UNIVERSITE KASDI MERBAH

OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :
N° de série :

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par : Hadjadj Elhabib

Théme

Existence des solutions pour une inclusion non lineaire d'évolution

Devant le jury composé de : 30/ 09/2020

Mr. Chacha D. Ahmed	*-Prof- Université de KASDI Merbah – Ouargla*	*President*
Mr. Merabet Ismail	*-MCA - Université de KASDI Merbah - Ouargla*	*Examinateur*
Mr. Ghazal Abderrazek	*-MCA- Université de KASDI Merbah - Ouargla*	*Examinateur*
Mr. Bensayeh Abdallah	*-MCA- Université de KASDI Merbah - Ouargla*	*Rapporteur*

الإهداء

إلى أمي وأبي اللذين سعيا أن أكون مثابرا وجادا في علمي و عملي، وحرصا على أن أنال الدرجات العلا في الدنيا والآخرة ...

إلى كل من أضاء بعلمه عقل غيره
أو هدى بالجواب الصحيح حيرة سائليه
فأظهر بسماحته تواضع العلماء
وبرحابته سماحة العارفين

إلى محبي العلم والتعلم

أهدي هذا العمل المتواضع.

شكر وعرفان

بعد رحلة بحث وجهد واجتهاد، أحمد الله تعالى واشكره، فهو المنعم والمتفضل، أشكره على أن حقق لي ما أصبوا إليه في استكمال درجة الماستر في الر ياضيات.

وأتقدم بالشكر والتقدير إلى الأستاذ المشرف:**عبد الله بن السايح** الذي تفضل بالإشراف على هذا الرسالة، وجعلني أعرف حقيقة البحث، وأحسني مسؤولية الباحث.

ولا يحق لي أن أنسى الأساتذة الذين بذلوا قصارى جهدهم في تكويني الدراسي، فلهم منا جز يل الشكر والإمتنان على جهدهم المتميز.

وأتقدم بشكري الجز يل في هذا اليوم إلى أساتذتي الموقرين في لجنة المناقشة، لتفضلهم علي بقبول مناقشة هذه الرسالة، فهم أهل لسد خللها وتقويم معوجها، والإبانة عن مواطن القصور فيها.

سائلا الله الكريم أن يثيب الجميع خيرا.

Notations

- X : espace de Banach
- X' : l'espace dual de X.
- $\rightarrow$: convergence forte.
- $\rightharpoonup$: convergence faible.
- $\langle .,. \rangle$: le produit de dualité entre X et $X^{'}$
- $\overline{B}(0, R)$: la boule fermé de centre 0 et de rayon R
- $G(A)$: le graphe de l'opérateur A
- $vect\{B\}$: le sous-espace engendré par B
- $\overline{\lim}$: la limite supérieure
- $\underline{\lim}$: la limite inférieure

Table des matières

Introduction

En 1966, R.Rockafellar a initié l'étude de la théorie des opérateurs monotones sur les espaces de Banach, il a proposé le théorème principal sur les opérateurs maximal monotone.
Puis, en 1963, le concept de la monotonie pour les opérateurs définis sur un espace de Banach dans son dual a été introduit par les célèbres oeuvres de Browder et Minty. Ce concept a été intensément étudié dans le cadre de la solvabilité des équations différentielles partielles non linéaires. Dans ce mémoire, sous le titre :"Existence des solutions pour une inclusion d'évolution non linéaire", nous nous proposons de démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité pour des solutions de quelques équations opérationnelles non linéaires.
Ce mémoire est scindé en trois chapitres. Dans le premier, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires avec des outils d'analyse fonctionnelle essentiels à l'atteinte des objectifs visés par le présent mémoire. Dans la deuxième chapitre, nous avons étudiés quelques problèmes abstraits : le problème de Minty- Browder, le problème de Rockafellar et le problème principale sur les perturbations pseudo-monotones de l'opérateur maximal monotone, et quelque proposition et corollaire de ces problèmes. Enfin, dans le 3ème chapitre, nous allons illustrer la théorie abstraite des opérateurs maximaux monotones, exposée dans le chapitre précédent, sur des problèmes d'inclusion d'évolution non linéaire de première ordre sur les espaces de Hilbert par l'approximation non linéaire de Yosida, puis nous résolvons la deuxième problème d'évolution non linéaire de deuxième ordre par le problème de premier ordre et les théorèmes proposés dans le chapitre 2, aussi nous-attachons à chaque problème variationnel nous l'avons résolu par le problème associé nous

l'avons appelé application.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre nous abordons certains concepts mathématiques que nous devrions connaitre pour un usage dans notre thème.

1.1 Quelques théorèmes sur les espaces de Banach

Théorème 1.1.1 *(**Hahn-Banach**).Soit $p : X \to \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$p(\lambda u) = \lambda p(u), \quad \forall u \in X, \quad \forall \lambda > 0,$$

$$p(u + v) \leq p(u) + p(v), \quad \forall u, v \in X.$$

Soit d'autre part, $G \subset X$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(u) \leq p(u).$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e.,

$$g(x) = f(u), \quad \forall u \in G.$$

et telle que

$$f(u) \leq p(u), \quad \forall u \in X.$$

Voir([3], page 1).

Démonstration: Voir[3](Théorème I.1,page1) ■

Corollaire 1.1.1 *Pour tout $u_0 \in X$ il existe $f_0 \in X'$ tel que*

$$\|u_0\| = \|f_0\| \quad et \quad \langle f_0, u_0 \rangle = \|u_0\|^2.$$

Voir([3], page 3).

Théorème 1.1.2 *(**Banach-Steinhaus**) Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in X}$ une famille(non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continues de X., On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i u\| < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i u\| \leq c\|u\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I.$$

Voir([3], page 16)

Démonstration: Voir[3](Théorème II.1,page16). ■

Théorème 1.1.3 *(**Bolzano-Weirstress (généralisé)**). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit (x_n) une suite dans E, bornée i.e., il existe $c > 0$ telle que : $\|x_n\| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Alors il existe une sous-suite qui converge dans E.

Définition 1.1.1 *(**partition de l'unité**) Soit E un espace compact et $U_1, ..., U_n$ un récouvrement fini de E. On appelle Partition continue de l'unité associée à ce récouvrement la donnée des fonctions continues $f_1, ..., f_n$ de E dans $[0, 1]$ vérifiants :*

1. *Le support de* $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ *est inclus dans* U_k.
2. $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1, \quad$ *pour tout* x *de* E.

Voir([4] page 756).

1.2 Topologies faibles, espaces réflexifs

Soit X un espace de Banach réel. Il est muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes, que l'on appellera topologie forte. Soit $f \in X'$. On désigne par $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. On rappelle que :
$\langle f, x\rangle = f(x)$. Lorsque f décrit X' on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ de X dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *La topologie faible* $\sigma(X, X')$ *sur* X *est la topologie la moins fine (c'est-à-dire comportant le moins d'ouverts possibles) sur* X *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_f)_{f\in X'}$.

Voir([3], page 35).

Proposition 1.2.1 *La topologie faible* $\sigma(X, X')$ *est séparée.*

Voir([3], page 35).

Démonstration: Voir [3](Proposition III.3,page 35). ■

On note $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de (x_n) vers x pour la topologie faible $\sigma(X, X')$ et $f_n \rightharpoonup f$ la convergence de (f_n) vers f pour la topologie faible $\sigma(X, X')$.

Théorème 1.2.1 *Soit* (x_n) *une suite de* X. *On a :*

1. $x_n \rightharpoonup x$ *pour la topologie* $\sigma(X, X') \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in X'$.
2. *Si* $x_n \to x$ *alors* $x_n \rightharpoonup x$ *pour la topologie* $\sigma(X, X')$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *alors la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée avec* $\|x\| \leq \underline{\lim}\, \|x_n\|$.
4. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \to f$ *dans* X' *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.
5. *Si* $x_n \to x$ *et* $f_n \rightharpoonup f$ *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Voir([3], page 35).

Définition 1.2.2 *Soit la fonction* $\varphi : X \to]-\infty; +\infty]$

1. *L'épigraphe de* φ *est l'ensemble* $\quad epi\ \varphi = \{(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}; \varphi(u) \leq \lambda\}$.
2. φ *est dite convexe si :* $\varphi(tu+(1-t)v) \leq t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v), \ \forall u, v \in X, \ \forall t \in [0, 1]$.
3. φ *est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

   $\{u \in X; \varphi(u) \leq \lambda\}$ *est fermé.*

Voir([3], page 8).

Définition 1.2.3 *Soit* $F : M \subseteq X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *et soit* $M = \{u \in X; \ F(u) \leq r\}$.

- F est dite semi continue inférieurement (s.c.i) si M est fermé pour tout $r \in \mathbb{R}$.

- F est dite semi compact inférieurement si M est compact pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.4 *Soit* $F : M \subseteq X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

F *est dite faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) au point* $u \in M$ *si*

$$(u_n \rightharpoonup u) \Longrightarrow F(u) \leq \underline{\lim}\, F(u_n)$$

Remarque 1 F *est convexe et (s.c.i)* $\Longrightarrow$ F *est (f.s.c.i)*

Propriètè. 1 *Soient* φ , φ_1 *et* φ_2 *trois fonctionnelles de* X *dans* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. *Si* φ *est s.c.i., alors epi*φ *est fermé dans* $X \times \mathbb{R}$ *et réciproquement.*
2. *Si* φ_1 *et* φ_2 *sont s.c.i. alors* $\varphi_1 + \varphi_2$ *est s.c.i.*
3. *Si* φ *est s.c.i et si* $u_n \to u$, *alors* $\quad \varphi(u) \leq \underline{\lim}\, \varphi(u_n)$.
4. *Si* X *est compact et si* φ *est s.c.i., alors* φ *atteint sa borne inférieure.*
5. *Si* φ *est une fonction convexe, alors epi*φ *est un ensemble convexe dans* $X \times \mathbb{R}$, *et réciproquement.*
6. *Si* φ *est une fonction convexe, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'ensemble* $\{u \in X; \varphi(u) \leq \lambda\}$ *est convexe, mais la réciproque n'est pas vraie. Si* φ_1 *et* φ_2 *sont convexes alors* $\varphi_2 + \varphi_2$ *est convexe.*

Voir([3], page 8).

Définition 1.2.5 *On dit qu'un espace normé E est uniformément convexe si*

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tel que* $(x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ *et* $\|x-y\| > \varepsilon) \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1-\delta.$

Voir([3], page 51).

Exemple 1

1. *$X = \mathbb{R}^2$ la norme $\|(x,y)\|_2 = (|x|+|y|)^{\frac{1}{2}}$ est uniformément convexe tandis que la norme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$ n'est pas uniformément convexe.*
2. *les espaces de Hilbert sont uniformément convexes.*
3. *$L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$ est uniformément convexe. Par contre $L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)$ et $C(K)(K compact)$ ne sont pas uniformément convexes.*

Voir([3], page 51).

Définition 1.2.6 *Un espace vectoriel normé V est dite strictement convexe si V vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(i) $\forall w \in]u, v[, \quad \|w\| \leq \max(\|u\|, \|v\|).$

(ii) $\|u+v\| = \| u \| + \| v \|$ *implique l'existence des scalaires $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta > 0$ et $\alpha u = \beta v$.*

Exemple 2 *Soit V un espace vectoriel normé strictement convexe et V' le dual topologique. Alors V' est strictement convexe.*

Espaces réflexifs

On rappelle qu'on a une injection canonique $J : X \to X''$ définie de la manières suivante : soit $u \in X$, l'application de X' dans $\mathbb{R}$ qui à f associe $\langle f, u\rangle$ est une forme linéaire continue sur X'. C'est donc un élément de X'' noté $J(x)$. On a donc

$\forall u \in X, \forall f \in X' \quad \langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle.$

Il est clair que J est linéaire et c'est une isométrie :

$\forall u \in X, \quad \|J(x)\| = \sup\limits_{\|f\|\leq 1} |\langle J(x), f\rangle| = \sup\limits_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$

On peut donc identifier X à un sous-espace de X''.

Définition 1.2.7 *Soit J l'injection canonique de X dans X'' définie ci-dessus. On dit que X est réflexif si $J(x) = X''$(i.e., si J est surjective) et comme J est une isométrie, alors elle est injective, donc X est alors réflexif si J est bijective.*
Lorsque X est réflexif on identifie implicitement X et X''(à l'aide de l'isomorphisme J).

Exemple 3 *Pour tout $p \in]1, +\infty[$, les espaces $L^p(\Omega)$, l^p et $W^{1,p}(\Omega)$ sont réflexifs. Par contre $l^1, W^{1,1}(\Omega), W^{1,\infty}(\Omega)$, $l^\infty, L^\infty(\Omega)$ et C^0 ne sont pas réflexifs.*

Théorème 1.2.2 *Soit X un espace de Banach.*

i) X est réflexif si et seulement si toute suite bornée (u_n) de X possède une sous-suite qui converge faiblement.

ii) Si X est réflexif et si toutes les sous-suites faiblement convergentes de (u_n) ont la même limite u, alors $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration: voir [1](proposition 21,23,(i) page 258-259) ■

Théorème 1.2.3 *Soit X un espace de Banach.*
X réflexif si et seulement si $B_X = \{x \in X; \|u\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $\sigma(X, X')$(i.e B_X est faiblement compact).

Démonstration: voir[3](proposition III.16, page 44). ■

Définition 1.2.8 *Soit E un espace topologique, et soit A un ensemble de E.*

(i) On dit que un A est faiblement compact si E est compact pour la topologie faible $\sigma(X, X')$.

(ii) On dit que A est faiblement fermé si A est fermé pour la topologie $\sigma(X, X')$.

Proposition 1.2.2 *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est est faiblement compact.*

Démonstration: voir [3](Proposition III.19,page 46). ■

1.3 La différentiabilité au sens Fréchet et Gâteaux

Définition 1.3.1 *Soit X et Y deux espaces de Banach et $f : X \to Y$.*

On dit que f est différentiable au sens de Fréchet ou F-différentiable s'il exist une application linéaire continue F telle que pour tout $u, h \in X$ on a

$$f(u+h) - f(u) = Fh + o(\|h\|), \quad h \to 0. \tag{1.1}$$

On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux et ou G-différentiable s'il exist une application linéaire continue T telle que pour tout $u, k \in X$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f(u+tk) - f(u) = tTk + o(t), \quad t \to 0. \tag{1.2}$$

Voir([4], page 135)

Définition 1.3.2 *Soit $F : X \to [-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle tel que $F \not\equiv +\infty$.*

On dit que $u^* \in X'$ est sous-gradient de F au point u si

$$F(v) - F(u) \geq \langle u^*, v-u \rangle, \quad \forall v \in X. \tag{1.3}$$

L'ensemble des sous-gradients de F au point u est appelé sous-différentiel de u.

Voir([2], page 856).

Remarque 2 *Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $F \not\equiv +\infty$. Alors*

1. *∂F est linéaire.*
2. *le minimum de F existe si et seulement si $0 \in \partial F$.*

Lemme 1.3.1 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle convexe et G-différentiable au point $u \in X$, alors $\partial f(u) = \{f'(u)\}$.*

Voir([2], page 857).

Lemme 1.3.2 *$\partial f(u)$ est un ensemble convexe et fermé.*

Démonstration: Par la définition du sous-différentiel on a

$$\partial f\,(u) = \{u^* \in X^{'}; \langle u^*, v-u\rangle \leq f\,(v) - f\,(u)\}.$$

(1) Montrons que $\partial f\,(u)$ est fermé

Soit(u_n^*) une suite de $\partial f\,(u)$ converge vers u^*, on a

$\langle u_n^* - u^*, v-u\rangle \leq \|u_n^* - u^*\|.\|v-u\|.$

Quand $n \to \infty$ alors $\langle u^*, v-u\rangle \leq f\,(v) - f(u) \Rightarrow u \in \partial f(u)$.

Donc $\partial f(u)$ est fermé.

(2) Nous montrons que $\partial f(u)$ est convexe

Soit $u_1^*, u_2^* \in \partial f(u)$ et soit $t \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}\langle tu_1^* + (1-t)u_2^*, u-v\rangle &= t\langle u_1^*, u-v\rangle + (1-t)\langle u_2^*, u-v\rangle.\\ &\leq tf(v) - tf(u) + (1-t)f\,(v) - (1-t)\,f\,(u).\\ &\leq f\,(v) - f\,(u).\end{aligned}$$

■

1.4 Théorèmes de point fixe

Définition 1.4.1 *Soit $T : X \to X$ une application. On dit que T est une contraction (ou application contractante) s'il existe $k \in [0,1[$ t.q.*

$\forall u, v \in X : \quad \|T\,(u) - T\,(v)\| \leq k\,\|u - v\|.$

voir([3] page 89)

Théorème 1.4.1 ***(Point fixe de Banach)*** *Si l'application $T : X \to X$ est contractante de rapport l, alors elle admet un unique point fixe $u \in X$; i.e.,*

$T\,(u) = u$. De plus , toute suite récurrente

$$\begin{cases} u_{n+1} = T(u_n) \\ u_0 \in X \end{cases}$$

converge vers u, et on a l'estimation d'erreur

$\|u - u_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\|.$

Voir([4] page 17).

Théorème 1.4.2 ***(Point fixe de Brouwer)*** *Soit $K \neq \emptyset$, convexe et compact dans $\mathbb{R}^n$, et soit $F : K \to K$ continue. Alors F admet une point fixe.*

Voir([4] page 52).

Corollaire 1.4.1 ***(Point fixe de Brouwer)*** *Soit E un espace euclidien i.e., E espace vectoriel normé de dimension finie muni d'un produit scalaire $(.,.)$, et*
$F : E \to E$ continue. Supposons que $\exists \rho > 0$ tel que $(Fx, x) \geq 0$ pour $\|x\| = \rho$.
Alors $\exists x_0 \in X, \quad F(x_0) = 0$ avec $\|x_0\| \leq \rho$.

Définition 1.4.2 *Soient E et F deux espaces de Banach, et soit T un opérateur linéaire bornée de E dans F.*
On dit qu'un opérateur T est compact si $T(B_E)$est relativement compact.

Voir ([3] page 89).

Théorème 1.4.3 ***(Théorème de point fixe de schauder)*** *Soit C un ensemble non vide, convexe et fermé de X. Si T est une opérateur compact de C dans C, alors T admet une point fixe.*

voir([4] page 56)

1.5 Quelques notions et résultats sur les opérateurs

Définition 1.5.1 *Soit V un espace de Banach, et soit $u, v \in V$ et (u_n) une suite de V . Soit l'opérateur $A : V \to V'$. Alors on dit que :*

1. *A est monotone si : $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$.*
2. *A est strictement monotone si : $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ avec $u \neq v$.*
3. *A est hémicontinu si : l'application $t \longmapsto \langle A(u + tv), v\rangle$ est continue sur $[0; 1]$.*
4. *A est fortement monotone s'il existe $C > 0$ tel que : $\langle Au-Av, u-v\rangle \geq C\|u-v\|^2$.*
5. *A est maximal monotone si : A est monotone et $\langle b - Av, u - v\rangle \geqslant 0 \Rightarrow b = Au$.*

6. *A est pseudo-monotone si :* $u_n \rightharpoonup u$ *et* $\overline{\lim}\langle Au_n, u_n - v\rangle \geq 0 \Rightarrow \underline{\lim}\langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle$.
7. *A est demicontinue si :* $u_n \to u \Rightarrow Au_n \rightharpoonup Au$.
8. *A est coercive si :* $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} \dfrac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty$.
9. *A est fortement positif s'il existe* $K > 0$ *tel que :* $\langle Au, u\rangle \geq K\|u\|^2$.
10. *Un opérateur A est borné si : l'image de tout borné de V est bornée dans* X'.
11. *A est localement borné si :*

    $\forall u \in V,\ \exists r > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \in X \quad \|u - v\| \leq r \Rightarrow \|Au - Av\| \leq \delta.$

Définition 1.5.2 *Une fonction* $A : X \to 2^Y$ *est dite multivoque, si pour chaque* $x \in X$ *on associe* $A(x), A(x)$ *est un ensemble non vide de* Y.
On note l'application multivoque par $A : X \to 2^Y$.

Voir([5], page 2).

Définition 1.5.3 *Soit la multivoque* $A : X \to 2^{X'}$. *Alors on dit que :*

1. *A est monotone si :* $\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall (u, u^*), (v, v^*) \in G\,(A)$
2. *A est maximal monotone si : A est monotone et*

   $\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall (v, v^*) \in G(A)$.

   Alors $(u, u^*) \in G(A)$.

Proposition 1.5.1 *Soit E un espace topologique et* (u_n) *une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe* $u \in E$ *tel que de toute sous-suite de cette suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers* u. *Alors la suite entière* (u_n) *converge vers* u.

Démonstration: On raisonne par l'absurde. Supposons que la suite ne converge pas vers u. Il existe donc un voisinage V de u et une sous-suite $(u_{n'})$, *tel que* $u_{n'} \notin V$ pour tout n'. Extrayons de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $(u_{n''})$ qui converge vers u. Il existe donc un n_0'' tel que pour tout $n'' \geq n_0''$,
$u_{n''} \in V$, contradiction. ■

Lemme 1.5.1 *Soit* $A : X \to X'$ *un opérateur monotone, alors A est localement borné.*

Démonstration: Soit A un opérateur monotone . Par l'absurde, on suppose que A n'est pas localement borné.

(1) <u>Cas $u = 0$ et $Au = 0$</u>

A est localement borné en 0 i.e., $\exists r > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall v \in X\ \|v\| < \delta\ \Rightarrow\ \|Av\| < r$.

A n'est pas localement borné en 0 si : $\forall r > 0,\ \forall\ \delta > 0,\ \exists v \in X :\ \|v\| < \delta$ et $\|Av\| \geq r$.

en d'autre terme $\exists (v_n) \in X$ tel que : $\|Av_n\| \to +\infty$ quand $\|v_n\| \to 0$.

D'après la monotonie de A :

$$\langle Av_n - Aw, v_n - w\rangle \geq 0\ et\ \langle Av_n - A\left(-w\right), v_n + w\rangle \geq 0,\quad \forall w \in X,\ \forall n \geq 1.$$

$$\langle Av_n - Aw, v_n - w\rangle \geq 0\ et\ \langle Av_n - A(-w), v_n + w\rangle \geq 0,\quad \forall w \in X, \forall n \geq 1.$$

Alors

$$\langle Av_n, w\rangle \leq \langle Av_n, v_n\rangle - \langle Aw, v_n\rangle + \langle Aw, w\rangle.$$

D'où

$$\langle Av_n, -w\rangle \leq \langle Av_n, v_n\rangle - \langle A(-w), v_n\rangle - \langle A(-w), w\rangle.$$

Par conséquent :

$$\langle Av_n, w\rangle \leq \|Av_n\|.\|v_n\| + \|Aw\|.\|v_n\| + \|Aw\|.\|w\|,$$

et

$$\langle Av_n, w\rangle \geq -\|Av_n\|.\|v_n\| + \|Aw\|.\|v_n\| + \|Aw\|.\|w\|.$$

On prend : $\delta = \max\{\|A(-w)\|.\|v_n\| + \|A(-w)\|.\|w\|,\ \ \|Aw\|.\|v_n\| + \|Aw\|.\|w\|\}$.

On a $-\|Av_n\|.\|v_n\| - \delta \leq \langle Av_n, w\rangle \leq \|Av_n\|.\|v_n\| + \delta$ implique $|\langle Av_n, w\rangle| \leq \|Av_n\|.\|v_n\| + \delta$.

Alors

$$|\langle \frac{Av_n}{1 + \|Av_n\|.\|v_n\|}, w\rangle| \leq \|Av_n\|.\|v_n\| + \delta.$$

Donc

$$|\langle \frac{Av_n}{1+\|Av_n\|.\|v_n\|}, w\rangle| \leq \frac{\|Av_n\|.\|v_n\|}{1+\|Av_n\|.\|v_n\|} + \frac{\delta}{1+\|Av_n\|.\|v_n\|} \leq \quad 1+\delta.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $c > 0$ tel que : $\|\frac{Av_n}{1+\|Av_n\|.\|v_n\|}\| \leq c$,

d'où $\frac{\|Av_n\|}{1+\|Av_n\|.\|v_n\|} \leq c$ *implique* $\|Av_n\| \leq \frac{c}{1-c\|v_n\|}$.

Ce qui est une contradiction avec $\|Av_n\| \to +\infty$.

(2) Cas général.

Soit u fixé dans X. On pose : $\tilde{A}(v) = A(u+v) - A(u), \quad v \in X$.

$\tilde{A}$ est monotone, en effet

$$\begin{aligned}\langle \tilde{A}(v_1) - \tilde{A}(v_2), v_1 - v_2\rangle &= \langle A(u+v_1) - Au - A(u+v_2) + Au, v_1 - v_2\rangle \\ &= \langle A(u+v_1) - A(u+v_2), (v_1+u) - (v_2+u)\rangle \geq 0\end{aligned}$$

(car A est monotone),

d'après le cas précédent $\tilde{A}$ est localement borné en 0 i.e.,

$$\exists r(u) > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall v \in X,\ \|v\| < \delta \ \Rightarrow \|\tilde{A}v\| < r(u) \Rightarrow \ \|A(u+v) - Au\| < r(u).$$

On pose $w = u + v$, on a $\|w - u\| < \delta(u)$ *implique* $\|Aw - Au\| < r(u)$.

D'où A est localement borné.

■

Lemme 1.5.2 *Soit V un espace vectoriel normé, et $A : V \to V'$ un opérateur.*

(i) Supposons que A est monotone et hémicontinu et satisfait :

$$si \quad u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n \rightharpoonup b \quad et \quad \langle Au_n, u_n\rangle \to \langle b, u\rangle. \tag{1.4}$$

Alors $b = Au$.

(ii) Supposons que A soit monotone et hémicontinu. Si

(a) $u_n \rightharpoonup u$ et $Au_n \to b$ dans X'

ou

$$(b) \quad u_n \to u \quad \text{dans } V \quad \text{et} \quad Au_n \rightharpoonup b \text{ dans } V'.$$

Alors $b = Au$.

Démonstration: (i) Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ et $\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle b, u\rangle$.

A monotone i.e., $\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in X$,

alors $\langle Au_n, u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle - \langle Av, u_n\rangle + \langle Av, v\rangle \geq 0$,

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n\rangle - \lim\limits_{n\to+\infty} \langle Au_n, v\rangle - \lim\limits_{n\to+\infty} \langle Av, u_n\rangle + \langle Av, v\rangle \geq 0$.

Par conséquent, $\langle b, u\rangle - \langle b, v\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle Av, v\rangle \geq 0$, donc $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in X$.

On pose : $v - u = tw$ avec $t \geq 0$ et $w \in X$,

on a $\langle A(u + tw), -tw\rangle \geq 0, \quad \forall w \in X, alors \quad \langle b - A(u + tw), w\rangle \leq 0, \quad \forall w \in X$

puisque A est hémicontinu, on a $\langle A(u + tw), w\rangle \underset{t\to 0}{\to} \langle Au, w\rangle$.

Alors $\langle b - Au, w\rangle \leq 0, \quad \forall w \in X$, donc $\langle b - Au, w\rangle = 0, \quad \forall w \in X$.

Par le corollaire (1.1.1), $\exists w_0 \in X$ tel que $\langle b - Au, w_0\rangle = \|w_0\|^2$ et $\|b - Au\| = \|w_0\|$,

i.e $\|b - Au\| = 0$, donc $b = Au$.

(ii) si (a) (ou (b)) est satisfaite alors par le théorème (1.2.1) (4) (ou 5), on obtient

$\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle b, u\rangle$, et le résultat s'ensuit d'après (i). ∎

Proposition 1.5.2 *Soit $A : X \to X'$ un opérateur, on a :*

(i) Si est A un opérateur monotone et hémicontinu, alors A est maximal monotone.

(ii) Si A un opérateur monotone et hémicontinu, alors A est pseudo-monotone et demicontinu.

(iii) Si A est un opérateur strictement convexe et G-différentiable alors A' est strictement monotone.

Démonstration: (i) Soit $v = u - tw$ avec $t > 0$.

Si $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0$ alors $\langle b - A(u - tw), w\rangle \geq 0$.

Puisque A est hémicontinu, alors

$\langle b - A(u - tw), w\rangle \underset{t\to 0}{\to} \langle b - Av, w\rangle$ et $\langle b - Au, w\rangle \geqslant 0, \quad \forall w \in X$.

d'où $\langle b - Av, w\rangle = 0, \quad \forall w \in X$.

donc $Au = b$.

(ii) Soit $u_n \to$u lorsque $n \to +\infty$. Considérons une sous-suite arbitraire (u_m) de (u_n). On a aussi $u_m \to u$ lorsque $m \to +\infty$, puisque A est monotone alors par conséquent la suite (Au_m) est bornée (car A est localement borné). En vertu du théorème 1.2.2 (i) (Au_m) admet une sous-suite faiblement convergente dans l'espace réflexif $X^{'}$, $A_{m'} \rightharpoonup b$ lorsque $m^{'} \rightharpoonup +\infty$.

Comme $u_{m'} \to u$, alors, par le lemme (1.5.2) (ii), il vient $b = Au$. Par conséquent, en vertu de la poposition 1.5.1, on obtient $Au_n \rightharpoonup Au$ lorsque $n \to +\infty$.

(iii) la démonstration de cette partie est simple. ∎

Lemme 1.5.3 *Soit* V *un espace vectoriel normé tel que* $\dim V < +\infty$ *, et soit* $A : V \to V^{'}$ *un opérateur monotone et hémicontinu, alors* A *est continu.*

Démonstration: supposons que A monotone et hémicontinu. Soit (u_n) une suite de V tel que $u_n \to u$.

L'opérateur A est monotone alors A est localement borné (d'après le lemme 1.5.1) i.e.,

$$\exists r > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall v \in V, \quad \|u - v\| < r \quad \Rightarrow \quad \|Au - Av\| < \delta.$$

En particulier :

$$\forall n \geq n_0, \quad \|u_n - u\| < r \quad \Rightarrow \quad \|Au_n - Au\| < \delta,$$

d'où $\|Au_n\| \leq \delta + \|Au\|$.

Alors (Au_n) est une suite bornée dans $V^{'}$ et $\dim V < +\infty$.

D'aprés le théorème 1.1.3, il existe $b \in V^{'}$ et une sous-suite (Au_{n_k}) de (Au_n) tel que la sous-suite converge vers b et $\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle \to \langle b, u\rangle$.

D'après le Lemme 1.5.2 on a $b = Au$ .i.e., $Au_{n_k} \to Au$.

Maintenant on va montrer que $Au_n \to Au$. Par l'absurde, supposons qu'il existe une sous-suite $(Au_m)_m$ de $(Au_n)_n$ tel que :

$Au_m \nrightarrow Au$. i.e., $\exists \varepsilon > 0, \quad \|Au_m - Au\| > \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}$,

(u_m) est une sous-suite de (u_n), alors $u_m \to u$ implique $\|Au_m\| < C, \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (car A est localement borné).

Donc il existe une sous-suite (Au_{m_k}) de (Au_m) tel que : $Au_{m_k} \to Au$, D'où la contradiction.

Par conséquent $Au_n \to Au$. Donc A est continu. ■

Lemme 1.5.4 *Soit Y un espace vectoriel normé tel que* $\dim\ Y < +\infty$
et soit $A : Y \to Y'$ un opérateur continu et coercive.
Alors $\forall\, f \in Y',\ \exists u \in\ Y$ *tel que* $Au = f$.

Démonstration: A est coercive i.e., $\forall \lambda > 0,\ \ \exists \beta > 0,\ \ \forall v \in Y,\ \ (\|v\| > \beta\ \ \Rightarrow \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} > \lambda)$.
i.e., $\langle Av, v\rangle > \lambda\|v\| \quad \Rightarrow \langle Av - f, v\rangle > \lambda\|v\| - \langle f, v\rangle$
d'où $\langle Av - f, v\rangle > \lambda\|v\| - \|f\|\|v\|$,
alors $\langle Av - f, v\rangle > (\lambda - \|f\|)\,\|v\|$.
On pose : $F(v) = Av - f$, $\|v\| = 1$ et on prend $\lambda > \|f\|$, on obtient
$\langle Fv, v\rangle \geq 0,\ \ \|v\| = 1$.
A continu $\Rightarrow F$ continue, alors d'après le corollaire du théorème de point fixe de Brouwer :

$$\exists v_0 \in X : \|v\| \leq 1 \ \ et \ \ F(v_0) = 0.$$

Si de plus A est strictement monotone, alors la solution de l'équation $Au = f$ est unique.

■

Lemme 1.5.5 *Soit $F : X \to [-\infty, +\infty]$ convexe et semi-continue inférieurement.*
On suppose qu'il existe $(u, a) \in X \times \mathbb{R}$ tel que

$$-\infty < a < F(u), \quad u \in \overline{D(F)} \tag{1.5}$$

Alors il existe $(u^*, \alpha) \in X' \times \mathbb{R}$ tel que

$$\langle u^*, u\rangle - a > \alpha > \langle u^*, v\rangle - F(v), \quad \forall v \in X. \tag{1.6}$$

En particulier, si $F(u) \not\equiv \mp\infty$, nous obtenons

$$F(v) \geq a + \langle u^*, v - u\rangle \tag{1.7}$$

pour tout $v \in X$ tel que $F(v) > -\infty$.

Voir ([1] page 382).

Démonstration: Pour tout $z^* \in (X \times \mathbb{R})^{'}$

$$\langle z^*, (v, b)\rangle = \langle w^*, v\rangle + a^* b, \quad \forall (v, b) \in X \times \mathbb{R} \tag{1.8}$$

où $(w^*, a^*) \in X^{'} \times \mathbb{R}$.

Si $F = +\infty$,le résultat est trivial,il suffit que prend $u^* = 0$.

Soit $F \not\equiv +\infty$. D'après (Propriété 1) $epi(F)$ est non vide, convexe et fermé. De (1.6), (u, a) n'appartient pas de $epi(F)$.

Par le théorème de Hahn-Banach, la deuxième forme géométrique (voir[3], page 7) il existe $z^* \in (X \times \mathbb{R})^{'}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle w^*, v\rangle + a^* b < \beta < \langle w^*, u\rangle + a^* a, \quad \forall (v, b) \in epi\,(F)\,. \tag{1.9}$$

Pour tout $v \in D(F)$ on a : $(v, F(v)) \in epi(F)$, donc

$$\langle w^*, u\rangle + a^* a > \beta > \langle w^*, v\rangle + a^* F\,(v)\,, \quad \forall v \in D(F). \tag{1.10}$$

Maintenant on va montrer que $a^* < 0$.

Si $a^* \geq 0$, puisque $u \in \overline{D(F)}$, alors il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(F)$ tel que : $v_n \to u$.

Donc

$$\langle w^*, u\rangle + a^* F\,(u) \leq \beta < \langle w^*, u\rangle + a^* a, \tag{1.11}$$

c'est une contradiction avec $a < F\,(u)$, donc $a^* < 0$.

Il suffit de prendre $u^* = -\frac{1}{a^*} w^*$. Donc (1.7) est atteint. ■

1.6 Quelques théorèmes principaux

Théorème 1.6.1 ***(Théorème de Picard-Lindelöf)*** *Soit* $x : [t_0 - c; t_0 + c] \to Y$ *une application et* Y *espace de Banach et* $c > 0$.

Et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.12}$$

avec $\mathrm{Q}_b = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times Y : |t - t_0| \leq a, \|x - y_0\| \leq b\}$ *et* $f : \mathrm{Q}_b \to Y$ *continue, lipschitzienne par rapport à la deuxième composante,i.e.,*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall (t,x), (t,y) \in \mathrm{Q}_b$$

et bornée avec

$$\|f(t,x)\| < K, \quad \forall (t,x) \in \mathrm{Q}_b \;\; et\; K > 0\; fix\acute{e}.$$

On pose $c < \min(a, \frac{b}{K})$*. Alors le problème (1.12) admet une solution unique sur l'intervalle* $[t_0 - c; t_0 + c]$.

Voir([4], page 78).

Lemme 1.6.1 ***(Gronwall)*** *Soient* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues avec* g *non décroissante, et soit* $c > 0$ *telle que :* $f(t) \leq g(t) + c\int_a^t f(s)ds$.
Alors $f(t) \leq g(t)\exp c(t - a)$

Démonstration: voir[1](Proposition 3.10,page 82). ■

Remarque 3 *Le lemme de Gronwall reste valable si on remplacer la fonction* g *par une constante.*

Chapitre 2

Quelques résultats d'existence abstraits

Dans ce chapitre nous présentons l'existence des solutions de l'équation et l'inéquation dans un espace de Banach.

2.1 Théorème de Minty-Browder

Proposition 2.1.1 *Soit $g_i : \overline{B}(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que*

$$\sum_{i=1}^{n} g_i\left(x\right).x_i \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } (\|x\| = R). \tag{2.1}$$

Alors l'équation $g_i\left(x\right) = 0$ admet une solution.

Voir([4], page 53).

Démonstration: On pose $g\left(x\right) = \left(g_1\left(x\right), ..., g_n\left(x\right)\right)$ et on suppose que

$$g\left(x\right) \neq 0, \quad \forall x \in \overline{B}\left(0, R\right).$$

On défini $f\left(x\right) = -R\frac{g(x)}{\|g(x)\|}$, il est clair que f est continue sur $\overline{B}(0, R)$.

D'après le théorème de point fixe de Brouwer on a

$$\exists x \in \overline{B} \ \text{ tel que} : f\left(x\right) = x \ \text{ et } \|x\| = R.$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x)x_i = -\frac{1}{R.\|g(x)\|}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i = -\frac{1}{R.\|g(x)\|}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0$$

Ce qui est une contradiction avec $\sum_{i=1}^{n} g_i(x).x_i \geq 0$. ■

Théorème 2.1.1 *Soit $A : X \to X'$ un opérateur monotone, hémicontinu et coercive dans un espace réfléxive X. On suppose que $\{w_1, w_2, ...\}$ est une base de X. Alors l'équation*

$$Au = b, \quad u \in X \tag{2.2}$$

admet une solution.

Démonstration: Soit l'équation de Galerkin

$$a(u_n, w_k) = \langle b, w_k \rangle \tag{2.3}$$

où $a(u,v) = \langle Au, v \rangle$ et $X_n = vect\{w_1, ..., w_n\}$.

Si $\dim X = +\infty$, on va prouver que l'équation (2.3) admet une solution $u_n \in X_n$ *et* $u_n \rightharpoonup u$ dans X et u vérifie (2.2).

Etape 1 : <u>Solution de l'équation de Galerkin</u>

On pose : $g(u) = \langle Au - b, u \rangle$ et $g_k(u) = \langle Au - b, w_k \rangle$.

A est coercive i.e., $\frac{g(u)}{\|u\|} \underset{\|u\| \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par conséquent, il existe $R > 0$ tel que :

$$g(u) > 0, \quad \forall \|u\| \geq R. \tag{2.4}$$

Soit l'équation suivante :

$$g_k(u_n) = 0, \quad u_n \in X_n, \quad k = 1, ..., n \tag{2.5}$$

A est demicontinu (car A est monotone et hémicontinu) en vertu du lemme précédent.

L'application $u \mapsto g_k(u)$ est continue (car A est demicontinu et X réfléxif).

En particulier

$$g\left(u_n\right)=\sum_{k=1}^{n} g_k(u_n)c_{kn}, \quad et \quad u_n=\sum_{k=1}^{n} c_{kn}w_k, \quad \forall u_n\in X_n \quad et \quad \|u_n\|=R. \tag{2.6}$$

Alors g (u_n) >0

par la proposition précédente, g$_k(u_n)=0$ admet une solution.

Etape 2 :Estimation à priori

Si u_n est solution de (2.2), alors

$$g(u_n)=0 \quad \Rightarrow \quad \|u_n\|\leq R, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Si u est solution de (2.2) alors $g\left(u\right)=0$.

De (2.4) on a $\|u\|\leq R$.

Etape 3 : Bornitude de la suite (Au_n)

A est localement borné car A est monotone, i.e., :

$$\exists r>0, \quad \exists\delta>0: \quad \|v\|\leq r\Rightarrow\|Av\|\leq\delta.$$

A est monotone donc $\langle Au_n-Av,u_n-v\rangle\geq 0$ et $g\left(u_n\right)=0$, alors

$$\langle Au_n,u_n\rangle=\langle b,u_n\rangle, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\langle Au_n,u_n\rangle\leq\|b\|.\|u_n\|\leq\|b\|R.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|Au_n\| &= \sup_{\|v\|=r}\frac{\langle Au_n,v\rangle}{r}\\ &\leq \sup_{\|v\|=r}\frac{1}{r}(\langle Av,v\rangle+\langle Au_n,u_n\rangle-\langle Av,u_n\rangle\\ &\leq \frac{1}{r}\left(\delta r+\|b\|R+\delta R\right)\end{aligned}$$

Etape 4 : La convergence de la méthode de Galerkin.

Puisque X est réfléxif et la suite (u_n) est borné, alors il existe $u \in X$ tel que : $u_n \rightharpoonup u$ dans X.

Par l'équation de Galerkin on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle, \qquad \forall w \in \bigcup_{n\geq 1} X_n \tag{2.8}$$

Puisque $\bigcup\limits_{n\geq 1} \mathrm{X}_n$ est dense dans X alors : $\quad Au_n \rightharpoonup b$ et $u_n \rightharpoonup u$.

Par le Lemme (1.5.2) on a $b = Au$. ■

2.2 Théorème de Rockafellar

Théorème 2.2.1 *Soit $F : X \to]-\infty, +\infty]$ convexe et semi continue inférieurement, et soit $F \not\equiv +\infty$.*

Alors ∂F est maximal monotone.

Voir([2], page 860).

Proposition 2.2.1 *Soit X un espace vectoriel normé réfléxif, et soit $X^{'}$ le dual topologique tel que $X^{'}$ est strictement convexe.*

Soit $\varphi(u) = \frac{\|u\|^2}{2}$.

Alors l'opérateur $J : X \to 2^{X^{'}}$ est univoque, surjectif, demicontinu, maximal monotone, borné et coercive.

D'où $J(u) = \varphi'(u), \quad \forall\ u \in X \quad$ *(φ' est la differentiale de φ au sens de Gâteaux).*

Voir([2] page 861).

Démonstration: On définit l'opérateur multivoque $A : X \to 2^{X^{'}}$ par

$$Au = \{u^* \in X^{'}; \langle u^*, u\rangle_X = \|u\|^2, \|u^*\| = \|u\|\}. \tag{2.9}$$

D'après le corollaire de Hahn-Banach (corollaire 1.1.1), $\quad Au \neq \emptyset$.

On pose $\quad X_0 = \mathbb{R}u_0 \quad$ et $\quad f(tu) = t\|u\|^2, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

l'application $f : X_0 \to \mathbb{R}$ est linéaire avec $\|f\| = \|u\|$.

D'après les Corollaires du théorème Hahn-Banach (Corollaire 1.1.1) il existe une forme linéaire continue $u^* \in X'$ avec $\|u^*\| = \|u\|$ et $\langle u^*, u\rangle = f(u) = \|u\|^2$.

(I) Nous montrons que l'opérateur A est univoque

Soient u_1 et u_2 deux éléments de Au,

$\langle u_1, u\rangle = \langle u_2, u\rangle = \|u\|^2 = \|u_1\| = \|u_2\| \Rightarrow 2\|u_1\|.\|u\| \leq \|u_1\| + \|u_2\| = \langle u_1 + u_2, u\rangle \leq \|u_1 + u_2\|.\|u\|$

d'où $\|u_1\| \leq \frac{1}{2}\|u_1 + u_2\|$.

Par conséquent $\|u_1 + u_2\| = \|u_2\| + \|u_2\|$. Puisque X' est strictement convexe on obtient $u_1 = u_2$.

(II) Nous montrons que $A : X \to X'$ est demicontinu

Soit $u_n \to u$ dans X . Par conséquent $\|Au_n\| = \|u_n\| \to \|u\|$.

comme (Au_n) est bornée et X' est réfléxif, alors il existe une sous-suite de (Au_n) convergent faiblement vers u dans X'.

Pour tout $v \in X$ nous avons

$$\langle u^*, v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Au_n, v\rangle \leq \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|\|v\| = \|u\|\|v\|.$$

De plus,

$$\langle u^*, u\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 = \|u\|^2.$$

Par conséquent $u^* = Au$.

(III) Nous montrons que J est atteint

Maintenant on va prouver que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\|u + th\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2}{t} = \langle Au, h\rangle, \quad \forall h \in X. \tag{2.10}$$

En effet, pour tout $u, v \in X$ on a

$$\begin{aligned}\langle Av, v - u\rangle &\geq \|v\|^2 - \|u\|.\|v\| \\ &\geq \|v\|^2 - \tfrac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\|v\|^2 - \tfrac{1}{2}\|u\|^2 \\ &\geq \|u\|.\|v\| - \|u\|^2 \\ &\geq \langle Au, v - u\rangle.\end{aligned}$$

On pose $v = u + th, \quad h \in X, \quad t \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$t\langle Au, h\rangle \leq \frac{1}{2}\|u+th\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \leq t\langle A\left(u+th\right), h\rangle$$

De (2.10) on a : $\quad Au = \varphi'(u)$.

D'après le lemme (1.3.1), on obtient $\quad \partial\varphi = \varphi'$.

Donc $J = A$.

(VI) Nous montrons J est coercive et borné

Puisque φ est G-différentiable et $J = \varphi'$.

Alors $\quad \langle Ju, u\rangle = \|u\|^2 \quad$ et $\quad \|Ju\| = \|u\|$.

Donc J est coercive et borné.

(VII) Nous montrons J est monotone

J est monotone, en effet

$$\begin{aligned}\forall u, v \in X, \quad \langle Ju - Jv, u - v\rangle &= \langle Ju, u\rangle + \langle Jv, v\rangle - \langle Ju, v\rangle - \langle Jv, u\rangle \\ &\geq \quad \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \\ &= \quad (\|u\| - \|v\|)^2.\end{aligned}$$

(VIII) Nous montrons J est surjective

J est demicontinu alors il est hémicontinu, en effet

Soit (t_n) une suite de $[0,1]$ converge vers t_0, alors

$$u + t_n v \to u + t_0 v \tag{2.11}$$

donc

$$\langle J(u + t_n v), w\rangle \to \langle J(u + t_0 v), w\rangle \tag{2.12}$$

(car X est espace réflexif), i.e., J est hémicontinu.

$J : X \to X'$ monotone, coercive et hémicontinu. Par le théorème 2.1.1, J est surjectif.

(IX) Nous montrons que J est maximal monotone

J est un opérateur monotone et hémicontinu donc J est un opérateur maximal monotone (Voir la proposition 1.5.2) ■

Proposition 2.2.2 *Soit la fonctionnelle* $F : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Alors le minimum de F *existe si les deux conditions suivantes sont vérifier :*

(a) F *convexe et semi continue inférieurement.*

(b) $F(u) \to +\infty$ *quand* $\|u\| \to +\infty$.

Démonstration: voir([3], page 46). ■

Démonstration: (Théorème 2.2.1)

Etape 1 Nous montrons que l'opérateur ∂F est monotone

Pour $(u, u^*), (v, v^*) \in G(\partial F)$, on a $u^* \in F(u)$ et $v^* \in F(v)$. Donc :

$$F(v) - F(u) \geqslant \langle u^*, v - u\rangle, \quad et \quad F(u) - F(v) \geqslant \langle v^*, u - v\rangle. \tag{2.13}$$

Maintenant l'addition est sous la forme :

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Etape 2 Nous montrons que l'opérateur ∂F est maximal monotone

Soit $(u_0, u_0^*) \in X \times X'$ avec :

$$\langle u_0^* - u^*, u_0 - u\rangle \geqslant 0, \quad \forall (u, u^*) \in G(\partial F). \tag{2.15}$$

On va montrer que $u_0^* \in \partial F(u_0)$. Ici en utilisant l'assertion (II) prochaines. Puisque $R(J + \partial F) = X'$, alors il existe deux éléments u et u^* tel que :

$$J(u) + u^* = J(u_0) + u_0^*, \quad u^* \in \partial F(u). \tag{2.16}$$

De (2.15) et (2.16), on a $\langle J(u_0) - J(u), u_0 - u\rangle \leqslant 0$.

Alors $u_0 = u$ (car J est strictement monotone).

De (2.16) $u_0^* = u^*$,i.e., $u_0^* \in \partial F(u_0)$.

(II) Maintenant on va montrer qu'il existe un opérateur strictement monotone $J : X \to X'$ tel que $R(J + \partial F) = X'$.

Pour cela on considère le problème suivant :

$$\inf_{u\in X} \varphi(u) = \beta. \tag{2.17}$$

d'où

$\varphi(u) = H(u) + F(u) - \langle u^*, u\rangle$ et $H(u) = \frac{\|u\|^2}{2}$.

Par la définition de J on a $J(u) = H'(u)$.

J est strictement monotone car H est strictement convexe (voir la proposition 1.5.2 (iii)).

φ vérifie la propriété suivante :

$\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe et semi continue inférieurement et $\varphi(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$. En effet,

si on prend $u^* \in X'$ tel que $\|u^*\| = 1$ *et* $\langle u^*, u\rangle = \|u\|$ (u^* existe (voir[3], page 4))

donc $\varphi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} + F(u) - \|u\|$,

d'après le lemme (1.5.5), il existe $u_0^* \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$F(u) \geqslant \langle u_0^*, u\rangle - \alpha, \quad \forall u \in X$$

donc

$$\varphi(u) \geqslant H(u) - \|u\| \left(\|u^*\| + \|u_0^*\|\right) - \alpha \underset{\|u\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'après la proposition précédente le problème (2.17) admet une solution u. La Remarque (2) donne

$$0 \in \partial\varphi(u) \tag{2.18}$$

Par la linéarité de sous-différential on a :

$$\partial\varphi(u) = \partial H(u) + \partial F(u) - u^* = J(u) + \partial F(u) - u^*.$$

De(2.18) on obtient $R(J + \partial F) = X'$.

■

2.3 Théorème principal sur les perturbations pseudo-monotones de l'opérateur maximal monotone

Proposition 2.3.1 *Soit $K \neq \emptyset$ un compact et convexe dans X, et soit $M \subseteq K \times X'$ tel que :*

$$\langle f - g, v - w \rangle \geq 0, \quad \forall (v, f), (w, g) \in M \tag{2.19}$$

et $T : K \to X'$ application continue. Alors l'inégalité

$$\langle f - Tu, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall (v, f) \in M \tag{2.20}$$

admet une solution.

Voir([4], page 62).

Démonstration: Supposons que l'inégalité (2.20) n'admet pas une solution $u \in K$.

Etape 1 Partition de l'unité

On définit l'ensemble :

$U(v, f) = \{u \in K; \langle f - Tu, v - u \rangle < 0\}.$

Il est clair que $U(v, f)$ est un ouvert de K.

Puisque (2.20) n'admet pas une solution, $U(v, f)$ pour tout $(v, f) \in M$, forme un recouvrement de K, donc on peut extraire un sous-recouvrement fini $U(v_i, f_i)$, $(i = 1, ..., m)$.

Par la définition de la partition de l'unité il existe $\beta_i : K \to \mathbb{R}$ avec $supp\beta_i \subseteq U(v_i, f_i)$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_i(u) = 1, \quad et \quad 0 \leq \beta_i \leq 1, \quad \forall u \in K. \tag{2.21}$$

Etape 2 Théorème de point fixe de Brouwer

Soit $K_1 = co(v_1, ..., v_m) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \ ; \ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \ 1 \leq p \leq m\}$,

on définit deux applications

$p(u) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) v_i$ et $q(u) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) f_i.$

L'application p est continue car β_i est continue. D'après le théorème de point fixe de

Brouwer

$$\exists u^* \in K_1 : \quad p(u^*) = u^*.$$

Etape 3 Construction de la contradiction

Soit

$$\triangle_{ij} = \langle f_i - Tu^*, v_j - u^* \rangle$$

nous avons

$$\triangle_{ij} + \triangle_{ji} = \triangle_{ii}\triangle_{jj} + \langle f_i - f_j, v_j - v_i \rangle.$$

De (2.19) on a

$$\langle f_i - f_j, v_j - v_i \rangle \leq 0 \ \Rightarrow \triangle_{ij} + \triangle_{ji} \leq \triangle_{ii}\triangle_{jj}.$$

Puisque $p(u^*) = u^*$ et par la définition de p et q on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q(u^*) - Tu^*, p(u^*) - u^* \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\Delta_{ij} \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\frac{\Delta_{ij}+\Delta_{ji}}{2} \end{aligned}$$

alors

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{m} \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\frac{\Delta_{ii}+\Delta_{jj}}{2} \tag{2.22}$$

Si $\beta_i(u^*)\beta_j(u^*) \neq 0$ alors $u^* \in U(v_i, f_i) \cap U(v_j, f_j)$.

Par construction de $U(v, f)$, cela signifie que $\Delta_{ii} < 0$ et $\Delta_{jj} < 0$.

De (2.22) on a : $\beta_i(u^*) = 0, \quad \forall i = 1, ..., m$ et $u^* \in K$.

Donc il ya contradiction avec (2.21).

■

Théorème 2.3.1 *On considère l'inéquation suivante :*

$$b \in Au + Bu, \quad u \in C \tag{2.23}$$

où $A : C \subseteq X \to 2^{X'}$ *et* $B : C \subseteq X \to X'$ *deux opérateurs qui vérifient :*

1. *C non vide, convexe et fermé dans un espace réfléxif X.*
2. *L'opérateur multivoque A est maximal monotone.*
3. *L'opérateur B est pseudo-monotone, borné et demicontinu.*

4. Si C n'est pas borné, alors il existe $u_0 \in C \cap D(A)$ et $r > 0$ tel que :

$$\langle Bu, u - u_0 \rangle > \langle b, u - u_0 \rangle, \quad \forall u \in C \text{ avec } \|u\| > r.$$

Alors l'inéquation précédente admet une solution.

voir([2] page 867)

Démonstration:

Pour démontrer ce théorème on divise la démonstration en cinq étapes.

Etape 1 : équivalence à l'inéquation variationnelle

Nous cherchons $u \in C$ telle que :

$$\langle b - Bu - v^*, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall (v, v^*) \in G(A). \tag{2.24}$$

Le problème (2.24) est équivalent au problème (2.23), en effet :

Si $u \in C$ solution de (2.24) on pose $w = b - Bu$, alors

$\langle w - v^*, u - v \rangle \geq 0 \;\; \forall (v, v^*) \in G(A) \;\; \Leftrightarrow \;\; w \in Au \;\; \Leftrightarrow \;\; b - Bu \in Au \;\; \Leftrightarrow \;\; b \in Au + Bu.$

Etape 2 : Estimation à priori

$G(A) \neq \emptyset$ car $(0,0) \in G(A)$.

Soit u solution de (2.24), puisque $(0,0) \in G(A)$ on obtient : $\langle b - Bu, u \rangle \geq 0$.

Pour la condition (4) avec $u_0 = 0$ $\|u\| \leq r$ pour r fixé positif.

Etape 3 : Le problème tronqué

On définit l'ensemble $\mathcal{L} = \{Y \subseteq X; dimY < +\infty\}$.

On considère le problème d'approximation :

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v \rangle, \quad \textit{pour tout } (v, v^*) \in G(A) \tag{2.25}$$

nous cherchons $u_Y \in C \cap Y$.

Etape 4 : Solution de l'équation (2.25) par la méthode de troncature

(IV-1) Le problème tronqué.

Soit $R > 0$.

Pour $Y \in \mathcal{L}$, nous remplaçons (2.25) par le problème tronqué :

$$\langle b - Bu_R - v^*, u_R - v\rangle \geq 0, \quad \forall (v, v^*) \in G_R \; et \; u_R \in K_R, \tag{2.26}$$

où

$$K_R = \{v \in C \cap Y; \|R\| \leq v\} \quad \text{et} \quad G_R = \{(v, v^*) \in G(A); v \in K_R\}$$

D'après la proposition (2.3.1), le problème (2.25) admet une solution $u_R \in K_R$.

(IV-2) Solution de l'equation (2.25) par la propriètè d'intersection finie.

Soit ρ_R l'ensemble des solutions de (2.26), de l'Etape 2, on obtint

$$\|u_R\| \leq r, \quad \forall u_R \in \rho_R.$$

Puisque B est demicontinu alors ρ_R est fermé, et inclus dans $\{u \in C \cap Y; \|u\| \leq r\}$

Si $r \leq R \leq R^{'}$ alors $G_R \subseteq G_{R'}$ et $\rho_R \subseteq \rho_{R'}$.

Donc par la propriété d'intersection finie (voir [4] page 756), il existe un élément u_Y tel que

$$u_Y \in \bigcap_{R \geq r} \rho_R.$$

Il est clair que u_Y est solution du problème d'approximation et que

$$\|u_Y\| \leq r, \quad u_Y \in C \cap Y. \tag{2.27}$$

Etape 5 : Convergence de la méthode de Galerkin par l'intersection finie

Pour tout $Y \in \mathcal{L}$, la problème d'approximation (2.25) admet une solution u_Y. Nous avons prouver que u_Y converge vers la solution u du problème (2.24).

V-1 L'intersection finie principale.

Soient $Y, Z \in \mathcal{L}$. On pose :

$$M_Z = \{(u_Y, Bu_Y) \in X \times X^{'}, u_Y \text{ solution de (2.25) avec } Z \subseteq Y\}.$$

Nous voulons montrer l'existence de (u, u^*) tel que :

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z}. \tag{2.28}$$

où $\overline{M_Z}$ est la ferméture de M_Z au sens faible.

Nous prouvons maintenant (2.28). De (2.27) il existe une boule fermé K de $X \times X^{'}$ tel que

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} M_Z \subseteq K.$$

Puisque X est réflexif alors $X^{'}$ et $X \times X^{'}$ sont reflexifs, K est faiblement compact et puisque $\overline{M_Z}$ est faiblement fermé alors $\overline{M_Z}$ est faiblement compact et

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z} \subseteq K.$$

Soient $W, Z \in \mathcal{L}$ et S l'espace engendré par W et Z. Alors

$$M_S \subseteq M_Z \cap M_W \quad \Rightarrow \quad \overline{M_Z} \cap \overline{M_W} \neq \emptyset.$$

Par récurrence

$$\overline{M_{Y_1}} \cap .... \cap \overline{M_{Y_n}} \neq \emptyset, \qquad \forall Y_1, ..., Y_n \in \mathcal{L}.$$

Donc il existe (u, u^*) tel que : $(u, u^*) \in \bigcap_{z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z}$.

V-2 Construction de l'ordre spécial par la maximale monotonicité de A

Il existe $(v_0, v_0^*) \in G\,(A)$ tel que :

$$\langle b - u^* - v_0^*, u - v_0 \rangle \leq 0. \tag{2.29}$$

En effet, si $\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle > 0 \;\; \forall (v, v^*) \in G\,(A)$

$\Rightarrow \quad b - u^* \in Au$, (car A est maximal monotone).

On prend $\quad v = u$ et $v^* = b - u^*$, on obtient

$$(v, v^*) \in G\,(A) \;\; et \;\; \langle b - u^* - v^*, u - v \rangle = 0.$$

Ce qui est une contradiction.

V-3 Un argument d'approximation spécial

Pour $Y \in \mathcal{L}$. L'ensemble $\overline{M_Y}$ est faiblement fermé dans $X \times X^{'}$ et $(u, u^*) \in \overline{M_Y}$.

Donc il existe une suite $(u_n; u_n^*)$ de M_Y tel que :

$(u_n, u_n^*) \rightharpoonup (u, u^*)$ dans $X \times X'$. D'après la construction de M_Y, on a : $u_n^* = Bu_n$. Par conséquent il existe une suite (u_n) de C tel que

$$u_n \rightharpoonup u \;\; dans \;\; X \;\; et \;\; Bu_n \rightharpoonup u^* \; dans \;\; X' \tag{2.30}$$

et

$$\langle b - Bu_n - v^*, u_n - v \rangle \geq 0, \;\; \forall (v, v^*) \in G\,(A) \;\; et \; v \in Y. \tag{2.31}$$

Puisque C est convexe fermé alors C est faiblement fermé. Donc $u \in C$.

V-4 Pseudo-monotonicité de B

Nous voulons montrer que

$$\langle b - Bu, u - v \rangle \leq \langle v^* - b, v - u \rangle, \;\; \forall (v, v^*) \in G\,(A) \;\; et \; v \in Y. \tag{2.32}$$

Nous considérons $Y \in \mathcal{L}$ et $v_0 \in Y$ tel que $\langle b - u^* - v_0^*, u - v_0 \rangle \leq 0.$

On remarque que :

$$\bigcup_{Y \in \mathcal{L}} Y = X. \tag{2.33}$$

Maintenant on fixe $Y \in \mathcal{L}$. De (2.31) on a :

$$\langle Bu_n, u_n - w \rangle \leq \langle v^* - b, v - u_n \rangle + \langle Bu_n, v - w \rangle, \;\; \forall w \in C, \forall (v, v^*) \in G(A). \tag{2.34}$$

Si $w = v$ on a :

$$\langle Bu_n, u_n \rangle \leq \langle v^* - b, v - u_n \rangle \;\; \forall (v, v^*) \in G\,(A) \;\; avec \; v \in Y. \tag{2.35}$$

Nous choisissons $w = u, v = v_0$ et $v^* = v_0^*$.

De (2.34) on a :

$$\overline{\lim} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq \langle v_0^* - b + u^*, v_0 - u \rangle.$$

Par (2.29) on a :

$$\overline{\lim} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0 \;\; et \;\; u_n \rightharpoonup u.$$

Puisque B est pseudo-monotone alors

$$\langle Bu, u-v\rangle \leq \underline{\lim}\,\langle Bu_n, u_n - v\rangle \Rightarrow \langle Bu, u-v\rangle \leq \langle v^* - b, v-u\rangle, \quad \forall (v, v^*) \in G(A)$$

et $v \in Y$.

V-5 La solution du problème général

De (2.32) et (2.33) nous avons

$\langle Bu, u-v\rangle \leq \langle v^* - b, v-u\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle Bu + v^* - b, u-v\rangle \leq 0$

d'où $\langle b - Bu - v^*, u-v\rangle \leq 0$

par conséquent $b - Bu \in Au$

donc $b \in Au + Bu.$ ■

Corollaire 2.3.1 *On suppose que les conditions **1**,**2** et **3** du théorème précédent sont réalises et supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *C est borné*
2. *C n'est pas borné et il existe $u_0 \in C \cap D(A)$ tel que*

$$\frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} \to +\infty, \quad \textit{quand } \|u\| \to +\infty. \tag{2.36}$$

Alors l'équation $b \in Au + Bu, u \in C$ admet une solution.

Voir([2], page 867).

Démonstration: De (2.36) on obtient

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0 :\ \langle Bu, u-u_0\rangle > \varepsilon\|u\|, \quad \forall u \in C$ avec $\|u\| > r.$

il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{|\langle b, u-u_0\rangle|}{\|u\|}$. D'après le théorème précédent l'équation $b \in Au + Bu$ admet une solution. ■

Corollaire 2.3.2 *On suppose que :*

1. *L'opérateur multivoque $A : X \to 2^{X'}$ est maximal monotone.*
2. *L'opérateur $B : X \to X'$ est monotone, hémicontinu et borné.*
3. *Il existe $u_0 \in D(A)$ tel que*

$$\frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} \to +\infty, \quad \textit{quand } \|u\| \to +\infty. \tag{2.37}$$

Donc l'équation $b \in Au + Bu$ admet une solution.

Voir([2] page 868).

Démonstration: l'espace X est convexe (car X espace vectoriel) et fermé. Par le corollaire précédent l'équation $b \in Au + Bu$ admet une solution. ■

Lemme 2.3.1 *Dans chaque espace réflexif X, une norme équivalente peut être introduite de manière à ce que X et $X^{'}$ soient localement uniforméments convexes.*

(Voir [2], page 862).

Corollaire 2.3.3 *([2], page 868) on suppose que :*

(i) C est un sous-ensemble non vide fermé d'un espace de Banach réflexif réel X.

(ii) l'opérateur multivoque $A : C \to 2^{X^{'}}$ est maximal monotone.

(iii) Si l'ensemble C est non borné, alors l'opérateur A est coercive par rapport à l'élément fixe $b \in X^{'}$, c'est à dire, il existe $u_0 \in D(A)$ et r>0 tel que :

$$\langle u^*, u - u_0 \rangle > \langle b, u - u_0 \rangle \qquad \textit{pour tout} \quad (u, u^*) \in G(A) \quad \textit{avec} \quad \|u\| > r.$$

Alors, l'équation

$$b \in Au, \quad u \in C$$

admet au moins une solution.

Démonstration: (Voir [2], page 868). On utilise la méthode de régularisation. Au lieu de l'inéquation précédente, nous étudions les équations régularisées :

$$b \in Au_n + \varepsilon_n J(u_n - u_0) \qquad u_n \in C, \quad n = 1, 2, \cdots , \tag{2.38}$$

où $J : X \to 2^{X^*}$ indique l'opérateur de dualité $J : X \to X^{'}$, et (ε_n) est une suite de nombres réels positifs avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. D'après le lemme précédent, on introduit une norme équivalente sur X de sorte que X et $X^{'}$ soient localements uniforméments convexes. Par la proposition 2.2.1 , l'opérateur de dualité $J : X \to X^*$ est univoque, continu, borné, coercive et strictement monotone. Notez que A reste maximal monotone et coercive par rapport à b, lors du passage à des normes équivalentes.

(1) **Solution de l'équation régularisée (2.38)**

De $\langle J(u-u_0), u-u_0\rangle = \|u-u_0\|^2$ il s'ensuit que

$$\lim_{\|u\|\longrightarrow\infty} \frac{\langle J(u-u_0), u-u_0\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

D'après le corollaire précédent, pour chaque n, l'équation (2.38) a une solution u_n.

(2) **Estimation à priori**

Par (2.38), pour chaque n, il existe $u_n^* \in Au_n$ tel que

$$b = u_n^* + \varepsilon_n J(u_n - u_0). \tag{2.39}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle b, u_n - u_0\rangle =& \langle u_n^*, u_n - u_0\rangle + \varepsilon_n \langle J(u_n-u_0), u_n - u_0\rangle \\ =& \ \langle u_n^*, u_n - u_0\rangle + \varepsilon \|u_n - u_0\|^2 \end{aligned} \tag{2.40}$$

et $(u_n, u_n^*) \in G(A)$ pour tout n. Ce qui implique

$$\langle b, u_n - u_0\rangle \geq \langle u_n^*, u_n - u_0\rangle.$$

Par l'hypothèse (iii), la suite (u_n) est bornée, c'est à dire, il existe $r > 0$ tel que $\|u_n\| \leq r$.

(3) **La convergence faible de la méthode de régularisation**

Comme (u_n) est bornée, il existe une sous-suite, notons aussi par (u_n) tel que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Donc $u \in C$, car C est faiblement fermé, d'après (i).

Puisque A est monotone, il découle de $(u_n, u_n^*) \in G(A)$ que :

$$\langle u_n^* - v*, u_n - v\rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A).$$

Par (2.39)

$$\langle b - \varepsilon_n J(u_n - u_0) - v^*, u_n - v \rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A) \tag{2.41}$$

et pour tout n. Notons

$$\|\varepsilon_n J(u_n - u_0)\| = \varepsilon_n \|u_n - u_0\| \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Par $n \to \infty$, il découle de (2.41) que

$$\langle b - v^*, u - v \rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad (v, v^*) \in G(A).$$

Comme A est maximal monotone, $b \in Au$.

■

Chapitre 3

Existence des solutions pour une inclusion d'évolution non linéaire

Dans ce chapitre on étudient l'existence des solutions pour les inclusions. On va diviser ce chapitre en deux parties.
Partie I : étudier de l'existence des solutions de l'équation différentielle de premier ordre pour l'inclusion.
Partie II : étudier de l'existence des solutions de l'équation différentielle de second ordre pour l'inclusion.

3.1 Problème I

On considère le problème non homogène suivant :

$$\begin{cases} b(t) \in u'(t) + Au(t) - \omega u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Hypothèses :

(H1) H est un espace de Hilbert séparable.

(H2) L'opérateur multivoque $A : H \to 2^H$ est maximal monotone.

(H3) $u_0 \in D(A), \omega \in \mathbb{R}$ et $b \in W^{1,2}(]0, T[; H)$.

3.1.1 L'approximation non linéaire de Yosida

Pour tout $\mu > 0$ on définit l'approximation de Yosida par $A_\mu = \frac{1}{\mu}(I - R_\mu)$ où R_μ le résolvant de A c'est-à-dire $R_\mu = (I + \mu A)^{-1}$.

Proposition 3.1.1 *Pour tout* λ , $\mu > 0$ *on a*

(a) $A_\mu u \in AR_\mu u$.

(b) $\|A_\mu u - A_\mu v\| \leq \frac{1}{\mu}\|u - v\|$.

(c) A_μ *est maximal monotone.*

Voir([1], page 570).

Démonstration: (a) On pose $w = R_\mu u \Rightarrow u \in (I + \mu A)w \Rightarrow \mu A_\mu u = u - w \in \mu A w$

(b) $\|A_\mu u - A_\mu v\|\|u - v\| \geq (A_\mu u - A_\mu v \mid u - v)$

$$= (A_\mu u - A_\mu v \mid \mu A_\mu u - \mu A_\mu v) + (A_\mu u - A_\mu v \mid R_\mu u - R_\mu v)$$

$$\geq \mu\|A_\mu u - A_\mu v\|^2.$$

(c) A_μ est monotone , en effet

$\langle A_\mu u - A_\mu v, u - v\rangle = \frac{1}{\mu}\langle (I - R_\mu)(u - v), u - v\rangle = \frac{1}{\mu}\langle u - v, u - v\rangle - \langle R_\mu u - R_\mu v, u - v\rangle \geq 0$, car $\langle R_\mu u - R_\mu v\rangle \leq \|R_\mu u - R_\mu v\|\|u - v\| \leq \|u - v\|^2$. De (b) A_μ est continu, alors A_μ est hemi-continu. Donc A_μ est maximal monotone. ∎

Corollaire 3.1.1 *Pour* $u \in D(A)$

(a) $A_\mu u \to A_0 u \quad$ *quand* $\quad \mu \to 0$.

(b) $\|A_\mu u - A_0 u\|^2 \leq \|A_0 u\|^2 - \|A_\mu u\|^2 \quad$ *pour tout* $\mu > 0$

(c) $R_\mu u \to u \quad$ *quand* $\quad \mu \to 0$,

où $A_0 u$ *est un élément de* Au *avec la plus petite norme en* Au

Voir([1], page 570).

Proposition 3.1.2 *Soit* Y *un espace de Banach. Alors*

si

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad dans \quad L^p(]0, T[; Y) \quad quand \quad \mu \to 0$$

et

$$u'_\mu \rightharpoonup v \quad dans \quad L^q(]0, T[; Y) \quad quand \quad \mu \to 0, \quad 1 \leq p, q < +\infty$$

alors $u^{'} = v.$

Voir ([6], page 419).

Théorème 3.1.1 *Le problème (3.1) admet une solution unique qui vérifie les propriètés suivantes :*

(i) $u \in W^{1,2}(]0,T[;H)$.

(ii) $u' \in L^{\infty}(]0,T[;H)$.

(iii) u *application lipschitzienne.*

Proposition 3.1.3 *Soit* $A : H \to H$ *un opérateur maximal monotone tels que*

$$u_n \to u \quad quand \quad n \to +\infty,$$

$$Au_n \rightharpoonup b \quad quand \quad n \to +\infty.$$

Alors $Au = b$.

Démonstration: Voir [2]($Proposition$ 31.6, $page$ 821). ∎

Démonstration du théorème 3.1.2. Pour prouver ce théorème, on considère le problème de régularization

$$\begin{cases} u_{\mu}^{'}(t) + A_{\mu}u_{\mu}(t) - \omega u_{\mu}(t) = b(t) \\ u_{\mu}(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\mu > 0$,

$b \in W^{1,2}(]0,T[;H)$, alors b est continue sur $[0,T]$ (voir [3], page 129).

Etape (1) : la solution de (3.2)

(I) $\|u_{\mu}^{'}\|$ est bornée

Nous dérivons (3.2), on obtient :

$$u_{\mu}^{''}(t) + g_{\mu}(t) - \omega u_{\mu}(t) = b^{'}(t), \tag{3.3}$$

pour tout $t \in [0,T]$, où $g(t) = A_\mu u_\mu(t)$.

Par la monotonicité de A_μ nous avons

$(A_\mu u_\mu(t+h) - A_\mu u_\mu(t) \mid u_\mu(t+h) - u_\mu(t)) \geq 0 \;\Rightarrow (g_\mu^{'}(t), u_\mu(t)) \geq 0.$

Donc (3.3) donne

$$(u_\mu^{''}(t) \mid u_\mu^{'}(t)) \leq (b^{'}(t) \mid u_\mu^{'}(t)) + |\omega|(u_\mu^{'}(t) \mid u_\mu^{'}(t)) \leq \|b^{'}(t)\|\|u_\mu^{'}(t)\| + |\omega|\|u_\mu^{'}(t)\|^2$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\|b^{'}(t)\| + (\tfrac{1}{2} + |\omega|)\|u_\mu^{'}(t)\|^2.$$

L'intégration par parties donne

$\|u_\mu^{'}(t)\|^2 - \|u_\mu^{'}(0)\|^2 = 2\int_0^t (u_\mu^{''}(s) \mid u_\mu^{'}(s))ds \leq \|b\|_Y^2 + (1+2|\omega|)\int_0^t \|u_\mu^{'}(s)\|^2,$

avec $Y = W^{1,2}(]0,T[;H)$.

D'après le lemme de Gronwall on a

$\|u_\mu^{'}(t)\|^2 \leq C(\|u_\mu^{'}(0)\|^2 + \|b\|_Y^2).$

(II) $u_\mu^{'}$ est lipschitzienne

Soit $f(t,u_\mu) = -A_\mu u_\mu(t) + \omega u_\mu(t) + b(t)$

$$\|f(t,u_\mu) - f(t,v_\mu)\| \leq \|A_\mu v_\mu - A_\mu u_\mu\| + |\omega|\|u_\mu - v_\mu\|$$
$$\leq \tfrac{1}{\mu}\|u_\mu - v_\mu\| + |\omega|\|u_\mu - v_\mu\| \quad \text{(voir la proposition 3.1.1)}$$
$$\leq \tfrac{1+|\omega|}{\mu}\|u_\mu - v_\mu\|,$$ i.e., f est lipschitzienne par rapport à la deuxième composante.

Donc du théorème précédent (théorème de Picard-Lindelöf), (3.2) admet une solution unique u_μ. Puisque $\|u_\mu^{'}(t)\| \leq C$ pour tout $t \in [0,T]$, alors $u' \in L^\infty(]0,T[;H)$.

Etape (2) : $\|u_\mu\|$ est bornée

De (3.2) on a $\quad u_\mu^{'}(t) + A_\mu u_\mu(t) - \omega u_\mu(t) = b(t)$

alors $(u_\mu^{'}(t), u_\mu(t)) + (A_\mu u_\mu(t), u_\mu(t)) - \omega\|u_\mu(t)\|^2 = (b(t), u_\mu(t))$

de la proposition (3.1.1 (c)) on a $(A_\mu u_\mu(t), u_\mu(t)) \geq 0$

d'où $(u_\mu^{'}(t), u_\mu(t)) - \omega\|u_\mu(t)\|^2 \leq (b(t), u_\mu(t))$

par conséquent $\quad \int_0^t (u_\mu^{'}(s), u_\mu(s))dt - \omega\int_0^t \|u_\mu(s)\|^2 ds \leq \int_0^t (b(s), u_\mu(s))dt$

d'où $\|u_\mu(t)\|^2 - \|u_\mu(0)\|^2 \leq \omega\int_0^t \|u_\mu(s)\|^2 ds + \int_0^t \|b(s)\|\|u_\mu(s)\|ds$

notez que $\|b(t)\|\|u_\mu(t)\| \leq \frac{\|b(t)\|^2}{4\varepsilon^2} + \varepsilon^2\|u_\mu(t)\|^2$

alors $\|u_\mu(t)\|^2 \leq \|u_\mu(0)\|^2 + \int_0^t \frac{\|b(s)\|^2}{4\varepsilon^2}ds + (\varepsilon^2 + \omega)\int_0^t \|u_\mu(s)\|^2 ds$

donc de le lemme de Gronwall, on obtient : $\|u_\mu(t)\|$ est bornée.

Etape (3) : u_μ est lipschitzienne

D'après l'Etape (1) u'_μ est bornée pour tout $\mu > 0$,

donc

$$\|u_\mu(t) - u_\mu(s)\| = \int_s^t \|u'_\mu(\tau)\| d\tau \leq K|t-s|, \quad \forall \mu > 0$$

i.e., u_μ est lipschitzienne.

Etape (4) : u_μ est de Cauchy

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t) - u_\lambda((t)\|^2 = (u'_\mu(t) - u'_\lambda, u_\mu - u_\lambda) = -(A_\mu u_\mu - A_\lambda u_\lambda, u_\mu - u_\lambda) + \omega\|u_\mu - u_\lambda\|^2$

on pose : $\Delta = -(A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda, R_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t) + u_\mu(t) - R_\mu u_\mu(t))$.

$-(A_\mu u_\mu - A_\lambda u_\lambda, u_\mu - u_\lambda) = \Delta - (A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda, R_\mu u_\mu(t) - R_\lambda u_\lambda(t)) \leq \Delta$ (car A est monotone)

il existe $K > 0$ tel que $\|A_\mu u_\mu - A_\lambda u_\lambda\| \leq K$,

par conséquent $|\Delta| \leq \|A_\mu u_\mu - A_\lambda u_\lambda\|(\|R_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t)\| + \|u_\mu(t) - R_\mu u_\mu(t)\|)$,

i.e., $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t) - u_\lambda((t)\|^2 \leq 2K^2(\mu + \lambda) + \omega\|u_\mu - u_\lambda\|^2$

$\|u_\mu(t) - u_\lambda((t)\|^2 - \|u_\mu(0) - u_\lambda((0)\|^2 \leq 2TK^2(\mu + \lambda) + \omega \int_0^t \|u_\mu - u_\lambda\|^2$

d'après le lemme de Gronwall

$$\|u_\mu(t) - u_\lambda((t)\|^2 \leq 2TK^2(\mu + \lambda) \exp \omega t$$

i.e., u_μ est de Cauchy.

Etape (5) : passage à la limite

De l'Etape 4, il existe $u \in H$ tel que $u_\mu \to u$.

Du la corollaire 3.1.1, $R_\mu u_\mu \to u$, en effet

$\|R_\mu u_\mu - u\| \leq \|R_\mu u_\mu - u_\mu\| + \|u_\mu - u\| \to 0$

et de la proposition 3.1.2 on a $u'_\mu \rightharpoonup u'$ et il existe $b_1 \in H$ tel que $A_\mu u_\mu \rightharpoonup b_1$

i.e., $b_1 \in Au$.

Il est clair que u et u' sont bornés avec u est une application lipschitzienne. Donc le problème (3.1) admet une solution qui vérifie les conditions du théorème 3.1.2.

3.2 Application

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (u^{'}(t)|v-u(t))_H + a(u(t), v-u(t)) - \langle b(t), v-u(t)\rangle_V + \varphi(v) \geq \varphi(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

pour tout $v \in V$ et $t \in [0, T]$, où T fixé positif.

Proposition 3.2.1 *On suppose que*

(i) H est un espace de Hilbert séparable, et V est un sous-espace de H.

(ii) La forme bilinéaire $a : V \times V \to \mathbb{R}$ est bornée, et il existe des nombres ω et $\beta > 0$ tel que

$$a(v, v) + \omega\|v\|_H^2 \geq \beta\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \tag{3.5}$$

(iii) $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ convexe et semi-continue inférieurement et $\varphi \not\equiv +\infty$.

(iv) $b \in W^{1,2}(0, T)$ et $u_0 \in V$ sont donnés et vérifions les propriètés $\varphi(u_0) < +\infty$ et

$$a(u_0, v-u_0) + \varphi(v) \geq \varphi(u_0) + (g \mid v-u_0) \tag{3.6}$$

pour tout $v \in V$ et g fixé dans H.

Alors le problème (3.4) admet une solution unique.

Démonstration: De (ii) il existe un opérateur fortement monotone $A : V \to V'$ tel que

$\langle Au - \omega u, v\rangle_V = a(u, v), \quad \forall u, v \in V.$

Donc (3.4) s'écrit sous la forme $\langle -u'(t) - Au(t) + \omega u(t) + b(t), v-u(t)\rangle_V + \varphi(u(t))$

$$\leq \varphi(v), \quad \forall v \in V,$$

i.e.,

$b(t) \in u' + Au(t) + \partial\varphi(u(t)) - \omega u(t).$

On note B est l'extension de $A + \partial\varphi$ à H,donc on obtient

$b(t) \in u^{'}(t) + Bu(t) - \omega u(t)$

B est maximal monotone, en effet

pour tout $u \in H$ on définit l'opérateur A_1 tel que : $A_1 u = u + Au$, alors

$$\langle A_1, v\rangle = (u, v)_H + (Au, v)_H,$$

il est clair que A_1 est monotone, continu et borné de plus $\frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|u\|} \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$, d'après le corollaire 2.3.2 on a $R(A_1 + \partial\varphi) = H$ i.e. $R(I + B) = H$. Par conséquent l'opérateur B est maximal monotone.

De plus $u_0 \in D(B)$, en effet

de (iv) on a $g - Au_0 + \omega u_0 \in \partial\varphi(u_0), i.e., \{Au_0 + \partial\varphi(u_0)\} \cap H \neq \emptyset$.

Alors toutes les conditions du théorème précédent sont atteintes.

Donc le problème (3.4) admet exactement une solution unique $u \in W^{1,2}(]0, T[, H)$. ∎

3.3 Problème II

On considére l'inéquation :

$$\begin{cases} b(t) \in u^{''}(t) + Nu^{'}(t) + Au(t) - \omega u(t) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $T > 0$.

Hypothèses :

(H_1) H est un espace de Hilbert séparable et $V \subset H$.

(H_2) $N : V \to 2^{V'}$ maximal monotone.

(H_3) $A : V \to V^{'}$ opérateur linéaire, continu symétrique et fortement positif.

(H_4) b_0, u_0, v_0, ω sont donnés avec $\omega \in \mathbb{R}, b \in W^{1,2}([0,T], H)$, et $u_0, v_0 \in V$, avec $\{Au_0 + Nv_0\} \cap H \neq \emptyset$.

Théorème 3.3.1 *Si H_1, H_2, H_3 et H_4 sont vérifiées. Alors l'inéquation (3.7) admet une solution unique, de plus*

$u \in C([0,T]; V)$, $u^{'} \in L_\infty([0,T]; V)$, $u'' \in L_\infty([0,T]; H)$

Démonstration: On pose $u^{'} = v$,

on écrit (3.7) sous la forme :

$$\begin{cases} b \in v^{'} + (Au - \omega u + Nu + \alpha v) - \alpha v \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

nous écrivons(3.8) sous la forme

$$\begin{cases} F(t) \in U^{'}(t) + BU(t) - \alpha U(t) \\ U(0) = (u_0, v_0) \end{cases} \tag{3.9}$$

où $U = (u, v)$, $F = (0, b)$ et $BU = (\alpha u - v, Au - \omega u + Nv + \alpha v)$

$D(B) = \{(u, v) \in X : \{Au + Nv\} \cap H \neq \emptyset\}$ et $X = V \times H$. Donc X devient un espace de Hilbert avec

$(U_1, U_2)_X = \langle Au_1, u_2 \rangle_V + (v_1, v_2)_H$.

(I) Nous montrons que B est monotone

L'opérateur B est monotone, en effet

$(BU_1 - BU_2, U_1 - U_2) = \alpha\|U_1 - U_2\|^2 - \omega(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \langle Nv_1 - Nv_2, v_1 - v_2 \rangle$

On a $v_i \in V$ car $U_i \in D(B)$ $(i = 1, 2)$

pour α suffisamment grand et l'opérateur N est monotone, alors

$$|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)| \leq \frac{1}{2}(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2)$$

et puisque A est fortement positif alors $\|u_1 - u_2\|^2 \leq C_1\langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle$.

D'où $|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)| \leq C_2\|U_1 - U_2\|_X^2$.

Donc l'opérateur B est monotone.

(II) Nous montrons que B est maximal monotone

Pour montrer l'opérateur B est maximal monotone il faut et il suffit que

$R(I + B) = X'$.

L'équation $W \in (I + B)U$ avec $(w, z) = W \in X$ signifie

$$u + (\alpha u - v) = w \tag{3.10}$$

$$z \in v + (Au - \omega u + Nv + \alpha v) \tag{3.11}$$

pour (w, z) fixé dans $V \times H$, $u = \frac{1}{1+\alpha}(w + v)$ et

$$z - \frac{1}{1 + \alpha}(Av - \omega v) \in B_1 v + Nv. \tag{3.12}$$

De (H_3) l'opérateur $B_1 : v \in V \mapsto (1 + \alpha)v + \frac{1}{1+\alpha}Av - \omega v \in V'$ linéaire, continu et fortement positif.

Pour α suffisamment grand et du le théorème (2.3.1) on a $R(B_1 + N) = V$ i.e., (3.12) admet une solution $v \in V$ et (3.11) montre que $U = (u, v) \in D(B)$.

(III) la solution qui dépend de (3.1)

Par hypothèse $U_0 = (u_0, v_0) \in D(B)$, de plus $b \in W^{1,2}(0, T; H)$ il s'ensuit que

$F \in W^{1,2}(0,T;X)$. Par le théorème 3.1.2, le problème (3.10) admet une solution unique U tel que

$U \in C([0,T],X)$, $U^{'} \in L_\infty(0,T;X)$.

Donc

$u \in C([0,T],V), \quad v \in C([0,T];H)$

$u^{'} \in L_\infty(0,T;V), \quad v^{'} \in L_\infty(0,T;H)$.

On remplace $v = u^{'}$ nous trouvons facilement $u, u^{'}$ et $u^{''}$ qui vérifient la relation requise.

■

3.4 Application

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (u^{''}(t)|v - u^{'}(t))_H + a(u(t), v - u^{'}(t)) - \langle b(t), v - u^{'}(t)\rangle_V + \varphi(v) \geq \varphi(u^{'}(t)) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0 \end{cases} \tag{3.13}$$

pour tout $v \in V$ et $t \in [0,T]$, où T fixé positif.

Proposition 3.4.1 *On suppose que*

(i) H est un espace de Hilbert séparable, et V est un sous-espace de H.

(ii) La forme bilinéaire $a : V \times V \to \mathbb{R}$ est bornée, et il exist des numbers ω et $\beta > 0$ tel que

$$a(v,v) + \omega\|v\|_H^2 \geq \beta\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \tag{3.14}$$

(iii) $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ convexe et semi-continue inférieurement et $\varphi \not\equiv +\infty$.

(iv) $b \in W^{1,2}(0,T)$ et $u_0, v_0 \in V$ sont donnés et vérifiants la propriété $\varphi(v_0) < +\infty$ et

$$a(u_0, v - v_0) + \varphi(v) \geq \varphi(v_0) + (g|v - v_0)_H \tag{3.15}$$

pour tout $v \in V$ et g fixé dans H.

Démonstration: De (ii) il existe un opérateur linéaire, borné et fortement monotone $A : V \to V'$ tel que

$\langle Au - \omega v, v\rangle_V = a(u, v), \quad \forall u, v \in V,$

on écrit (3.13) sous la forme

$$\langle -u''(t) - Au(t) + \omega u(t) + b(t), v - u'(t)\rangle_V + \varphi(u'(t)) \leq \varphi(v), \quad \forall v \in V$$

i.e.,

$$b(t) \in u'' + \partial\varphi(u'(t)) + Au(t) - \omega u(t)$$

d'après le théorème (2.2.1) l'application $\partial\varphi$ est maximal monotone.

De (iv) on a

$$g - Au_0 + \omega u_0 \in \partial\varphi(v_0)$$

i.e.,

$$\{Au_0 + \partial\varphi(v_0)\} \cap H \neq \emptyset.$$

Donc d'après le théorème précédent le problème (3.13) admet une solution unique. ■

Bibliographie

[1] Eberhard Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, III, Nonlinear monotone operators, Springer-Verlag, New York, (1990).

[2] Eberhard Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/B, Nonlinear monotone operators, Springer-Verlag, New York, (1990).

[3] Haïm Brézis, Analyse Fonctionnelle Théorie et applications, Masson , Paris, (1983).

[4] Eberhard Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I, Nonlinear monotone operators, Springer-Verlag, New York, (1990).

[5] S.Widad, Existence de solutions d'une inéquation quasi-variationnelle, mémoire de master, université Kasdi Merbah Ouargla,04/07/2019.

[6] Eberhard Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A, linear monotone operators, Springer-Verlag, New York (1990).

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة وجود ووحدانية الحل للمعادلات التطورية باستعمال النظرية الأساسية في اضطرابات المؤثرات شمولية الرتابة ثم قمنا بتطبيق هذه النظرية على المتراجحات الغير خطية.

الكلمات المفتاحية : الوجود, الوحدانية, متراجحة الاضطرابات .

Abstract

In this work, we have studied the existence and the uniqueness of the nonlinear evolution inclusion using the main theorem on the perturbation of the maximal monoton operator , then we applied this theorem on non linear inequality .

Key words : existence **,** uniqueness , inequality of perturbation .

Résumé

Dans ce travail, nous avons abordé l'existence et l'unicité de solutions pous les inclusions non linéaires d'évolution à l'aide du théorème principal sur les perturbations de l'opérateur maximal monotone, puis nous avons appliqué ce théorème sur l'inéquation non linéaire.

Mots clé : existence, unicité, inéquation de perturbations.