جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: تحليل دالي

من إعداد الطالبة : خريدلة كوثر

الموضوع

المصفوفات التنفيذية لدوال هار المحسنة وتطبيقاتها في حل جمل المعادلات التفاضلية التكاملية

تناقش يوم 2018/06/09 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد الرتبة: أستاذ محاضر "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة رئيسا

بن الشيخ عبد الكريم الرتبة: أستاذ مساعد "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة ممتحنا

عباسي حسين الرتبة: أستاذ مساعد "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة مشرفا

شكر وعرفان

الحمد لله لرب العالمين حمدا كثيرا طيبا يليق بجلال وجهه سبحانه وعظيم سلطانه القديم والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم :

<<من لم يشكر القليل لم يشكر الكثير ومن لم يشكر الناس لم يشكر الله >>

رواه أحمد والترميذي .

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الجميل :

إلى الأستاذ المشرف عباسي حسين بن محمد الذي لم يبخل علي بنصائحه وتوجيهاته، لك منا كل معاني التقدير والعرفان .

إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الإبتدائي والمتوسط والثانوي.

إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الجامعي .

إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد .

إلى أعضاء اللجنة المناقشة لقبولهم مناقشة وإثراء هذه المذكرة .

إهداء

إليك أمي الغالية...يامن ضحيتي من أجلي بكل شيء....
جزاك الله عني كل خير...
إليك والدي الحبيب...لقد كنت نعم الأب ومازلت...
أسأل الله أن يحفظك لنا وأن يبارك لنا في عمرك...
إليكم إخوتي وأخواتي...لقد كنتم نعم السند...
أدعوا الله أن يوفقكم في حياتكم...
إلى كل من قاسمني حلو الحياة الجامعية ومرها...
إلى كل من عرفتهم وأخص بالذكر أصدقاء الثانوية...
إلى كل من كنت يوما تلميذا أو طالبا عنده...
إلى كل من نساه قلمي ولم ينساه قلبي...

الفهـــــــرس

ترميز

مدلوله	الرمز
مجموعة جزئية مفتوحة منR	Ω
فضاء شبه هلبرتي	X
فضاء هلبرتي	H
جداء سلمي معرف على L^2	$< .,. >$
نظيم على L^2	$\|.\|_2, \|.\|_L^2$
النظيم	$\|.\|$
مصفوفة قطرية والعناصر القطرية هي $I_2, 2I_2, ..., 2^{P-1}I_{2_{P-1}}$	$Q_{k\times k}$
دوال هار	$H(r,t)$
شعاع معامل هار	A
شعاع دوال هار المحسنة	$\Phi(t)$
تابع التقرب الدالي	$y^T\Phi(t)$
مصفوفة هار	$\Phi_{k\times k}$
مقلوب مصفوفة	$\Phi_{k\times k}^{-1}$
المصفوفةالتنفذية لتكامل	$P\Phi(t)$
المصفوفة التنفذية	$\Psi_{k\times k}(t)$
المصفوفة ناتجة عن تكامل شعاعين لدوال هار	D
المصفوفة التنفيذية للتكامل	P
جداء دالتي هار المحسنة	$\rho_{rv}h_u(t)$
المصفوفة الناتجة عن جداء شعاع هار مصفوفةهارالمحسنة	$\tilde{A}_{k\times k}$

مقدمة

تعتبر المعادلات الرياضية بما فيها المعادلات التفاضلية التكاملية تفسيرا لعديد من الظواهر الفزيائية, الكميائية والبيولوجية وغيرها من الظواهر الطبيعية الأخرى .ومن هذا نقول أن للمعادلات التفاضلية التكاملية دورا مهما في تطوير سائر العلوم.

ولقد حاولنا من خلال مذكرتنا هذه التطرق إلى إستعمال دوال هار المحسنة في حل جمل المعادلات الفاضلية التكاملية, حيث يعود إنشاءها إلى سنة 1910 من طرف العالم الرياضي الفريد هار وفي هاذاالإطار قمنا بإنجاز مذكرتنا حيث قسمناإلي ثلاثة فصول

فصل الأول:
المعادلات التفاضلية التكاملية ودوال هار المحسنة

فصل الثاني:
المصفوفة العمليات لدوال هار

فصل الثالث:
طريقة حل المعادلات التفاضلية التكامليةبإستخدام دوال هار المحسنة

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية التكاملية ودوال هار المحسنة

قائمة المحتويـــــــــات

1.0.1 مقدمة

تلعب المعادلات التفاضلية التكاملية دورا بارزا في تفسيرعدة ظواهر منها فيزيائية كيمائية ،بيولوجيةوهندسيةأوغيرها وقد كان أول ظهور لها في سنة 1900 عن طريق فلتيرا .

1.1 المعادلات التفاضلية التكامليةوأنواعها

[1]

تعريف 1. المعادلات التفاضلية التكاملية هي معادلة تحتوي على التفاضل والتكامل وتكون من الشكل

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y^{'}(x), ..., y^{n-1}(x), \lambda \int_{\Omega} \kappa(x, y(x), y^{'}(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right) dt$$

أو من الشكل

$$L_x(y) = \lambda \int_{\Omega} \kappa(x,t) M_t(y) + g(x) dt$$

حيث $\kappa(x,t)$ تسمى النواة المعادلة التفا-تكاملية Ω مجموعة جزئية مفتوحة من R

$$L_x(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^i(x)$$

$$M_t(y) = \sum_{j=0}^{m} d_j(t) y^j(t)$$

و $g(x), d_j(x), a_i(x)$ دوال معلومة محتواة في $L^2(\Omega)$ وبمأن هذه المعادلة تحتوي على التفاضل فإنه من الضروري وجود الشروط الإبتدائية التالية:

$$y(\alpha) = \beta_0, \quad y^{'}(\alpha) = \beta_1, \quad y^{''}(\alpha) = \beta_2, \quad ... \quad y^{n-1}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

حيث $\alpha \in \Omega_i$ و β_i $i = 0, ..., n-1,$ ثوابت

[1] [1]مذكرة تخرج بعض طرق حل المعادلات التكاملية والتكاملة تفاضلية غير الخطية لفريدهولم قسم الرياضيات ورقلة 2016

2.1 تصنيف المعادلات التفاضلية التكاملية

تصنف المعادلات التفاضلية التكاملية من حيث : طرفي التكامل إذا كان طرفي التكامل عبارة عن ثابتين فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم وهي تأخذ الشكل التالي :

$$L_x(y) = \lambda \int_a^b \kappa(x,t) M_t(y) + g(x)$$

فمثلا

$$y'(x) = x - \int_0^1 \exp^{x-t} y(t)dt, \quad y(0) = 0$$

$$y''(x) = \exp^x - x + \int_0^1 xty'(t)dt, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

معادلتان تفاضليتان تكامليتان لفريدهولم .

إذا كان أحد أطراف التكامل عبارة عن متغير x فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفلتيرا وتكون من الشكل التالي:

$$L_x(y) = \lambda \int_a^b \kappa(x,t) M_t(y) + g(x)$$

$$L_x(y) = \int_a^b \kappa(x,t) M_t(y) + g(x)$$

فمثلا

$$y''(x) = -x + \int_0^x (x-t) y(t)dt, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$y'(x) = -sinx - 1 + \int_0^x y(x)dt, \quad y(0) = 1$$

هما معادلتان تفاضليتان تكامليتان لفلتيرا . إذا وجد كل من التكامل فريد هولم و تكامل فولتيرا في نفس المعادلة , فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدلهم-فلتيرا، وشكالها كمايلي :

$$L_x(y) = \lambda_1 \int_a^b \kappa_1(x,t) M_t(y) + \lambda_2 \int_a^b \kappa_2(x,t) M_t(y) + g(x)$$

فمثلا:

$$y^{'}(x) = 1 + \int_0^x (x-t)y(t)dt + \int_0^1 xty(t)dt, \quad y(0) = 1$$

$$y^{''}(x) = -x - \frac{1}{6}x^3 + \int_0^x \lambda(t)dt + \int_\pi^{-\pi} xy(t)dt, \quad y(0) = 0, y^{'}(0) = 2$$

هما معادلتان تفاضليتان تكاملتان لفريد هولم -فلتيرا.

1.2.1 رتبةالمعادلة التفاضلية التكاملية

رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية هي رتبة أعلى مشتق في المعادلة فمثلا:

$$y^{'}(x) = -2\pi \sin(2\pi x) - \pi \sin(4\pi x) + 2\pi \int_0^1 \sin(4\pi x + 2\pi t)y(t)dt, \quad y(0) = 1$$

هي معادلة تكاملية من الرتبة الأولى.

$$y^{''}(x) + xy^{'} - xy =^x -2\sin(x) + \int_{-1}^1 \sin(x)^{-t} y(t)dt, \quad y(0) = 1, y^{'}(0) = 1.$$

هي معادلة تفاضلية تكاملية من الرتبة الثانية .

2.2.1 خطية أو غير خطية

يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها خطيةإذا كانت من الشكل فمثلا:

$$y^{'}(x) = 1 - 2x\sin(x) + \int_0^x y(t)dt, \quad y(0) = 0$$

هي معادلة خطية.

$$y^{'}(x) =^{x} - \frac{1}{5}^{-x^2}(^5-1) + \int_0^x {}^{2t-x^2} y^3(t)dt, \quad y(0) = 1$$

هي معادلةغير خطية.

3.2.1 من النوع الأول أو الثاني

إذا كان الجزء التفاضل معدوما تكون المعادلة التفاضلية التكاملية من النوع الأول أماإذا كان غير معدوما تكون المعادلة من النوع الثاني فمثلا:

$$\int_0^x (x-t-1)y^{'}(t)dt = 2\exp^x - x - 2, \quad y(0) = 1$$

هي معادلة تفاضلية تكاملية من النوع الأول.

$$y^{'}(x) = 3\exp^x - \frac{1}{3}(2\exp^3 + 1)x + \int_0^1 3xty(t)dt, \quad y(0) = 1$$

هي معادلة تفاضلية تكاملية من النوع الثاني.

4.2.1 متجانسة أوغير متجانسة

إذا كانت $g(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية التكاملية متجانسة أما إذا كانت $g(x)$ غير معدومة تكون المعادلة غير متجانسة

5.2.1 شاذة أو غير شاذة

يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها شاذة إذا تحقق على أقل أحد الشرطين التاليين:
أحد طرفي التكامل أو كلاهما يساوي∞ .

النواة غير منتهية بجوار نقطة أو أكثر من مجال التكامل .
أما إذا لم يتحقق أي شرط من الشرطين السابقين, تكون المعادلة غير شاذة.
فمثلا :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^i(x) = \pi^{-1}\int_0^{+\infty} \frac{b_n y^n(t) + b_{n-1}y^{n-1}(t) + \quad \dots \quad + b_0 y(t)}{t-x}dt, \quad (0 \leq x < +\infty)$$

هي معادلة تفاضلية تكاملية شاذة.

6.2.1 عدد المتغيرات للدالةالمجهولة

يقال عن المعادلات التفاضلية التكاملية أنها عادية إذا كانت الدالة المجهول متعلقة بمتغير مستقل واحد أما إذا كانت متعلقة بمتغيرين مستقلين أو أكثر تكون المعادلة التفاضلية التكاملية جزئية فمثلا:

$$y^{'}(x)+y(x)-2\int_0^x \sin(x)y^2(t)dt = \cos x+(1-x)\sin x+\cos x\sin^2 x, \quad y(0)=1.$$

هي معادلة تفاضلية عادية .

$$x_1\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y^2}{\partial x_2^2} + x_1\sin x_2 + \int_0^{2x} \sin(x_2-t)y(x_2,t)dt,$$

$$y(x_1,0) =^{x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1,0) = 0, y(0,x_2) = \cos x_2$$

هي معادلة تفاضلية تكاملية جزئية.

3.1 بعض الطرق لحل المعادلات التفاضلية التكاملية

إن هناك العديد من الطرق لحل المعادلات التفاضلية التكاملية سواء كانت تحليلية أو عددية فمثلا بالنسبة للطرق التحليلية لدينا الطريقة الحساب المباشر ,طريقة التكرار التغييري, طريقة أدمين التحليلية العدلة, أما بالنسبة للطرق العددية لدينا طريقة بي سبلاين ووظائف قياس الموجات, طريقة هوموتوبي الاضطرابية ,طريقةكثيرات حدود لجندر ,طريقة تايلور التجمعية وسنهتم في هذه المذكرة بحل نوع معين من المعادلات التفاضلية التكاملية وذلك

بإستخدام طريقة عددية تعتمد على المصفوفات التنفذية لدوال هار المحسنة في حل جمل المعادلات التفاضلية التكاملية .

4.1 دوال هار المحسنة ذات المتغير الواحد

1.4.1 دوال هار

[2] **لمحة عن مبادئى مويجات هار:** المويجة هي تابع يمثل ذبذبة واحدة أما المويجات فهي تعتبر تابع تذبذبي كتوابع الجيب وجيب التمام.
كانت بدايتها على يد العالم هار سنة1910 حيث قام بتعاريف جديدة ومتعامدة لتمثيل التابع وهي تحمل إسمه حاليا "مويجة هار" .
تطبق المويجات في العديد من الميادين التي تتطلب معالجة الإشارات كعلم الفلك و الإتصالات و غيرها .. ولهاأيضا تطبيقات رياضية كحل المعادلات التفاضلية التكاملية .
حيث نسمي Ψ تابع مويجة الأم أو مويجة الأصلية .
نعرف أسرة التوابع $\Psi_{a,b}(x)$ المولدة من تابع المويجة Ψ بالعلاقة :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$$

حيث a وسيط يدل على المقاس ، ويقيس درجة إنضغاط الدالة .
أما b وسيط يدل على الإنسحاب على محور الزمن .

تعريف 2. من أجل $n \in N$ و $0 < k \le 2^n$ دوال هار معرفة

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$\varphi_{n,k}(t) = \varphi(2^n t - k + 1)$$

[2] ABBASSI HOCINE Résolution de système d'équations intégro-différentielles par la méthode des fonctions de Haar rationalisées, Cambridge University, Ouargla University 2012

من جهة أخرى

$$\varphi_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & si \quad t \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right[\\ -2^{n/2} & si \quad t \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right[\\ 0 & si \quad t \notin [0,1] \end{cases} \quad (2.1)$$

من أجل $n \geq 0$ $k = 1, 2, ..., 2^n$

2.4.1 دوال هار المحسنة

[3]

تعريف 3. دوال هار المحسنة هي دوال مركبة فقط من ثلاث ثوابت $1-$, 1 و 0 معرفة على مجال $[0, 1)$

$$h_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{2j-1}{2^{i+1}}\right[\\ -1 & si \quad t \in \left[\frac{2j-1}{2^{i+1}}, \frac{j}{2^i}\right[\\ 0 & si \quad t \notin \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right[\end{cases} \quad (3.1)$$

ملاحظة 1.4.1. نعرف من أجل $r \in N^*$ يوجد ثنائية وحيدة $(i, j) \in N^2$ حيث $r = 2^i + j - 1$ و$i = 0, 1, 2, 3...$; $j \in \{1, 2, 3..., 2^i\}$ يمكننا إعتماد على اثنين من الترميزات

$$h_r(t) = RH(r, t) = h_{ij}(t)$$

و r معرفة عبردليلين i وj, $r = 2^i + j - 1$, $i = 0, 1, 2, ..$, $J = 1, 2, 3, ..2^n$

$$RH(r, x) = \begin{cases} 1 & j_1 \leq t < j_{(\frac{1}{2})} \\ -1 & j_{(\frac{1}{2})} \leq t < j_0 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad (4.1)$$

[3] F.[9] Mirzaee,Numerical computational solution of the linear Volterra integral equations system via rationalized Haar functions,Journal of King Saud University (Science) (2010) 22, 265 – 268.

حيث $j_u = (j-u)/2^i, u = 0, 1/2, 1.$ و r معرفة عبر دليلين i و j
$r = 2^i + j - 1$, $i = 0, 1, 2, ..$, $J = 1, 2, 3, ..2^n$ وتعرف $RH(0,t)$ حيث $i = j = 0$
و $RH(0,t) = 1$, $0 \le t < 1$

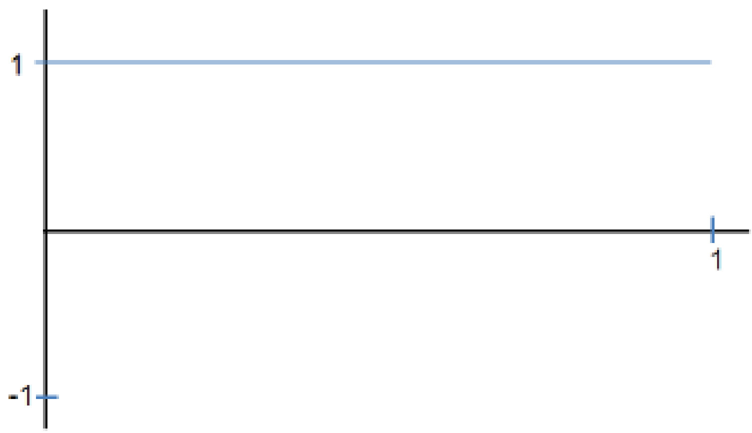
3.4.1 جدول دوال هار

جدول ثمانية لدوال هار

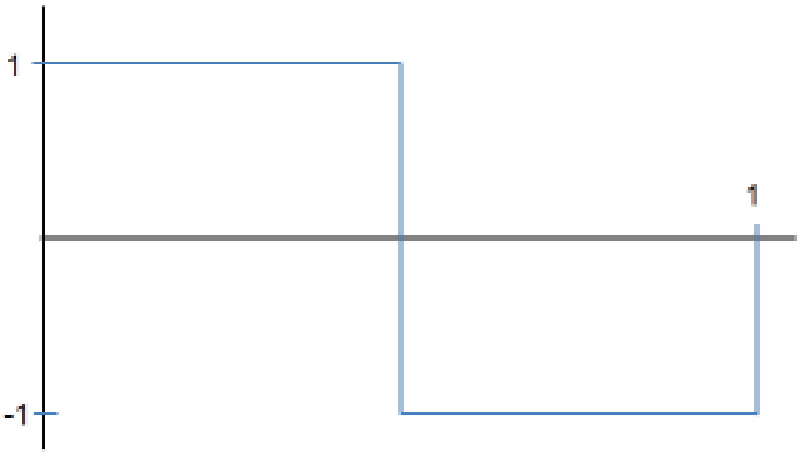
r	0	1	2	3	4	5	6	7
$fon.Haar$	$RH(0,t)$	$RH(1,t)$	$RH(2,t)$	$RH(3,t)$	$RH(4,t)$	$RH(5,t)$	$RH(6,t)$	$RH(7,t)$
i	0	0	1		2			
j	0	1	1	2	1	2	3	4

4.4.1 تمثيل دوال هار

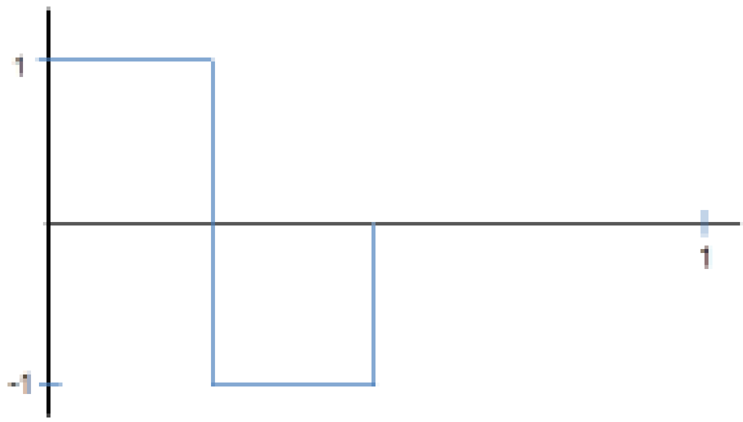
تمثيل ثمانية لدوال هار



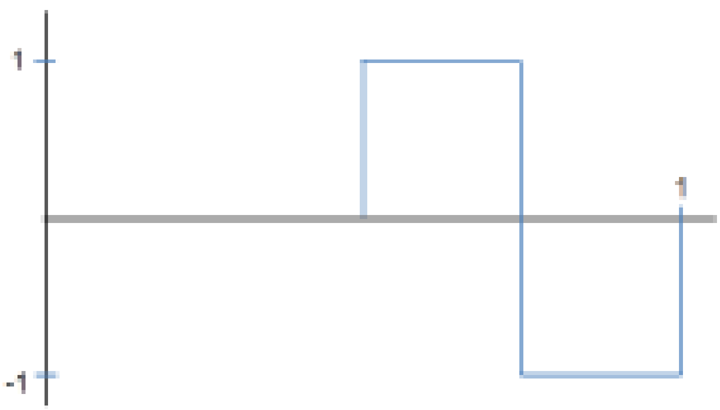
شكل 1.1: تمثيل $RH(0,t)$ دالة هار اذا كانت $i = 0, j = 0$



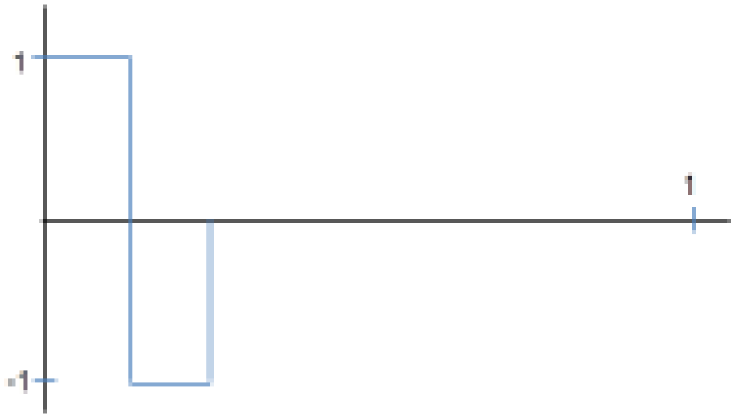
شكل 2.1: تمثيل $RH(1,t)$ دالة هار اذا كانت $i = 0$, $j = 1$



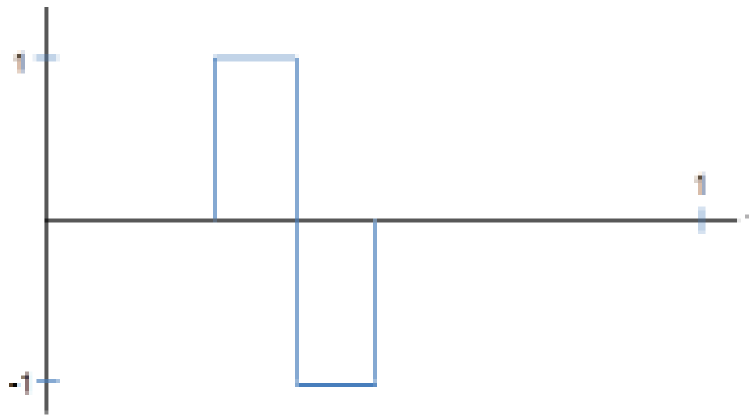
شكل 3.1: تمثيل $RH(2,t)$ دالة هار اذا كانت $i = 1$, $j = 1$



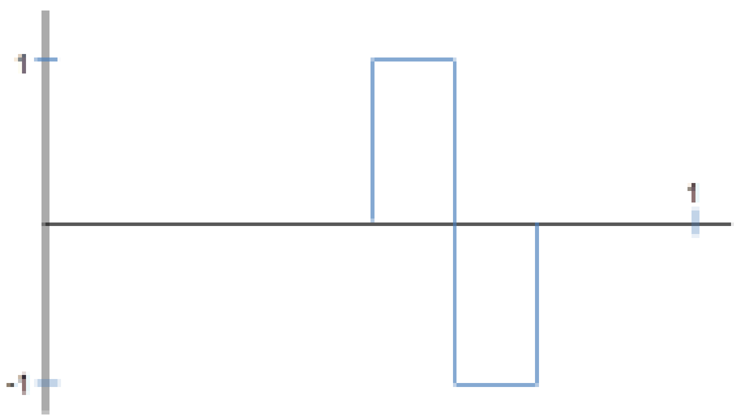
شكل 4.1: تمثيل $RH(3,t)$ دالة هار اذا كانت $i = 1$, $j = 2$



شكل 5.1: تمثيل $RH(4,t)$ دالة هار اذا كانت $i=2, j=1$



شكل 6.1: تمثيل $RH(5,t)$ دالة هار اذا كانت $i=2, j=2$



شكل 7.1: تمثيل $RH(6,t)$ دالة هار اذا كانت $i=2, j=3$

شكل 8.1: تمثيل $RH(7,t)$ دالة هار اذا كانت $j=4$ $i=2,$

5.1 خصائص دوال هار

1.5.1 التعامد

بنائيا المعيار لكل$RH(r;t)$ هو 2^{-i} لكل $r=2^i+j-1$ و $0<j\leqslant 2^i$
نثبت أن $<RH(r;t);RH(u;t)>=0$ من أجل $r\neq u$ نضع $r=2^i+j-1$ و $u=2^n+m-1$ مع $u\neq r$ لدينا $(i;j)$ ثنائية وحيدة حيث أن r تكتب هكذا $j\in\{1,2,3,..,2^i\}$ و $(n;m)$ ثنائية وحيدة حيث أن u تكتب $m\in\{1,2,3,..,2^n\}$
نميز حالتين:
إماأن يكون $i=n$ و$j\neq m$ وبالتالي لدينا:

$$I_r=\left[\frac{j}{2^i},\frac{j}{2^i}+\frac{1}{2^{i+1}}\right[\quad \text{et}\quad I_u=\left[\frac{m}{2^i},\frac{m}{2^i}+\frac{1}{2^{i+1}}\right[$$

وفي هذه الحالة $I_r\cap I_u=\varnothing$ وبالتالي:

$$<RH(r;t);RH(u;t)>=\int_{I_r\cap I_u}RH(r;t)RH(u;t)dt=0$$

إماأن يكون $i \neq n$ و $j = m$ وهنا نميزأيضا حالتين:
إماأن يكون $I_r \cap I_u = \varnothing$ وهنا نعود إلى الحالة الأولى.
إماأن يكون $I_r \cap I_u = \varnothing$ في هذه الحالة التذكيرات عن مجالات الثنائية المذكورة لتبرير أن أحدالمجالين محتوى في نصف الثاني , نفرض على سبيل مثلا دون فقدان العموميةأن $n < i$, I_u ذات السعة تساوي $1/2^i$ و I_u ذات السعة تساوي $1/2^n$ إذن I_r محتوات في أحد نصفي I_u .
بصفة خاصة , $RH(r;t)$ ثابتة في I_r تساوي 1 أو -1
لتكن C هده قيمة:

$$\begin{aligned} < RH(r;t)RH(u;t) > &= \int_{I_r \cap I_u} RH(r;t)RH(u;t)dt \\ &= \int_{I_r} RH(r;t)RH(u;t)dt. \\ &= c\int_{I_r} RH(r;t)dt \\ &= c \times 0 = 0, \end{aligned}$$

إذن$\forall r; u \in N$ لدينا:

$$< RH(r;t)RH(u;t) >= \int_{I_r \cap I_u} RH(r;t)RH(u;t)dt = \begin{cases} 2^{-i} & \text{pour} \quad r = u = 2^{-i} + j - 1 \\ 0 & \text{pour} \quad r \neq u \end{cases}$$

2.5.1 دوال هار تشكل أساس هلبرتي

قضية: دوال هار تشكل أساس هلبرتي في $L^2\,[0,1[$

برهان قضية: رأينا أن نظام هار متعامد بقي أن نبرهن أنه نظام هار كلي. نبين مباشرة كثافة في الفضاء الشعاعي الجزئي المرتب من دوال هار نستعمل النتيجة التوطئة التالية:
توطئة: باستعمال التدوينات السابقة لكل $m \in N^*$ حيث أن $m = 2^n - 1$

$$Vect\{RH(r;t), r = 0, 1, ..., m\} = Vect\{1_{J_{n;k}}, K = 1, 0, ..., m\}$$

برهان توطئة: نبين مساواة بعدي الفضاءين الجزئين وأن هناك احتواء, قبل كل شيئ, ل $m \geqslant 0$ الحدود $(RH(r;t))_{r=0,1,...,m}$ متعامدة مثنى مثنى, مستقلة خطيا ,و بالتالي :

$$Vect\{RH(r;t), r = 0, 1, ..., m\} = m + 1 = 2^n$$

كذلك الحدود $(J_{n,k})_{k=0,1,..,m}$ هي تكاملات من نفس الرتبةوالموشرات المرتبطة متعامدة في المجال L^2 , وتكون إذن عائلة حرة ويصبح لدينا :

$$dimVect\{1_{J_{n;k}}, K = 1, 0, ..., m\} = card\{1_{J_{n;k}}, K = 1, 0, ..., m\} = 2^n$$

هذا مايبرهن على أن الفضاءين الجزئين المتغيرين لهما نفس البعد .
لنبين الأن أن :

$$Vect\{RH(r;t), r = 0, 1, ..., m\} \subset Vect\{1_{J_{n;k}}, K = 1, 0, ..., m\}$$

لنثبت $l \in \{0, 1, 2..m\}$ لدينا $I_l = \left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right[$ مع $r < n-1$. إذن جدر لبعض $J_{n;k}$ مع الأخد بعين الإعتبار أن k يتغير من 0 و إلى $2^n - 1$ في تجزئة مجالات التكاملات الثنائية .بالتالي كل نصف من I_l يكتب كوحدة منفصلة لبعض حدوده $J_{n;k}$, إذن بمان $RH(l;t)$ ثابت على كل جزء من I_l فهي إذن إدماج خطي لمواشرات مجال الثنائي ذات رتبةn .
من هنا فإن الإحتواء الذي نبحث عنه هو نهاية الإستدلال للنتيجة التوطئة.
وبالعودة إلى القضية , فإننا مجبرون أن نبين أن:

$$Vect\{1_{J_{n;k}}, K = 1, 0, ..., m\} = L^2[0, 1[$$

نبين بعدهاأن كل دولة مستمرة على مجال $[0, 1[$ تقترب من بإدماج خطي لموشرات التكاملات الثنائية:
لتكن $f \in C^0(\{0; 1\})$. نعرف $(f_n)_{n \in N}$ بالطريقة التالي:

$$\forall n \in N, x \in J_{n;k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[, f_n(x) = f(\frac{k}{2^n}).$$

إذن لدينا ,لكل $n \in N$ و $x \in J_{n;k}$

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(\frac{k}{2^n})| \leqslant \sup_{|x-y| \leqslant 1/2^n} |f(x) - f_n(x)| = w_f(\frac{1}{2^n})$$

و $w_f(\frac{1}{2^n})$ هي وحدة قياس لإستمرارية المنتظمة ل f: f مستمرة على $[0,1[$ إدن مستمرة بانتظام على هده القطعة وفقا لنظرية هين وبالتالي:

$\forall \varepsilon > 0, \exists (x;y) \in [0,1]^2, |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

ثم

$$\forall \delta > 0, \exists N \in N, \forall n \geqslant N, \frac{1}{2^n} \leqslant \delta$$

إذن

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N, \forall n \geqslant N \sup_{|x-y| \leqslant 1/2^n} |f(x) - f(y)| = w_f(\frac{1}{2^n}) \leq \varepsilon.$$

وأخيرا:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N, \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$$

وما ينهي البرهان أن المعادلات التكاملية الثنائية السليمة كثيفة في الدوال المستمرة على المجال$[0,1[$

للمعيار $\|.\|_\infty$ إذن من باب أولى للمعيار حيث $\|.\|_2$ على $L^2([0,1[)$. هذا ينتج من اللامساواة التالية ,$f \in C^0([0,1[)$

$$\|f\|_2 = \left(\int f(x)^2 dx \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty.$$

وأخير نستعمل كثافة في دوال المستمرة في $L^2([0,1[)$ للمعيار $\|.\|_2$ نستنتج بعلاقة التعدي للكثافةأن المعادلات التكاملية الثنائية السليمة كثيفة في L^2 لنفس المعيار,إدن فالمعادلات التكاملية السليمة كثيفة في $L^2([0,1[)$.

6.1 تابع التقريب لدوال هار في البعد الأول

لدينا دالة $f(t)$ معرفة على المجال $L^2([0,1[)$ ننشرها بإستعمال دوال هار على الشكل التالي:

$$g(t)=\sum_{r=0}^{k-1} a_r RH(r,t) \tag{5.1}$$

إن المعاملات تعطى بالعلاقة حيث $r=0,1,2,....,$

$$a_r=\frac{< f(t),RH(r;t) >}{< RH(r;t),RH(r;t) >}=2^i\int_0^1 f(t)RH(r;t)dt,$$

حيث

$$r=2^i+j-1, i=1,2,..,j=1,2,..,2^i.$$

لدينا $r=0$ لأن $i=j=0.$ إن السلسلة السابقة تحوي عدد غير منته من الحدود ، لذا فنحن بحاجة إلى عدد منته من أجل الحسابات من أجل ذالك نأخذ k من الحدود حيث $k=2^{\alpha+1}$ و منه نقرب الدالة على النحو التالي :

نضع

$$g(t)=\sum_{r=0}^{k-1} a_r RH(r,t)$$

ثم نحسب الخطأ التقريبي:

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_{L^2}^2 &= \|f-\textstyle\sum_{r=0}^{k-1} a_r RH(r,t)dt\,\|_{L^2}^2 \\
&= \|\textstyle\sum_{r=k}^{\infty} a_r RH(r,t)dt\,\|_{L^2}^2 \\
&\leqslant \textstyle\sum_{r=k}^{\infty} |a_r|^2 \,\|RH(r,t)dt\,\|_{L^2}^2 \\
&= \textstyle\sum_{r=k}^{\infty} |a_r|^2 \\
&\sim \textstyle\sum_{r=k}^{\infty} 2^{-r} \sim 2^{-k} = \bigcirc(2^{-k})
\end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{r=0}^{K-1} a_r RH(r;t) = A^T \phi(t) \quad (6.1)$$

معاملات RH في كل مستوى هو r حيث $i = 0, 1, ..., \alpha$ ومنه نقرب كل الدالة على النحو التالي:

$$f(t) \simeq \sum_{r=0}^{K-1} a_r RH(r;t) = A^T \phi(t) \quad (7.1)$$

حيث $k = 2^{\alpha+1}; \alpha = 1, 2, ..$ نقول أن A الشعاع المعامل لهار يعرف:

$$A = [a_0, a_1, a_2, ...a_{K-1}]^T \quad (8.1)$$

والشعاع $\phi(t)$ دوال هارالمحسنة:

$$\phi(t) = [h_0, h_1, h_2, ...h_{K-1}]^T \quad (9.1)$$

حيث

$$h_r = RH(r;t), r = 1, 2, 3, ..., K-1$$

نستطيع كتابة مصفوفة باستعمال نيوتن كوتس:

$$\left[\phi\left(\frac{1}{2K}\right), \phi\left(\frac{3}{2K}\right), \phi\left(\frac{5}{2K}\right), ...\phi\left(\frac{2K-1}{2K}\right)\right] = \hat{\Phi}_{k\times k} \quad (10.1)$$

الفصل الثاني

المصفوفة العمليات لدوال لهار

قائمة المحتويـــــــــات

1.2 مقدمة

إن طريقة هار تستندإلى إستخدام المصفوفات التنفيذية والمصفوفة التنفذية لتكامل لدوال هار المحسنة ذات متغير أو متغيرين لحل جمل المعادلات التفاضلية التكاملية.

2.2 المصفوفات العمليات لدوال هار ذات المتغير الواحد

1.2.2 مصفوفة هار

[[1]]

تعريف 4. مصفوفة هار $\hat{\Phi}_{k\times k}$ معرفة على الشكل التالي:

(1.2)

$$\begin{cases}\hat{\Phi}_{k\times k}=\begin{bmatrix}\hat{\Phi}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}\otimes[1,1]\\ I_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}\otimes[1,-1]\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\hat{\Phi}_{1\times 1}=1$$

حيث $I_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}$ مصفوفة الوحدة و $\otimes$ جداء كرونكر

برهان إذا كانت $k=2$ تصبح لدينا

$$\hat{\Phi}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\otimes[1,1]\\ 1\otimes[1,-1]\end{bmatrix}$$

$$\hat{\Phi}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}\Phi_{1\times 1}\otimes[1,1]\\ I_{1\times 1}\otimes[1,-1]\end{bmatrix}$$

إذا كانت $k=4$ فتصبح

[1] [2] HOCINE ABBASSI Résolution de système d'équations intégro-différentielles par la méthode des fonctions de Haar rationalisées,Cambridge University,Ouargla University 2012

$$\hat{\Phi}_{4\times4}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\otimes[1,1]\\\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes[1,-1]\end{bmatrix}$$

$$\hat{\Phi}_{4\times4}=\begin{bmatrix}\hat{\Phi}_{2\times2}\otimes[1,1]\\I_{2\times2}\otimes[1,-1]\end{bmatrix}$$

تعريف 5. نرمز $H(n-1)$ مصفوفة هار ذات البعد $2^n\times2^n$ نعرف مايلي

$$H(n)=\begin{bmatrix}H_{n-1}\otimes[1,1]\\I_{n-1}\otimes[1,-1]\end{bmatrix}$$

$H(0)=[1]$، I_{n-1} هي مصفوفة ذات البعد $2^{n-1}\times2^{n-1}$ و $\otimes$ جداء كرونكر

مصفوفة هار تحتوي على كثير من الأصفار نوضح

La matrice de Haar	le nombre d'éléments	le nombre des zéro	Pourcentage des zéro
$\Phi_{8\times8}$	64	32	50%
$\Phi_{16\times16}$	256	176	68.75%
$\Phi_{32\times32}$	1024	832	81.25%
$\Phi_{64\times64}$	4096	3648	89.06%
$\Phi_{128\times128}$	16384	15360	93.75%
$\Phi_{256\times256}$	65536	63232	96.48%

2.2.2 مقلوب مصفوفة هار

من أجل حساب مقلوب مصفوفة هار $\hat{\Phi}_{k\times k}$ نطبق العبارة التالية:

$$\hat{\Phi}^{-1}_{k\times k}=\frac{1}{K}\hat{\Phi}^T_{k\times k}diag(1,1,2,2,\underbrace{2^2...2^2},\underbrace{2^3...2^3},....\underbrace{\frac{k}{2}...\frac{k}{2}})=\frac{1}{K}\hat{\Phi}^T_{k\times k}Q_{k\times k}\tag{2.2}$$

حيث

$$Q_{k\times k}=\begin{bmatrix} I_2 & . & . & 0 \\ . & 2I_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & 2^{P-1}I_{2_{P-1}} \end{bmatrix}$$

أو $P=log_2k$

برهان: إذا كانت $k=2$ يعني:

$$\hat{\Phi}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ومقلوب مصفوفة هو

$$\hat{\Phi}^{-1}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\hat{\Phi}^{T}_{2\times 2}diag(1,1)$$

إذا كانت $k=4$

$$\hat{\Phi}_{4\times 4}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مقلوب $\hat{\Phi}^{-1}_{4\times 4}$

$$\hat{\Phi}^{-1}_{4\times 4}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & -\frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\hat{\Phi}^{T}_{4\times 4}diag(1,1,2,2)=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & -\frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

من (3.2)و(4.2)

$$\frac{1}{4}\Phi^T_{4\times4} = \frac{1}{4}\hat{\Phi}^T_{4\times4}diag(1,1,2,2)$$

تعريف 6. $H^{-1}(n)$ هو مقلوب مصفوفةهار في البعد $2^n \times 2^n$ و يعرف بـ:

$$H^{-1}(n) = 1/2\left[H^{-1}(n-1)\otimes\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, I(n-1)\otimes\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right]$$

حلها باستعمال برنامج المطلاب

حساب مقلوب مصفوفة هار ذات البعد $2^7 = 128$ تعطى المصفوفة $H^{-1} = [1]$

```
A=[1]
Z=[1 ;1]
C=[1 ;-1]
A1 =1/2*[kron(A,Z),kron(eye(1),C)]
A2 =(1/2)*[kron(A1,Z),kron(eye(2),C)]
A3 =(1/2)*[kron(A2,Z),kron(eye(4),C)]
A4 =(1/2)*[kron(A3,Z),kron(eye(8),C)]
A5 =(1/2)*[kron(A4,Z),kron(eye(16),C)]
A6 =(1/2)*[kron(A5,Z),kron(eye(32),C)]
H =(1/2)*[kron(A6,Z),kron(eye(64),C)]
```

3.2.2 شعاع معاملات دوال هار

يعرف شعاع معاملات دوال هار بـ :

$$\left[f(\frac{1}{2K}), f(\frac{3}{2K}), f(\frac{5}{2K}), ..., f(\frac{2K-1}{2K})\right] = A^T\hat{\Phi}_{k\times k}$$

ومنه نجد :

$$A^T = \left[f\left(\frac{1}{2K}\right), f\left(\frac{3}{2K}\right), f\left(\frac{5}{2K}\right), ..., f\left(\frac{2K-1}{2K}\right)\right]\hat{\Phi}^{-1}_{k\times k}$$

مثال 1.2.2. لتكن العبارة التالية: $f(t) = t^2, 0 \le t < 1$ معرفة على المجال $L^2\,[0,1[$ حيث $k = 4$ نجد

$$\left[f\left(\frac{1}{8}\right), f\left(\frac{3}{8}\right), f\left((\frac{5}{8}\right), f\left(\frac{7}{8}\right)\right] = \left[\frac{1}{64}, \frac{9}{64}, \frac{25}{64}, \frac{47}{64}\right] \qquad (7.2)$$

لدينا الشعاع: A^T

$$\Phi_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\Phi^{-1}_{4\times4} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \left[\frac{1}{64}, \frac{9}{64}, \frac{25}{64}, \frac{49}{64}\right] \times \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{512}[168, -128, -32, -96]$$

إذن شعاع معاملات هار كالتالي:

$$A^T = [0.320, -0.25, 0, -0625, -0.1875] \qquad (8.2)$$

حساب شعاع بإستعمال برنامج المطلاب

```
a=0.125 :0.25 :1
for n=1 :4
h(n)= a(n).*a(n)
end
A=[1]
Z=[1 ;1]
C=[1 ;-1]
A1 =1/2*[kron(A,Z),kron(eye(1),C)]
A2 =(1/2)*[kron(A1,Z),kron(eye(2),C)]
F=h*A2
```

3.2 تابع التقريب لدوال هار في البعد الثاني

نعرف دوال هار في البعد الثاني ب $h_{rv}(t,s) = RH(r,t) \times RH(v,t)$
حيث كل دالة $k(t,s)$ معرفة بمتغيرين مستقالين $\in L^2([0,1[\times[0,1[)$ ومنه تقريب $k(t,s)$ كتالي

$$k(t,s) = \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{k-1} h_{rv} RH(r,t) RH(v,s) \qquad (9.2)$$

حيث
$h_{vs} = 2^{i+n} \int_0^1 \int_0^1 k(t,s) h_r(t) h_v(s) dtds,$

لدينا

$n = 1, 2, 3, ...\alpha \ i = 1, 2, 3, ..\alpha$

حيث

$RH(r, t) = h_r(t)$

$$k(t, s) = \phi^T(t) H \phi(s) \tag{10.2}$$

ولدينا

$$H = (\Phi^{-1}_{k\times k})^T \hat{H} \Phi^{-1}_{k\times k}$$

$$\hat{H} = (h_{vs})^T_{k\times k} \tag{11.2}$$

نوجد h_{ij} بـ

$$h_{ij} = \frac{\langle RH(i, t), \langle k(t, s), RH(j, s)\rangle\rangle}{\langle RH(i, t), RH(i, t)\rangle \langle RH(j, t), RH(j, t)\rangle}$$

$$H = (\Phi^{-1}_{k\times k})^T H \Phi^{-1}_{k\times k} \tag{12.2}$$

و المصفوفة $\hat{H}$ تعرف

$$\hat{H} = (\hat{h}_{lp})_{k\times k} \tag{13.2}$$

$$(\hat{h}_{lp}) = k\left(\frac{2l-1}{2k}, \frac{2p-1}{2k}\right), p, l = 1, 2, ..., k.$$

مثال 1.3.2. لتكن $k_1 : [0, 1) \times [0, 1) \longrightarrow R$ حيث $k_1(t, s) = e^{ts}$. لإيجاد H_1 نحسب $\hat{H}_1$ نختار $k = 8$

$$\hat{H}_1 = (\hat{h}_{lp})_{8\times 8} = (e^{\frac{2l-1}{16} \times \frac{2p-1}{16}})_{8\times 8}, p, l = 1, 2, ..., k.$$

$$\hat{H}_1 = \begin{bmatrix} 1.0039 & 1.0118 & 1.0197 & 1.0277 & 1.0358 & 1.0439 & 1.0521 & 1.0603 \\ 1.0118 & 1.0358 & 1.0603 & 1.0855 & 1.1112 & 1.1376 & 1.1646 & 1.1922 \\ 1.0197 & 1.0603 & 1.1026 & 1.1465 & 1.1922 & 1.2397 & 1.2891 & 1.3404 \\ 1.0277 & 1.0855 & 1.1465 & 1.2110 & 1.2790 & 1.3509 & 1.4268 & 1.5071 \\ 1.0358 & 1.1112 & 1.1922 & 1.2790 & 1.3722 & 1.4721 & 1.5794 & 1.6944 \\ 1.0439 & 1.1376 & 12397. & 1.3509 & 1.4721 & 1.6042 & 1.7482 & 1.9051 \\ 1.O521 & 1.1646 & 1.2891 & 1.2868 & 1.5794 & 1.7482 & 1.9351 & 2.1420 \\ 1.0603 & 1.1922 & 1.3404 & 1.5071 & 1.6944 & 1.9051 & 2.1420 & 2.4083 \end{bmatrix}.$$

حيث

$$H_1 = (\hat{\Phi}_{8\times8}^{-1})\hat{H}\hat{\Phi}_{8\times8}^{-1}$$

نجد

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ -0.1773 & 0.1033 & 0.0401 & 0.0645 & 0.0177 & 0.0226 & 0.0286 & 0.0361 \\ -0.0741 & 0.0401 & 0.0177 & 0.0226 & 0.0083 & 0.0094 & 0.0106 & 0.0120 \\ -0.1046 & 0.0645 & 0.0226 & 0.0434 & 0.0094 & 0.0133 & 0.0184 & 0.0252 \\ -0.0340 & 0.0177 & 0.0083 & 0.0094 & 0.0040 & 0.0043 & 0.0046 & 0.0048 \\ -0.0403 & 0.0226 & 0.0094 & 0.0133 & 0.0043 & 0.0051 & 0.0061 & 0.0072 \\ -0.0478 & 0.0286 & 0.0106 & 0.0148 & 0.0046 & 0.0061 & 0.0080 & 0.0105 \\ -0.0570 & 0.0361 & 0.0120 & 0.0252 & 0.0048 & 0.0072 & 0.0105 & 0.0149 \end{bmatrix}$$

مثال 2.3.2. لتكن $k(t,s)_2 = \sin(4\pi t + 2\pi s)$ **حيث** $(t,s) \in [0,1) \times [0,1)$ **لإيجاد** H_2 **نحسب** $\hat{H}_2$ **نختار** $k = 8$

$$\hat{H}_2 = (\hat{h}_{lp})_{8\times8} = \left(sin\left(4\pi\frac{2l-1}{16} + 2\pi\frac{2p-1}{16}\right)\right)_{8\times8}, p, l = 1, 2, ..., k.$$

$$\hat{H}_2 = \begin{bmatrix} 0.9239 & 0.9239 & 0.3827 & -0.3827 & -0.9239 & -0.9239 & -03827 & 0/3827 \\ 0.3827 & -0.3827 & -0.9239 & -0.9239 & -0.3827 & 0.38270 & 0.9239 & 0.9239 \\ -0.9239. & 1.0603 & 1.1026 & 1.1465 & 1.1922 & 1.2397 & 1.2891 & 1.3404 \\ -0.3827 & 0.3827 & 0.9239 & 0.9239 & 0.3827 & 1.3509 & -0.9239 & -0.9239 \\ 0.9239 & 0.9239 & -0.3827 & -0.3827 & -0.9239 & -0.9239 & -0.3827 & 0.3827 \\ 0.9239 & -0.3827 & -0.9239 & -0.9239 & -0.3827 & 0.3827 & 0.9239 & 0.9239 \\ -0.9239 & -0.9239 & -0.3827 & 0.3827 & 0.9239 & 0.9239 & 0.3827 & -0.3827 \\ -0.3827 & 0.3827 & 0.9239 & 0.9239 & 0.382 & -0.3827 & -0.9239 & -0.9239 \end{bmatrix}$$

من المعادلة (13.2)

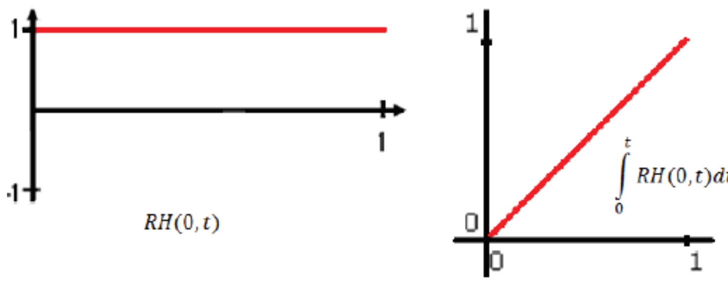
$$H_2 = (\hat{\Phi}_{8\times 8}^{-1})\hat{H}\hat{\Phi}_{8\times 8}^{-1}$$

نجد

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4619 & -0.4619 & 0.1913 & 0.1913 & -0.4619 & -0.4619 \\ 0 & 0 & 0.4619 & -0.4619 & -0.1913 & 0.1913 & -0.1913 & -0.1913 \\ 0 & 0.4619 & 0 & 0 & -0.1913 & 0.1913 & 0.1913 & -0.1913 \\ 0 & -0.4619 & 0 & 0 & 0.1913 & -0.1913 & -0.1913 & 0.1913 \\ 0 & -0.4619 & 0 & 0 & -0.1913 & 0.1913 & 0.1913 & -0.1913 \\ 0 & -0.4619 & 0 & 0 & 0.1913 & -0.1913 & -0.1913 & 0.1913 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 تكامل دوال هار

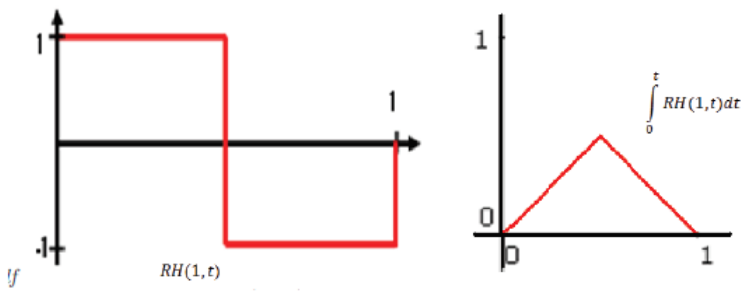
$$RH(0,t) = 1, 0 \leq t < 1 \Longrightarrow \int_0^t RH(0,x)dx = t, 0 \leq t < 1 \qquad (14.2)$$



شكل 1.2: تمثيل $RH(0,t)$ دالة هار وتكاملها

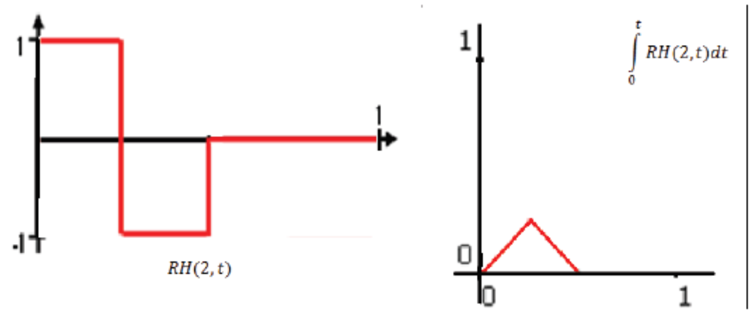
$$(15.2)$$

$$RH(1,t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & , \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & , ailleurs \end{cases} \Longrightarrow \int_0^t RH(1,x) = \begin{cases} t & , 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1-t & , \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$



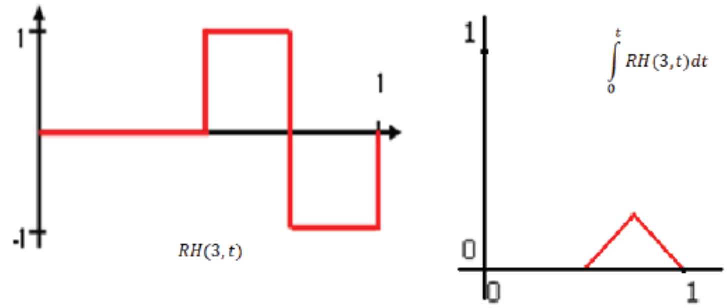
شكل 2.2: تمثيل $RH(1,t)$ دالة هار وتكاملها

$$RH(2,t)=\begin{cases}1 & ,0\leq t<\frac{1}{4}\\ -1 & ,\frac{1}{4}\leq t<\frac{1}{2}\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}\Longrightarrow\int_0^t RH(2,x)=\begin{cases}t-\frac{1}{4} & ,0\leq t<\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}-t & ,\frac{1}{4}\leq t<\frac{1}{2}\end{cases} \tag{16.2}$$



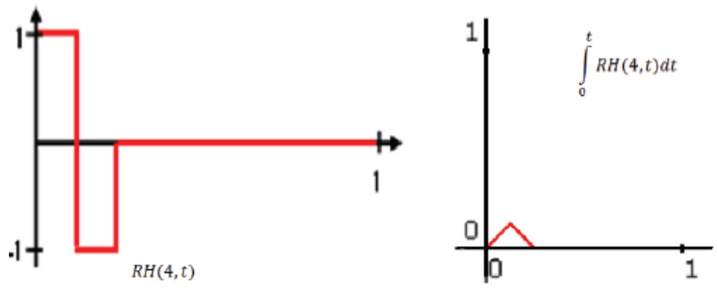
شكل 3.2: تمثيل $RH(2,t)$ دالة هار وتكاملها

$$RH(3,t)=\begin{cases}1 & ,\frac{1}{2}\leq t<\frac{3}{4}\\ -1 & ,\frac{3}{4}\leq t<1\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}\Longrightarrow\int_0^t RH(3,x)=\begin{cases}t-\frac{1}{2} & ,\frac{1}{2}\leq t<\frac{3}{4}\\ 1-t & ,\frac{3}{4}\leq t<1\end{cases} \tag{17.2}$$



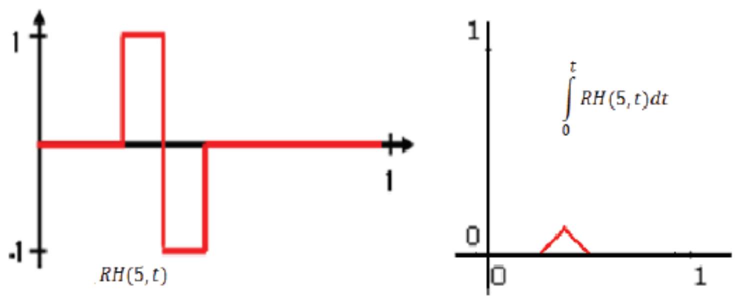
شكل 4.2: تمثيل $RH(3,t)$ دالة هار وتكاملها

$$RH(4,t)=\begin{cases}1 & ,0\leq t<\frac{1}{8}\\ -1 & ,\frac{1}{8}\leq t<\frac{1}{4}\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}\Longrightarrow\int_0^t RH(4,x)=\begin{cases}t & ,0\leq t<\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4}-t & ,\frac{1}{8}\leq t<\frac{1}{4}\end{cases}\tag{18.2}$$



شكل 5.2: تمثيل $RH(4,t)$ دالة هار وتكاملها

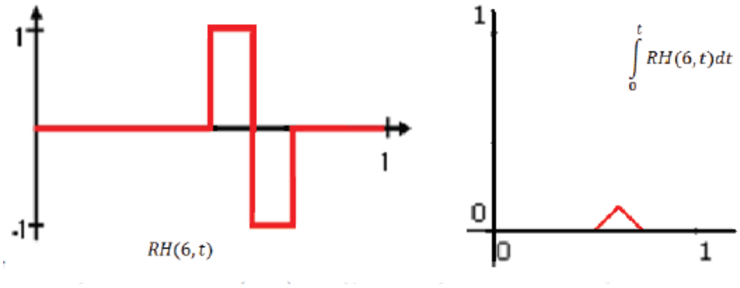
$$RH(5,t)=\begin{cases}1 & ,\frac{1}{4}\leq t<\frac{3}{8}\\ -1 & ,\frac{3}{8}\leq t<\frac{1}{2}\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}\Longrightarrow\int_0^t RH(5,x)=\begin{cases}t-\frac{1}{4} & ,\frac{1}{4}\leq t<\frac{3}{8}\\ \frac{1}{2}-t & ,\frac{3}{8}\leq t<\frac{1}{2}\end{cases}\tag{19.2}$$



شكل 6.2: تمثيل $RH(5,t)$ دالة هار وتكاملها

(20.2)

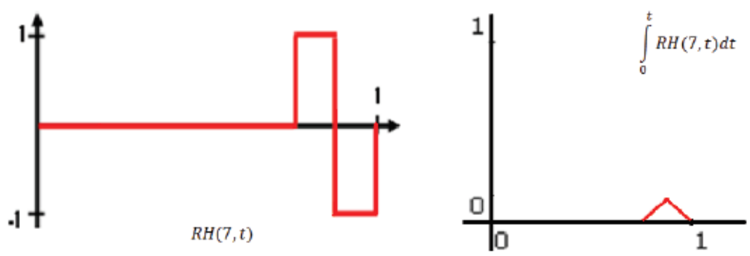
$$RH(6,t)=\begin{cases}1 & ,\frac{1}{2}\leq t<\frac{5}{8}\\ -1 & ,\frac{5}{8}\leq t<\frac{3}{4}\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}\Longrightarrow\int_0^t RH(6,x)=\begin{cases}t-\frac{1}{2} & ,\frac{1}{2}\leq t<\frac{5}{8}\\ \frac{3}{4}-t & ,\frac{5}{8}\leq t<\frac{3}{4}\end{cases}$$



شكل 7.2: تمثيل $RH(6,t)$ دالة هار وتكاملها

(21.2)

$$RH(7,t)=\begin{cases}1 & ,\frac{3}{4}\leq t<\frac{7}{8}\\ -1 & ,\frac{7}{8}\leq t<1\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}\Longrightarrow\int_0^t RH(7,x)=\begin{cases}t-\frac{3}{4} & ,\frac{3}{4}\leq t<\frac{7}{8}\\ 1-t & ,\frac{7}{8}\leq t<1\end{cases}$$



شكل 8.2: تمثيل $RH(7,t)$ دالة هار وتكاملها

في الحالة العامة تكامل دوال هار يعرف:

$$RH(r,t)=\begin{cases}1 & ,j_1\le t<j_{\frac{1}{2}}\\ -1 & ,j_{\frac{1}{2}}\le t<j_0\\ 0 & ,ailleurs\ \int_0^t RH(r,x)=\begin{cases}t-j_1 & ,j_1\le t<j_{\frac{1}{2}}\\ j_0-t & ,j\frac{1}{2}\le t<j_0\end{cases}\end{cases} \quad (22.2)$$

2.3.2 تقريب لتكامل دوال هار

نختار الرتبة الرابعة إذن التكاملات الأربعة لدوال هار تعطى:

$$\int_0^1 RH(0,x)dx=t,0\le t<\simeq\frac{1}{8}[1357]$$

لأن:

$$\int_0^1 RH(0,x)dx=t,0\le a_0,RH(0;t)+a_1RH(1;t)+a_2RH(2;t)+a_3RH(3;t)$$

حيث:

$$a_0=2^0\int_0^1 tRH(0,x)dt=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$$

$$a_1=2^1\int_0^1 tRH(0,x)dt=\int_0^2 tdt-\int_{\frac{1}{2}}^1 tdt=\frac{-2}{8}$$

$$a_2=2^1\int_0^1 tRH(2,x)dt=2\left(\int_0^{\frac{1}{4}} td-\int_1^{\frac{1}{2}} tdt\right)t=\frac{-1}{8}$$

$$a_3=2^1\int_0^1 tRH(3,x)dt=2\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} tdt-\int_{\frac{3}{4}}^1 tdt\right)t=\frac{-1}{8}$$

وفي الأخير

$$t\simeq\frac{4}{8}[1,1,1,1]+\frac{-2}{8}[1,1,-1,-1]+\frac{-1}{8}[1,-1,0,0]+\frac{-1}{8}[0,0,1,-1]$$
$$t\simeq\frac{1}{8}[1,3,5,7]$$

$$\int_0^t RH(1,x)dx = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < \frac{1}{2} \\ 1-t, & \frac{1}{2} \leqslant t < 1 \end{cases} \simeq \frac{1}{8}[1331]$$

لأن:

$\int_0^t RH(1,x)dx \simeq a_0RH(0;t) + a_1RH(1;t) + a_2RH(2;t) + a_3RH(3;t)$ حيث

$$a_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt = \frac{2}{8}$$

$$a_1 = 2^0 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt\right) = 0 \quad a_2 = 2^1 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} tdt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} tdt\right) = -\frac{1}{8}$$

$$a_3 = 2^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (1-t)dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 (1-t)dt\right) = \frac{1}{8}$$

$$\int_0^t RH(1,x)dx \simeq \frac{2}{8}[1,1,1,1] - \frac{1}{8}[1,-1,0,0] + \frac{1}{8}[0,0,1,-1]$$
$$\simeq \frac{1}{8}[1,3,3,1]$$

وبنفس الطريقة يحسب تقريب تكامل التالي:

$$\int_0^t RH(2,x)dx = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}-t, & \frac{1}{4} \leqslant t < \frac{1}{2} \end{cases} \simeq \frac{1}{8}[1300]$$

$$\int_0^t RH(3,x)dx = \begin{cases} t-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leqslant t < \frac{3}{4} \\ 1-t, & \frac{3}{4} \leqslant t < 1 \end{cases} \simeq \frac{1}{8}[0011]$$

وتكامل شعاع دوال هار يجد كتالي :

$$\int_0^t \Phi_4(x)dx \simeq \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23.2)$$

3.3.2 المصفوفة التنفذية لتكامل

تكامل شعاع دوال هار $\Phi(t)$ يمكن نشرها بسلسلة هار كمايلي:

$$\int_0^t \Phi(x) = P\Phi(t) \quad (24.2)$$

حيث $P = P_{k\times k}$ تسمى المصفوفة التنفذية لتكامل كما يمكن تعريفها كمايلي:

$$P_{k\times k} = \langle \int_0^t \Phi(x), \Phi(t)\rangle = \int_0^1 \int_0^t \Phi(x)\Phi(t)dxdt \qquad (25.2)$$

نستنتج المصفوفة P_k

$$P_{k\times k} = \left[\int_0^t \Phi(x)dx\right]\hat{\Phi}^{-1}_{k\times k} \qquad (26.2)$$

في الحالة العامة إذا كانت من الرتبة $k = 2^i$ حيث j عدد صحيح موجب , المصفوفة P_m تعرف كالتالي:

$$P_{k\times k} = \frac{1}{2k}\begin{bmatrix} 2kP_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}} & -\hat{\Phi}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}} \\ \hat{\Phi}^{-1}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\hat{\Phi}^{-1}_{k\times k} = [1], P_{1\times 1} = [\tfrac{1}{2}], \hat{\Phi}^{-1}_{k\times k}$$

$$\hat{\Phi}^{-1}_{k\times k} = \left(\tfrac{1}{k}\right)\hat{\Phi}^{t}_{k\times k} diag(1,1,2,2,2^2,...,2^2,2^3,..,2^3,.......,2^k,...,2^k)$$

برهان :

إذا كان $k = 2$ يعني :

$$\Phi_2 = [h_0, h_1]^t$$

$$a_0 = 2^0\int_0^1 tRH(0,t)dt = \int_0^1 tdt = \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{8}$$

$$a_1 = 2^0\int_0^1 tRH(1,t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} tdt - \int_{\frac{1}{2}}^1 tdt = \tfrac{-2}{8}$$

$$\int_0^t = a_0RH(0,t) + a_1RH(1,t) = \tfrac{1}{2}[1,1] - \tfrac{1}{4}[1,-1]$$

$$a_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt = \tfrac{2}{8}$$

$$a_1 = 2^0\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt\right) = 0$$

$$\int_0^t RH(1,t) = \tfrac{1}{4}[1,1]$$

$$\int_0^t \Phi_2(x)dx \simeq \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = P_{2\times 2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_{2\times 2} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_{2\times 2} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2\times 2}\begin{bmatrix} 2\times 2\times P_1 & -\Phi_{1\times 1} \\ \Phi_{1\times 1} & 0 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $k=4$ نجد:

$$\int_1^t \Phi_4(x)dx \simeq \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\hat{\Phi}_{4\times4} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \hat{\Phi}^{-1}_{4\times4} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

حساب $P_{k\times k}$

$$P_{4\times4} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \times \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{4\times4} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2\times4\times\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2\times 4P_{2\times2} & -\hat{\Phi}_{2\times2} \\ \hat{\Phi}^{-1}_{k\times k} & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.2 المصفوفة الناتجة عن تكامل شعاعين لدوال هار

قضية 1.3.2. المصفوفة الناتجة عن تكامل شعاعين لدوال هار تعطى بالشكل التالي:

$$\int_0^1 \phi(t)\phi^t(t)dt = D \tag{27.2}$$

و D مصفوفة قابلة للقلب تعطى بالشكل التالي:

$$D = diag\left(1,1,2,2,\underbrace{\frac{1}{2^2},\dots,\frac{1}{2^2}}_{2^2},\underbrace{\frac{1}{2^3},\dots,\frac{1}{2^3}}_{2^3},\dots\dots\dots,\underbrace{\frac{1}{2^k},\dots,\frac{1}{2^k}}_{2^k}\right)$$

برهان:

إذا كانت $k=1$

نجد $\int_0^1 h_0(t)h_0(t)dt=1$

إذا كانت $k=2$ لدينا $\Phi_2(t)=[h_0(t),h_1(t)]^t$

$$\int_0^1 \Phi_2(t)\Phi_2^t(t)dt=\begin{bmatrix} \int_0^1 h_0^2 dt & \int_0^1 h_0(t)\times h_1(t)dt \\ \int_0^1 h_1(t)h_0(t)dt & \int_0^1 h_1^2(t)dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=diag(1,1)$$

إذا كانت

$$k=2^2=4,\Phi_4(t)[h_0(t),h_1(t),h_2(t),h_3(t),h_4(t)]^t$$

$$\Phi_4(t)\Phi_4^t(t)=\begin{bmatrix} h_{0(t)} \\ h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix}\times[h_0(t),h_2(t),h_3(t)]$$

$$=\begin{bmatrix} h_0^2(t) & h_0(t)h_1(t) & h_0(t)h_2(t) & h_0(t)h_3(t) \\ h_1(t)h_0(t) & h_1^2(t) & h_1(t)h_2(t) & h_1(t)h_3(t) \\ h_1(t)h_0(t) & h_0(t)h_1(t) & h_2^2(t) & h_2(t)h_3(t) \\ h_3(t)h_0(t) & h_3(t)h_1(t) & h_3(t)h_2(t) & h_3^2(t) \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1(t)\Phi_2(t)\Phi_2^t dt=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1} \end{bmatrix}=diag[1,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]$$

إذا كانت $k=2^3=8$ يصبح $\Phi_8=[h_0(t),h_2(t).....,h_7(t)]$

$$\int_0^1 \Phi_4(t)\Phi_4^t(t)dt=diag\left(1,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\underbrace{\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2}}_{2^2}\right)$$

في الحالة العامة إذا كانت $k=2^\alpha$

$$\int_0^1 \Phi_k(t)\Phi_k^t(t)dt=diag\left[1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\underbrace{\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2}}_{2^2},...,\underbrace{\frac{1}{2^3},...,\frac{1}{2^3}}_{2^3},...,\underbrace{\frac{1}{2^{\alpha-1}},...,\frac{1}{2^{\alpha-1}}}_{\alpha-1}\right]$$

إذا كانت $k=2,4,8$ فإن التكامل $\int_0^1 \Phi_k(t)\Phi_k^t(t)dt$ يعرف كما يلي:

$$\int_0^1 \Phi_k(t)\Phi_k^t(t)dt = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{2\times 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}I_{4\times 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{k}I_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

5.3.2 المصفوفة التنفذية

تعريف 7. المصفوفة الناتجة عن جداء دالتي هار $\phi(t)$ و$\phi(t)^t$ نرمز لها بالرمز $\Psi_{k\times k}(t)$

$$\phi(t)\phi^t(t) = \Psi_{k\times k}(t) \qquad (28.2)$$

6.3.2 المصفوفة الناتجة عن جداء دالتي هار المحسنة

نعرف جداء دالتي هار $RH(0,t), RH(q,t)$

$RH(0,t)\times RH(q,t) = RH(0,t).q = 1,2,3....7$

إذا كانت دالتي هار $RH(u,t)$ و $RH(r,t)$ حيث $r<u$ نجد :

$$RH(u,t)RH(r,t) = \rho_{rv}h_u(t)$$

$$\rho_{uv} = RH(r,2^n(m-1/2)) = \begin{cases} 1 & 2^{-i}(j-1)\leqslant m < 2^{n-i}(k-1/2) \\ -1 & m < 2^{n-i}(k-1/2)\leqslant m < 2^{n-i}j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

حيث

$$\begin{cases} r = 2^i + j - 1 \\ u = 2^n + m - 1 \end{cases}$$

$$RH(r,t)RH(u,t) = \begin{cases} 1 & 2^{-i}(j-1)\leqslant t < 2^{n-i}j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

حيث $r = 2^i = j-1$

المصفوفة الناتجة عن جداء شعاع و شعاعين لدالة هار المحسنة $\Psi_{k\times k}$ تعرف كالتالي :

$$\psi_{k\times k} = \begin{bmatrix} \psi_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}(t) & H^{\times}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}(t) \\ H^{\times t}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}(t) & D^{\times}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}(t) \end{bmatrix} \qquad (29.2)$$

حيث $\psi_{1\times 1} = h_0$

$$H^{\times}_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2})}(t) = \Phi_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}} diag[h_{\frac{k}{2}}(t), h_{\frac{k}{2}+1}, .., h_{k-1}(t)]$$

حيث $D^{\times}_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2}})(t) = diag\left[\Phi^{-1}[h_0(t), h_1(t), ..., h_{\frac{k}{2}-1}(t)]^T\right]^T$

برهان :

لدينا $RH(r,t) = h_r(t)$ إذا كانت $k = 2$

$$h_0 \times h_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = h_0$$

$$h_0 \times h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = h_1$$

$$h_1 \times h_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = h_1$$

$$h_1 \times h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = h_0$$

$$\psi_{2\times 2} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} \times [h_0 h_1] = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{1\times 1}(t) & H^{\times}_{1\times 1}(t) \\ H^{*\times}_{1\times 1}(t) & D^{\times}_{1\times 1}(t) \end{bmatrix}$$

حيث أن $\psi_{1\times 1}(t) = h_0,\ H^{\times}_{1\times 1}(t) = h_1,\ D^{\times}_{1\times 1}(t) = h_0$

إذا كانت $k = 4$

$$h_0 \times h_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = h_0$$

$$h_0 \times h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = h_1$$

$$h_0 \times h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = h_2$$

$$h_0 \times h_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = h_0$$

$$h_1 \times h_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = h_1$$

$$h_1 \times h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = h_0$$

$$h_1 \times h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = h_2$$

$$h_1 \times h_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -h_3$$

لدينا الضرب تبديلي

$$h_2 \times h_0 = h_0 \times h_2 = h_2$$

$$h_2 \times h_1 = h_1 \times h_2 = h_2$$

$$h_2 \times h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{h_0 + h_1}{2}$$

$$h_2 \times h_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$h_3 \times h_0 = h_0 \times h_3 = h_0$$

$$h_3 \times h_1 = h_1 \times h_3 = -h_3$$

$$h_3 \times h_2 = h_2 \times h_3 = 0$$

$$h_3 \times h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{h_0 - h_1}{2}$$

في الأخير نجد:

$$\psi_{4\times4} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ -h_3 \end{bmatrix} \times [h_0 h_1 h_2 h_3] = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & h_0 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_2 & \frac{h_0+h_1}{2} & 0 \\ h_3 & -h_3 & 0 & \frac{h_0+h_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{4\times4}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}h_0 & h_1\\ h_1 & h_0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}h_2 & h_3\\ h_2 & -h_3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}h_2 & h_2\\ h_3 & -h_3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{h_0+h1}{2} & 0\\ 0 & \frac{h_0-h1}{2}\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_{2\times2} & H^{\times}_{2\times2}\\ H^{\times T}_{2\times2} & D^{\times}_{2\times2}\end{bmatrix}$$

7.3.2 المصفوفة الناتجة عن جداء شعاع هار ومصفوفة محسنة

تعريف 8. المصفوفة الناتجة عن جداء شعاع هار A مع مصفوفةالمحسنة $\psi_{k\times k}(t)$ تعطى بشكل التالي:

$$\psi_{k\times k}(t)A=\tilde{A}_{k\times k}\phi(t) \tag{30.2}$$

حيث $\tilde{A}$ مصفوفةذات البعد $k\times k$

المصفوفة تعرف كالتالي:

$$\tilde{A}_{k\times k}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{(\frac{k}{2}\times\frac{k}{2})} & \tilde{H}_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2})}\\ H_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2})} & \tilde{D}_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2})}\end{bmatrix} \tag{31.2}$$

حيث أن $\tilde{A}_{1\times1}=a_0$

$$\tilde{H}_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2})}=\hat{\Phi}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}diag[a_{\frac{k}{2}},a_{\frac{k}{2}+1},...,a_{k-1}]$$

$$H_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2})}=diag[a_{\frac{k}{2}},a_{\frac{k}{2}+1},...,a_{k-1}]\hat{\Phi}^{-1}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}$$

و

$$\tilde{D}_{(\frac{k}{2})\times(\frac{k}{2})}=\Big[[a_0,a_0,...,a_0].\hat{\Phi}_{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}\Big]$$

برهان : إذا كانت $k=2$ يصبح $A=[a_0,a_1]^T$ حيث $\psi_{2\times2}(t)=\begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix}$

حيث $\Phi_2(t)=\begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix}$

$$\psi_{2\times2}A=\begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_0a_0+h_1a_1 \\ h_1a_0+h_0a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $k=4$ يصبح $A=[a_0,a_1,a_2,a_3]^T$ و $\Phi(t)=\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$

$$\psi_{4\times4}(t)A=\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & h_0 & h_2 & -h_3 \\ h_2 & h_2 & \frac{h_0+h_1}{2} & 0 \\ h_3 & -h_3 & 0 & \frac{h_0-h_1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{4\times4}(t)A=\begin{bmatrix} h_0a_0+h_1a_1+h_2a_2+h_3a_3 \\ h_1a_0+h_0a_1+h_2a_2-h_3a_3 \\ h_2a_0+h_2a_1+\frac{h_0+h_1}{2}a_2 \\ h_3a_0-h_3a_1\frac{h_0-h_1}{2}a_3 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{4\times4}(t)A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_2 & -a_3 \\ a_2/2 & a_2/2 & a_0+a_1 & 0 \\ a_3/2 & -a_3/2 & 0 & a_0-a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{A}}_{4\times4}=\begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{A}}_{2\times2} & \tilde{\ }\mathrm{H}_{2\times2} \\ H_{2\times2} & \tilde{\ }\mathrm{D}_{2\times2} \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث

طريقة حل جمل المعادلات التفاضلية التكاملية الخطية بإستخدام دوال هار المحسنة

قائمة المحتويـــــــــات

1.3 مقدمة

لقد تعددت طرق حل المعادلات التفاضلية التكاملية الخطية ,سواء كانت تحليلية أو عددية,وسنهتم في هذا الفصل على طريقة هار والتي تمثل بإستعمال الدوال هار المحسنة لحل جملة معادلات التفاضلية التكامليةالخطية والتي هي محل دراستنا.

2.3 حل معادلة التفاضلية التكاملية الخطية ذات متغير واحد بطريقة دوال هار المحسنة

[1]
في هذا الفصل سوف نحل المعادلات التفاضلية التكاملية ذات متغير واحد بطريقة دوال هار المحسنة
لتكن المعادلة الآتية

$$\begin{cases} q(t)\acute{y}(t) = \int_0^1 k(t,s)y(s)ds + r(t)y(t) + x(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

حيث $x, q, r \in L^2[0,1), k \in L^2([0,1) \times [0,1))$ و k دالة غير معلومة
إذا قربنا x, q, r, y' و k نعوض بالتقريبات التالية بإستعمال المعادلات (11.2)و(7.1) نجد

$$x(t) \simeq X^T\phi = \phi^T(t)X$$

$$r(t) \simeq R^T\phi(t) = \phi^T(t)R$$

$$y(t) \simeq Y^T\phi(t) = \phi^T(t)Y$$

[1] K.Maleknejad [7] ,F.Mirzaee,Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations,Applied Mathematics and Computation 160 (2005) 579 – 587.

$$q(t) \simeq Q^T\phi(t) = \phi^T(t)Q$$

$$\acute{y}(t) \simeq \acute{Y}^T\phi(t) = \phi^T(t)\acute{Y}$$

$$k(t) \simeq \phi^T(t)H\phi(s) = \phi^T(t)H^T\phi(t)$$

$$y(0) \simeq Y_0^T\phi(t) = \phi^T(t)Y_0$$

لدينامن (13.2)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^l \acute{y}(\tau)d\tau + y(0) && (2.3)\\ &\simeq \int_0^l \acute{Y}^T\phi(\tau)d\tau + Y_0^T\phi(t) && (3.3)\\ &\simeq \acute{Y}^T\int_0^l \phi(\tau)d\tau + Y_0^T\phi(t) && (4.3)\\ & && (5.3) \end{aligned}$$

يصبح

$$\begin{aligned} y(t) &= \acute{y}^T P\phi(t) + Y_0^T\phi(t) && (6.3)\\ &= (\acute{y}^T P + Y_0^T)\phi(t) && (7.3)\\ & && (8.3) \end{aligned}$$

بتعويض مماسبق في المعادلة (1.3) يصبح

$$\begin{aligned} Q^T\phi(t)\phi^T(t)\acute{Y} &= \int_0^1 \phi^T(t)H\phi(s)\phi^T(s)(P^T\acute{Y}+Y_0)ds && (9.3)\\ &+ R^T\phi(t)\phi^T(t)(P^T\acute{Y}+Y_0) + X^T\phi(t) && (10.3)\\ & && (11.3) \end{aligned}$$

لدينا $\phi(t)\phi^T(t) = \psi_{k\times k}(t)$ من المعادلة (27.2), (23.2) يصبح

$$\begin{aligned} Q^T\psi_{k\times k}(t)\acute{Y} &= \int_0^1 \phi^T(t)H\psi_{k\times k}(s)(P^T\acute{Y}+Y_0)ds && (12.3)\\ &+ R^T\psi_{k\times k}(t)(P^T\acute{Y}+Y_0)+X^T\phi(t) && (13.3)\\ & && (14.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^T\psi_{k\times k}(t)\acute{Y} &= \phi^T(t)H\int_0^1 \psi_{k\times k}(s)(P^T\acute{Y}+Y_0)ds && (15.3)\\ &+ R^T\psi_{k\times k}(t)(P^T\acute{Y}+Y_0)+X^T\phi(t) && (16.3)\\ & && (17.3)\end{aligned}$$

من المعادلة (24.2) لدينا $\int_0^1 \Phi_k(t)\Phi_k^T(t)dt = D$ ومن المعادلة (28.2)
$Q^T\psi_{k\times k} = \psi_{k\times k}(t)Q = \bar{Q}\phi(t)$

$$\phi^T(t)\bar{Q}\acute{Y} = \phi^T(t)HD(P^T\acute{Y}+Y_0)+\phi^T(t)\bar{R}(P^T\acute{Y}+Y_0)+\phi^T(t)X$$

$$(\bar{Q}-HDP^T-RP^T)\acute{Y} = HDY_0+\bar{R}Y_0+X \qquad (18.3)$$

لدينا معادلة خطية
بمأن معادلة خطية نجد شعاع Y' يصبح

$$Y^T = \acute{Y}^TP+Y_0^T \Longrightarrow y(t)\simeq Y^T\Phi(t) \qquad (19.3)$$

3.3 أمثلة

مثال 1.3.3. لتكن المعادلةالآ تية

$$\begin{cases} \acute{y}(t) = \int_0^1 e^{st}y(s)ds + y(t) + \dfrac{1-e^{t+1}}{t+1}\\ y(0)=1\end{cases}$$

حل المضبوط لهذة المعادلة هو $y(t)=e^t$
نوجد الحل التقريبي ل$y(t)$ عبر من المعادلة (19.3) عن طريق دوال هار المحسنة و

نتيجة تعطى من أجل $k=8$, $k=16$, $k=32$, $k=64$ نطبق طريقة هار من أجل $k=8$ مصفوفة هار تعطى

$$\Phi_{8\times 8}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$y(t)\simeq Y^T\Phi(t),,Y^T=[f(\tfrac{1}{16}),f(\tfrac{3}{16}),f(\tfrac{5}{16}),f(\tfrac{7}{16}),f(\tfrac{9}{16}),f(\tfrac{11}{16}),f(\tfrac{13}{16}),f(\tfrac{15}{16})]\Phi^{-1}_{8\times 8}$$

$$q(t)=r(t)=y(0)=1\simeq R^T\phi(t)=Q^T\phi(t)\simeq Y_0^T\phi(t),R^T=Q^T=Y_0^T$$

و $R^T=[r(\tfrac{1}{16}),r(\tfrac{3}{16}),r(\tfrac{5}{16}),r(\tfrac{7}{16}),r(\tfrac{9}{16}),r(\tfrac{11}{16}),r(\tfrac{13}{16}),r(\tfrac{15}{16})]\Phi^{-1}_{8\times 8}$

$$=[1,1,1,1,1,1,1,1]\Phi^{-1}_{8\times 8}=[1,0,0,0,0,0,0,0,0]$$

لديناX^T, حيث $x(t)=\frac{1-e^{t+1}}{t+1}\simeq X^T\phi(t)$ وبتطبق (6.2)

$$[x(\frac{1}{16}),x(\frac{3}{16}),x(\frac{5}{16}),x(\frac{7}{16}),x(\frac{9}{16}),x(\frac{11}{16}),x(\frac{13}{16}),x(\frac{15}{16})]=[-1.7822,-1.9191,-2.2332,-$$

نوجد شعاع X^T

$$X^T=[-2.3653,0.3644,0.1502,0.2176,0.0684,0.0988,0.1193]$$

بالرجوع الى $\psi_{k\times k}(t)Q$ و $\psi_{k\times k}(t)R$ وبتطبيق المعادلة (31.2) نجد

$$\bar{Q} = \bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

لدينا $k(t,s) = e^{ts}$ من المثال الأول في الفصل الثاني نوجد مصفوفةH وبتطبيق المعادلة (12،2)

$$H = \begin{bmatrix} 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ -0.1773 & 0.1033 & 0.0401 & 0.0645 & 0.0177 & 0.0226 & 0.0286 & 0.0361 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \end{bmatrix}.$$

جوع إلى المعادلة(1،3) نوجد حلول$y(t)$وبالرجوع إلى المعادلة(18،3) نوجد مصفوفةGوشعاعMحيث:
المصفوفة $G = \bar{Q} - HDP^T - \bar{R}P^T$

$$G=\begin{bmatrix} 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ -0.1773 & 0.1033 & 0.0401 & 0.0645 & 0.0177 & 0.0226 & 0.0286 & 0.0361 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \\ 1.3173 & -0.1773 & -0.0741 & -0.1046 & -0.0340 & -0.0403 & -0.0478 & -0.0570 \end{bmatrix}.$$

وشعاع $M=HDY_0+\bar{R}Y_0+X$

$$M=\begin{bmatrix} -0.0480 \\ 0.1871 \\ 0.0761 \\ 0.1129 \\ 0.0344 \\ 0.0419 \\ 0.0510 \\ 0.0622 \end{bmatrix}.$$

نوجد شعاع

$$\grave{Y}=\frac{G}{M}$$

$$\grave{Y}=\begin{bmatrix} 1.7899 \\ -0.4451 \\ -0.1702 \\ -0.2819 \\ -0.0747 \\ -0.0962 \\ -0.1238 \\ -0.1593 \end{bmatrix}.$$

ومن المعادلة(19.3) نجد شعاع

$$\grave{Y} = \grave{Y}^T P + Y_0^T$$

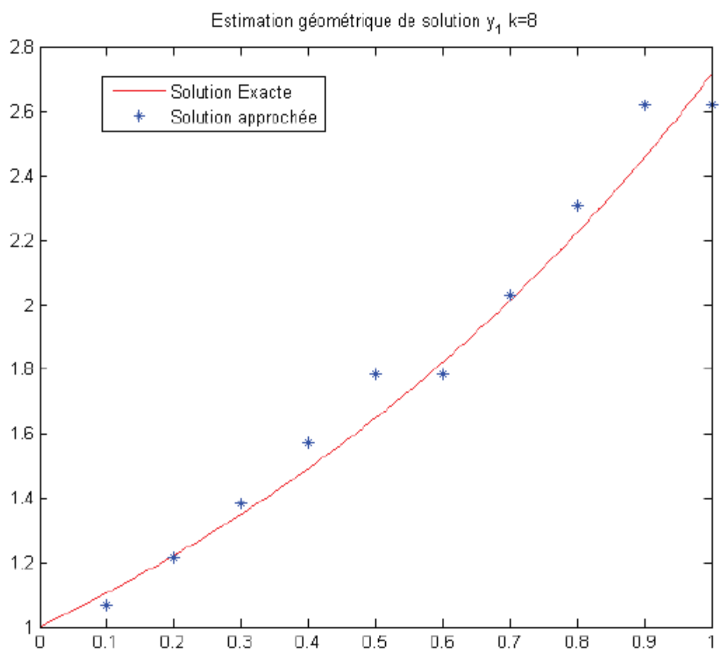
$$\grave{Y} = \left[\begin{array}{cccccccc} 1.7483 & -0.4387 & -0.1674 & -0.2783 & -0.0734 & -0.0947 & -0.1221 & -0.1573 \end{array}\right].$$

وفي الاخير نجد $y(t) \simeq Y^T \Phi(t)$

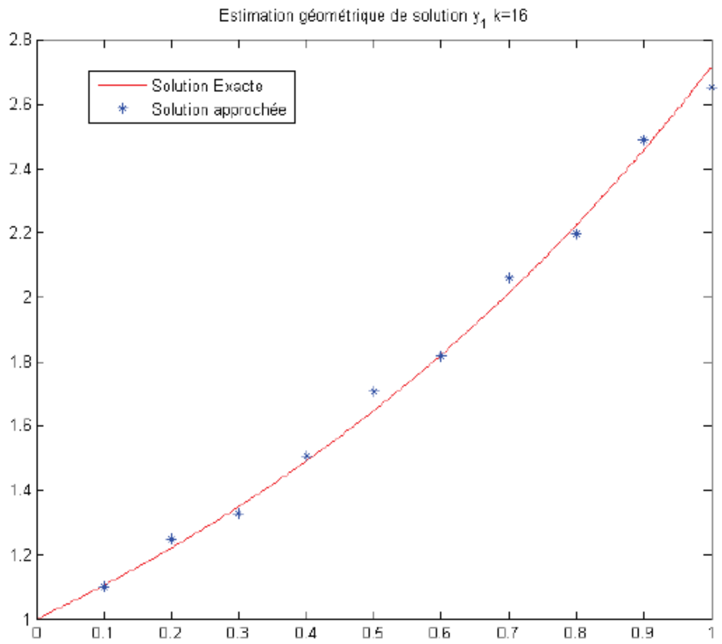
$$y(t) = \begin{array}{cccccccc} 1.0688 & 1.2156 & 1.3823 & 1.5717 & 1.7868 & 2.0309 & 2.3080 & 2.6227 \end{array}.$$

الجدول التالي يمثل مقارنة نتيجة حساب من أجل $k = 8$ $k = 16$ $k = 32$ $k = 64$ مع الحلول المضبوطة

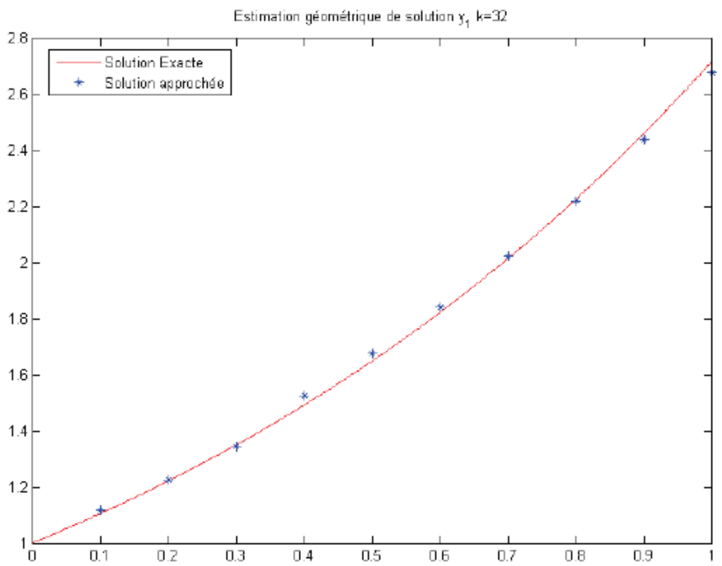
t	pour $k=8$	pour $k=16$	pour $k=32$	pour $k=64$	solution exacte
0.1	1.0688	1.0996	1.1159	1.1069	1.1052
0.2	1.2156	1.2471	1.2258	1.2349	1.2214
0.3	1.3823	1.3281	1.3465	1.3564	1.3499
0.4	1.5717	1.5062	1.5261	1.4897	1.4918
0.5	1.7868	1.7081	1.6763	1.6620	1.6487
0.6	1.7868	1.8189	1.8413	1.8254	1.8221
0.7	2.0309	2.0626	2.0226	2.0049	2.0138
0.8	2.3080	2.1964	2.2217	2.2367	2.2255
0.9	2.6227	2.4906	2.4403	2.4567	2.4596
1	2.6227	2.6521	2.6805	2.6982	2.7183



شكل 1.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي حيث $k = 8$



شكل 2.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي حيث $k = 16$

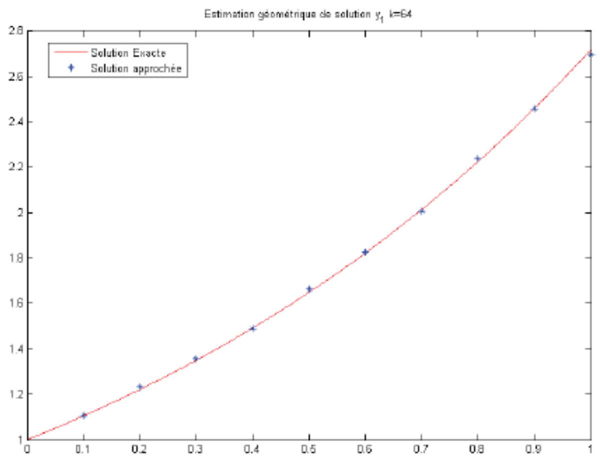


حيث $k = 32$

حيث $k = 32$

شكل 3.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي

حيث $k = 32$



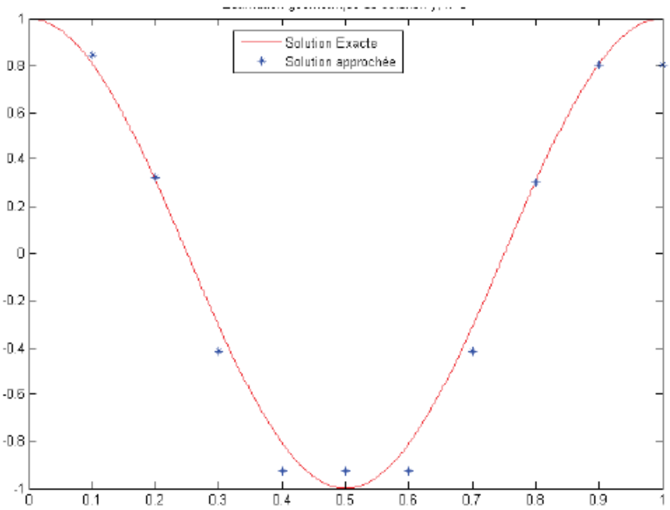
شكل 4.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي حيث $k = 64$

مثال 2.3.3.

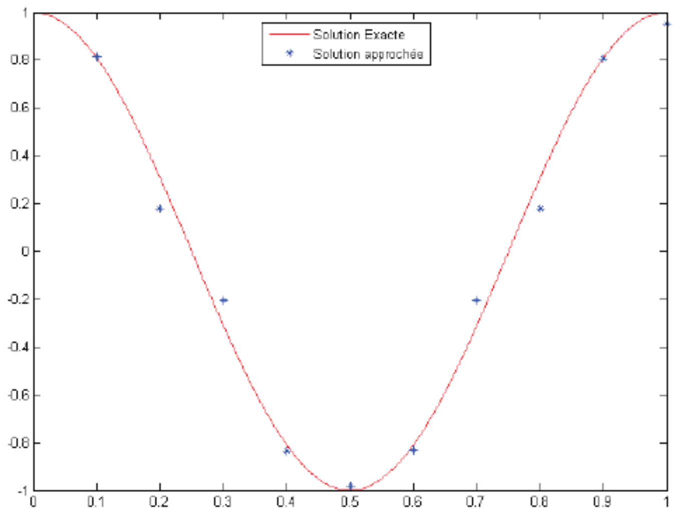
$$\begin{cases} \acute{y}(t) = \int_0^1 sin(4\pi t + 2\pi s)ds + y(t) - cos(2\pi t) - 2\pi sin(2\pi t) - \frac{1}{2}sin(4\pi t); \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

مقارنة نتيجة حساب من أجل $k = 8$ $k = 16$ $k = 32$ $k = 64$ مع الحلول المضبوطة $y(t) = \cos(2\pi t)$ المبينة في الجدول

t	pour $k = 8$	pour $k = 16$	pour $k = 32$	pour $k = 64$	solution exacte
0.1	0.8437	0.81218	0.76829633	0.80201792	0.80901699
0.2	0.3193	0.18119936	0.28658211	0.3359367	0.309016994
0.3	−0.4125	−0.20474620	−0.2924172	−0.33738791	−0.309016994
0.4	−0.9252	−0.83299327	−0.7735909	−0.80332589	−0.80901699
0.5	−0.9252	−0.9801023	−0.9949434	−0.9987301	−1
0.6	−0.9249	−0.8328566	−0.7735604	−0.8033158	−0.80901699
0.7	−0.4164	−0.2061	−0.292659	−0.3374382	−0.30901699
0.8	0.3017	0.17812284	0.2856971	0.3356992	0.309016994
0.9	0.8046	0.8041144	0.7664705	0.80154053	0.809016994
1	0.8046	0.9499983	0.987368	0.99682634	1



شكل 5.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي حيث $k = 8$



شكل 6.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي حيث $k = 16$

4.3 حل جمل المعادلات التفاضلية التكاملية الخطية ذات متغير واحد بطريقة دوال هار المحسنة

لتكن جملة المعادلات التفاضلية التكاملية كالتالي :

$$\begin{cases} \Sigma_{j=1}^{n}(q_{ij}(t)\acute{y}_j(t) + r_{ij}(t)y_j(t)) + \Sigma_{j=1}^{n}\int_0^1 k_{1ij}(t,s)\acute{y}_j(s)ds \\ +\Sigma_{j=0}^{n}\int_0^1 k_{2ij}(t,s)y_j(s)ds = x_i(t), \quad i = 1,2,...,n \\ y_i(0) = y_{i0} \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,2,...,n \end{cases} \tag{20.3}$$

$x_i, q_{ij}, r_{ij} \in L^2[0,1), k_{1ij}, k_{2ij} \in (L^2[0,1) \times [0,1))$ حيث $i, j = 1, 2, ..., n$ و
$y(t) = [y_1(t), y_2(t), y_n(t)]^T$ دوال غير معلومة

نفرض
$y_j(t), y_j(0), x_i(t), q_{ij}(t), r_{ij}(t)$

$$\acute{y}_j(t) = Y_i^T \phi(t), y_j(0) = Y_{j0}^T \phi(t), x_i(t) = X_i^T \phi(t)$$

$$r_{ij}(t) = R_{ij}^T \phi(t), q_{ij}(t) = Q_{ij}^T \phi(t)$$

$Y_i^T, Y_{j0}^T, X_i^T, R_{ij}^T, Q_{ij}^T$ عبر معادلة(8.1)و(9.1)
سوف نقرب كل من $k_{1ij}(t,s) k_{2ij}(t,s)$ عبر المعادلة (6.2) حيث

$$k_{1ij}(t,s) = \phi^T(t) H_{1ij} \phi(s), \qquad k_{2ij}(t,s) = \phi^T(t) H_{2ij} \phi(s)$$

حيثH_{1ij}, H_{2ij} تم حسابهم عبر معادلة (11.2)

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \int_0^1 \acute{y}_j(\acute{t}) d\acute{t} + y_j(0) \\ &\simeq \int_0^1 \acute{Y}_j^T \phi(\acute{t}) d\acute{t} + Y_{j0}^T \phi(t) \\ &\simeq \acute{Y}_j^T \int_0^1 \phi(\acute{t}) d\acute{t} + Y_{j0}^T \phi(t) \end{aligned}$$

من المعادلة (13.2)يصبح لدينا
$\int_0^1 \phi(\acute{t}) d\acute{t} = p\phi(t)$ إذن

$$\begin{aligned} &\simeq \acute{Y}_j^T P \phi(t) + Y_{j0}^T \phi(t) \\ &\simeq (\acute{Y}_j^T P + Y_{j0}^T) \phi(t), \end{aligned}$$

لدينا جملة(20.3)تعطى

$$\begin{cases} \Sigma_{j=1}^n (Q_{ij}^T(t)\phi(t)Y_j' + R_{ij}^T \phi^T(t)(P^T Y_j' + Y_{j0})) + \Sigma_{j=0}^n \int_0^1 \phi^T(t) H_{1ij} \phi(s) \phi^T(s) Y_j' ds \\ \Sigma_{j=0}^n \int_0^1 \phi^T(t) H_{2ij} \phi(s) \phi^T(s)(P^T Y_j' + Y_{j0}) ds = \phi^T(t) X_i^T, i = 1, 2, .., n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \Sigma_{j=1}^n (Q_{ij}^T(t) \bar{Q}_{ij} Y' \phi^T(t) \bar{R}_{ij} (P^T Y_j' + Y_{j0})) + \Sigma_{j=0}^n \phi^T(t) H_{1ij} (\int_0^1 \phi(s) \phi^T(s) ds) Y_j'$$
$$\Sigma_{j=0}^n \phi^T(t) H_{2ij} (\int_0^1 \phi(s) \phi^T(s))(P^T Y_j' + Y_{j0}) ds = \phi^T(t) X_i^T$$

من المعادلة لدينا $\int_0^1 \phi(s)\phi^T(s)ds = D,$ ومنه

$$\Longrightarrow \Sigma_{j=1}^{n}(Q_{ij}^T(t)\bar{Q}_{ij}Y'\phi^T(t)\bar{R}_{ij}(P^TY_j'+Y_{j0}))+\Sigma_{j=0}^{n}\phi^T(t)H_{1ij}Y_j'$$
$$\Sigma_{j=0}^{n}\phi^T(t)H_{2ij}(P^TY_j'+Y_{j0})ds=\phi^T(t)X_i^T, \qquad i=1,2,...n$$

$$\Longrightarrow \Sigma_{j=1}^{n}(Q_{ij}^T(t)\bar{Q}_{ij}+\bar{R}_{ij}P^T+H_{1ij}D+H_{2ij}DP^T)Y_j' = X_i^T-\Sigma_{j=0}^{n}(\bar{R}_{ij}+H_{2ij}D)Y_{j0}, \quad i=1,2,...n$$

نفرض $A_{ij}=\bar{Q}_{ij}+\bar{R}_{ij}P^T+H_{1ij}D+H_{2ij}DP^T$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & A_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ . \\ . \\ . \\ Y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1-\Sigma_{j=0}^{n}(\bar{R}_{ij}+H_{2ij}D)Y_{j0} \\ X_2-\Sigma_{j=0}^{n}(\bar{R}_{2j}+H_{22j}D)Y_{j0} \\ . \\ . \\ . \\ X_n-\Sigma_{j=0}^{n}(\bar{R}_{nj}+H_{2nj}D)Y_{j0} \end{bmatrix}. \tag{21.3}$$

الجملة$(21,3)$ هي جملة المعادلات الجبرية

5.3 أمثلة

مثال 1.5.3. لتكن الجملة المعادلات التفاضلية التكاملية الاتية :

$$\begin{cases} \acute{y}_1(t)+\int_0^1 e^{t-s}\acute{y}_2(s)ds=2e^t+\frac{e^{t+1}}{t+1} \\ \acute{y}_2(t)+\int_0^1 e^{ts}\acute{y}_1(s)ds-\int_0^1 e^{t+s}\acute{y}_2(s)ds=e^t-e^{-t}+\frac{1-e^{t+1}}{t+1} \\ y_1(0)=1, \qquad y_2(0)=1, \end{cases} \tag{22.3}$$

نبرهن أن إستخدام المصفوفات ضرورية من أجل إيجاد حلوالها بطريقة دوال هار المحسنة ومقارنتها بحلوالها المضبوطة $y(t)=[y_1(t),y_2(t)]^T$ووفي حالة : $[e^t,e^{-t}]^T$

$$\acute{y}_j(t)=Y_i^T\phi(t),\quad y_j(0)=Y_{j0}^T\phi(t),x_i(t)=X_i^T\phi(t),r_{ij}(t)=R_{ij}^T\phi(t),q_{ij}(t)=Q_{ij}^T\phi(t)$$

نحسب المصفوفات$A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$

$$A_{11}=\bar{Q}_{11}+H_{211}DP^T$$

$$A_{12}=H_{112}D$$

$$A_{21}=H_{121}D$$

$$A_{22}=\bar{Q}_{22}+H_{222}DP^T$$

نفرض $N_1=X_1-H_{211}DY_{10}$ و $N_2=X_2-H_{222}DY_{20}$ حل الجملة

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}. \qquad (23.3)$$

حل الجملة (23.3) من أجل إيجاد شعاع Y_1'و Y_2'

$$\begin{cases} y_1=p^TY_1'+Y_{10} \\ y_2=p^TY_2'+Y_{20} \end{cases}$$

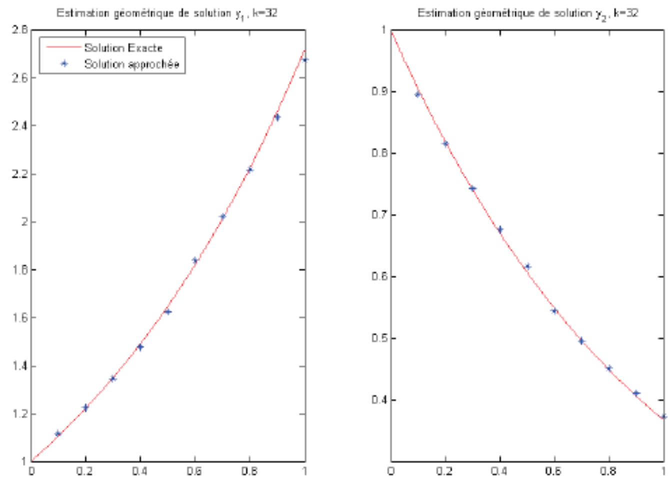
حيث نجد حلول$y(t)$

$$\begin{cases} y_1(t)=\Phi^T(t)Y_1' \\ y_2(t)=\Phi^T(t)Y_2 \end{cases}$$

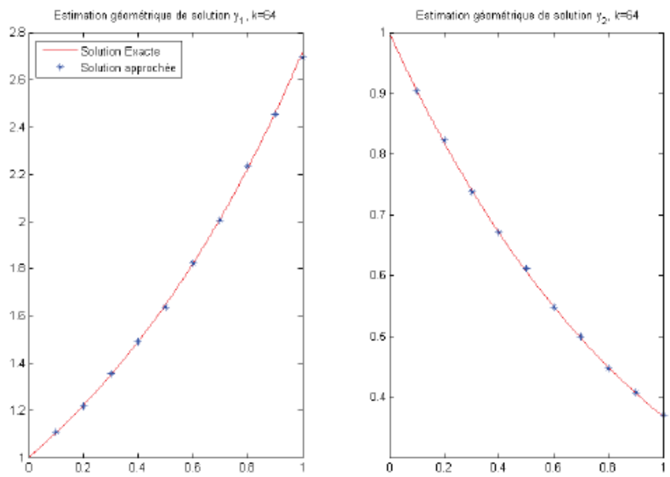
الجدول التالي يمثل مقارنة نتيجة حساب من أجل $k=8$ $k=16$ $k=32$ $k=64$ مع الحلول المضبوطة

t	pour $k=32$	pour $k=64$	pour $k=128$	solution exacte
0.1	$(1.11570, 0.89651)$	$(1.10692, 0.90345)$	$(1.1025912, 0.9069680)$	$(1.1052, 0.9048)$
0.2	$(1.22534, 0.81629)$	$(1.21572, 0.82260)$	$(1.220456, 0.81937797)$	$(1.2214, 0.8187)$
0.3	$(1.34576, 0.74325)$	$(1.35623, 0.73738)$	$(1.350921, 0.7402468)$	$(1.3499, 0.7408)$
0.4	$(1.47802, 0.67674)$	$(1.48952, 0.67139)$	$(1.495333, 0.6687578)$	$(1.4918, 0.6703)$
0.5	$(1.62329, 0.61619)$	$(1.63592, 0.61131)$	$(1.642301, 0.6089114)$	$(1.6487, 0.6065)$
0.6	$(1.83942, 0.54379)$	$(1.8250, 0.54798)$	$(1.817861, 0.550106)$	$(1.8221, 0.5488)$
0.7	$(2.02020, 0.49513)$	$(2.00437, 0.49894)$	$(2.012189, 0.496979)$	$(2.0138, 0.4966)$
0.8	$(2.21876, 0.45082)$	$(2.23603, 0.44725)$	$(2.22729, 0.448983)$	$(2.2255, 0.4493)$
0.9	$(2.43683, 0.41048)$	$(2.4558, 0.40722)$	$(2.465386, 0.405623)$	$(2.4596, 0.4066)$
1	$(2.67634, 0.37374)$	$(2.69717, 0.3707)$	$(2.707697, 0.369323)$	$(2.7183, 3679)$

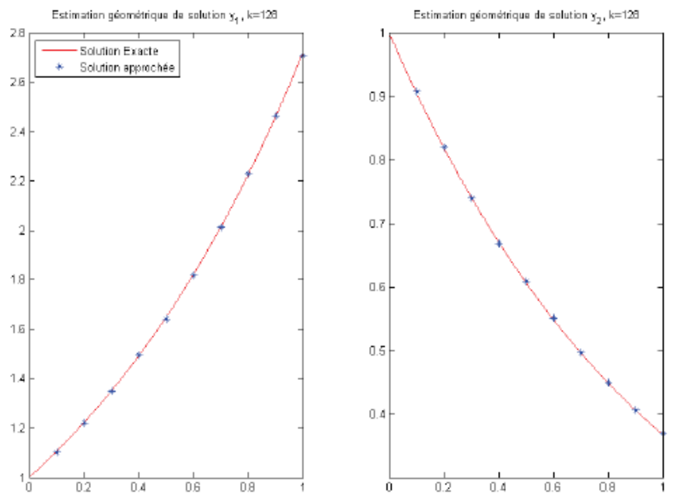
شكل 7.3



شكل 8.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [e^t, e^{-t}]^T$ حيث $k = 32$



شكل 9.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [e^t, e^{-t}]^T$ حيث $k = 64$



شكل 10.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي $y(t)=[y_1(t),y_2(t)]^T=[e^t,e^{-t}]^T$ حيث $k=128$

مثال 2.5.3.

$$\begin{cases} 2\pi y_1(t)-\int_0^1 cos(2\pi s)sin(4\pi t)\grave{y}_1(s)ds+\int_0^1 sin(4\pi t+2\pi s)\grave{y}_2(s)ds \\ \qquad = 2\pi cos(2\pi t)(1+sin(2\pi t)) \\ \grave{y}_2(t)-\int_0^1 cos(4\pi t)sin(2\pi s)\grave{y}_1(s)ds+\int_0^1 sin(4\pi t+2\pi s)\grave{y}_2(s)ds \\ \qquad = cos(2\pi t)(2\pi - sin(2\pi t)) \\ \qquad y_1(0)=1, \qquad y_2(0)=0 \end{cases}$$

نبين أن مصفوفات ضرورية لإيجاد الحلولها بإستخدام طريقة دوال هار المحسنةومقارنتها بلحلول المضبوطة

$$y(t)=[y_1(t),y_2(t)]^T=[cos(2\pi t),sin(2\pi t)]^T$$

نحسب المصفوفات $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$

$$A_{11}=\bar{R}P^{11}+H_{111}D$$

$$A_{12}=H_{112}D$$

$$A_{21}=H_{221}DP^T$$

$$A_{22}=\bar{Q}+H_{222}DP^T$$

نفرض $N_1=X_1-RY_{10}$ و $N_2=X_2-H_{221}DY_{20}$

حلول الجملة

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}. \qquad (24.3)$$

حلول جملة (24.3)من أجل إيجاد شعاع Y_1' و Y_2'

$$\begin{cases} y_1 = p^T Y_1' + Y_{10} \\ y_2 = p^T Y_2' + Y_{20} \end{cases}$$

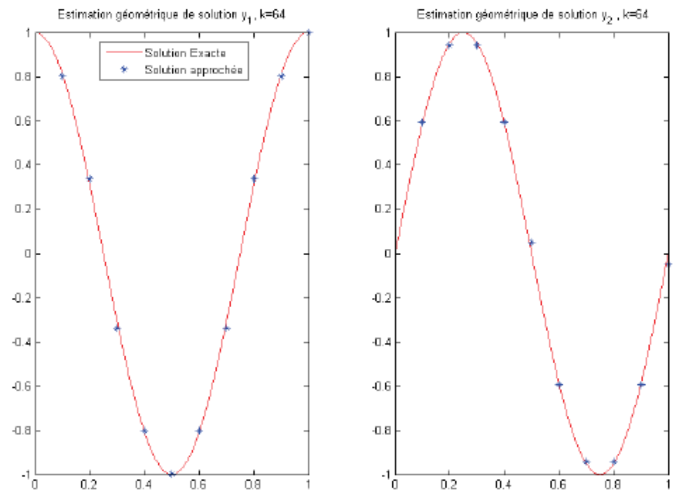
حيث نجد حلول الجملة $y(t)$ كتالي:

$$\begin{cases} y_1(t) = \Phi^T(t) Y_1' \\ y_2(t) = \Phi^T(t) Y_2 \end{cases}$$

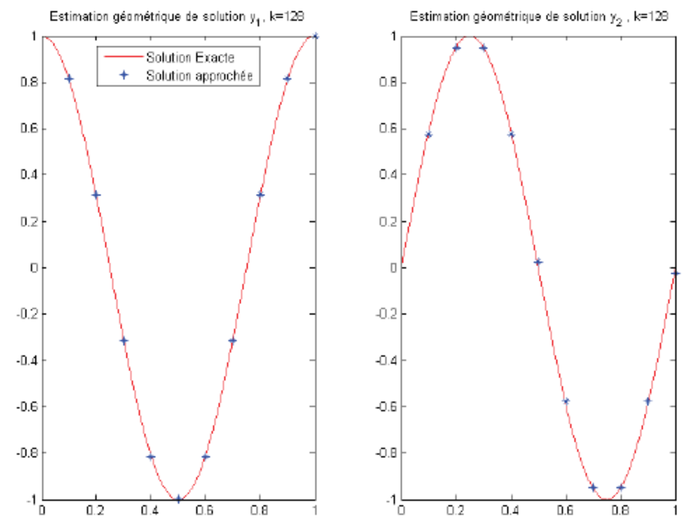
الجدول التالي يمثل مقارنة نتيجة حساب من أجل $k = 8$ $k = 16$ $k = 32$ $k = 64$ مع الحلول المضبوطة

t	pour $k = 32$	pour $k = 64$	pour $k = 128$	solution exacte
0.1	$(0.77301, 0.63224)$	$(0.80320, 0.59519)$	$(0.817585, 0.575687)$	$(0.80917, 0.587785)$
0.2	$(0.29028, 0.95363)$	$(0.3368, 0.94073)$	$(0.313681, 0.949323)$	$(0.309017, 0.951057)$
0.3	$(-0.29028, 0.95363)$	$(-0.33688, 0.94073)$	$(-0.313681, 0.949323)$	$(-0.30902, 0.587785)$
0.4	$(-0.77301, 0.632249)$	$(-0.8032, 0.59519)$	$(-0.817584, 0.575687)$	$(-0.80902, 0.587785)$
0.5	$(-0.995184, 0.09769)$	$(-0.99879, 0.04902)$	$(-0.99969, 0.024536)$	$(-1, 0)$
0.6	$(-0.77301, -0.63245)$	$(-0.8032, -0.59524)$	$(-0.81758, -0.57569)$	$(-0.80901, -0.58778)$
0.7	$(-0.29028, -0.95409)$	$(-0.3368, -0.94084)$	$(-0.31368, -0.94935)$	$(-0.30902, -0.95105)$
0.8	$(0.290284, -0.95409)$	$(0.33688, -0.94084)$	$(0.313681, -0.94935)$	$(-0.30902, -0.95105)$
0.9	$(0.77301, -0.632457)$	$(0.8032, -0.59524)$	$(0.817585, -0.57569)$	$(0.80917, -0.587785)$
1	$(0.995184, -0.09770)$	$(0.99879, -0.049028)$	$(0.999699, -0.024536)$	$(1, 0)$

شكل 11.3



شكل 12.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [cos(2\pi t), sin(2\pi t)]^T$ حيث $k = 64$



شكل 13.3: رسم بياني يمثل الحل التقريبي والحل الحقيقي $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [cos(2\pi t), sin(2\pi t)]^T$ حيث $k = 128$

خاتمة

في هذا المذكرة قمنا بعرض طريقة عددية لحل جمل المعادلات التفاضلية التكاملية الخطية بإستخدام دوال هار المحسنة و عقد نيوتن كوتس و مصفوفة عمليات وإعطاء الحلول السهلة .

المصفوفة هار $\Phi_{k\times k}$ والمصفوفة التنفدية لتكامل $p_{k\times k}$ تحتوي على كثير من أصفار مما يسهل حسابها وإعطاء أمثلة عددية و قد تم وضع مقارنة بين الطريقة المقترحة و بعض الطرق العددية الأخرى العادية حيث أن هذ الطريقة تعطيك نتائج تقريبية للحل

الملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هوإستعمال دوال هار المحسنة في حل جمل المعادلات التفاضلية تكامليةإن السمة الأساسية لهذه الطريقة هي تحويل جمل المعادلات المذكورة إلي مصفوفات يسهل حلها وسنبين مدى الفاعلية التي تكتسيها هذه الطريقة من خلال أمثلة تجريبية والمقارنات بين النتائج الدقيقة وتقريبية لهذا الطريقة الموضوعية في جداول الموضحة بالرسومات المرفقة وتجدر الاشارة بأن النتائج محسوبة بإستعمال برنامج ماطلاب.

الكلمات المفتاحية: جمل المعادلات التفا -تكاملية ، المصفوفة التنفدية ،دوال هار المبسطة .

Résumé

on introduit les foctions de haar rationalisées pour estimer la solaution d' un systéme d' eouations intégro-différentielle La principale caractéristique de cette technique est qu'elle réduit le systéme initial à un systéme d' équations algébriues exemples illustratifs sont donnés afin de prouver l'efficacité de cette méthode et les résul tats sont vérifiés en utilisant le programme de matlab .

Mots clés : Systéme d' equations intégro-différentielle matrice opérationnelle fonc-tions de Haar rationalisées

Abstract

Abstract We intruce rationalized Haar functions to approximate the solution of a systeme of intego-differential equations The main feature of technique is that it reduces the initial systeme to a systeme of algebraic equations Illustravtive examples are given to demonstrate the effectiveness of method Tht calculated results obtained Mtalab program .

key words : Unitary operator, cmopact operator, one-dimensional operator, nuclear operator, perturbat operators, the stability of spectrum .

alfrid haar
ألفريد هار

الميلاد: 11 أكتوبر 1885 بودابست, المجر
الوفاة: 16 مارس 1933 (48 سنة) زغرب, المجر
الإقامة: المجر
الجنسية:مجري
هو عالم كان له دور معطاء في عدة فروع من الرياضيات .
تحصل على الدكتوراء 1909 مع أطروحه بعنوان Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme
لديه الكثير من الانجازات .

المراجع العلمية

المصادر باللغة العربية

[1] مذكرة تخرجبعض طرق حل عددي للمعادلات التكاملية والتكاملة -تفاضلية غير الخطية لفريدهولم قسم الرياضيات ورقلة 2016

المراجع باللغة الأجنبية

[2] ABBASSI HOCINE Résolution de système d'équations intégro-différentielles par la méthode des fonctions de Haar rationalisées,Cambridge University University,Ouargla 2012

[3] C.F.Chen,C.H.Hsiao,Haar wavelet method for solving lumped and distributed- parameter systems,IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 144, No. I , January 1997, 87-97.

[4] Chun-Hui Hsiao,State analysis of linear time delayed systems via Haar wavelets,Mathematics and Computers in Simulation 44 (1997) 457-470.

[5] M. Ohkita, Y. Kobayashi, An Application of Rationalized Haar Functions to Solution of Linear Dierential Equations, IEEE Transactions on circuits and systèms, vol. cas-33, no. 9,september (1986),p853-862.

[6] M.H. Reihani, Z. Abadi, Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 200 (2007) 12 . 20

[7] K.Maleknejad , F.Mirzaee,Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations,Applied Mathematics and Computation 160 (2005) 579 587.

[8] K. Maleknejad,F. Mirzaee,S. Abbasbandy,Solving linear integro-di¤erential equations system by using rationalized Haar functions method,Applied Mathematics and Computation 155 (2004) 317-328.

[9] F. Mirzaee,Numerical computational solution of the linear Volterra integral equations system via rationalized Haar functions,Journal of King Saud University (Science) (2010) 22, 265   268.

[10] M. Razzaghi, Y. Ordokhani,Solution of di¤erential equations via rationalized Haar functions,Mathematics and Computers in Simulation 56 p 235   246 (2001).

[11] K. Maleknejad, F. Mirzaee, Numerical solution of integro-di¤erential equations by using rationalized Haar functions method, Kybernetes, Int. J. Syst. Math. 35 (2006) 1735   1744.

[12] M.Sh.Birman and S.B.Entina; A stationary apprach in the abstract theory of scattering, Izv.Akad.Nauk SSSR.Ser.Matem., 1967.

[13] H.R. Karimi, P. Jabehdar-Maralani, B. Moshiri, B. Lohmann,Numerically E¢cient Approximation to the Optimal Control of Singularly Perturbed Systems Based on Haar Wavelet, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 82, No. 4, pp 495-507, April 2005.