraction large.*

Preuve. Evidemment, B est continue pour la norme $|.|_w$

Soit $\varphi \in M$.Puis

$$\begin{aligned}
\left|(B\varphi)(t)\right| &\leq \left|\psi(0) - \frac{c(0)}{1-\tau'(0)}\psi(-\tau(0))\right| e^{-\int_0^t a(u)du} \\
&+ \int_0^t k(t,u)a(u)\left|H(\varphi(u))\right| du \\
&\leq \left(1 + \frac{c(0)}{1-\tau'(0)}\right)\gamma e^{-\int_0^t a(u)du} \\
&+ \int_0^t k(t,u)a(u)\max\left\{\left|H(-R)\right|, \left|H(R)\right|\right\} du \\
&< R,
\end{aligned}$$

la même méthode en lemme **3.1.1** pour montrer que si $\varphi \in M$, alors $B\varphi$ est Lipschitzienne, ce qui implique $B : M \to M$.

Par théorème **2.2.1**, H est une contraction large sur M. Alors pour tout $\varphi, \psi \in M$ avec $\varphi \neq \psi$ et pour tout $\varepsilon > 0$, de la preuve de ce théorème nous pouvons trouver un $\delta < 1$ tel que

$$\begin{aligned}
\left|B\varphi(t) - B\psi(t)\right|_w &\leq \eta \int_0^t k(t,u)a(u)\left|H(\varphi(u)) - H(\psi(u))\right|_w du \\
&\leq \delta\left|\varphi - \psi\right|.
\end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

Théorème 11 *Supposons que les hypothèses des lemmes (**2.1.1**) et (**2.2.1**) sont tiennet. Soit M définie par (2.8). Alors l'équation (2.1) à une solution dans M.*

Preuve. Par les lemmes (**2.2.1**), (**2.2.2**), A est continue et $A(M)$ est contenu dans un ensemble compact. En outre, du lemme **2.3**, B est une contraction large. Aprés, nous montrons que si $\varphi, \psi \in M$, nous avons

$\|A\varphi + B\psi\| \leq R$. Soit $\varphi, \psi \in M$ avec $\|\varphi\|, \|\psi\| \leq L$. Puis

$$\begin{aligned}
\|A\varphi + A\psi\| &\leq \left[1 + \left|\frac{c(0)}{1-\tau'(0)}\right|\right] \gamma e^{-\int_0^t a(u)du} + [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] R + \frac{2}{J} R \\
&\leq \left[1 + \left|\frac{c(0)}{1-\tau'(0)}\right|\right] \gamma e^{-\int_0^t a(u)du} + R + \frac{2}{J} R \\
&\leq \frac{R}{J} + \frac{2}{J} R \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

Clairement, toutes les hypothèses du théorème du Krasnoselskii-Burton sont satisfaisantes. Ainsi, il existe un point fixe $z \in M$ tels que $z = Az + Bz$.

Par lemme **2.1.1**, ce point fixe est une solution de (2.1). Par conséquent, (2.1) est stable ■

Maintenant, pour la stabilité asymptotique, on définie M_0 par

$$\begin{aligned}
M_0 \ : \ &= \{\varphi \in C : \varphi \text{ est Lipschitzienne, } |\varphi(t)| \leq R, \ t \in [m_0, \infty), \\
&\varphi(t) = \psi(t) \text{ si } [m_0, 0] \text{ et } |\varphi(t)| \to 0 \text{ qd } t \to \infty\}. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Tout les calculs de la preuve de Théorème 2.2 sont satisfaites avec $w(t) = 1$ si $|.|_w$ remplacer par la norme supremum $\|.\|$. Maintenant, supposons que

$$t - \tau(t) \to \infty \text{ et } \int_0^t a(s)ds \to \infty \text{ qd } t \to \infty, \qquad (2.34)$$

$$\alpha(t) = \frac{c(t)}{1-\tau'(t)} \to 0 \text{ qd } t \to \infty, \qquad (2.35)$$

$$\frac{b(t)}{a(t)} \to 0 \text{ qd } t \to \infty, \qquad (2.36)$$

$$\frac{g_{\sqrt{2}R}(t)}{a(t)} \to 0 \text{ qd } t \to \infty. \qquad (2.37)$$

Lemme 2.2.3 *Pour A définie dans (2.10), supposons que (2.2), (2.12)–(2.19) et (2.34)–(2.37) sont satisfaites. Alors $A : M_0 \to M_0$ et A est un opérateur compact.*

Preuve. Premierement, d'aprés le lemme **2.2.1** AM_0 est équicontinue. Alors, on a pour $\varphi \in M_0$,

$$\begin{aligned} |A\varphi(t)| &\leq \alpha(t)R + \int_0^t e^{-\int_u^t a(s)ds} a(u) \left[\left| \frac{b(u)}{a(u)} \right| R + \left| \frac{g_{\sqrt{2}R}(u)}{a(u)} \right| \right] du \\ &: = q(t). \end{aligned}$$

$q(t) \to 0$ quand $t \to \infty$, ce qui implique que $A : M_0 \to M_0$ est un opérateur compacte d'aprés théorème **2.1.1** ■

Théorème 12 *Supposons que les hypothèses des lemmes 2.2.1, **2.2.2** et **2.2.3** sont tiennet, (2.5) est vérifée. Soit M_0 définie par (2.33). Alors l'équation (2.1) à une solution dans M_0.*

Preuve. La même preuve de théorème **2.2.1** pour $w(t) = 1$ si $|.|_w$ remplacer par la norme supremum $\|.\|$. Maintenant, on a

$$\begin{aligned} |(A\varphi)(t)| &\leq \left| \frac{c(t)}{1-\tau'(t)} \varphi(t-\tau(t)) \right| \\ &+ \int_0^t k(t,u) \left[|b(u)\varphi(u-\tau(u))| + |G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))| \right] du, \end{aligned}$$

on a

$$\left| \frac{c(t)}{1-\tau'(t)} \varphi(t-\tau(t)) \right| \leq \alpha_1 |\varphi(t-\tau(t))| \to 0 \text{ qd } t \to \infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche T tel que $\varphi(t-\tau(t)), \varphi(t) < \varepsilon$, pour $t \geq T$.Alors, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^t k(t,u) \left[|b(u)\varphi(u-\tau(u))| + |G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))| \right] du \\ = \; & e^{-\int_T^t a(s)ds} \int_0^T e^{-\int_u^T a(s)ds} \left[|b(u)\varphi(u-\tau(u))| + |G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))| \right] du \\ &+ \int_T^t e^{-\int_u^t a(s)ds} \left[|b(u)\varphi(u-\tau(u))| + |G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))| \right] du \\ \leq \; & e^{-\int_T^t a(s)ds} (\alpha_2+\alpha_3) R + (\alpha_2+\alpha_3)\varepsilon. \end{aligned}$$

D'aprés (2.4) $e^{-\int_T^t a(s)ds} (\alpha_2 + \alpha_3) R \to 0$, qd $t \to \infty$. D'où $A\varphi \to 0$. la même pour $B\varphi \to 0$.

La preuve est compléte. $\blacksquare$

Chapitre 3

Existence des solutions périodiques d'une class d'équations différentielles à retard

Considérons l'équation différentielle non linéaire à retard suivante

$$x'(t) = -a(t)h\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)+c(t)x'(t-\tau(t))+G(t,x(t),x(t-\tau(t))). \quad (3.1)$$

Pour $T > 0$ on définit $\mathbb{P}_T = \{\phi : \phi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \phi(t+T) = \phi(t)\}$ où $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'espace de fonctions réelles continues. Muni de la norme spremum,

$$\|x\| = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|.$$

$\mathbb{P}_T$ est un espace de Banach. On suppose que,

$$a(t+T) = a(t),\ c(t+T) = c(t),\ \tau(t+T) = \tau(t),\ \tau(t) \geq \tau^* > 0, \quad (3.2)$$

Où τ^* est une constante, a est positif et

$$1 - e^{-\int_{t-T}^{t} a(s)ds} \equiv \frac{1}{\eta} \neq 0. \quad (3.3)$$

Il est intéressant de noter que l'équation (3.1) devient du type avancé quand le $\tau(t) < 0$.

En outre, nous supposons que pour tout t, $0 \leq t \leq T$,

$$\tau'(t) \neq 1. \quad (3.4)$$

Puisque τ est périodique, la condition (3.4) implique que $\tau'(t) < 1$. La fonction $G(t,x,y)$ est périodique dans t de la période T. Plus explicitement

$$G(t+T,x,y) = G(t,x,y) \tag{3.5}$$

3.1 Transformation et inversion de l'équation

Le lemme suivant est fondamental à nos résultats.

Lemme 3.1.1 *Suppose que (3.2) et (3.5) sont satisfait. Si $x \in \mathbb{P}_T$, alors x est une solution de l'équation (3.1) si et seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u)\left[x(u) - h(x(u))\right] du + \frac{c(t)}{1-\tau'(t)} x(t-\tau(t)) \\ &+ \int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)h(x(u))du \\ &-\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) \int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))dsdu \\ &+\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(t))\,a\,(u-\tau(u)) - a(u)\right] h(x(u-\tau(u)))du \\ &+\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[-b(u)x(u-\tau(u)) + G(u,x(u),x(u-\tau(u)))\right] du \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec

$$b(u) = \frac{(c'(u) + c(u)a(u))(1-\tau'(t)) + \tau''(u)c(u)}{(1-\tau'(u))^2}, \tag{3.7}$$

et

$$k(t,u) = e^{-\int_u^t a(s)ds}. \tag{3.8}$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{P}_T$ une solution de (3.1). Premièrement, réécrivons l'équation(3.1) sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) + a(t)x(t) &= a(t)x(t) - a(t)h(x(t)) + a(t)h(x(t)) \\ &\quad -a(t)h\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right) + c(t)x'(t-\tau(t)) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))) \\ &= a(t)\left[x(t) - h(x(t))\right] + \frac{d}{dt}\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} a(s)h(x(s))ds \\ &\quad + \left[\left(1-\tau'(t)\right)a(t-\tau(t)) - a(t)\right]h(x(t-\tau(t))) \\ &\quad +c(t)x'(t-\tau(t)) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))). \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $e^{\int_0^t a(s)ds}$, puis en intégrons de $t-T$ à t. On obtient,

$$\begin{aligned} &\int\limits_{t-T}^{t} \left[x(u)e^{\int_0^u a(s)ds}\right]' du \\ = \quad &\int\limits_{t-T}^{t} a(u)\left[x(u) - h(x(u))\right]e^{\int_0^u a(s)ds}du \\ &+ \int\limits_{t-T}^{t} \left[\frac{d}{du}\int\limits_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds\right] e^{\int_0^u a(s)ds}du \\ &+ \int\limits_{t-T}^{t} \left[\left(1-\tau'(u)\right)a(u-\tau(u)) - a(u)\right]h(x(u-\tau(u)))e^{\int_0^u a(s)ds}du \\ &+ \int\limits_{t-T}^{t} \left[c(u)x'(u-\tau(u)) + G(u, x(u), x(u-\tau(u)))\right]e^{\int_0^u a(s)ds}du. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous arrivons à

$$
\begin{aligned}
& x(t)e^{\int_0^t a(s)ds} - x(t-T)e^{\int_0^{t-T} a(s)ds} \\
= \quad & \int_{t-T}^{t} a(u)\left[x(u) - h(x(u))\right] e^{\int_0^u a(s)ds} du \\
& + \int_{t-T}^{t} \left[\frac{d}{du} \int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds \right] e^{\int_0^u a(s)ds} du \\
& + \int_{t-T}^{t} \left[(1-\tau'(u))\, a(u-\tau(u)) - a(u)\right] h(x(u-\tau(u))) e^{\int_0^u a(s)ds} du \\
& + \int_{t-T}^{t} \left[c(u)x'(u-\tau(u)) + G(u, x(u), x(u-\tau(u)))\right] e^{\int_0^u a(s)ds} du.
\end{aligned}
$$

On divisant les deux membres de l'équation ci-dessous par $e^{\int_0^t a(s)ds}$ et on tenant compte du fait que $x(t) = x(t-T)$, on arrive à

$$
\begin{aligned}
x(t) \quad = \quad & \eta \int_{t-T}^{t} a(u)\left[x(u) - h(x(u))\right] e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
& + \eta \int_{t-T}^{t} \left[\frac{d}{du} \int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds \right] e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
& + \eta \int_{t-T}^{t} \left[(1-\tau'(u))\, a(u-\tau(u)) - a(u)\right] h(x(u-\tau(u))) e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
& + \eta \int_{t-T}^{t} \left[c(u)x'(u-\tau(u)) + G(u, x(u), x(u-\tau(u)))\right] e^{-\int_u^t a(s)ds} du. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

où η est donné par (3.3). Réécritur

$$\begin{aligned}
&\int_{t-T}^{t} c(u)x'(u-\tau(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
= &\int_{t-T}^{t} (1-\tau'(u))\, x'(u-\tau(u))\frac{c(u)}{(1-\tau'(u))}e^{-\int_u^t a(s)ds}du.
\end{aligned}$$

On performant une intégration par parties il vient

$$U = \frac{c(u)}{(1-\tau'(u))}e^{-\int_u^t a(s)ds} \text{ et } dV = (1-\tau'(u))\, x'(u-\tau(u)),$$

rendement

$$\begin{aligned}
&\int_{t-T}^{t} c(u)x'(u-\tau(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
= &\frac{1}{\eta} \times \frac{x(t-\tau(t))c(t)}{(1-\tau'(t))} - \int_{t-T}^{t} b(u)x(u-\tau(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

où η est donné par (3.7). De la même manière nous obtenons l'intégrale

$$\int_{t-T}^{t}\left[\frac{d}{du}\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds\right]e^{-\int_u^t a(s)ds}du$$

$$= \left[\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds \times e^{\int_0^u a(s)ds}du\right]_{t-T}^{t} -$$

$$-\int_{t-T}^{t}\left[\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds\right]a(u)e^{-\int_u^t a(s)ds}du$$

$$= \left[\int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)h(x(u))du - \int_{t-T-\tau(t)}^{t-T} a(u)h(x(u))e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds}du\right]$$

$$-\int_{t-T}^{t}\left[\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds\right]a(u)e^{-\int_u^t a(s)ds}du$$

$$= \frac{1}{\eta}\int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)h(x(u))du$$

$$-\int_{t-T}^{t}\left[\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(x(s))ds\right]a(u)e^{-\int_u^t a(s)ds}du. \tag{3.11}$$

Alors substituant (3.10)et (3.11) dans (3.9) nous obtenons (3.6). L'implication inverse est facilement obtenue et la preuve est complète. ■

3.2 Existence des solutions périodiques

Pour appliquer le théorème 1.1.4, nous devons définir un espace de Banach N, un sous-ensemble convexe et fermé M de N et construire deux application : le premier est complètement continu et l'autre est une contraction large. Ainsi, soit $(N, \|.\|) = (\mathbb{P}_T, \|.\|)$ et

$$M = \{\varphi \in \mathbb{P}_T, \|\varphi\| \leq L\} \;\; L \in [0, 1]. \tag{3.12}$$

Pour $x \in M$, soit l'application H défini par

$$H(x) = x - h(x), \tag{3.13}$$

et par (3.6), on définit l'application $S : \mathbb{P}_T \to \mathbb{P}_T$ comme suite

$$\begin{aligned}
(S\varphi)(t) &= \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u)H(\varphi(u))du + \frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\varphi(t-\tau(t)) \\
&+ \int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)h(\varphi(u))du - \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) \int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(\varphi(s))dsdu \\
&+\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(t))\, a\left(u-\tau(u)\right) - a(u)\right] h(\varphi(u-\tau(u)))du \\
&+\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[-b(u)\varphi(u-\tau(u)) + G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right]du,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Puis, nous exprimons l'équation ci-dessus

$$(S\varphi)(t) = (A\varphi)(t) + (B\varphi)(t),$$

où $A, B : \mathbb{P}_T \to \mathbb{P}_T$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
(A\varphi)(t) &= \frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\varphi(t-\tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)h(\varphi(u))du \\
&-\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) \int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(\varphi(s))dsdu \\
&+\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(t))\, a\left(u-\tau(u)\right) - a(u)\right] h(\varphi(u-\tau(u)))du \\
&+\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[-b(u)\varphi(u-\tau(u)) + G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))\right]du,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

et

$$(B\varphi)(t) = \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u)H(\varphi(u))du. \tag{3.16}$$

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées

(H1) $a \in L^1[0,1]$ est une fonction bornée.

(H2) h est Lipschtzienne. Alors pour tout $x, y \in M$, $\exists E > 0$ tel que

$$|h(x) - h(y)| \leq E \|x - y\|.$$

(H3) G satisfaite les conditions de Carathéodory

(H4) $\exists g_1, g_2, g_3 \in L^1[0,T]$, T-périodique tel que

$$|G(t,x,y)| \leq g_1(t)|x| + g_2(t)|y| + g_3(t).$$

Maintenant, nous avons besoin des hypothèses suivantes

$$\beta_1\beta_2(EL + |h(0)|) \leq \frac{\gamma_1}{2}L \tag{3.17}$$

où $\beta_1 = \max_{t\in[0,T]}\{\tau(t)\}$ et $\beta_2 = \max_{t\in[0,T]}\{a(t)\}$,

$$|b(t)| \leq \gamma_2 a(t) \tag{3.18}$$

$$((1-\tau'(t))\,a\,(t-\tau(t)) + a(t))(EL + |h(0)|) \leq \gamma_3 La(t), \tag{3.19}$$

$$g_1(t)L + g_2(t)L + g_3(t) \leq \gamma_4 La(t), \tag{3.20}$$

$$\gamma_5 = \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\right|, \tag{3.21}$$

$$J\left[\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5\right] \leq 1, \tag{3.22}$$

où γ_i, $1 \leq i \leq 5$ et J sont des constantes positives avec $J \geq 3$.

Lemme 3.2.1 *Pour A définie dans (3.15), supposons que (3.2), (3.5), (3.17), (3.22), (H1) et (H4) sont satisfaites. Alors $A : M \to M$.*

Preuve. Soit A définie par (3.15). D'abord, par (3.2) et (3.5), un changement de variables dans (3.15) montre que $A\varphi(t+T) = A\varphi(t)$. C'est-à-dire, si $\varphi \in \mathbb{P}_T$, alors $A\varphi$ est périodique de période T. Par (H2) on obtient

$$|h(x)| \leq E\,|x| + |h(0)|\,.$$

Maintenant, soit $\varphi \in M$. Par (3.17), (3.22), (H1) et (H4) nous avons

$$\begin{aligned}
|(A\varphi)(t)| &\leq \left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\right| |\varphi(t-\tau(t))| + \int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)\,|h(\varphi(u))|\,du \\
&\quad + \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) \int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)\,|h(\varphi(s))|\,dsdu \\
&\quad + \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(u))\,a\,(u-\tau(u)) + a(u)\right] |h(\varphi(u-\tau(u)))|\,du \\
&\quad + \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[|b(u)|\,|\varphi(u-\tau(u))| + |G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))|\right] du, \\
&\leq \gamma_5 L + \beta_1\beta_2\,(EL+|h(0)|) + \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u)\beta_1\beta_2\,(EL+|h(0)|)\,du \\
&\quad + \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(u))\,a\,(u-\tau(u)+a(u)\right](EL+|h(0)|)\,du \\
&\quad + \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u)\gamma_2 L du \\
&\quad + \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[g_1(t)\,|\varphi(u)| + g_2(t)\,|\varphi(u-\tau(u))| + g_3(t)\right] \\
&\leq \gamma_1 L + \gamma_2 L + \gamma_3 L + \gamma_4 L + \gamma_5 L \leq \frac{L}{J} \leq L.
\end{aligned}$$

Alors, $A\varphi \in M$. ■

Lemme 3.2.2 *Pour $A : M \to M$, définie dans (3.15), supposons que (3.2), (3.5), (3.17), (3.22), (H1) et (H4) sont satisfaites. Alors A est un opérateur compact.*

Preuve. On démontre que A est un opérateur continu pour la norme de supremum. Soit $\varphi_n \in M$, où n est un entier positif tel que $\varphi_n \to \varphi$ quand $n \to \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
& |(A\varphi_n)(t) - (A\varphi)(t)| \\
\leq\ & \left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\right| |\varphi_n(t-\tau(t)) - \varphi(t-\tau(t))| + \int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)\,|h(\varphi_n(t)) - h(\varphi(t))|\,du \\
& +\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) \int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)\,|h(\varphi_n(s)) - h(\varphi(s))|\,dsdu \\
& +\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\,[(1-\tau'(u))\,a\,(u-\tau(u)) + a(u)]\,|h(\varphi_n(u-\tau(u)) - h(\varphi(u-\tau(u)))|\,du \\
& +\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\,|b(u)|\,|\varphi_n(u-\tau(u) - \varphi(u-\tau(u))|\,du \\
& +\eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)\,|G(u,\varphi_n(u),\varphi_n(u-\tau(u))) - G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))|\,du.
\end{aligned}$$

Par le théorème de la Convergence Dominée, $\lim_{n\to\infty} |(A\varphi_n)(t) - (A\varphi)(t)| = 0$. Alors est continu.

On démontre que A est compacte, soit $\varphi \in M$, par lemme (2.2), on voir que

$$\|A\varphi\| \leq L,$$

et ainsi la famille de fonctions $A\varphi$ est uniformément borné. Soit $\varphi \in M$.

On peut choisir $w < t$ tel que $t - w < t - T$. Alors

$$\begin{aligned}
&|(A\varphi)(t) - (A\varphi)(w)| \\
\leq\ & \left|\frac{c(t)}{1-\tau'(t)}\varphi(t-\tau(t)) - \frac{c(w)}{1-\tau'(w)}\varphi(w-\tau(w))\right| \\
&+\left|\int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)h(\varphi(u))du - \int_{w-\tau(w)}^{w} a(u)h(\varphi(u))du\right| \\
&+\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u)\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(\varphi(s))dsdu\right. \\
&\left.-\int_{w-T}^{w} k(w,u)a(u)\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(\varphi(s))dsdu\right| \\
&+\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(t))\,a\,(u-\tau(u))-a(u)\right]h(\varphi(u-\tau(u)))du\right. \\
&\left.-\int_{w-T}^{w} k(w,u)\left[(1-\tau'(t))\,a\,(u-\tau(u))-a(u)\right]h(\varphi(u-\tau(u)))du\right| \\
&+\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)b(u)\varphi(u-\tau(u))du - \int_{w-T}^{w} k(w,u)b(u)\varphi(u-\tau(u))du\right| \\
&+\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))du\right. \\
&\left.-\int_{w-T}^{w} k(w,u)G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))du\right|.
\end{aligned}$$

Puisque (2.17)-(2.22) et (H1)-(H4) tiennent, nous pouvons réécrire

$$
\begin{aligned}
&+\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(t))\,a\left(u-\tau(u)\right)-a(u)\right]h(\varphi(u-\tau(u)))du\right.\\
&\left.-\int_{w-T}^{w} k(w,u)\left[(1-\tau'(t))\,a\left(u-\tau(u)\right)-a(u)\right]h(\varphi(u-\tau(u)))du\right|\\
\leq\;&\eta\int_{w}^{t} k(t,u)\left[(1-\tau'(t))\,a\left(u-\tau(u)\right)-a(u)\right]\left|h(\varphi(u-\tau(u)))\right|du\\
&+\eta\int_{w-T}^{w}\left|k(w,u)-k(t,u)\right|\left[(1-\tau'(t))\,a\left(u-\tau(u)\right)-a(u)\right]\\
&\times\left|h(\varphi(u-\tau(u)))\right|du\\
&+\eta\int_{w-T}^{t-T} k(w,u)\left[(1-\tau'(t))\,a\left(u-\tau(u)\right)-a(u)\right]\left|h(\varphi(u-\tau(u)))\right|du\\
\leq\;&2\eta\beta_3\int_{w}^{t}\gamma_3 La(u)du+\eta\int_{w-T}^{w}\left|k(w,u)-k(t,u)\right|\gamma_3 La(u)du\leq\\
&2\eta\beta_3\gamma_3 L\int_{w}^{t}a(u)du+\eta\gamma_3 L\int_{0}^{T}\left|k(w,u)-k(t,u)\right|a(u)du,
\end{aligned}
$$

où $\beta_3 = \max_{t\in[t-T,t]}\{k(t,u)\}$, et

$$\begin{aligned}
&\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)b(u)\varphi(u-\tau(u))du\right.\\
&\left.-\int_{w-T}^{w} k(w,u)b(u)\varphi(u-\tau(u))du\right|\\
&+\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))du\right.\\
&\left.-\int_{w-T}^{w} k(w,u)G(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau(u)))du\right|\\
\leq\ & 2\eta\beta_3\int_{w}^{t}\left[\gamma_3 La(u)+g_{\sqrt{2}L}(u)\right]du\\
&+\eta\int_{0}^{T}|k(w,u)-k(t,u)|\left[\gamma_3 La(u)+g_{\sqrt{2}L}(u)\right]du,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\eta\left|\int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u)\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(\varphi(s))dsdu\right.\\
&\left.-\int_{w-T}^{w} k(w,u)a(u)\int_{u-\tau(u)}^{u} a(s)h(\varphi(s))dsdu\right|\\
\leq\ & 2\eta\beta_3\int_{w}^{t}\frac{\gamma_1}{2}La(u)du+\eta\int_{w-T}^{w}|k(w,u)-k(t,u)|\frac{\gamma_1}{2}La(u)du\leq\\
&\eta\beta_3\gamma_1 L\int_{w}^{t}a(u)du+\eta\frac{\gamma_1}{2}L\int_{0}^{T}|k(w,u)-k(t,u)|\,a(u)du,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t-\tau(t)}^{t} a(u)h(\varphi(u))du - \int_{w-\tau(w)}^{w} a(u)h(\varphi(u))du \right| \\ = & \left| \int_{w}^{t} a(u)h(\varphi(u))du - \int_{w-\tau(w)}^{t-\tau(t)} a(u)h(\varphi(u))du \right| \leq \\ & (EL + h(0)) \left(\int_{w}^{t} a(u)du - \int_{w-\tau(w)}^{t-\tau(t)} a(u)du \right), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} & |(A\varphi)(t) - (A\varphi)(w)| \\ \leq & \left| \frac{c(t)}{1-\tau'(t)} \varphi(t-\tau(t)) - \frac{c(w)}{1-\tau'(w)} \varphi(w-\tau(w)) \right| \\ & + 2\eta\beta_3\gamma_3 L \int_{w}^{t} a(u)du + \eta\gamma_3 L \int_{0}^{T} |k(w,u) - k(t,u)| \, a(u)du \\ & + 2\eta\beta_3 \int_{w}^{t} \left[\gamma_3 La(u) + g_{\sqrt{2}L}(u)\right] du \\ & + \eta \int_{0}^{T} |k(w,u) - k(t,u)| \left[\gamma_3 La(u) + g_{\sqrt{2}L}(u)\right] du \\ & + \eta\beta_3\gamma_1 L \int_{w}^{t} a(u)du + \eta\frac{\gamma_1}{2} L \int_{0}^{T} |k(w,u) - k(t,u)| \, a(u)du \\ & + (EL + h(0)) \left(\int_{w}^{t} a(u)du - \int_{w-\tau(w)}^{t-\tau(t)} a(u)du \right). \end{aligned}$$

Ensuite, par le théorème de la Convergence Dominée, $\lim |(A\varphi)(t) - (A\varphi)(w)| \to 0$ quand $t - w \to 0$ indépendamment de $\varphi \in M$. Ainsi, $(A\varphi)$ est équicontinue. Par conséquent, par le théorème d'Accoli-Arzela, A est compacte. ■

Maintenant, nous indiquons un résultat important de ([1],Théorème3.4) et pour la commodité que nous présentons ci-dessous sa preuve. Nous en déduisons par ce théorème que les conditions suivantes sont suffisantes pour la fonction H donnée par (3.13) être une contraction large sur l'ensemble M.

(H5) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue dans $[-L, L]$, et différentiable dans $(-L, L)$.

(H6) La fonction h est strictement croissante dans $[-L, L]$.

(H7) $\sup_{t\in(-L,L)} h'(t) \leq 1$.

Théorème 13 *Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant (H5) et (H7). Alors l'application H définie dans (3.13) est une contraction large dans M.*

Preuve. Soit $\varphi, \psi \in M$ avec $\varphi \neq \psi$. Alors $\varphi(t) \neq \psi(t)$ pour certains $t \in \mathbb{R}$. Désignonsnous l'ensemble de tous ces t par $D(\varphi, \psi)$, i.e.,

$$D(\varphi, \psi) = \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq \psi(t)\}.$$

Pour tout $t \in D(\varphi, \psi)$, nous avons

$$\begin{aligned} & |(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \\ \leq\ & |\varphi(t) - \psi(t) - h\varphi(t) + h\psi(t)| \leq \\ \leq\ & |\varphi(t) - \psi(t)| \left|1 - \frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)}\right|. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Comme h est une fonction strictement croissante, nous avons

$$\frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)} > 0 \text{ pour tout } t \in D(\varphi, \psi). \tag{3.24}$$

pour chaque $t \in D(\varphi, \psi)$ fixé définir l'intervalle $I_t \subset [-L, L]$ par

$$I_t = \begin{cases} (\varphi(t), \psi(t)) & \text{si } \varphi(t) < \psi(t), \\ (\psi(t), \varphi(t)) & \text{si } \psi(t) < \varphi(t). \end{cases}$$

Le théorèmede la Valeur Moyenne implique que, pour chaque $t \in D(\varphi, \psi)$ fixé, il existe un nombre réel $c_t \in I_t$ tel que

$$\frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)} = h'(c_t).$$

Par (H6) et (H7), nous avons

$$0 \leq \inf_{u\in(-L,L)} h'(u) \leq \inf_{u\in I_t} h'(u) \leq h'(c_t) \leq \sup_{u\in I_t} h'(u) \leq \sup_{u\in(-L,L)} h'(u) \leq 1. \tag{3.25}$$

Par conséquent, par (3.23)-(3.25) on obtient

$$|(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left|1 - \inf_{u\in(-L,L)} h'(u)\right|, \tag{3.26}$$

Pour $t \in D(\varphi, \psi)$. Cela implique une contraction dans la norme supremum. Pour voir cela, choisissez un $\epsilon \in (0,1)$ fixé et suppose que φ et ψ sont deux fonctions dans M satisfaisant

$$\epsilon \leq \sup_{t\in(-L,L)} |\varphi(t) - \psi(t)| = \|\varphi(t) - \psi(t)\|.$$

Si $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour un certain $t \in D(\varphi, \psi)$, alors nous passons (2.25) et (2.26) cela

$$|(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \leq \frac{1}{2} |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{1}{2} \|\varphi(t) - \psi(t)\|. \tag{3.27}$$

Puisque h est continue et strictement croissante, la fonction $h(u + \frac{\epsilon}{2}) - h(u)$ atteint son minimum sur l'intervalle fermé et borné $[-L, L]$. Ainsi, si $\frac{\epsilon}{2} \leq |\varphi(t) - \psi(t)|$ pour certains $t \in D(\varphi, \psi)$, puis près (H6) et (H7) nous concluent

$$1 \geq \frac{h\varphi(t) - h\psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)} > \lambda,$$

où

$$\lambda := \frac{1}{2L} \left\{h\left(u + \frac{\epsilon}{2}\right) - h(u) : u \in [-L, L]\right\} > 0.$$

Par conséquent, (3.23) implique

$$|(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \leq (1 - \lambda) \|\varphi(t) - \psi(t)\|. \tag{3.28}$$

En conséquence, la combinaison (3.27) et (3.28) nous obtenons

$$|(H\varphi)(t) - (H\psi)(t)| \leq \delta \|\varphi(t) - \psi(t)\|,$$

où

$$\delta = \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \lambda\right\}.$$

La preuve est complète. ■

Le résultat prchain montre le rapport entre les applications H et B dans le sens de contractions large. Suppose que

$$\max\{|H(-L)|, |H(L)|\} \leq \frac{2L}{J}. \tag{3.29}$$

Lemme 3.2.3 *Soit B défini par (3.16), supposons que (3.2)-(3.5) et (H5)-(H7) sont vérifier, alors $B : M \to M$ est une contraction large.*

Preuve. Evidemment, B est continue et il est facile de montrer que $B\varphi(t+h) = B\varphi(t)$.

Soit $\varphi \in M$.Puis

$$\begin{aligned} |B\varphi(t)| &\leq \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) \max\{|H(-L)|, |H(L)|\} \, du \\ &\leq \frac{2L}{J} \leq L, \end{aligned}$$

ce qui implique $B : M \to M$.

Par théorème 3.1, H est une contraction large sur M. Alors pour tout $\varphi, \psi \in M$ avec $\varphi \neq \psi$ et pour tout $\varepsilon > 0$, de la preuve de ce théorème nous pouvons trouver un $\delta < 1$ tels que

$$\begin{aligned} |B\varphi(t) - B\psi(t)| &= \left| \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) \left[H(\varphi(u)) - H(\psi(u))\right] du \right| \\ &\leq \|\varphi - \psi\| \, \eta \int_{t-T}^{t} k(t,u)a(u) du \\ &\leq \delta \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

Théorème 14 *Supposons que les hypothèses des lemmes **3.2.2**, **3.2.3** et **3.2.4** sont tiennet. Soit M définie par (3.12). Alors l'équation (3.1) à une solution T-périodique dans M.*

Preuve. Par les lemmes **3.2.2**, **3.2.3**, A est continue et $A(M)$ est contenu dans un ensemble compact. En outre, du lemme **3.2.4**, B est une contraction large. Aprés, nous montrons que si $\varphi, \psi \in M$, nous avons $\|A\varphi + B\psi\| \leq L$. Soit $\varphi, \psi \in M$ avec $\|\varphi\|, \|\psi\| \leq L$. Puis

$$\begin{aligned}
\|A\varphi + B\psi\| &\leq [\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4] L + \frac{2}{J} L \\
&\leq \frac{L}{J} + \frac{2}{J} L = L.
\end{aligned}$$

Clairement, toutes les hypothèses du théorème du Krasnoselskii-Burton sont satisfaisantes. Ainsi, il existe un point fixe $z \in M$ tels que $z = Az + Bz$.

Par lemme **3.1.1**, ce point fixe est une solution de (3.1). Par conséquent, (3.1) a solution T-périodique. ■

Bibliographie

[1] M. Adıvar, M. N. Islam, Y. N. Raffoul, Separate contraction and existence of periodic solution in totally nonlinear delay differential equations, Hacettepe J. Math. Stat. 41 (2012), 1-13.

[2] A. Ardjouni, I. Derrardjia, A. Djoudi, Stability in totally nonlinear neutral differential equations with variable delay, Acta. Math. Univ. Comenianae 83 (2014), 119-134.

[3] A. Ardjouni, A. Djoudi, Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays, Opuscula Math. 32 (2012), Article ID 1.

[4] A. Djoudi, R. Khemis, Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, Georgian Math. J. 13 (2006) 25–34.

[5] I. Derrardjia, A. Ardjouni, and A. Djoudi, Stability by Krasnoselskii's theorem in totally nonlinear neutral differential equation, Opuscula Math. 33 (2013), 255-272.

[6] A. Ardjouni, A. Djoudi, Existence of periodic solutions for totally nonlinear neutral differential equations with variable delay, Sarajevo Journal of Mathematics, 8(20), 2012, 107-117.

[7] T.A. Burton, Stability by fixed point theory or Liapunov's theory : A comparison, Fixed Point Theory 4 (2003), 15-32.

[8] T.A. Burton, Fixed points and stability of a nonconvolution equation, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 3679-3687.

[9] T.A. Burton, Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations, Dover Publications, New York, 2006.

[10] T.A. Burton, Integral equations, implicit functions, and fixed points, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 2383-2390.

[11] T.A. Burton, T. Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, Nonlinear Anal. 49 (2002), 445-454.

[12] A. Ardjouni, A. Djoudi, Existence of positive periodic solutions for a nonlinear neutral differential equation with variable delay, Applied Mathematics E-Notes, 12, 2012) 94-101.

[13] T. A. Burton, Integral equations, implicit functions, and fixed points, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 2383-2390.

[14] B. Zhang, Fixed points and stability in differential equations with variable delays, Nonlinear Anal. 63 (2005), 233-242.

[15] L. Hatvani, Annulus arguments in the stability theory for functional differential equations, Differential and Integral Equations 10 (2997), 975-1002.

[16] J.K. Hale, Theory of Functional Differential Equation, Springer, New York, 1077.

[17] E. Yankson, Existence and positivity of solutions for a nonlinear periodic differential equation, Archivum Mathematicum, 48(4), 2012, 261-270.

[18] H. Deham, A. Djoudi, Periodic solutions for nonlinear differential equation with functional delay, Georgian Math. J. 15 (2008) 4, 635-642.

[19] Z. Liu, X. Li, S. Kang, Y.C. Kwun, Positive Periodic Solutions for First-Order Neutral Functional Differential Equations with Periodic Delays, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 185692, 12 pages.

[20] Y. R. Raffoul, Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory, Math. Comput. Model. 40 (2004), 691-700.

[21] T.A. Burton, T. Furumochi, Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, Dynam. Systems Appl. 11 (2002), 499-519.

[22] A. Ardjouni, A. Djoudi, Fixed points and stability in neutral nonlinear differential equations with variable delays, Nonlinear Anal. 74 (2011), 2062-2070.

[23] D. S. Smart, Fixed point theorems ; Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66. Cambridge University Press, London-New York, 1974.

[24] E. Zeidler, Applied functional analysis, Springer-Verlag, New York, 1995.

[25] B. Zhang, Fixed points and stability in differential equations with variable delays, Nonlinear Anal. 63 (2005) e233-e242.

Résumé

L’étude de la stabilité de solutions de l’équation déférentielle à retard joue un rôle important dans l’analyse qualitative des systèmes dynasiques. Ce mémoire est consacrée à utiliser le théorème de point axe de Krasnoselski Burton pour prouver l existence et la stabilité de solutions et de solutions périodiques de l’équation déférentielle non linéaire de type neutre.

Mots clés : Point axe, équations déférentielle à retard, stabilité.

Abstract

The study of the stability of solutions of the delay deferential equation plays an important role in the qualitative analysis of dynastic systems. This dissertation is devoted to using the Krasnoselski Burton axis point theorem to prove the existence and stability of solutions and periodic solutions of the nonlinear deferential equation of neutral type.

Key words: Axis point, delay deferential equations, stability.

ملخص

تلعب دراسة ثبات حلول معادلة تأجيل التأخير دورًا مهمًا في التحليل النوعي للأنظمة الأسرية. هذه الرسالة مكرسة لاستخدام نظرية نقطة محور كراسنوسيلسكي بيرتون لإثبات وجود واستقرار الحلول والحلول الدورية للمعادلة التأجيلية غير الخطية للنوع المحايد.

الكلمات المفتاحية: نقطة المحور ، معادلات التأخير ، الاستقرار.