

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des sciences appliquées

Département Génie Mécanique



Memoire De Master

Spécialité : Électromécanique

Option : Maintenance Industrielle

Présenté Par :

KAMA Abdelkader

KHERRAZ Abdelkarim

THÈME

Détermination par simulation numérique des paramètres
modaux pour les plaques isotropes

Jury:

Mr,CHERRAD noureddine

President

UKM, Ouargla

Mrs,BENADDI hadda

Examineur

UKM, Ouargla

Mr.MEBARKI Abdelyamine

Encadreur

UKM, Ouargla

Année universitaire: 2020/2021



Remerciement

*Tout d'abord, nous devons remercier Allah de nous avoir donné la santé,
la force et la patience pour faire ce travail.*

*Nous tenons à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Abdel
amine MEBARKI, notre encadreur pour son assistance, sa disponibilité
et son encouragement pendant l'accomplissement de ce travail. Nous lui
en sommes profondément reconnaissants.*

*Je voudrais remercier chaleureusement tous les professeurs de
Département Génie Mécanique et tous ceux qui ont contribué de près ou
de loin à le résultat de ces travaux,*

KAMA ABDELKADER
KHERRAZ ABDELKARIM



Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père, A Mes chers frères et sœurs.

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements

À toute la famille Kherraz et Kama.

*Je remercie mes très chers parents, Rachid et Oumlkhir, et famille Baadi
et Mama Fatima et Mohamed qui ont toujours été là pour moi, Et je
remercie mes frères, mes amis.*

*aux amis Kherraz Abdel hak, Assem Abbazi, yaddaden Abdel nour, et
tous les amis de département la maintenance industrielle .*

Résumé

Les fréquences et modes propres sont importants à étudier. Les concepteurs des structures prennent en compte les fréquences de résonance et les formes modales lors de la conception des structures. Les structures sont généralement soumises à des vibrations comme sous forme d'excitation externe. D'où L'analyse modale aide à concevoir les structures qui résistent à l'effet des vibrations,

C'est aussi que l'analyse des vibrations libres des plaques isotrope représente une question importante dans l'architecture navale et les applications de génie océanique.

Dans ce mémoire, vise à déterminer les fréquences et modes propres d'une plaque isotrope mince en utilisant la méthode des éléments finis par Logiciel *ANSYS*, les vibrations des plaques minces sont également basées sur la théorie des plaques Kirchhoff.

il a été procédé à la comparaison entre les résultats obtenus par le code de calcul *ANSYS* et ceux qui trouvent dans les littératures ; cette étude vise à examiner la consistance des résultats obtenus par *ANSYS* pour l'étude des vibrations, Une étude a également été menée sur l'impact d'un certain nombre d'éléments du maillage utilisés par *ANSYS* sur l'exactitude des résultats obtenus ,une analyse en éléments finis utilisant le code *ANSYS* est employée pour prédire le comportement des plaques. L'analyse a porté sur la variation des fréquences propres en fonction des conditions de support de la plaque, du rapport longueur-sur-épaisseur et rapport longueur-sur-largeur.

Mots clés : des vibrations libres des plaques isotropes, théorie des plaques Kirchhoff, *ANSYS*

Abstract :

The frequencies et mode shapes are important to study. Structural designers take into account resonance frequencies and modal shapes when designing structures. Structures are usually subjected to vibrations as an external excitation. Hence modal analysis helps to design structures that resist the effect of vibrations,

It is also that the free vibration analysis of isotropic plates is an important issue in naval architecture and ocean engineering applications.

In this paper, the aim is to determine the frequencies and modes of a thin isotropic plate using the finite element method of ANSYS ®, the vibrations of thin plates are also based on Kirchhoff plate theory.

A study was also conducted on the impact of a number of mesh elements used by ANSYS on the accuracy of the results obtained, a finite element analysis using the ANSYS code is used to predict the behaviour of the plates. The analysis focused on the variation of the natural frequencies as a function of the support conditions of the plate, the ratio length over thickness and ratio length over width.

Key words: modal shapes , number of mesh elements, ANSYS.

ملخص :

الترددات و التشوهات الذاتية مهمة للدراسة, يأخذ مصممو هياكل في الاعتبار ترددات الرنين و التشوهات الذاتية عند تصميم الهياكل وعادة ما تتعرض الهياكل إلى الاهتزازات كإثارة خارجية. ومن ثم فإن تحليل تشوهات يساعد في تصميم الهياكل التي تقاوم تأثير الاهتزازات كما أن تحليل الاهتزاز الحر للصفائح النظرية هو مسألة هامة في الهندسة المعمارية البحرية والتطبيقات الهندسية للمحيطات.

و الغرض من هذه أطروحة هو تحديد ترددات وطرق للوحة نظائر رقيقة باستخدام طريقة العناصر المحدودة للبرمجيات أنسيس® كما تستند اهتزازات الصفائح الرقيقة أيضا إلى نظرية لوحة كيرشوف.

أجريت مقارنة بين النتائج المتحصل عليها باستخدام برنامج أنسيس والنتائج الموجودة في المراجع العلمية هذه المقارنة تهدف إلى اختبار مدى قدرة هذا البرنامج في دراسة الاهتزازات وأجرينا أيضا دراسة عن تأثير عدد من العناصر المتشابهة التي يستخدمها البرنامج على دقة النتائج المتحصل عليها, كما تمت استخدام تحليل العناصر المحدودة باستخدام برنامج أنسيس للتنبؤ بسلوك اللوحات. تركز التحليل على تغير الترددات الطبيعية بدلالة ظروف استناد اللوحة, نسبة الطول على السمك ونسبة الطول على العرض.

الكلمات المفتاحية : طريقة العناصر المحدودة, الاهتزازات , الترددات الطبيعية.

RESUME.....	II
TABLE DES MATIERES.....	IV
LISTE DES FIGURES.....	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	X
NOMENCLATURE.....	XI
INTRODUCTION GENERALE.....	XI

Chapitre I : Analyse vibratoire des plaques minces isotrope

I.1. Introduction	1
I.2. Contexte historique	6
I.3 Généralités sur les vibrations des plaques minces	13
I.3.1 Introduction	13
I.3.2 Vibrations naturelles des plaques isotropes	13
I.4 Généralité sur les plaques	15
I.4.1 Loi de Hooke Généralisée	15
I.4.2 Les Milieux Continue	15
I.4.3 Théorie tridimensionnelle	15
I.4.4 Matériaux isotropes	17
I.4.5 Théorie des plaques	18
I.4.6 Types de plaques	19
I.4.6.1 Les plaques rigides	19
I.4.6.2 Les membranes	19
I.4.6.3 Plaques moyennement épaisses	20
I.4.6.4 Les plaques épaisses	20
I.4.7 Théorie des plaques minces (hypothèse de Kirchhoff)	20
I.4.7.1 Les équations gouvernantes	20
I.4.7.2 Conditions aux limites	23
I.4.7.2.1 Bord libre	24

Table des matières

I.4.7.2.2 Simplement appuyé	25
I.4.7.2.3 Bord encastré	25
I.4.7.3 L'énergie potentielle totale	26

Chapitre II : Analyse par élément de finie utilisée code de calcul ANSYS

II.1 Introduction	27
II.2 Définition	28
II.2.2 La méthode d'analyse des éléments finis nécessite les étapes principales	29
II.2.3 types de formulation d'élément Méthodes	29
II.2.3.1 Approche directe	29
II.2.3.2 Résidus pondérés	29
II.2.3.3 Approche variationnelle	30
II.2.4. applications de la méthode des éléments finis	30
II.2.4.1 Les zones structurales typiques comprennent	30
II.2.4.2 Les problèmes non structurels comprennent	30
II.2.5 Avantages et Désavantages	31
II.2.5.1 Avantages	31
II.2.5.2 Désavantages	31
II.2.6 Définition de la matrice de rigidité	31
II.2.6.1 Dérivation des équations des éléments du ressort à l'aide de la méthode directe	32
II.2.7 L'analyse pratique d'une plaque	32
II.3 Élément rectangulaire	32
II.3.1 Formulation l'analyse des éléments finis pour élément rectangulaire à 4 nœuds	33
II.3.2 Nœuds	35
II.3.3 Éléments	36
II.3.4 Génération de maillages d'éléments Finis	37
II.3.5 Maillage d'éléments	39
II.4 ANSYS	41
II.4.1 Introduction au logiciel ANSYS	41
II.4.2 Le développement d'ANSYS	41
II.4.3 Licence ANSYS	42

Table des matières

II.4.4	Procédure de base pour l'analyse des éléments finis	42
II.4.5	Maillage utilisant des éléments de surface	43
II.4.6	Modélisation des plaques isotropes par ANSYS.....	43
II.4.7	Description de l'élément utilisé pour le maillage	45
 Chapitre III : Résultat et discussion 		
III.1	Introduction	46
III.2	Analyses vibratoires libres des plaques isotropes minces	46
III.2.1	Formes des conditions aux limites	47
III.2.2	Matériau	48
III.2.3	Comparaison des résultats	48
III.2.4	Effet d'élément du maillage	55
III.2.4	Effet de rapport a/h	61
III.2.5	Effet de rapport de dimension a/b.....	63
III.2.6	Présentation six premiers modes propres de la plaque	65
III.3	Etude des vibrations des plaques à différentes conditions aux limites et dimensions.....	69
III.3 .1	Comparaison des résultats	70
III.3.2	Effet de conditions aux limites	76
III.3.3	Effet de rapport de dimension a/b	77
III.4	Étude des effets de la condition limite encastree pour plaque isotrope carrée :	79
III.4 .1	Comparaison des résultats.....	81
III .5	Conclusion	86
CONCLUSION GENERALE		88
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		89
ANNEXE A	Effet d'élément du maillage	93
ANNEXE B	Effet de rapport longueur-sur-épaisseur	94
ANNEXE C	Etude des vibrations des plaques à différentes conditions aux limites et dimensions.....	98

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 Diverses conditions limites pour les plaques.....	1
Figure I.2 Utilisation de plaques dans divers domaines de l'ingénierie (suite).....	2
Figure I.2 Utilisation de plaques dans divers domaines de l'ingénierie (suite).....	3
Figure I.2 Utilisation de plaques dans divers domaines de l'ingénierie (suite).....	4
Figure I.3 Modèle à éléments finis d'une section de stator d'un moteur d'aéronef.....	5
Figure I.4 Modèles formé de vibrations libres des plaques.....	7
Figure I.5 Médaille montrant le portrait de Mlle. Germain's.....	12
Figure I.6 Gustav R. Kirchhoff (1824–1887).....	12
Figure I.7 Six premières formes de mode pour les plaques carrées isotropes en aluminium obtenues à partir d'observations expérimentales et de calculs numériques.	15
Figure I.8 Déformation d'un corps.	16
Figure I.9 contrainte -déformation pour plaque.....	18
Figure I.10 Géométrie de la plaque.....	19
Figure I.11 Théorie classique de Kirchhoff - hypothèse transversale.....	21
Figure I.12 Forces résultantes dans la plaque.....	22
Figure I.13 Limite curviligne de la plaque.	24
Figure II.1 élément de flexion pour plaque rectangulaire à quatre nœuds.....	33
Figure II.2 Géométrie de l'élément rectangulaire.....	34
Figure II.3 Division d'un domaine en sous-domaines (éléments).....	36
Figure II.4 Description des éléments de ligne, de zone et de volume avec des numéros de noeud au niveau des éléments.....	36
Figure II.5 Erreur de concentration des contraintes pour différentes tailles de mailles utilisant des éléments quadratiques linéaires.....	38
Figure II.6 Pourcentage d'erreur avec différents ordres d'éléments.....	38
Figure II.7 Temps de calcul normalisé pour différents éléments quadrilatères.....	39
Figure II.8 Maillage de la géométrie (éléments hexaèdres) Pour une plaque avec une condition appui simple.....	40
Figure II.9 Modèle de plaque à éléments finis par Ansys.....	44
Figure II.10 L'élément de maillage SHELL181.....	45
Figure III.1 Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (AAAA).....	47
Figure III.2 Conditions aux limites, plaque encastée (EEEE).....	47
Figure III.3 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes R=96.....	49
Figure III.4 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et Avec les résultats des chercheurs R=96.....	50

LISTE DES FIGURES

Figure III.5 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes R=48	51
Figure III.6 Comparaison par entre les fréquences obtenues par ANSYS et Avec les résultats des chercheurs R=48.....	51
Figure III.7 Comparaison par courbe entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes R=25	52
Figure III.8 Comparaison par colonne entre les fréquences obtenues par ANSYS et avec les résultats des chercheurs R=25	53
Figure III.9 Comparaison par courbe entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes R=12	54
Figure III.10 Comparaison par colonne entre les fréquences obtenues par ANSYS et Avec les résultats des chercheurs R=12	54
Figure III.11 Comparaison par courbe des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R=96	56
Figure III.12 Comparaison par colonne des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R=96	56
Figure III.13 Comparaison par courbe des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R= 48.....	57
Figure III.14 Comparaison par colonne des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R= 48	58
Figure III.15 Comparaison par courbe des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R= 25	59
Figure III.16 Comparaison par courbe des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R= 12.....	60
Figure III.17 Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec R = 1	62
Figure III.18 Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec R = 1.5	62
Figure III.19 Fréquences propres en fonction rapport de dimension R=96.....	63
Figure III.20 Fréquences propres en fonction rapport de dimension R=48.....	64
Figure III.21 Fréquences propres en fonction rapport de dimension R=25.....	64
Figure III.22 Fréquences propres en fonction rapport de dimension R=12.....	65
Figure III.23 Fréquences et modes propres pour la plaque AAAA.....	66
Figure III.24 Modes propres pour la plaque AAAA par Matlab [64]	67
Figure III.25 Modes propres pour la plaque EEEE	68
Figure III.26 Comparaison par courbe des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour la plaque AAAA R=1.5.....	71

LISTE DES FIGURES

Figure III.27 Comparaison par colonne des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour la plaque AAAA R=1.5	71
Figure III.28 Comparaison par courbe des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour la plaque EEEE R=1.5.....	72
Figure III.29 Comparaison par colonne des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour la plaque EEEE R=1.5	72
Figure III.30 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R =1.5	76
Figure III.31 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R =1.25 ..	76
Figure III.32 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec	77
R =1.333	77
Figure III.33 Fréquences propres en fonction rapport de dimension	78
Figure III. 34 Plaque carrée avec support de libre – encastree - libre – encastree (L-E-L-E), exemple 1.....	80
Figure III.35 Plaque carrée avec support de libre – libre - libre – encastree (L-L-L-E),	80
exemple 2.....	80
Figure III.36 Comparaison par courbe Les résultats ANSYS/FEM (100 x 100) de la variation des fréquences propres en fonction de modes pour la plaque L-E-L-E.....	82
Figure III.37 Comparaison par colonne Les résultats ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction de modes pour la plaque L-E-L-E.....	82
Figure III.38 Modes propres pour la plaque carrée L-E-L-E	83
Figure III.39 Comparaison par courbe Les résultats ANSYS /FEM (100 x 100) de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque L-L-L-E	84
Figure III. 40 Comparaison par colonne Les résultats obtenus et ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque L-L-L-E.....	85
Figure III. 41 Modes propres pour la plaque carrée L-L-L-E	86

LISTE DES TABLEAUX

Tableau III.1	Les propriétés du matériau et les dimensions de la plaque	48
Tableau III.2	Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R=96	49
Tableau III.3	Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R= 48	50
Tableau III.4	Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R=25	52
Tableau III.5	Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R=12	53
Tableau III.6	Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d'erreur pour R=96	55
Tableau III.7	Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d'erreur pour R=48	57
Tableau III.8	Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d'erreur pour R= 25	58
Tableau III.9	Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d'erreur pour R= 12	59
Tableau III.10	les résultats obtenus par ANSYS aux conditions limites EEEE.....	60
Tableau III.11	Fréquences propres pour différents rapports a/h et rapport R	61
Tableau III.12	Les propriétés du matériau.....	69
Tableau III.13	les dimensions de la plaque	69
Tableau III.14	Comparaison des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour les plaques (AAAA, EEEE) R=1.5	70
Tableau III.15	Comparaison des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour les plaques (EAEE, AEAE) R=1.5.....	73
Tableau III.16	Comparaison des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour les plaques (AAEE, AAEA) R=1.5	73
Tableau III.17	Comparaison des résultats ANSYS/Nastran pour les plaques pour	74
	(AAAA, EEEE, EAEE) pour R=1.25.....	74
Tableau III.18	Comparaison des résultats ANSYS/Nastran pour les plaques (AEAE, AAEE, AAEA) aux limites pour R=1.25.....	74
Tableau III.19	Comparaison des résultats ANSYS/Nastran pour les plaques pour	75
	(AAAA, EEEE, EAEE) pour R=1.33.....	75
Tableau III.20	Comparaison des résultats ANSYS/Nastran pour les plaques pour	75
	(AEAE, AAEE, AAEA) pour R=1.33.....	75
Tableau III.21	Fréquences propres pour les trois rapports de dimension.....	78
Tableau III.22	Comparaison par Les résultats obtenus et ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque L-E-L-E	81
Tableau III.23	Comparaison Les résultats obtenus et ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque L-L-L-E	84

Nomenclature

ω_{mn}	la fréquence circulaire naturelle en radians par unité de temps
A_{mn}	l'amplitude de vibration pour chaque valeur des nombres entiers m et n
f_{mn}	la fréquence naturelle de vibration en cycles par seconde, appelée Hertz (Hz)
$u_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$	Displacement components
E_{ij}	Tenseur de déformation de Green
ε_{ij}	le tenseur de déformation
S	L'énergie de déformation
C^{ijkl}	sont les coefficients élastiques
σ^{ij}	devrait satisfaire l'équilibre dans un volume élémentaire
f_i	des forces corporelles
T_{ni}	limite sur laquelle la traction
$p_z(x, y)$	Efforts transversaux
π	L'énergie potentielle totale
D_{ij}	elasticity matrix
Q_{xy}, Q_y	composants de contraintes généralisées (forces de cisaillement)
x, y, z	les coordonnées.
E	le module de Young,
ν	le rapport de Poisson
h	épaisseur de plaque
q	la charge latérale répartie
δW	le travail virtuel associé
W	énergie potentielle des charges
δw	un déplacement virtuel δw est prescrit le long de la limite
γ_{xz}, γ_{yz}	composants transversaux de déformation par cisaillement dans le système de coordonnées cartésiennes
ε	tenseur de déformation linéaire
δ	Tenseur de contrainte
τ_{yz}, τ	Contraintes de cisaillement
ρ_m	La densité de masse du matériau
G	Modules de cisaillement
$[\mathbf{k}]$	une matrice de rigidité
$\{\mathbf{d}\}$	les déplacements nodaux
$\{\mathbf{F}\}$	forces globales
η, ε	Coordonnées locales le long des directions x et y
$\theta_x; \theta_y$	Rotations le long des directions x et y
N	Fonction de forme
\mathbf{a}	Constantes vectorielles
$[\mathbf{m}]_e$	Matrices de masse des éléments
$[\mathbf{k}]_e$	Matrices de rigidité des éléments
$[K]_g$	Matrice de rigidité globale
$[M]_g$	Matrice de masse globale
\mathbf{a}	longueur de la plaque
\mathbf{b}	largeur de la plaque

INTRODUCTION GENERALE

Les plaques, en tant qu'éléments structuraux, sont largement utilisées dans de nombreux domaines de l'ingénierie, notamment l'aérospatiale, les structures civiles, les structures hydrauliques, les conteneurs, les navires, les instruments et les pièces de machines. En service, ils sont soumis à des charges dynamiques dont l'effet est très critique. Beaucoup de recherches ont été menées sur le comportement des plaques, en utilisant un large éventail de méthodes. [91]

L'étude des vibrations de la plaque est si importante car ce type de composants est fréquemment utilisé dans les applications d'ingénierie. Ils ont des formes différentes comme des surfaces droites, plates et non ondulées. Plaque est définie comme élément de géométrie qui ont le rapport d'aspect est beaucoup moins d'un Pendant qu'ils sont en fonctionnement, ils peuvent faire l'objet d'une excitation dynamique peut se produire. Dans l'analyse dynamique, les caractéristiques comme les fréquences naturelles et les formes de mode sont importantes à étudier.

Ces paramètres sont utilisés pour prédire la réponse due à l'excitation. Les fréquences naturelles ont une grande importance dans l'analyse de la réponse des structures due à diverses excitations. Pour le calcul de ces caractéristiques, l'analyse modale est utilisée. L'analyse modale est effectuée à la fois par méthode expérimentale et par simulation. [92]

L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques vibratoires des plaques isotropes minces telles fréquences et modes propres en vibration libre à l'aide de logiciel *ANSYS* afin de comprendre leur comportement sous différentes formes et cas.

Notre travail est divisé en trois chapitres, dans **le premier**, Dans ce chapitre, nous avons discuté de l'évolution de l'étude des vibrations des plaques à travers l'histoire par les chercheurs. Et généralités sur les vibrations des plaques minces et Généralité des plaques et théorie des plaques minces (hypothèse de Kirchhoff). **Le second** chapitre Une présentation générale pour méthode de élément finie et l'analyse element de finie pour plaque, l'importance de la méthode des éléments finis dans la détermination des fréquences et modes propres des structures ainsi une présentation du logiciel *ansys* et les principales étapes de simulation et génération de maillages d'éléments Finis. **Le troisième** est consacré à l'étude de comportement vibratoire des plaques isotropes en fonction de différentes conditions aux limites, la variation des dimensions des plaques. Différents éléments de maillage et la nature de matériau. Le travail s'achève par des conclusions et recommandations.

Chapitre I : Analyse vibratoire des plaques minces isotrope

I.1. Introduction :

Les plaques sont des éléments de structure rectilignes, planes et bidimensionnels dont une dimension, appelée épaisseur h , est beaucoup plus petite que les autres dimensions. Géométriquement, ils sont liés soit par des lignes droites ou courbes. Comme leurs contreparties, les poutres, elles ne servent pas seulement de composants structuraux mais peuvent également former des structures complètes telles que des ponts de dalle, par exemple. Les plaques statiques ont des conditions limites libres, simplement supportées et fixes, y compris des supports élastiques et des contentions élastiques, ou, dans certains cas, des supports ponctuels pairs, voir la figure I.1, Les charges statiques et dynamiques transportées par les tôles sont principalement perpendiculaires à la surface de la tôle. Ces charges externes sont transportées par des moments de flexion et de torsion internes et par des forces de cisaillement transversales. [1]

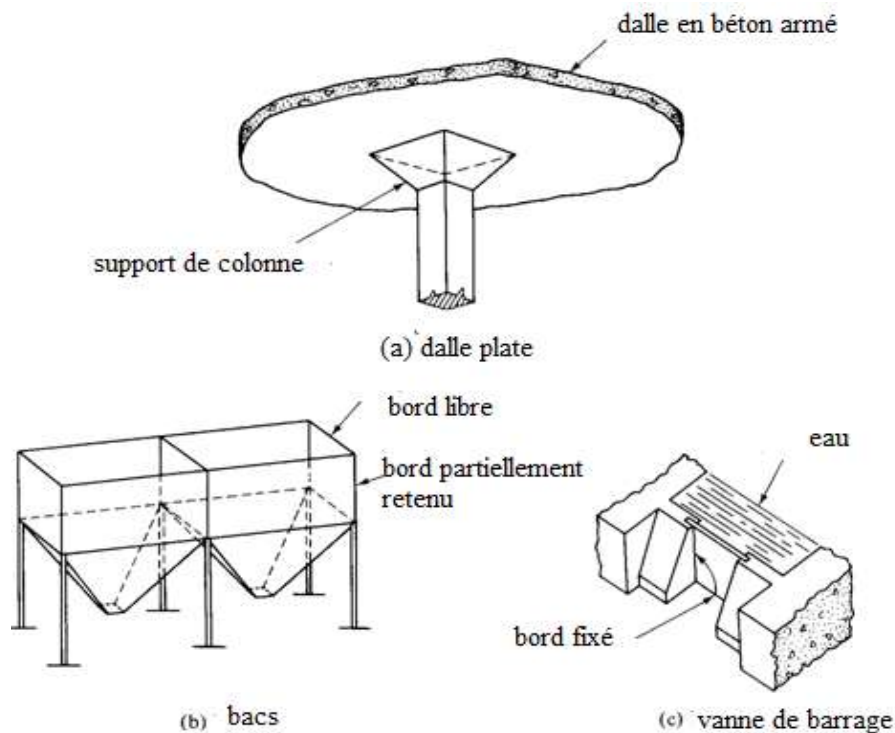
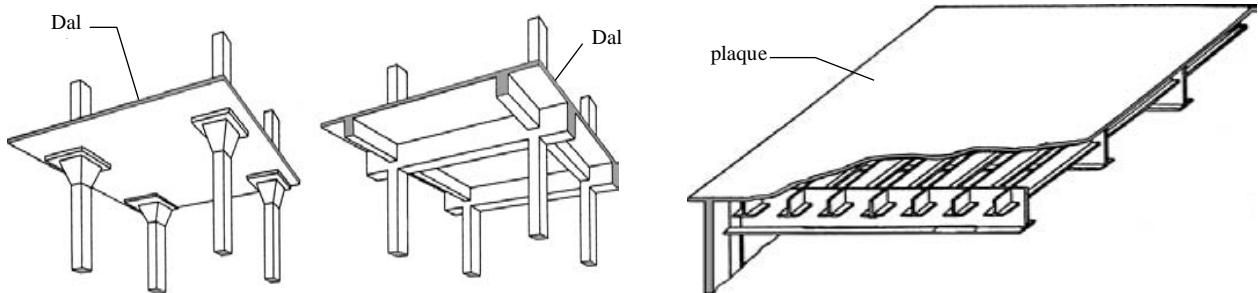


Figure I.1 Diverses conditions limites pour les plaques.

L'action structurale bidimensionnelle des plaques produit des structures plus légères et, par conséquent, offre des avantages économiques. En outre, de nombreuses configurations structurelles nécessitent une enceinte partielle ou même complète qui peut facilement être réalisée par des plaques, sans l'utilisation de revêtements supplémentaires, entraînant des économies supplémentaires en coûts de matériel et de main-d'œuvre. Par conséquent, les plaques et les structures de type à plaques ont acquis une importance particulière et ont considérablement augmenté leurs applications au cours des dernières années. [1]

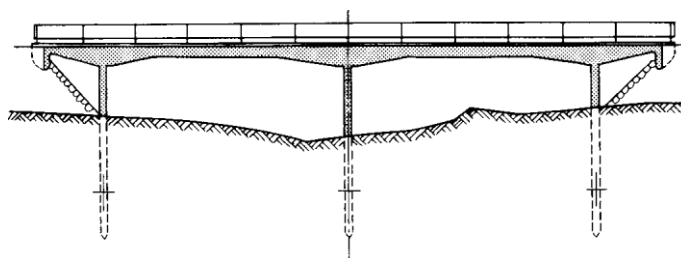
Ces modèles sont largement utilisés dans le domaine du génie civil, mécanique, aérospatial, maritime et automobile par exemple la figure I.2 .



(a.1) Dalles de béton armé dans

(a.2) Table de pont en acier

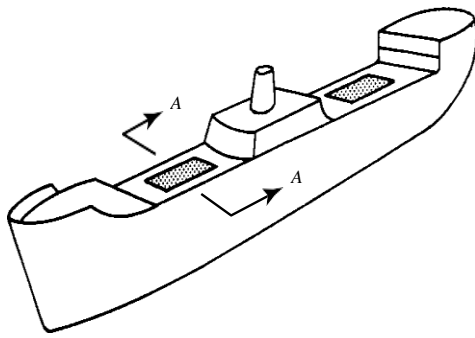
les bâtiments



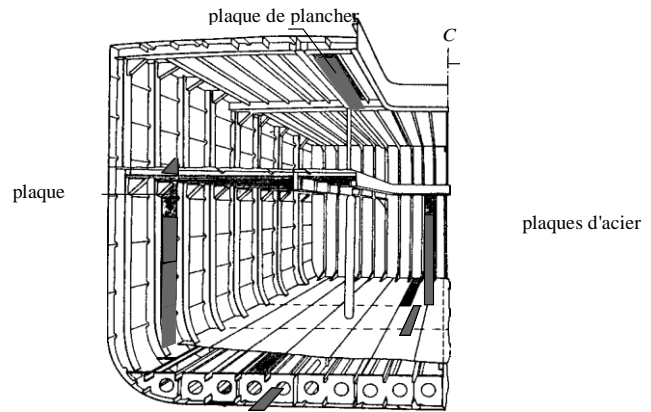
(a.3) Pont de dalles

(a) Utilisation de plaques dans l'industrie de la construction

Figure I.2 Utilisation de plaques dans divers domaines de l'ingénierie (suite)

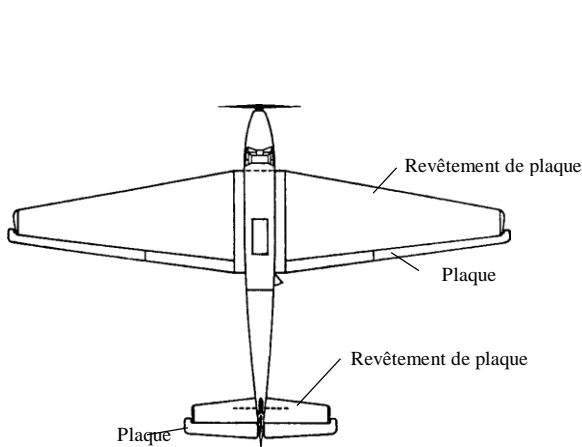


(b.1) navire marchand

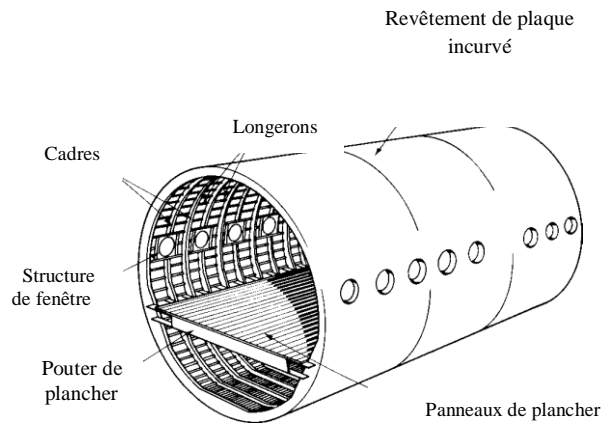


(b.2) Section A-A

(b) Utilisation des tôles dans la construction navale



(c.1) Avion



(c.2) fuselage

(C) Utilisation de plaques dans les structures aérospatiales

Figure I.2 Utilisation de plaques dans divers domaines de l'ingénierie (suite)

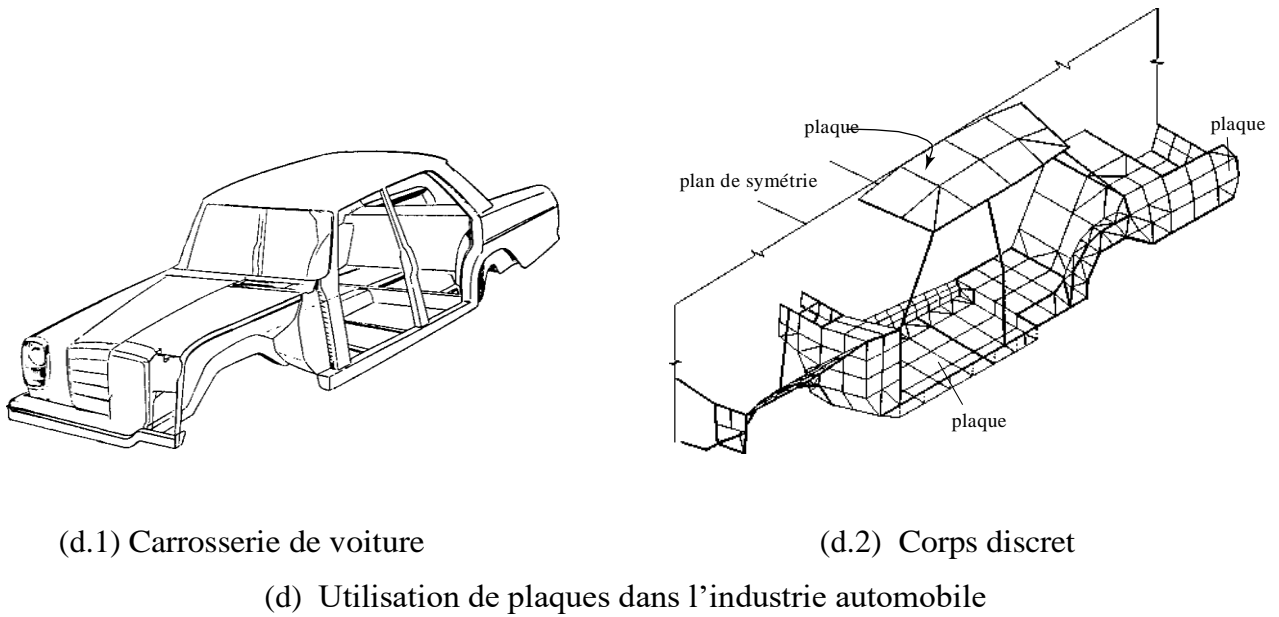


Figure I.2 Utilisation de plaques dans divers domaines de l'ingénierie (suite)

Bon nombre des éléments structuraux comme les aéronefs, les automobiles et tous les éléments de machines sont faits de structures simples, ils peuvent être des poutres ou des colonnes (unidimensionnelles), des plaques (bidimensionnelles) et des coquilles (tridimensionnelles) structures. Ces composants structurels sont généralement soumis à des charges dynamiques au cours de leur vie utile. Très souvent, ces composants peuvent avoir à fonctionner dans un environnement dynamique sévère où dans les dommages maximum résulte de la vibration résonnante, L'amplitude maximale de la vibration doit être dans la limite pour la sécurité de la structure. Par conséquent, l'analyse des vibrations est devenue très importante dans la conception d'une structure pour connaître à l'avance sa réponse et pour prendre les mesures nécessaires pour contrôler les vibrations structurelles et ses amplitudes. [2]

La majorité des structures de plaques est analysée en appliquant les équations gouvernantes de la théorie de l'élasticité. Par conséquent, les théories des plaques élastiques et, par la suite, traite les techniques de solution analytique et numérique appropriées pour déterminer les déformations et les contraintes.

Les solutions « exactes » des diverses équations différentielles gouvernantes des théories des plaques ne peuvent être obtenues que pour des conditions limites et de charge particulières, respectivement. Dans la plupart des cas, cependant, les différentes méthodes énergétiques peuvent fournir des solutions analytiques tout à fait utilisables pour la plupart des problèmes de

plaques pratiques. Aujourd'hui, avec l'utilisation généralisée des ordinateurs, un certain nombre de techniques de solution numérique ont acquis non seulement une importance considérable, mais, comme dans le cas de la méthode des éléments finis, aussi une dominance presque exclusive. [1]

Les méthodes d'analyse dynamique, qu'elles soient numériques ou expérimentales, occupent aujourd'hui une place importante partout dans l'ingénierie. S'ils ont été rapidement acceptés dans des disciplines telles que le génie civil, la conception mécanique, le génie nucléaire et la production automobile où ils sont évidemment nécessaires, ils sont devenus tout aussi importants dans la conception de tout produit manufacturé, de l'appareil micro-électromécanique à la grande éolienne.

Aujourd'hui, l'élaboration de modèles informatiques efficaces pour l'analyse du comportement dynamique des structures est devenue une tâche routinière. Pour donner un exemple, voir la figure I.3 illustre la prévision de calcul des modes de vibration d'une section de stator d'un moteur d'aéronef. [3]



Figure I.3 Modèle à éléments finis d'une section de stator d'un moteur d'aéronef

Études de les plaques peuvent être divisées en deux groupes: en termes de matériaux dont elles sont fait, et en termes de conditions aux limites et de méthode de solution dans la plaque problème analysé. Les plaques isotropes, composites et fonctionnellement graduées sont des exemples de matériaux utilisés dans les plaques.

Dans toutes les analyses structurales, l'ingénieur est obligé, en raison de la complexité de toute structure réelle, de remplacer la structure par un modèle d'analyse simplifié équipé uniquement des paramètres importants qui influencent principalement sa réponse statique ou dynamique aux charges. [1]

- Dans l'analyse des plaques de telles idéalizations concernent

1. la géométrie de la plaque et de ses supports,
2. le comportement du matériau utilisé
3. le type de charges et leur mode d'application.

I.2. Contexte historique :

Bien que les anciens Egyptiens, Grecs et Romains aient déjà employé des dalles de pierre finement taillées dans leurs bâtiments monumentaux en plus des pierres tombales les plus largement utilisées, il y a une différence fondamentale entre ces anciennes applications des dalles et celles des plaques dans les structures d'ingénierie modernes. C'est-à-dire que les anciens constructeurs ont établi les dimensions de la dalle et la capacité de charge par « règle empirique » transmise de génération en génération, alors qu'aujourd'hui, les ingénieurs déterminent les dimensions de la plaque en appliquant diverses méthodes scientifiques éprouvées.

L'histoire de l'évolution des théories scientifiques de la plaque et des techniques de solution pertinentes est tout à fait fascinante. Alors que le développement de la mécanique structurale dans son ensemble a commencé par l'étude de problèmes statiques [4], les premières études analytiques et expérimentales sur plaques ont été consacrées presque exclusivement aux vibrations libres. [1]

La première impulsion à une déclaration mathématique des problèmes de plaque, a probablement été faite par Euler, qui en 1776 a effectué une analyse de vibrations libres des problèmes de plaque [5]. Chladni, un physicien allemand, a découvert les différents modes de vibrations libres [6]. Dans des expériences sur des plaques horizontales, il a utilisé la poudre uniformément distribuée, qui a formé des modèles réguliers après induction de vibration. La poudre s'est accumulée le long des lignes nodales, où aucun déplacement vertical ne s'est produit. J. Bernoulli [7] a tenté de justifier théoriquement les résultats de ces expériences acoustiques. La solution de Bernoulli était basée sur les travaux précédents qui ont abouti à la théorie de la poutre de pliage d'Euler-D. Bernoulli. J. Bernoulli a présenté une plaque comme un système de bandes perpendiculaires les unes aux autres à angle droit, chaque bande étant considérée comme fonctionnant comme une poutre. Mais l'équation différentielle gouvernante, distincte des approches actuelles, ne contenait pas le moyen terme .

Le mathématicien français Germain développé une équation différentielle plaque qui manquait le terme déformant [8]. Il a décrit diverses expériences avec des plaques vibrantes. Chladni a découvert différents modes de vibrations libres. Dans ses expériences, il a utilisé une poudre uniformément répartie qui a formé des motifs réguliers après l'introduction de vibrations la figure I .4 La poudre s'est accumulée le long des lignes nodales, où aucun déplacement ne s'est produit. De plus, il a pu déterminer les fréquences correspondant à ces modèles de vibrations. Invité par l'Académie des sciences en 1809, il a fait la démonstration de ses expériences . [1]

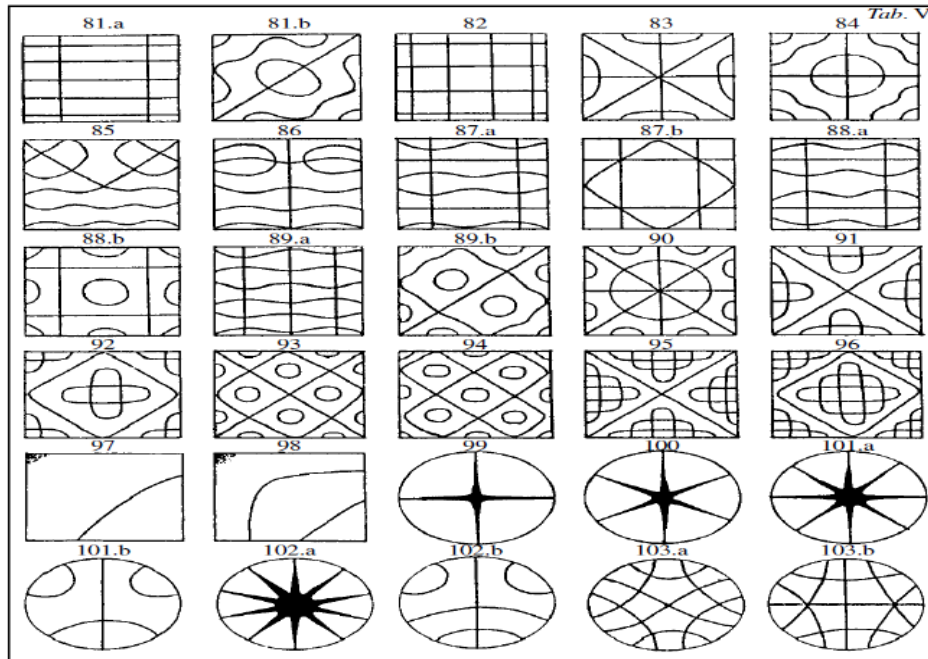


Figure I.4 Modèles formés de vibrations libres des plaques.

  Paris d'ailleurs, elle a reçu un prix par l'Académie parisienne en 1816 pour ce travail. Lagrange, étant l'un des examinateurs de ce travail, corrigé les résultats de Germain (1813), la figure I.5, en ajoutant le terme manquant [9]; ainsi, il a été la première personne à présenter l'équation générale plaque correctement. Cauchy [10] et Poisson [11] ont été les premiers à formuler le problème de la flexion des plaques sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. En étendant toutes les quantités caractéristiques en séries dans les puissances de la distance de la surface moyenne, ils retenirent seulement les termes du premier ordre de la petitesse.

De cette façon, ils ont obtenu l'équation différentielle gouvernante pour les déviations qui co incide compl tement avec l'équation bien connue de Germain-Lagrange. En 1829, Poisson a étendu avec succès l'équation de plaque Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous charge statique. Dans cette solution, cependant, la rigidité de flexion de la plaque D a été fixée à

un terme constant. Poisson a également suggéré de mettre en place trois conditions limites pour tout point sur une frontière libre. Les conditions limites dérivées par Poisson et une question sur le nombre et la nature de ces conditions ont fait l'objet de beaucoup de controverse et ont fait l'objet d'enquêtes supplémentaires.

La première théorie satisfaisante de flexion des plaques est associée à Navier [12], qui a considéré l'épaisseur des plaques dans l'équation générale des plaques comme une fonction de la rigidité D . Il a également introduit une méthode « exacte » qui a transformé l'équation différentielle en expressions algébriques en utilisant la série trigonométrique de Fourier.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p_z(x, y). \quad (1.1)$$

$p_z(x, y)$: Efforts transversaux

D : la rigidité de flexion de la plaque

W : représente la surface médiane déviée [1]

En 1850, Kirchhoff la Figure I.5, a publié une importante thèse sur la théorie des plaques minces [13]. Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de base indépendantes qui sont maintenant largement acceptées dans la théorie de la flexion des plaques et qui sont connues sous le nom d'hypothèses de « Kirchhoff ». À l'aide de ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié la fonction énergétique de la théorie de l'élasticité 3D pour les plaques pliées.

En exigeant qu'il soit stationnaire, il a obtenu l'équation de Germain-Lagrange comme l'équation d'Euler. Il a également souligné qu'il existe seulement deux conditions limites sur un bord de plaque. Les autres contributions significatives de Kirchhoff sont la découverte de l'équation de fréquence des plaques et l'introduction de méthodes de déplacement virtuel dans la solution des problèmes de plaque. La théorie de Kirchhoff a contribué à la clarté physique de la théorie de la flexion des plaques et a favorisé son utilisation généralisée dans la pratique.

Lord Kelvin (Thomson) et Tait [14] ont fourni un aperçu supplémentaire de la condition des équations limites en convertissant les moments de torsion le long du bord d'une plaque en forces de cisaillement. Ainsi, les bords ne sont soumis qu'à deux forces : le cisaillement et le moment. Le livre de Kirchhoff a été traduit par Clebsh [15]. Cette traduction contient de nombreux commentaires précieux par de Saint-Venant : le plus important étant l'extension de l'équation différentielle de Kirchhoff de plaques minces, qui a considéré, d'une manière mathématiquement

correcte, l'action combinée de flexion et d'étirement. Saint-Venant a également souligné que les séries proposées par Cauchy et Poissons en règle générale, sont divergentes.

La solution des plaques rectangulaires, avec deux supports simples parallèles et les deux autres supports arbitraires, a été résolue avec succès par Levy [16] à la fin du XIXe siècle. À la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle, les constructeurs navals ont changé leurs méthodes de construction en remplaçant le bois par de l'acier de construction. Cette modification des matériaux de construction a été extrêmement fructueuse pour le développement de théorie des plaques. Les scientifiques russes ont apporté une contribution significative à l'architecture navale en étant les premiers à remplacer les anciennes traditions commerciales par de solides théories mathématiques.

En particulier, Krylov [17] et son élève Bubnov [18] ont largement contribué à la théorie des plaques minces avec des rigidités flexuelles et extensives. Bubnov a jeté les bases de la théorie des plaques flexibles et il a été le premier à introduire une classification moderne des plaques. Bubnov a proposé une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles d'élasticité et il a composé des tableaux de déflexions maximales et des moments de flexion maximums pour les plaques de diverses propriétés. Puis, Galerkin a développé cette méthode et l'a appliquée à l'analyse de flexion des tôles. Galerkin a recueilli de nombreux problèmes de pliage pour des plaques de forme arbitraire [19], Timoshenko a apporté une contribution significative à la théorie et à l'application de l'analyse de flexion des tôles. Parmi les nombreuses contributions importantes de Timoshenko figurent des solutions de plaques circulaires tenant compte des grandes déviations et de la formulation de problèmes de stabilité élastique [20,21].

Timoshenko et Woinowsky-Krieger ont publié une monographie fondamentale [22] qui représente une analyse approfondie de divers problèmes de flexion des plaques. Des études approfondies dans le domaine de la théorie de la flexion des plaques et de ses diverses applications ont été menées par des scientifiques remarquables tels que Hencky [23], Huber [24], von Karman [25,26], Nadai [27], Foppl [28].

Hencky [23] a contribué à la théorie des grandes déformations et à la théorie générale de la stabilité élastique des plaques minces. Nadai a fait de vastes études théoriques et expérimentales associées à un contrôle de la précision de la théorie des plaques de Kirchhoff.

Il a traité différents types de singularités dans les plaques en raison d'une application de force concentrée, des effets de support de point, etc. Les équations générales pour les grandes déformations de plaques très minces ont été simplifiées par Föppl qui a utilisé la fonction de

contrainte agissant dans le plan médian de la plaque. La forme finale de l'équation différentielle de la théorie de la grande déflexion, cependant, a été développée par von Karman. Il a également étudié le comportement post-flambage des plaques.

Huber, a développé une théorie approximative des plaques orthotropes et des plaques résolues soumises à des charges réparties non symétriques et à des moments de bordure. Les bases de la théorie générale des plaques anisotropiques ont été développées par Gehring [29] et Boussinesq [30]. Lekhnitskii [31] a apporté une contribution essentielle au développement de la théorie et à l'application de l'analyse anisotropique linéaire et non linéaire des plaques. Il a également développé la méthode de variables complexes appliquées à l'analyse des plaques anisotropiques.

Le développement de l'industrie aéronautique moderne a donné un nouvel élan à des enquêtes analytiques plus rigoureuses sur les problèmes de plaques. Divers scientifiques et ingénieurs ont analysé des plaques soumises à des forces dans le plan, à des problèmes de vibration (flutter), à des plaques rigides, etc. E. Reissner [32] a élaboré une théorie rigoureuse des tôles qui tient compte des déformations causées par les forces de cisaillement transversales. Dans l'ancienne Union soviétique, les travaux de Volmir [33] et de Panov [34] ont surtout été consacrés à la solution de problèmes de flexion des tôles non linéaires.

L'équation déterminante pour une plaque rectangulaire mince soumise à des forces de compression directes N_x a d'abord été dérivée par Navier [12]. Bryan [35] a d'abord résolu le problème de flambement d'une plaque simplement supportée soumise aux forces de compression directes et constantes agissant dans une et deux directions en utilisant la méthode de l'énergie. Cox [36], Hartmann [37], etc., ont présenté des solutions à divers problèmes de flambage plaques rectangulaires en compression, tandis que Dinnik [38], Nadai [39], Meissner [40], etc., ont terminé le problème de flambement des plaques circulaires compressées. Southwell et Skan [41] ont étudié pour la première fois l'effet des forces de cisaillement directes sur le flambement d'une plaque rectangulaire simplement supportée. Timochenko et Gere [42] et Bubnov [18] ont étudié le comportement de flambage d'une plaque rectangulaire soumise à des forces de compression directes non uniformes. Karman et al. [43], Levy [44], Marguerre [45], etc. ont analysé le comportement post-flambage des plaques de différentes formes.

Une analyse complète des problèmes de flambage linéaire et non linéaire pour les plaques minces de différentes formes sous différents types de charges, ainsi qu'une présentation considérable des résultats disponibles pour les forces critiques et les modes de flambage, qui

peuvent être utilisés dans la conception technique, ont été présentés par Timoshenko et Gere [42], Gerard et Becker [46], Volmir [47], Cox [48], etc.

On peut obtenir une équation différentielle du mouvement des plaques minces en appliquant soit le principe de D’Alambert, soit une formule de travail basée sur la conservation de l’énergie. La première solution exacte du problème de vibrations libres pour les plaques rectangulaires, dont les deux côtés opposés sont simplement supportés, a été réalisée par Voight [49]. Ritz [50] a utilisé le problème de la vibration libre d’une plaque rectangulaire avec des bords libres pour démontrer sa célèbre méthode pour étendre le principe de Rayleigh pour obtenir des limites supérieures sur les fréquences de vibration. Poisson [11] a analysé l’équation des vibrations libres pour les plaques circulaires.

Les monographies de Timoshenko et Young [51], Den Hartog [52], Thompson [53], etc., contiennent une analyse complète et des considérations de conception de vibrations libres et forcées de plaques de différentes formes. Un ouvrage de référence de Leissa [54] présente un ensemble considérable de résultats disponibles pour les fréquences et les modes de vibrations libres des plaques qui pourraient être fournis pour la conception et pour un chercheur dans le domaine des vibrations de plaques.

La tendance récente dans le développement des théories de la plaque se caractérise par une forte dépendance sur les ordinateurs modernes à grande vitesse et le développement des méthodes numériques orientées vers l’ordinateur les plus complètes, ainsi que par l’introduction de théories plus rigoureuses en ce qui concerne les divers effets physiques, les types de chargement, etc. Le résumé ci-dessus est un très bref aperçu du contexte historique de la théorie de flexion des plaques et de son application. Le lecteur intéressé est renvoyé aux monographies spéciales [55,56] où cette évolution historique des plaques est présentée en détail.

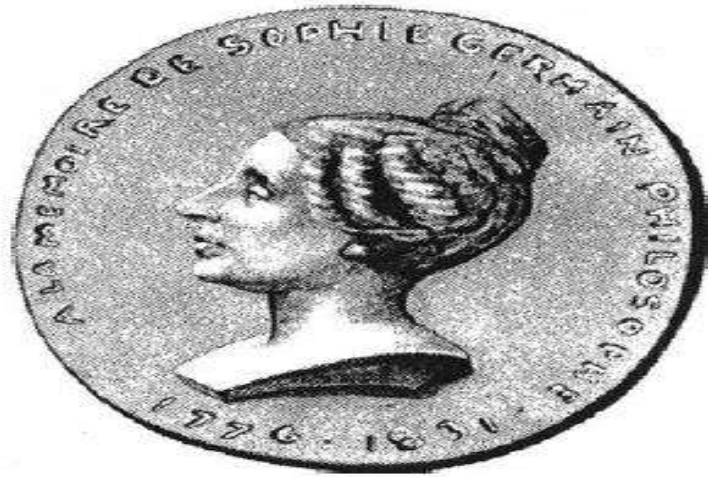


Figure I.5 Médaillon montrant le portrait de Mlle. Germain



Figure I.6 Gustav R. Kirchhoff (1824–1887)

I.3 Généralités sur les vibrations des plaques minces :

I.3.1 Introduction :

Dans les vibrations linéaires, les vibrations naturelles et les vibrations forcées sont importantes. Les premières traites des caractéristiques naturelles de tout corps élastique, et ces vibrations naturelles se produisent à des fréquences discrètes, en fonction de la géométrie et des systèmes de matériaux seulement. Ces problèmes (comme le flambage) sont des problèmes de valeur propre, les fréquences naturelles sont les valeurs propres, et le champ de déplacement associé à chaque fréquence naturelle sont les fonctions propres. On se souvient que dans un simple système de masse à ressort, il y a une fréquence naturelle et une forme de mode; dans un système de deux ressorts et deux masses, il y a deux fréquences naturelles et deux formes de mode. Dans un système élastique continu, théoriquement il y a un nombre infini de fréquences naturelles, et une forme de mode associée à chacune. [57]

I.3.2 Vibrations naturelles des plaques isotropes :

Examiner à nouveau l'équation de flexion d'une plaque rectangulaire soumise à une charge latérale, $p(x, y)$ donnée par l'équation :

$$D\nabla^4 w = p(x, y). \quad (1.2)$$

Si le principe d'Alembert était utilisé pour accommoder le mouvement, on ajouterait à droite un terme égal au négatif du produit de la masse par unité de surface et de l'accélération dans la direction z . Dans ce cas, le côté droit de (1.2) devient :

$$p(x, y, t) - \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) = 0 \quad (1.3)$$

Où p et w sont des fonctions du temps ainsi que de l'espace, ρ_m est la densité de masse du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Pour les vibrations forcées $p(x, y, t)$ provoque la réponse dynamique, et peut varier d'une oscillation harmonique à un impact ponctuel intense. Comme indiqué dans la section précédente, pour étudier les vibrations naturelles $p(x, y, t)$ est égale à zéro, et l'équation de gouvernance devient l'équation homogène suivante :

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

Comme précédemment, on peut supposer qu'une solution pour la déviation latérale, qui satisfait spatialement la condition limite, est harmonique dans le temps et satisfait (1.4) ci-dessus. Pour le cas d'une plaque simplement supportée sur les quatre bords, une telle fonction est :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega_{mn} t \quad (1.5)$$

où a et b sont les dimensions de la plaque, A_{mn} est l'amplitude de vibration pour chaque valeur des nombres entiers m et n, et ω_{mn} est la fréquence circulaire naturelle en radians par unité de temps.

$$\omega_{mn} = \left[\frac{\pi^4 D}{\rho_m h} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.6)$$

Dans ce cas, la fréquence naturelle fondamentale se produit pour $m = n = 1$. Encore une fois, l'amplitude A_{mn} ne peut pas être déterminée à partir de ce problème de valeur propre linéaire, dans lequel les valeurs propres sont les fréquences circulaires naturelles de l'équation (1.6) et les fonctions propres correspondantes sont les formes de mode, données dans (1.5). Pour obtenir la fréquence naturelle de vibration en cycles par seconde, appelée Hertz (Hz), indiquée par f_{mn} .

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} \quad (1.7)$$

Comme pour le flambage, les plaques avec d'autres conditions limites comportent des problèmes plus compliqués, souvent les plus difficiles à résoudre analytiquement. Dans de nombreux cas, des solutions appropriées sont obtenues à l'aide de méthodes énergétiques. Ma et Lin [58] ont fourni des descriptions graphiques des six premiers modes de vibration pour une plaque carrée en aluminium (isotrope), donnant à la fois l'observation expérimentale et les formes de mode obtenues par calcul numérique [57]

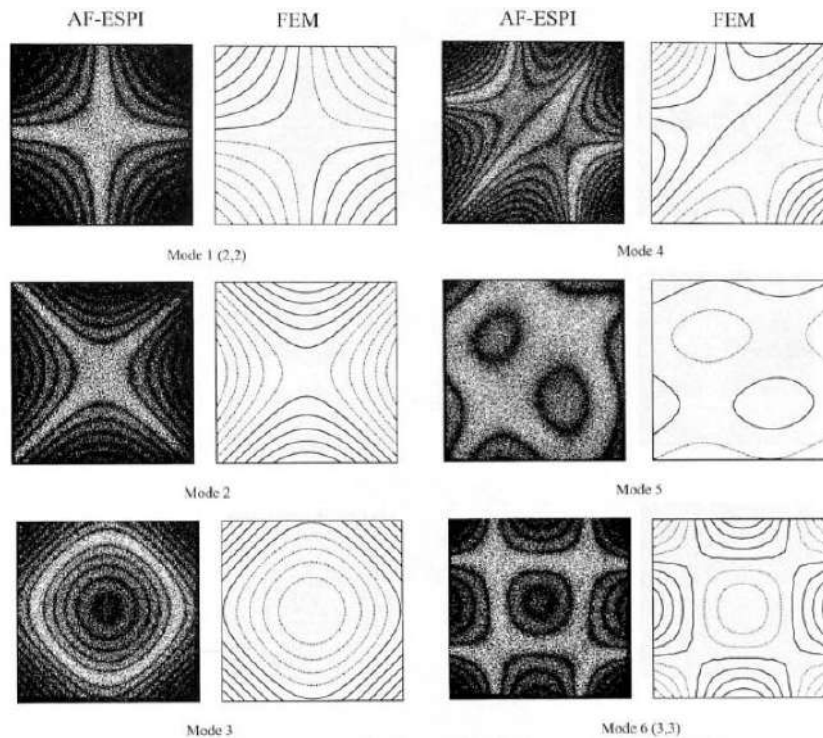


Figure I.7. Six premières formes de mode pour les plaques carrées isotropes en aluminium obtenues à partir d'observations expérimentales et de calculs numériques.

I.4 Généralité sur les plaques :

I.4.1 Loi de Hooke Généralisée :

La loi de Hooke modélise le comportement des solides élastiques soumis à des contraintes. Elle stipule que la déformation élastique est une fonction linéaire des contraintes. [59]

I.4.2 Les Milieux Continus:

La mécanique du point matériel permet de prédire le mouvement d'un point soumis à un ensemble de forces. On distingue, dans cette théorie, la description de la cinématique, position, vitesse et accélération du point de la dynamique relation entre force et mouvement, autrement dit, la seconde loi de Newton $f = m a$. [60]

I.4.3 Théorie tridimensionnelle :

Dans la mécanique du continuum, la configuration d'un corps solide est décrite par un modèle mathématique continu avec des points géométriques qui coïncident avec les particules matérielles du corps. Lorsqu'un tel corps continu change de configuration sous une certaine action physique, on suppose des déformations continues. Dans un système de coordonnées

lagrangiennes, nous introduisons le vecteur de déplacement u avec les composants (voir Figure I.8), puis :

$$u_i = x_i^t - x_i^0 \quad (1.8)$$

- Le tenseur de déformation de Green peut être défini comme suit :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (1.9)$$

-Où $u_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ Pour la déformation linéaire, le tenseur de déformation est :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.10)$$

-L'énergie de déformation S par unité de volume peut être exprimée en :

$$S = \frac{1}{2} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (1.11)$$

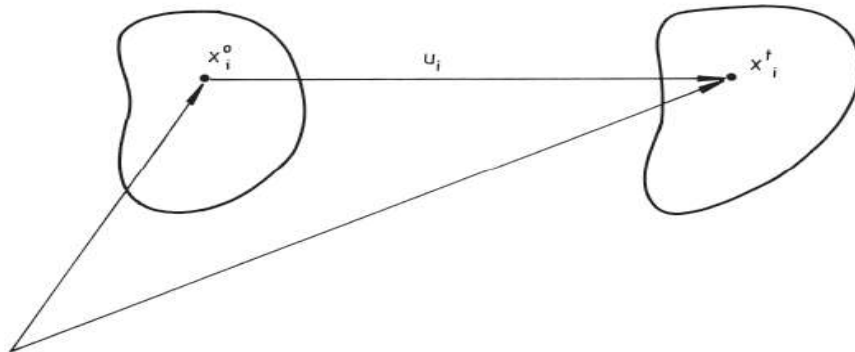


Figure I.8: Déformation d'un corps.

- Par conséquent, la loi de Hooke sera écrite comme :

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.12)$$

-Où C^{ijkl} sont les coefficients élastiques et les contraintes σ^{ij} devrait satisfaire l'équilibre dans un volume élémentaire, qui est :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1.13)$$

- Où f_i sont des forces corporelles. Lors de la substitution de (1.10) en (1.12) et (1.13) les déplacements peuvent être résolus pour certaines conditions limites comme suit :

(i) Pour la limite sur laquelle les tractions sont prescrites.

$$T_{ni} = \sigma_{ij}n_j = \bar{T}_{ni} \quad (1.14)$$

(ii) Pour la limite à laquelle les déplacements sont prescrits.

$$u_i = \bar{u}_i \quad (1.15)$$

Cependant, dans la plupart des cas, la solution de (1.13) est très difficile, voire impossible, c'est pourquoi des principes de travail variables ou virtuels sont introduits. L'énergie potentielle totale peut être exprimée comme suit :

$$\pi = \int_v \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} - f_i u_i \right) dv - \int_s T_{ni} u_i ds \quad (1.16)$$

En minimisant π pour un champ de déplacement supposé, une solution approximative peut être trouvée pour des conditions limites spécifiées.

La mécanique continue tridimensionnelle des solides constitue une base très générale pour l'analyse des contraintes. Cependant, parmi les structures pratiques, il y a de nombreux problèmes qui ont des caractéristiques géométriques particulières et, par conséquent, dans de tels cas, la théorie tridimensionnelle peut être dégénérée. Les exemples de ces dégénérescences comprennent la contrainte plane, la déformation plane, les problèmes axisymétriques et de plaque. [62]

I.4.4 Matériaux isotropes :

Les relations suivantes sont valables pour un matériau élastique et isotrope. La relation stress-déformation peut être écrite (voir la figure I.9) sous forme de matrice en tant que :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} ; \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (1.17)$$

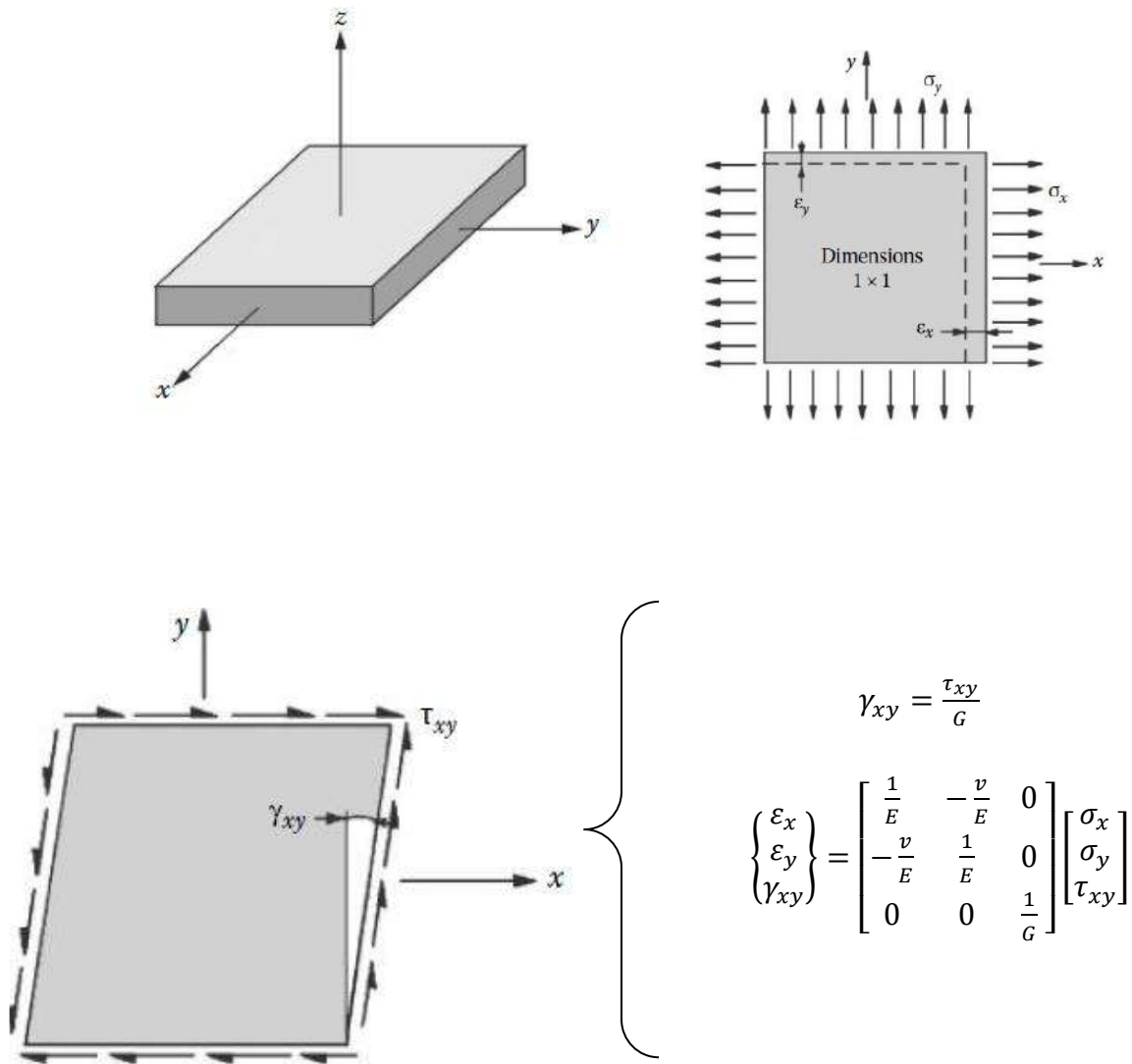


Figure I.9 : contrainte- déformation pour plaque

Nous pouvons noter trois constantes élastiques E, ν, G . Il y a une relation entre eux comme :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.18)$$

La relation précédente montre qu'un matériau isotrope et élastique ne peut être caractérisé que par deux constantes élastiques indépendantes : E et ν . [61]

I.4.5 Théorie des plaques :

Une plaque est définie comme une structure dans laquelle l'épaisseur est très petite comparée avec les autres dimensions, c'est-à-dire l'épaisseur à la portée $h/L \ll 1$ (la figure I.10). Pour cette situation, on peut supposer que l'état de déformation dans la plaque peut être

exprimé par l'état de déformation à la surface centrale qui est le plan à mi-chemin entre les faces de la plaque.

Il y a plusieurs hypothèses qui ont été utilisées pour établir des théories de plaque.

Actuellement, le cas linéaire est considéré.

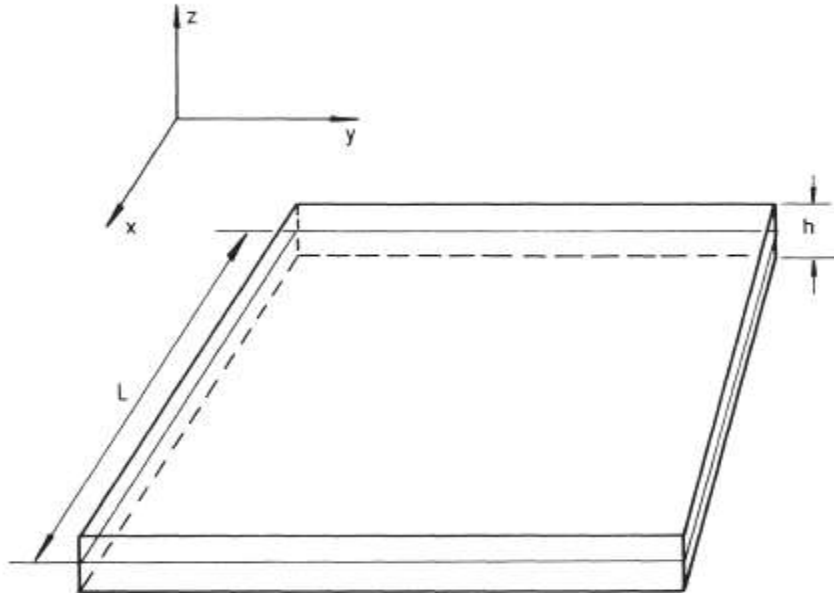


Figure I.10 : Géométrie de la plaque

I.4.6 Types de plaques :

Les quatre types de plaques peuvent être classés, dans une certaine mesure, en fonction de leur rapport épaisseur-longueur (h/L). Bien que les limites entre ces différents types de plaques soient quelque peu floues, nous pouvons tenter de subdiviser les plaques dans les grandes catégories suivantes :

I.4.6.1 Les plaques rigides : $\left(h/L = \frac{1}{50} - \frac{1}{10}\right)$ sont des plaques minces avec une rigidité de flexion, portant des charges de deux dimensions, principalement par (flexion et torsion) et par cisaillement transversal, généralement d'une manière similaire aux poutres. Dans la pratique technique, on entend par plaque rigide, sauf indication contraire.

I.4.6.2 Les membranes : sont $\left(h/L < \frac{1}{50}\right)$ des plaques très minces sans rigidité de flexion, transportant des charges par des forces de cisaillement axiales et centrales. Cette action

portante peut être approchée par un réseau de câbles tendus puisque, en raison de leur extrême finesse, leur résistance au moment est d'ordre négligeable.

I.4.6.3 Plaques moyennement épaisses : $\left(h/L = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right)$ sont à de nombreux égards similaires aux plaques rigides, à l'exception notable que les effets des forces de cisaillement transversales sur les composants de contraintes normales sont également pris en compte.

I.4.6.4 Les plaques épaisses : $(h/L > \frac{1}{5})$ ont un état de contrainte interne qui ressemble à celui du continua tridimensionnel. [1]

I.4.7 Théorie des plaques minces (hypothèse de Kirchhoff) :

Pour les plaques minces, l'hypothèse bien connue de la théorie classique des plaques minces était présenté par Kirchhoff [1], c'est-à-dire :

1. Il n'y a pas de déformation dans le plan médian de la plaque.
2. Points de la plaque situés initialement sur un plan normal au milieu de la plaque
3. rester sur la surface normale à la surface médiane de la plaque après la déformation.
4. La contrainte dans la direction normale à la surface médiane de la plaque peut être ignorée. La figure I.11 permet de conclure à l'absence de déformation transversale par cisaillement.

I.4.7.1 Les équations gouvernantes :

En utilisant les hypothèses de Kirchhoff, les déplacements à chaque point de la plaque peut être exprimé comme suit :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, w = w(x, y) \quad (1.19)$$

- En utilisant l'hypothèse que $\delta_z = 0$, l'équation constitutifs (1.12) à un point typique (x, y, z) dans la plaque peut être exprimé comme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -z \partial^2 w / \partial x^2 \\ -z \partial^2 w / \partial y^2 \\ -2z \partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Où $\delta = Q \varepsilon = Q z \varepsilon_d$ où $Q_{ij} (i, j = 1, 2, 6 \dots)$ sont les rigidités réduites dans le plan Pour la contrainte plane. L'énergie de déformation (S.E.) dans la plaque peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \text{S. E.} &= \frac{1}{2} \int_v \sigma^T \varepsilon dv = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_d^T (z^2 \mathbf{Q}) \varepsilon_d dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_d^T \mathbf{D}_d \varepsilon_d dA \end{aligned} \quad (1.21)$$

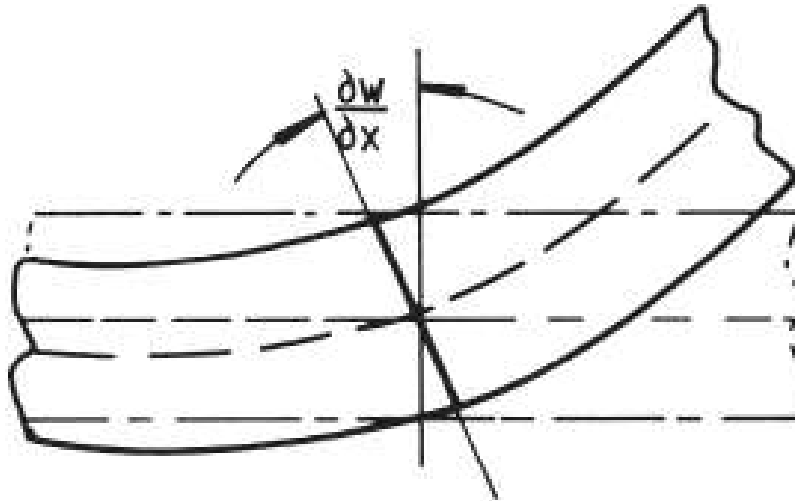


Figure I.11 : Théorie classique de Kirchhoff - hypothèse transversale

les équations constitutives de plaque pour un matériau anisotrope peuvent être exprimées comme suit (voir figure I.12) :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Où :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \end{aligned} \quad (1.23)$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{12z}{h^3} M_x \\ \sigma_y &= \frac{12z}{h^3} M_y \\ \tau_{xy} &= \frac{12z}{h^3} M_{xy}\end{aligned}\quad (1.24)$$

Pour un matériau isotrope (1.22) simplifiée à :

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -\frac{1}{2} D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (1.25)$$

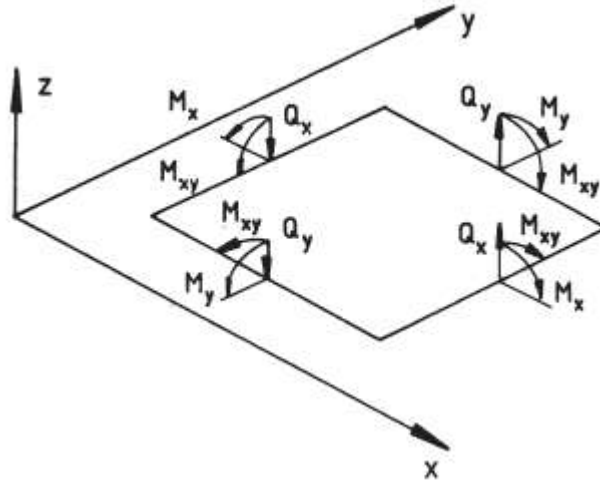


Figure I.12: Forces résultantes dans la plaque.

Où $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$, E est le module de Young, ν est le rapport de Poisson et h est épaisseur de plaque. À partir de (1.12) l'équation d'équilibre peut être dérivée comme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0\end{aligned}\quad (1.26)$$

Où q est la charge latérale répartie. A partir de (1.25) et (1.26) il peut être montré que :

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & \tau_{xz} &= \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) Q_x \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & \tau_{yz} &= \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) Q_y \end{aligned} \quad (1.27)$$

Où une distribution parabolique des contraintes de cisaillement est supposée. Par substitution (1.22) dans l'équation d'équilibre (1.26) pour les matériaux anisotropiques comme :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \end{aligned} \quad (1.28)$$

Qui simplifie pour les matériaux isotropes à :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.29)$$

I.4.7.2 Conditions aux limites :

Selon les hypothèses de Kirchhoff, les rotations normales dépendent du déplacement transversal et seules deux conditions limites sont donc requises. Pour discuter des différentes conditions limites, il est tenu compte du cas d'une plaque avec une limite curviligne comme le montre la figure I.13. Laisser \mathbf{n} et \mathbf{t} être mesurés le long de la normale extérieure et de la tangente au bord de la plaque respectivement à un point type \mathbf{P} (\mathbf{s} étant mesurés le long de la limite). Sur une limite droite \mathbf{t} et \mathbf{s} coïncident. Laisser α un dénoter l'angle entre la normale \mathbf{n} et l'axe positif \mathbf{x} . Les rotations $\partial w / \partial n$ et $\partial w / \partial t$ de la normale du plan médian au point \mathbf{P} dans les plans \mathbf{nz} et \mathbf{tz} peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.30)$$

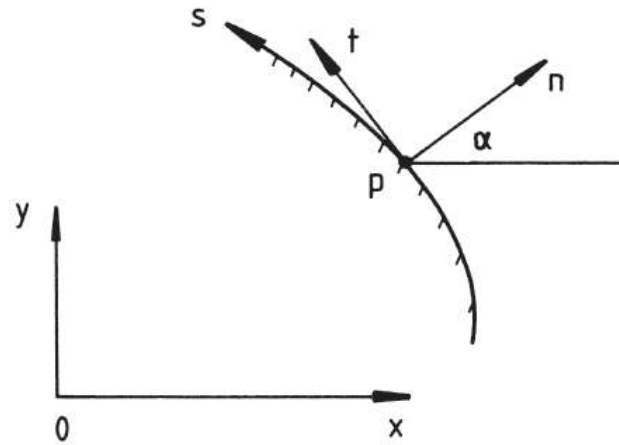


Figure I.13 : Limite curviligne de la plaque.

Les moments de flexion et de torsion au point P peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ M_{nt} &= (M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \quad (1.31)$$

et les forces de cisaillement Q_n et Q_t au point P sont données comme suit :

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \\ Q_t &= -Q_x \sin \alpha + Q_y \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les conditions limites libres, simplement appuyé et encastré sont maintenant considérées

I.4.7.2.1 Bord libre :

Sur le bord libre, toutes les forces résultantes de plaque devraient disparaître, c'est-à-dire :

$$M_n = 0, M_{nt} = 0 \text{ et } Q_n = 0 \quad (1.33)$$

Cependant, il n'y a que deux conditions limites à satisfaire dans la théorie de Kirchhoff. En utilisant le principe de travail virtuel, nous pouvons décrire les conditions limites le long du bord sur lesquelles les tractions limites sont prescrites. Si un déplacement virtuel δw est prescrit le long de la limite, alors le travail virtuel associé δW peut être exprimé comme :

$$\delta W = \int_{S_\sigma} \left[-M_{nt} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) + Q_n \delta w \right] ds + \int_{S_\sigma} M_n \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} \right) ds \quad (1.34)$$

dans lequel il n'y a que deux variables indépendantes : δw et $\partial \delta w / \partial n$. Notez que $\partial \delta w / \partial t$ est appliquée en prescrivant ou en définissant δw le long de **S**. Lors de l'intégration du premier terme de (1.34) le résultat suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} \int_{S_\sigma} \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \delta w ds - (M_{nt} \delta w)|_{S_\sigma} + \int_{S_\sigma} Q_n \delta w ds \\ = \int_{S_\sigma} \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \delta w ds - (M_{nt} \delta w)|_{S_\sigma} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Il peut être montré que la force correspondant à δw is $Q_n + \partial M_{nt} / \partial t$. Aux extrémités du bord libre le déplacement virtuel δw devrait disparaître et par conséquent :

$$\delta W = \int_{S_\sigma} \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \delta w ds + \int_{S_\sigma} M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds \quad (1.36)$$

Le long du bord libre δw et $\partial \delta w / \partial n$ peut être arbitraire mais le travail virtuel δW disparaît de sorte que :

$$Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0 \quad (1.37)$$

Et :

$$M_n = 0 \text{ le long du bord libre} \quad (1.38)$$

I.4.7.2.2 Simplement appuyé :

Dans la théorie de la plaque de Kirchhoff, puisque $w = 0$ implique $\delta w / \partial t = 0$, un seul type de support simple est possible - le moment de flexion de la baguette de déplacement latéral M_n les deux disparaissent, de sorte que :

$$w = 0 \text{ et } M_n = 0 \quad (1.39)$$

I.4.7.2.3 Bord encastré :

Dans la théorie de la plaque de Kirchhoff, puisque ici aussi $w = 0$ implique $\delta w / \partial t = 0$, la baguette de déplacement latéral la pente du plan médian de la plaque déformée dans la direction normale $\partial w / \partial n$ disparaît de sorte que :

$$w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (1.40)$$

I.4.7.3 L'énergie potentielle totale :

L'énergie potentielle totale peut être exprimée comme suit :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_A D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy - \int_A q w dx dy - \int_S \left[\left(\bar{Q}_n + \frac{\partial \bar{M}_{nt}}{\partial t} \right) w - \bar{M}_{nt} \frac{\partial w}{\partial n} \right] ds \quad (1.41)$$

où , $w = w(x, y)$ est la seule variable et doit satisfaire aux conditions limites appropriées. Le long d'un bord limite, seul un $\partial w / \partial n$ est indépendant de la flèche de déviation de la force réactive $(Q_n + \partial M_{nt} / \partial t)$ est associée à la déflexion w . Lorsque $w(x, y)$ a été déterminé, toutes les forces résultantes peuvent être obtenues en utilisant (1.25) et (1.27).

Apparemment, pour le cas limite de la plaque mince, dans lequel l'épaisseur de la plaque / rapport de portée tend à zéro, l'hypothèse de Kirchhoff est précise et donc il est largement appelé théorie de la plaque mince. Toutefois, pour les tôles moyennement épaisses, le rapport épaisseur/portée n'est pas assez faible pour négliger la déformation transversale par cisaillement et l'hypothèse de Kirchhoff n'est plus applicable. Pour surmonter un tel problème, l'artifice d'éviter l'hypothèse de Kirchhoff et de prescrire indépendamment les déplacements de la surface moyenne et les rotations de la normale pourrait être adopté. [62]

Chapitre II : Analyse par élément de finie utilisée logiciel ANSYS

II.1 Introduction :

Problème des vibrations des plaques rectangulaires, bien qu'il ait maintenant plus de deux cents ans dans son compte rendu de recherche, continue d'être d'un intérêt considérable pour la recherche. La raison en est qu'une plaque rectangulaire est un élément structural de base et que, par conséquent, les applications pratiques peuvent entraîner d'énormes variations paramétriques en ce qui concerne, par exemple, le chargement, les matériaux, le rapport d'aspect et les conditions de support. [63]

Différentes méthodes ont été développées pour l'analyse statique et dynamique des structures de type plaque. En cas de formes complexes, il est généralement difficile d'obtenir une solution analytique précise pour des structures de différentes tailles, de différentes charges et de différentes propriétés des matériaux. Par conséquent, nous devons appliquer sur des méthodes numériques approximatives pour obtenir des solutions appropriées de problème statique et dynamique. [64]

L'objectif de toutes ces méthodes numériques est de fournir des algorithmes de calcul appropriés pour obtenir des solutions numériques approximatives aux problèmes difficiles de la physique mathématique. Les techniques numériques ont introduit les méthodes dites discrètes. C'est-à-dire que le continuum de la plaque ou ses limites sont discrétisés mathématiquement ou physiquement.

Les méthodes numériques suivantes pour la solution de divers problèmes de plaques, souvent très difficiles : (a) les méthodes de différence finies (MDF), (b) la méthode de travail au gridwork (GWM), (c) la méthode des éléments finis (FEM), (d) la méthode des bandes finies (FSM). [1]

Le domaine de la mécanique peut être subdivisé en trois grands domaines : théorique, appliquée et computationnelle. La mécanique théorique traite des lois et principes fondamentaux de la mécanique étudiés pour leur valeur scientifique intrinsèque. La mécanique appliquée transfère ces connaissances théoriques à des applications scientifiques et techniques, notamment par la construction de modèles mathématiques de phénomènes physiques.

La mécanique computationnelle résout des problèmes spécifiques par simulation au moyen de méthodes numériques mises en œuvre sur des ordinateurs numériques. L'un des progrès les plus importants en mathématiques appliquées au 20e siècle a été le développement de la méthode

des éléments finis comme un outil mathématique général pour obtenir des solutions approximatives aux problèmes de valeur limite.

La théorie des éléments finis s'appuie sur presque toutes les branches des mathématiques et peut être considérée comme l'un des plus riches et les plus diversifiés des connaissances mathématiques actuelles. [65]

Comme son précurseur, la méthode de déplacement matriciel, le FEM est également extrêmement bien adapté aux applications informatiques. C'est-à-dire, en raison de la structure matricielle de sa formulation, la plupart des sous-programmes d'un programme d'éléments finis sont basés sur des manipulations matricielles.

Il existe également de nombreux systèmes de programmes d'éléments finis disponibles dans le commerce qui peuvent traiter divers problèmes de plaques. Ces systèmes de programmes largement utilisés comprennent MSC/NASTRAN [66], ANSYS [67], COSMOS/M [68], MARC [69], GT-STRUDL [70] et SAP2000 [71], SolidWorks [72], pour n'en nommer que quelques-uns. Étant donné qu'ils sont trop généraux, ces très grands systèmes de programmes sont relativement lourds à utiliser pour la solution d'un problème de plaque spécifique. [1]

II.2 Définition :

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique pour obtenir des solutions approximatives aux problèmes en idéalisant le continuum modéliser comme un nombre fini de régions discrètes appelées éléments. Celles-ci les éléments sont connectés en des points appelés nœuds où normalement les variables dépendantes telles que les déplacements et les programmations déterminé. Des calculs numériques pour chaque élément individuel génèrent matrices d'éléments qui sont ensuite assemblées pour former des matrices système pour représentent tout le problème. [73]

II.2.1 Historique de l'analyse des éléments finis FEM :

L'analyse des éléments finis a été développée pour la première fois en 1943 par R. Courant, qui a utilisé la méthode Ritz d'analyse numérique et de minimisation du calcul variationnel pour obtenir des solutions approximatives aux systèmes de vibrations. Peu après, un article publié en 1956 par M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin et L. J. Topp établit une définition plus large de l'analyse numérique. Le document portait sur la « rigidité et la déformation de structures complexes ». Au début des années 1970, l'analyse des éléments finis était limitée aux ordinateurs centraux coûteux appartenant généralement à l'aéronautique, à l'automobile, à la défense et les industries nucléaires. Depuis la baisse rapide du coût des

ordinateurs et l'augmentation phénoménale de la puissance de calcul, il a été développé avec une précision incroyable. Les superordinateurs actuels sont maintenant capables de produire des résultats précis pour toutes sortes de paramètres. [74]

II .2.2 La méthode d'analyse des éléments finis nécessite les étapes principales :

- Discrétisation du domaine en un nombre fini de sous-domaines (éléments).
- Sélection des fonctions d'interpolation.
- Développement de la matrice des éléments pour le sous-domaine (élément).
- Assemblage des matrices d'éléments pour chaque sous-domaine pour obtenir la matrice globale pour l'ensemble du domaine.
- Solution d'équations.
- Calculs supplémentaires (si désiré). [75]

II.2.3 types de formulation d'élément Méthodes :

Il existe trois approches principales pour construire une solution approximative basée sur le concept de l'analyse des éléments finis :

II.2.3.1 Approche directe : Cette approche est utilisée pour des problèmes relativement simples, et elle sert généralement comme un moyen d'expliquer le concept de l'analyse des éléments finis et ses étapes importantes. [75]

Il existe deux approches générales associées à la méthode des éléments finis pour résoudre les équations gouvernantes : la méthode de la force (ou de la flexibilité) et la méthode du déplacement (ou de la rigidité). La méthode de force utilise les forces internes comme l'inconnu du problème, alors que les déplacements sont la variable du système dans la méthode de déplacement. La méthode de déplacement est plus souhaitable parce que sa formulation est plus simple pour la plupart des problèmes d'analyse structurelle. En outre, la grande majorité des programmes d'éléments finis à usage général ont incorporé la formulation de déplacement pour résoudre les problèmes structurels. [65]

II.2.3.2 Résidus pondérés : Il s'agit d'une méthode polyvalente, permettant l'application de l'analyse des éléments finis à des problèmes dont les fonctionnalités ne peuvent pas être construites. Cette approche utilise directement les équations différentielles gouvernantes, telles que celles du transfert de chaleur et de la mécanique des fluides.

II.2.3.3 Approche variationnelle : Cette approche repose sur le calcul des variations, qui implique d'extérioriser une fonction. Cette fonction correspond à l'énergie potentielle en mécanique structurale. [75]

II.2.4. applications de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis peut être utilisée pour analyser les problèmes structurels et non structurels.

II.2.4.1 Les zones structurales typiques comprennent :

1. L'analyse des contraintes, y compris l'analyse des fermes et des cadres (comme les passerelles piétonnières, les cadres des immeubles de grande hauteur et les tours d'éoliennes), et les problèmes de concentration des contraintes, généralement associés aux trous, les filets ou d'autres changements de la géométrie d'un corps (comme les pièces d'automobile, les appareils sous pression, les appareils médicaux, les aéronefs et l'équipement de sport).
2. Flambage, comme dans les colonnes, les cadres et les récipients.
3. Analyse des vibrations, comme dans l'équipement vibratoire.
4. Problèmes d'impact, y compris l'analyse des collisions de véhicules, des impacts de projectiles et des corps qui tombent et qui touchent des objets.

II.2.4.2 Les problèmes non structurels comprennent :

1. Le transfert de chaleur, comme dans les dispositifs électroniques émettant de la chaleur, comme dans une puce de microprocesseur d'ordinateur personnel, les moteurs et les ailettes de refroidissement dans les radiateurs.
2. Le débit de fluide, y compris l'infiltration par des milieux poreux (comme l'eau qui s'infiltré dans les barrages en terre), étangs de refroidissement et systèmes de ventilation d'air utilisés dans les arénas sportifs, etc., circulation d'air autour des voitures de course, des bateaux de plaisance et des planches de surf, etc.
3. Distribution du potentiel électrique ou magnétique, comme dans les antennes et les transistors. [76]

II.2.5 Avantages et Désavantages :

II.2.5.1 Avantages :

- Modéliser des corps de forme irrégulière assez facilement.
- Gérer les conditions de charge générales sans difficulté.
- Modéliser des corps composés de plusieurs matériaux différents parce que les équations d'éléments sont évaluées individuellement.
- Gérer un nombre illimité et des types de conditions limites.
- Varier la taille des éléments pour permettre l'utilisation de petits éléments si nécessaire.
- Modifier le modèle du technicien de maintenance relativement facilement et à moindre coût.
- Des mesures correctives peuvent être prises avant la construction de tout matériel (en outre, le nombre de prototypes peut être réduit).
- Physiquement significatifs pour les ingénieurs et ressemblent à la structure réelle.

II.2.5.2 Désavantages :

- Expérience et jugement requis.
- Nécessite de bonnes installations informatiques. [65]

II.2.6 Définition de la matrice de rigidité :

Dans la formulation des matrices de rigidité des éléments, les fonctions de forme sont choisies pour définir de manière unique l'état des déplacements au sein de chaque élément en termes de déplacements nodaux. Ceci est fait en sélectionnant les fonctions de forme pour spécifier le modèle dans lequel les éléments doivent se déformer. En utilisant ces fonctions de forme, les matrices de rigidité des éléments sont dérivées en appliquant soit le principe de l'énergie potentielle minimale, soit celui du travail virtuel. [1]

La connaissance de la matrice de rigidité est essentielle pour comprendre la méthode de rigidité. Nous définissons la matrice de rigidité comme suit : Pour un élément, une matrice de rigidité $[k]$ est une matrice telle que :

$$\{f\} = [k] \{d\} \quad (2.1)$$

Où $[k]$ relie les déplacements nodaux $\{d\}$ aux forces nodales $\{f\}$ d'un seul élément, Pour un milieu ou une structure continue comprenant une série d'éléments, la matrice de rigidité de $[K]$ relie les déplacements nodaux globaux $(x, y, z) \{d\}$ aux forces globales $\{F\}$ de l'ensemble du milieu ou de la structure. Tel que

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (2.2)$$

Où $[K]$ représente la matrice de rigidité [76]

II.2.6.1 Dérivation des équations des éléments du ressort à l'aide de la méthode directe :

Étape 1 : Sélectionnez le type d'élément.

Étape 2 : Sélectionnez une fonction de déplacement.

Étape 3 : Définissez les relations contrainte/déplacement et contrainte/déformation.

Étape 4 : Dérivez la matrice de rigidité des éléments et les équations.

Étape 5 : Assembler les équations d'éléments pour obtenir les équations globales et introduire les conditions de frontière.

Étape 6 : Résoudre les déplacements nodaux.

Étape 7 : Résoudre les forces d'éléments. [65]

II.2.7 L'analyse pratique d'une plaque :

À l'aide de la méthode des éléments finis consiste en un processus en six étapes :

1. discrétisation du continuum.
2. formulation de la matrice de rigidité des éléments.
3. assemblage des éléments individuels en une structure de plaque.
4. imposition des conditions limites prescrites.
5. solution des équations de déplacement de matrice résultantes.
6. évaluation des résultats. [1]

II.3 Élément rectangulaire :

Considérez l'élément de plaque rectangulaire illustré à la figure II.1. L'élément a quatre nœuds et 12 DOF au total. Une fonction d'essai pour l'inconnu $w(x, y)$ contiendra 12 paramètres :

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 \\
 &\quad + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} yx^3 + \alpha_{12} xy^3 \\
 \frac{\partial w}{\partial x} &= \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 yx + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} y^2 x
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

On peut voir que $w(x, y)$ et ses dérivés sont définis par des polynômes cubiques. Comme un cube est défini de manière unique par quatre constantes, les deux valeurs finales des déplacements et des pentes définiront donc les déplacements de manière unique le long de n'importe quelle frontière.

Cependant, ce n'est pas le cas pour les dérivés, puisque seulement deux valeurs finales des pentes existent, la cubique n'est pas spécifiée uniquement. Et en général, une discontinuité de la pente normale se produira. La fonction est donc appelée « non-conforme ». [77]

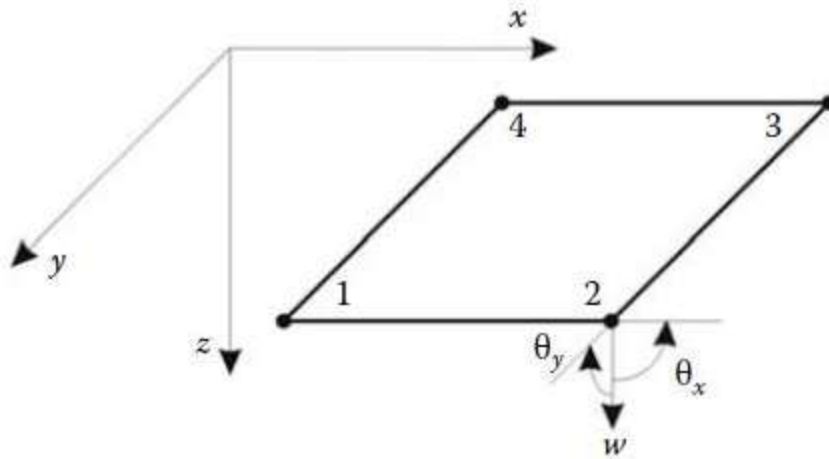


Figure II.1 élément de flexion pour plaque rectangulaire à quatre nœuds

II.3.1 Formulation l'analyse des éléments finis pour élément rectangulaire à 4 nœuds :

Un nœud rectangulaire à quatre nœuds se trouve à chaque angle, comme le montre la figure II.2, Il y a trois degrés de liberté à chaque nœud, le composant de déplacement le long de l'épaisseur (w), et deux rotations le long des directions X et Y en termes de (η, ε) coordonnées :

$$x = \varepsilon a, y = b\eta \quad (2.4)$$

$$w; \theta_x = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta}; \quad \theta_y = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \quad (2.5)$$

Par conséquent, l'élément a douze degrés de liberté et la fonction de déplacement de l'élément peut être représentée par un polynôme ayant douze termes comme indiqué dans (2.6) :

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \varepsilon^2 + \alpha_5 \varepsilon \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \varepsilon^3 + \alpha_8 \varepsilon^2 \eta + \alpha_9 \varepsilon \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \varepsilon^3 \eta + \alpha_{12} \varepsilon \eta^2 \quad (2.6)$$

Cette fonction est un cube complet auquel ont été ajoutés deux termes quadratiques $\eta^3\varepsilon$ et $\varepsilon^3\eta$ qui sont placés symétriquement dans le triangle de Pascal. Cela permettra de s'assurer que l'élément est invariant géométriquement :

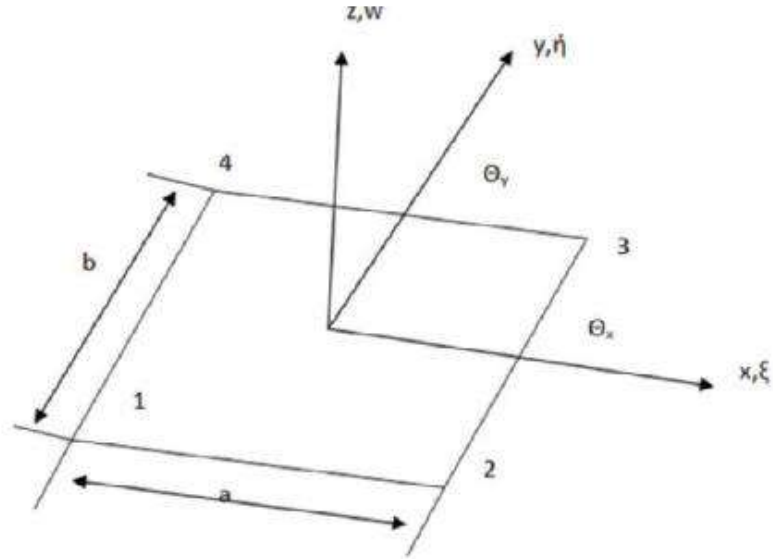


Figure II.2 : Géométrie de l'élément rectangulaire

$$w = [P(\varepsilon, \eta)]\{\alpha\} \quad (2.7)$$

$$\{\bar{W}_e\}^T = [A]_e\{\alpha\} \quad (2.8)$$

$$\{\alpha\} = [A]_e^{-1}\{\bar{W}_e\} \quad (2.9)$$

$$\{W_e\}^T = [N_1(\varepsilon, \eta)N_2(\varepsilon, \eta)N_3(\varepsilon, \eta)N_4(\varepsilon, \eta)]\{w_e\} \quad (2.10)$$

$$\{\bar{W}_e\}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \cdots w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}] = [N(\varepsilon, \eta)]\{w_e\} \quad (2.11)$$

$$N_j^T(\varepsilon, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1 + \varepsilon_j\varepsilon)(1 + \eta_j\eta)(2 + \varepsilon_j\varepsilon + \eta_j\eta - \varepsilon^2 - \eta^2) \\ \frac{b}{8}(1 + \varepsilon_j\varepsilon)(\eta + \eta_j)(\eta^2 - 1) \\ \frac{a}{8}(\varepsilon_j + \varepsilon)(1 + \eta_j\eta)(\varepsilon^2 - 1) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En dérivant ce résultat, il est plus simple d'utiliser l'expression Eq. (2.12) pour w et remplacez $\{a\}$ après avoir effectué l'intégration. Une intégrale typique est alors la matrice de rigidité des éléments, et

$$[k]_e = \int \frac{h^3}{12} [B]^T [D] [B] dA \quad (2.13)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [N], [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \\ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \partial \eta} \end{bmatrix} [N(\varepsilon, \eta)] \quad (2.14)$$

- Substituer les fonctions $N(\eta, \varepsilon)$ de (II.12) et l'intégration donne, pour le cas isotrope

$$[k]_e = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)ab} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

- La matrice de masse des éléments est dérivée comme

$$[m]_e = \rho h \int [N]^T [N] dA \quad (2.16)$$

Les matrices de rigidité et de masse des éléments sont assemblées pour obtenir des matrices globales. L'équation du mouvement de la plaque peut être écrite comme. [64]

$$[K]_g - \omega_{mn}^2 [M]_g = 0 \quad (2.17)$$

II.3.2 Nœuds :

Comme le montre la figure II.3, la transformation du problème d'ingénierie pratique en une représentation mathématique est réalisée en discrétisant le domaine d'intérêt en éléments (sous-domaines). Ces éléments sont reliés les uns aux autres par leurs nœuds "communs". Un nœud spécifie l'emplacement des coordonnées dans l'espace où les degrés de liberté et les actions du problème physique existent. Le nodal inconnu(s) dans le système matriciel d'équations représente une (ou plusieurs) des variables primaires de champ. Les variables nodales attribuées à un élément sont appelées les degrés de liberté de l'élément.

Les nœuds communs illustrés à la figure II.3 assurent la continuité des variables nodales (degrés de liberté). Les degrés de liberté (DOF) d'un nœud sont dictés par la nature physique du problème et le type d'élément. [75]

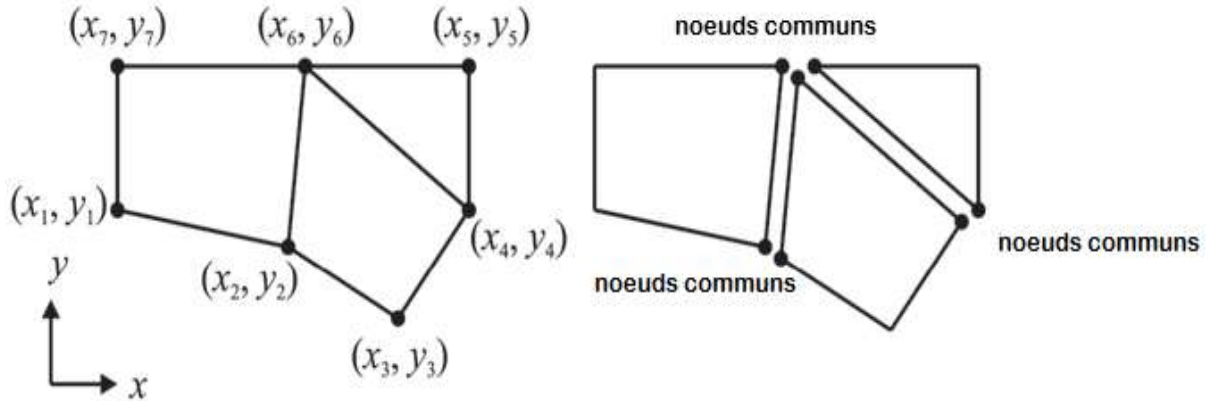


Figure II.3 Division d'un domaine en sous-domaines (éléments)

II.3.3 Éléments :

Selon la géométrie et la nature physique du problème, le domaine d'intérêt peut être discrétisé en utilisant des éléments de ligne, de zone ou de volume. Certains des éléments communs de la méthode élément de finie sont illustrés à la figure II.4. Chaque élément, identifié par un numéro d'élément, est défini par une séquence spécifique de numéros de nœuds globaux. La séquence spécifique (généralement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) est basée sur la numérotation des nœuds au niveau des éléments. [75]

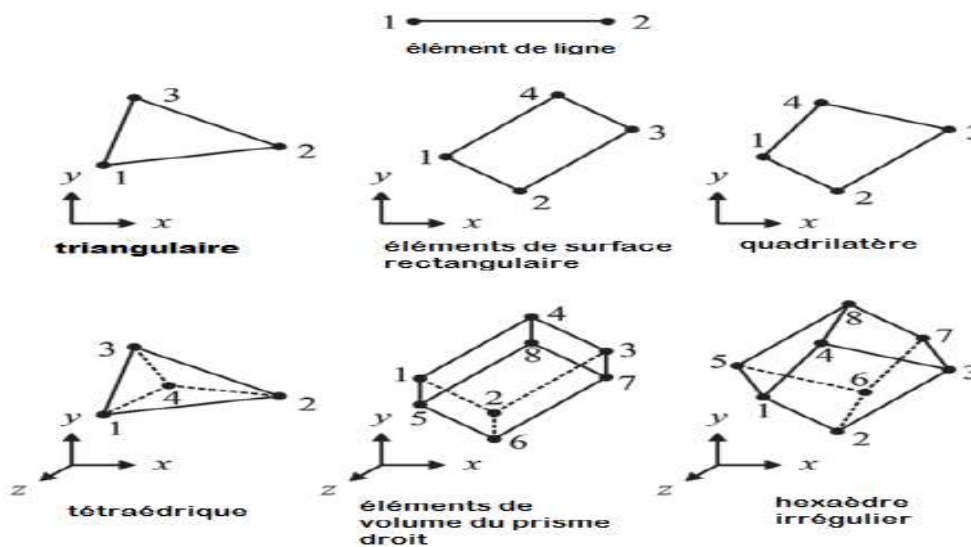


Figure II.4 Description des éléments de ligne, de zone et de volume avec des numéros de noeud au niveau des éléments

II.3.4 Génération de maillages d'éléments Finis :

Un maillage d'éléments finis est une partition d'un domaine donné en sous-domaines, qui sont appelés éléments, de sorte que chaque point du domaine se trouve dans l'un des éléments. Le domaine entier doit être couvert par les éléments sans chevauchement, et les conditions de compatibilité entre les éléments finis sur la frontière doivent être satisfaites ainsi. Les domaines bidimensionnels peuvent être discrétisés en éléments triangulaires, quadrilatères ou en un mélange d'éléments triangulaires et quadrilatères.

Sur des domaines tridimensionnels, des éléments tétraédriques et hexaédriques peuvent être utilisés; cependant, dans certaines situations, des cales ou des éléments pentaédriques et des éléments pyramidaux pourraient également être utilisés. Comme la topologie des surfaces courbes ressemblent localement à celle d'un domaine planaire, semblable à un problème bidimensionnel, des éléments triangulaires et quadrilatères peuvent être générés sur les surfaces. Pour réduire l'erreur de discrétisation (numérique) dans une analyse d'éléments finis, la qualité des mailles d'éléments finis doit être optimisée de manière à ce que la taille de l'élément soit conforme à l'espacement nodal spécifié et que la forme des éléments soit aussi équilatérale que possible.

Pour les maillages conformes, les nœuds limites du maillage d'éléments finis doivent se trouver sur la surface limite du domaine donné, et pour les maillages contraints, en dehors des exigences géométriques d'un maillage conforme, des exigences topologiques supplémentaires telles que les bords et les faces spécifiés doivent également être présentes dans le maillage. En outre, un curviligne d'ordre supérieur peut également être utilisé pour adapter les domaines avec des limites incurvées pour réduire l'erreur de discrétisation. [78]

La figure II.5 montre l'erreur de concentration des contraintes pour différents nombres d'éléments utilisant des éléments quadratiques linéaires. Le domaine est maillé avec trois mailles différentes, A, B et C. Le nombre d'éléments du maillage C est plus élevé que celui du maillage B, et le nombre d'éléments du maillage B est plus élevé que celui du maillage A. La figure indique qu'à mesure que le nombre d'éléments augmente, l'erreur relative est diminuée pour approcher une valeur fixe. L'ajout d'éléments supplémentaires au maillage C réduira de façon insignifiante l'erreur.

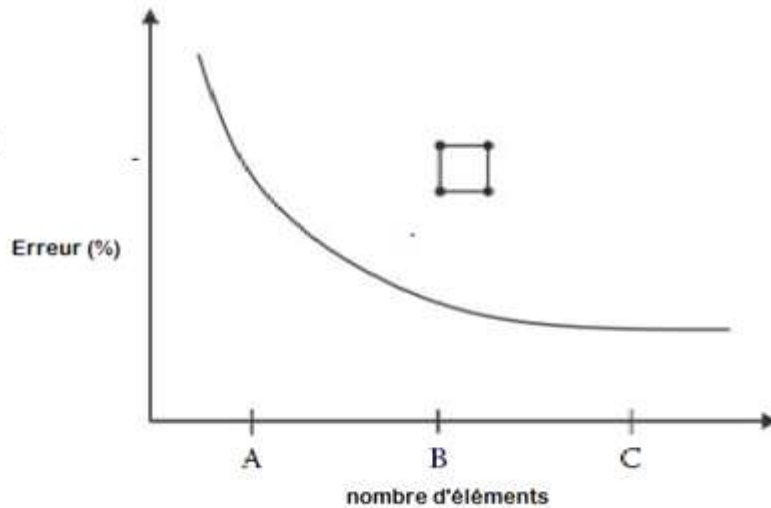


Figure II.5 Erreur de concentration des contraintes pour différentes tailles de mailles utilisant des éléments quadratiques linéaires.

Lorsque le nombre d'éléments n'a aucun effet sur la solution, la solution est appelée une solution indépendante du maillage. D'autre part, augmenter l'ordre des éléments réduit l'erreur pour la même taille de maillage. La figure II.6 indique que le remplacement des éléments quadratiques linéaires par des éléments cubiques réduit le pourcentage d'erreur d'environ 10 %.

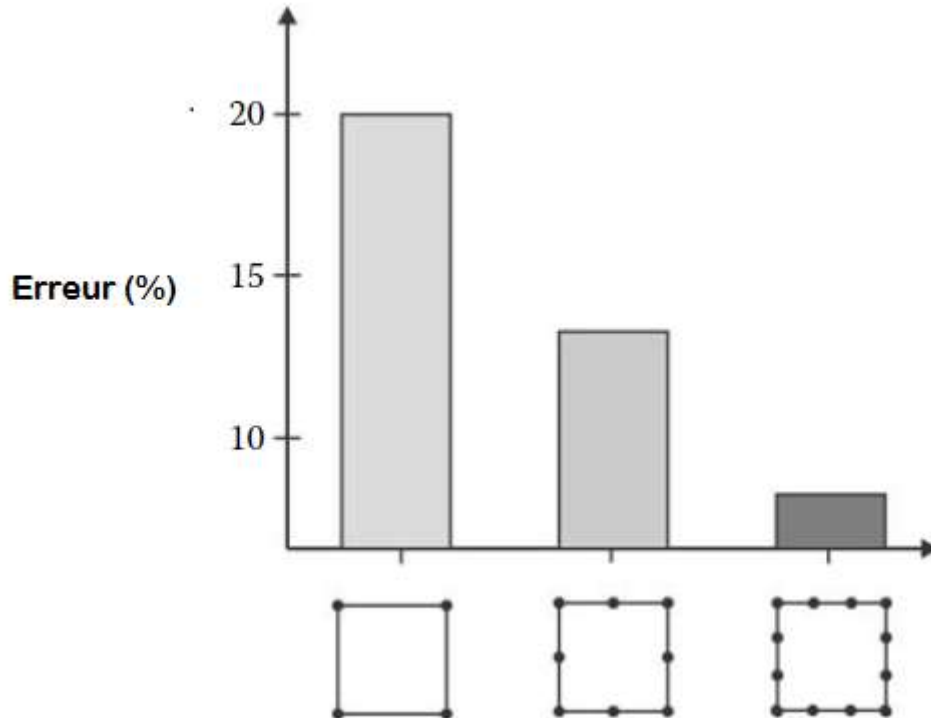


Figure II.6 Pourcentage d'erreur avec différents ordres d'éléments

Les éléments d'ordre supérieur mènent à des résultats plus précis que les éléments d'ordre inférieur. Cependant, le temps nécessaire pour compléter la solution est important, surtout pour les mailles très grandes. En plus du temps, les éléments d'ordre supérieur ont besoin d'une grande quantité de mémoire qui ne pourrait pas avoir accès.

La figure II.7 indique qu'en dépit d'un faible taux de convergence des mailles des éléments quadratiques linéaires, le temps nécessaire pour résoudre le problème est presque indépendant du nombre d'éléments dans le maillage. De plus, l'augmentation de l'ordre des éléments augmente considérablement le temps nécessaire pour résoudre le problème. [79]

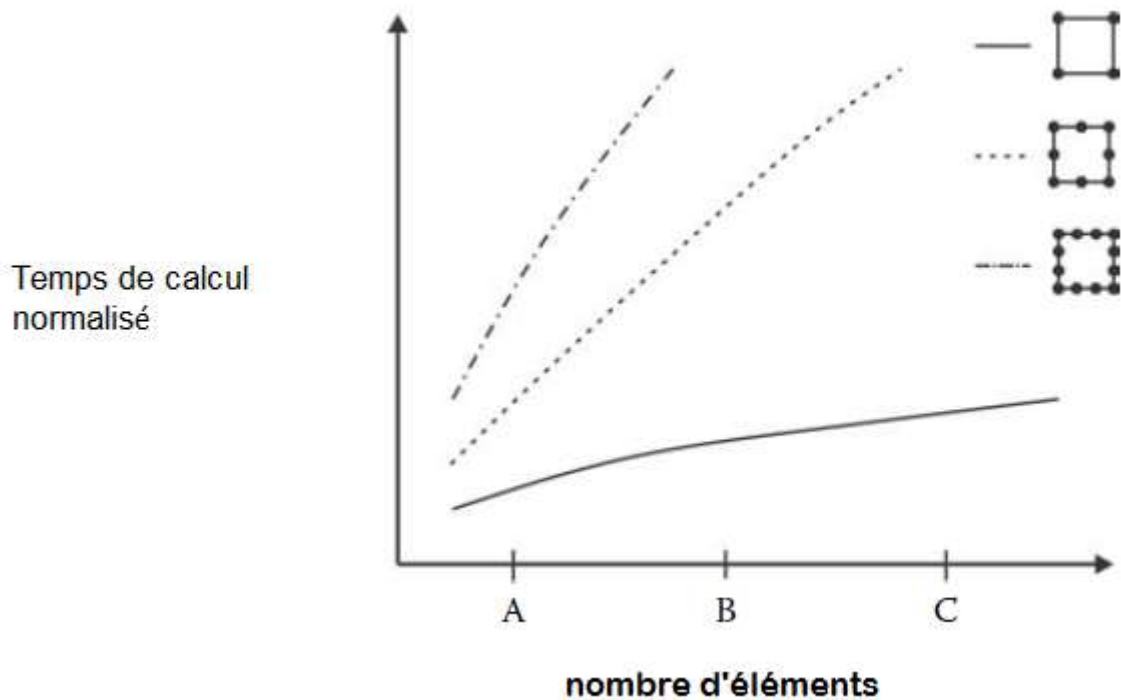


Figure II.7 Temps de calcul normalisé pour différents éléments quadrilatères

II.3.5 Maillage d'éléments :

Les éléments sont les composants de base d'un maillage. Un élément est défini par sa nature géométrique (triangle, quadrilatère, etc.), y compris la définition de ses bords et de ses faces (en trois dimensions).

Un maillage est généralement composé de triangles (tétraèdre) mais peut aussi être un ensemble de quadrilatères (hexaèdre) ou, plus généralement, une combinaison d'éléments de nature géométrique différente.

Jusqu'à présent, nous avons considéré les maillages comme des entités géométriques. Les maillages d'éléments finis puisque nous intéressons principalement au calcul d'éléments finis car le maillage a une grande importance pour cette application. , les éléments finis seront construits en fonction de l'élément maillé.

A cette fin, il sera nécessaire de bien définir les nœuds, les degrés de liberté, les schémas d'interpolation, etc. afin de définir les structures requises (matrice de rigidité, côté droit, etc.) afin de calculer la solution au problème présent. [80]

Différents éléments de maillage sont utilisés sur Ansys. Ensuite, des éléments de maillage hexaèdres ont été générés après avoir tranché la géométrie et la condition simplement supportée a été appliquée comme le montre la figure II.8. Où il y a une relation. Le nombre d'éléments de maillage variait selon la taille des éléments.

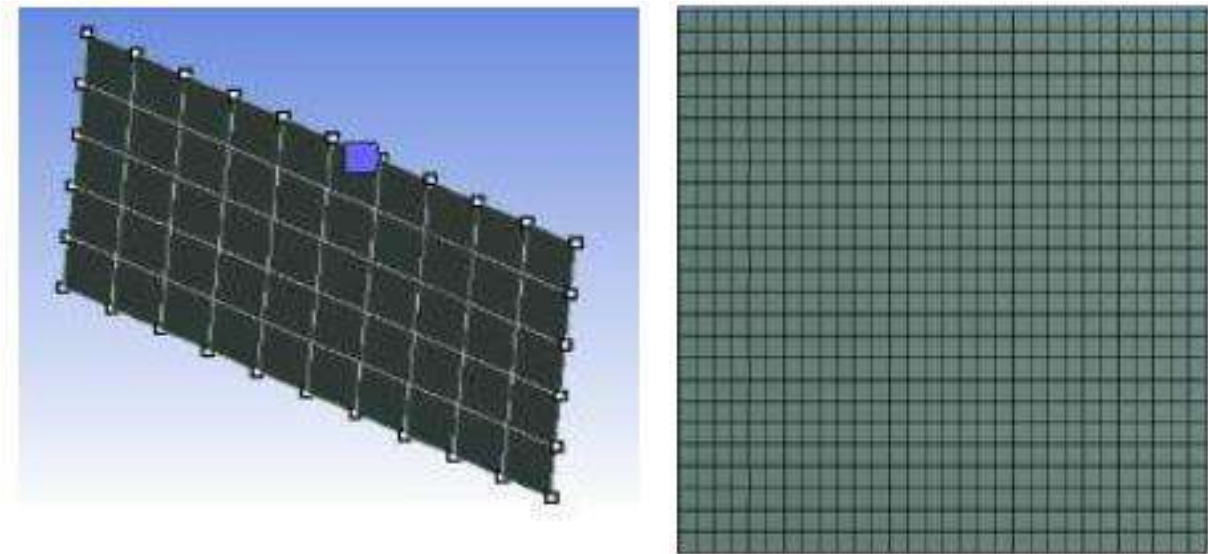


Figure II.8:Maillage de la géométrie (éléments hexaèdres) Pour une plaque avec une condition appui simple

II.4 ANSYS :

II.4.1 Introduction au logiciel ANSYS

Le logiciel ANSYS est le progiciel le plus avancé pour les simulations monophysiques et multiphysiques, offrant des outils et des capacités améliorés qui permettent aux ingénieurs d'accomplir leurs tâches de manière efficace. ANSYS comprend des capacités importantes, des fonctionnalités en expansion et une intégration avec presque tous les logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO), tels que les pro-ingénieurs, AutoCAD et Solid Edge. En outre, ANSYS dispose des meilleures technologies de solveur de sa catégorie, d'une physique couplée pour des simulations complexes, de technologies de maillage personnalisables pour la physique et de la dynamique computationnelle des fluides. ANSYS peut résoudre des problèmes structurels, thermiques, fluides, acoustiques et multiphysiques.[79]

II.4.2 Le développement d'ANSYS :

Alors que la NASA se concentrait sur l'exploration lunaire, Westinghouse Electric Corporation développait des réacteurs nucléaires pour la propulsion spatiale et la production d'énergie non conventionnelle. Comme leurs homologues de l'aérospatiale, les ingénieurs mécaniques et nucléaires de Westinghouse devaient prévoir les contraintes transitoires et les déplacements dans les systèmes de réacteurs en raison des charges thermiques et de la pression. M. John Swanson, qui travaillait alors aux Westinghouse Astronuclear Labs de Pittsburgh, croyait qu'un programme intégré d'éléments finis à usage général permettrait d'économiser du temps et de l'argent en faisant ce genre de calculs. Il a commencé à développer un tel programme, appelé STASYS, pour Westinghouse en 1969

En 1970, John Swanson quitte Westinghouse et fonde Swanson Analysis Systems, Inc. (SASI) où il continue de développer un programme commercial d'éléments finis qu'il appelle ANSYS. La version originale de l'ANSYS contenait 40 éléments de différents types (ressorts, amortisseurs, poutres, briques, etc.) dont plusieurs éléments avec des degrés thermiques de liberté. Westinghouse est devenu le premier client d'ANSYS à la fin de l'année. Le programme a été rapidement adopté par d'autres entreprises et est devenu le programme par défaut des éléments finis pour une grande partie de l'industrie de l'électricité. Aujourd'hui, les produits ANSYS sont utilisés dans tous les grands domaines de l'ingénierie, y compris l'aérospatiale, l'automobile, le traitement chimique, la construction, les biens de consommation, l'électronique, l'énergie, les soins de santé, les industries extracôtières, marines et des matériaux. [81]

II.4.3 Licence ANSYS :

Comme indiqué ci-dessus, l'accès aux produits ANSYS, Inc. est basé sur les licences de produits. Vous pouvez télécharger et installer tous les logiciels qu'ANSYS, Inc. offre à partir du portail client ANSYS. Cependant, vous ne pouvez pas exécuter les produits ANSYS, Inc. sans licence valide. Chaque licence ANSYS spécifie quels produits ou capacités ANSYS, Inc. peuvent être utilisées, le nombre maximum d'éléments pouvant être inclus dans un modèle, et combien de personnes peuvent utiliser le logiciel en même temps. Il peut également limiter la distance physique que vous pouvez être à partir du serveur de licence tout en utilisant le logiciel ou imposer d'autres restrictions. Le logiciel de la famille ANSYS Mechanical APDL est essentiellement le même pour tous les produits. Seules les licences sont différentes. [81]

II.4.4 Procédure de base pour l'analyse des éléments finis :

Il y a 10 étapes de base dans toute analyse des éléments finis. Tout d'abord, la géométrie du modèle solide est créée, le type d'élément (s) et les propriétés des matériaux sont définis, et la géométrie du modèle solide est maillée pour créer le modèle d'élément fini. Dans ANSYS, ces étapes sont effectuées dans le préprocesseur (PREP7). Ensuite, les charges et les contraintes sont appliquées, les options de solution sont définies et le problème est résolu. Ces étapes sont effectuées dans le processeur de solution (SOL). Une fois la solution prête, les résultats sont tracés, visualisés et exportés dans l'un des post processeurs (POST1 ou POST26).

Enfin, les résultats sont comparés à des estimations de premier ordre, à des solutions fermées, à des modèles mathématiques ou à des résultats expérimentaux pour s'assurer que les résultats du programme sont raisonnables et conformes aux attentes :

/PREP7

1. Définir la géométrie du modèle solide
2. Sélectionner les types d'éléments
3. Définir les propriétés du matériau
4. Maillage

/ SOLUTION

5. Définir les conditions limites
6. Définir les charges
7. Définir les options de solution
8. Résoudre

/POST1 ou /POST26

9. Tracer, afficher et exporter les résultats
10. Comparer et vérifier les résultats [81]

II.4.5 Maillage utilisant des éléments de surface :

Cette option est utilisée pour les modèles utilisant des éléments 2-D, et elle nécessite des zones existantes. Le chemin de menu suivant est utilisé pour mailler les zones :

Menu principal > Préprocesseur > Maillage > Maillage > Zones > Mappés > 3 ou 4 côtés

Menu principal > Préprocesseur > Maillage > Maillage > Zones > Maillage

Libre peut être réalisé soit par les méthodes de maillage mappé ou libre. Si un maillage libre est choisi, le deuxième chemin de menu est utilisé, ce qui fait apparaître un menu de sélection demandant à l'utilisateur d'entrer le ou les numéro(s) de zone dans le champ de texte ou de choisir la ou les zone(s) de la fenêtre graphique. Lorsque toutes les zones sont entrées (sélectionnées), appuyer sur OK dans le menu Sélection génère le maillage. L'option Maillage mappé est abordée dans une sous-section ultérieure [75]

II.4.6 Modélisation des plaques isotropes par ANSYS

Le programme ANSYS possède de nombreuses fonctionnalités d'analyse d'éléments finis, allant d'une analyse simple, linéaire, statique à une analyse dynamique complexe, non linéaire et transitoire. En ce qui suit les étapes typiques d'ANSYS :

1. Ansys Utility Menu :
 - Fichier - effacer et démarrer nouveau - ne pas lire le fichier – ok.
 - Fichier - modifier le nom du travail - entrer le nouveau nom du travail - xxxx ok.
 - Fichier - modifier le titre - entrer un nouveau titre - aaa – ok.
2. Ansys Main Menu – Preferences : sélectionnez - STRUCTURAL – ok.
3. Preprocessor :
 - Type d'élément de maillage : sélectionnez le type d'élément dans la table et les options requises.
 - Constantes réelles : donnez les détails tels que l'épaisseur, les zones, le moment d'inertie, ...etc. requis en fonction de la nature du problème.
 - Propriétés du matériau : donner les détails tels que le module de Young, le coefficient de Poisson, etc, selon la nature du problème.
4. Modeling : créez la géométrie requise, comme les éléments des noeuds, la zone, le volume par utilisation des options appropriées.

5. Generate : éléments / noeuds utilisant l'outil Maillage si nécessaire (en 2D et en 3D)
6. Apply : conditions aux limites et les charges telles que les degrés de liberté, force et moments, pression etc.
7. Analysis type : choisir le type d'analyse « MODAL » puis le nombre de mode à calculer.
8. Solve : résoudre le problème.
9. General Post Processor : tracer / énumérer les résultats requis.
10. Plot ctrls : animation des déformées. [82]

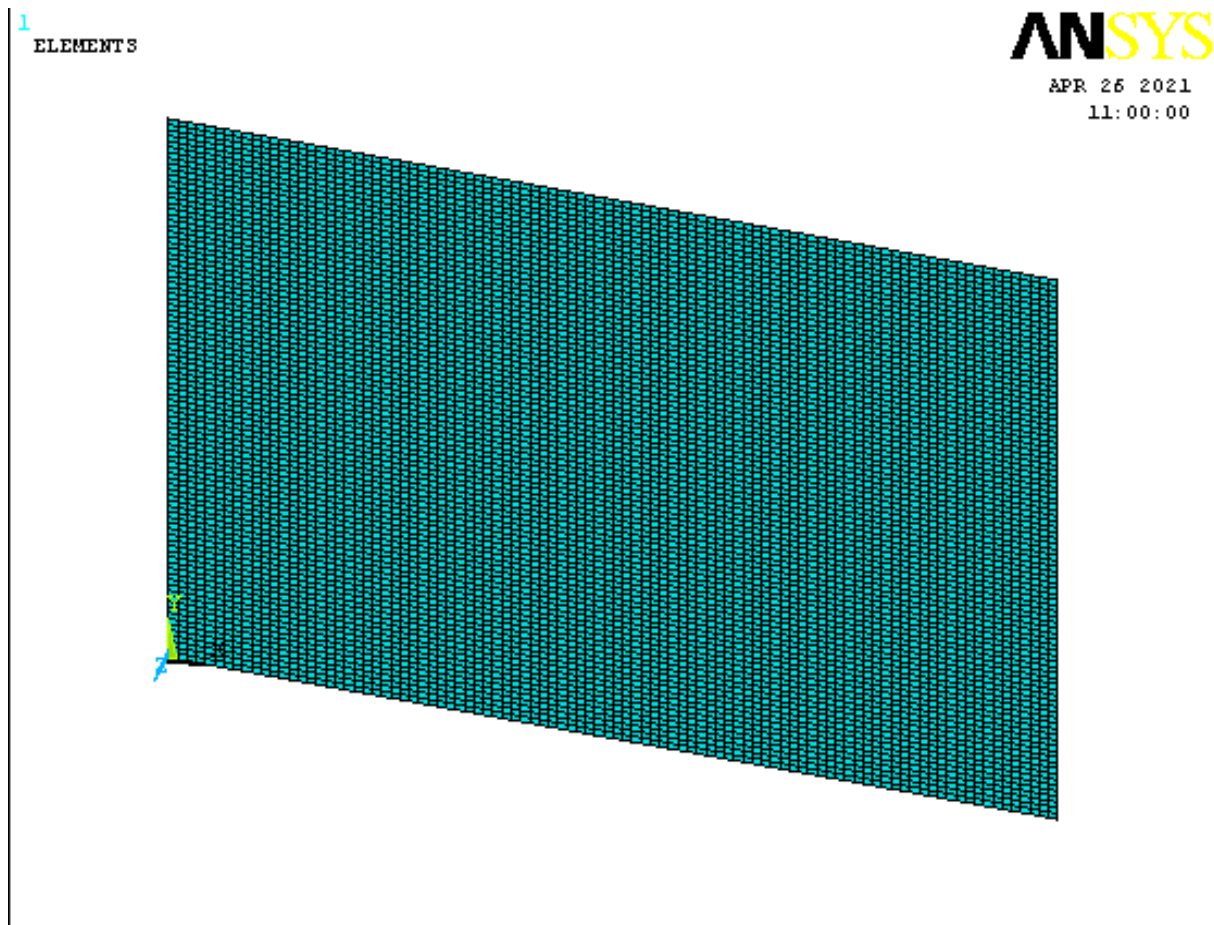


Figure II.9: Modèle de plaque à éléments finis par Ansys

II.4.7 Description de l'élément utilisé pour le maillage :

Pour faire les calculs par les éléments finis sous ANSYS 18.2 en choisissant l'élément de maillage SHELL 181 :

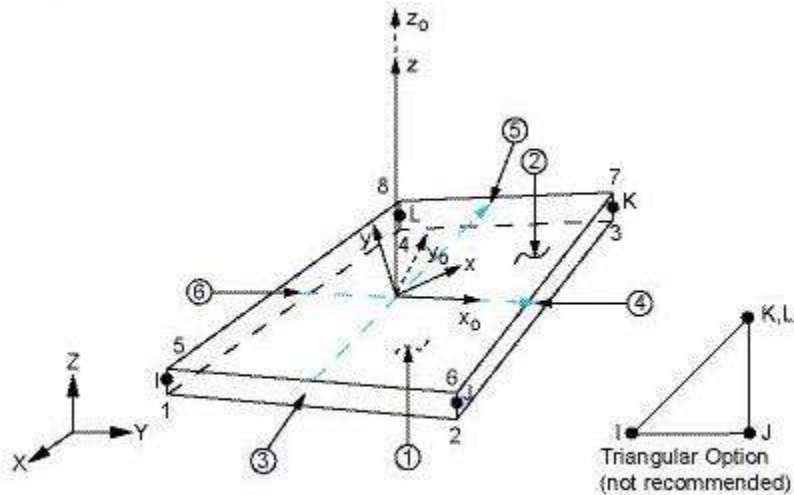


Figure II.10 L'élément de maillage SHELL181

SHELL181 : convient à l'analyse de structures de coquille minces à moyennement épaisses. Il s'agit d'un élément à quatre nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud, traductions dans les directions (U_x , V_y , W_z) et rotations autour des axes (q_x , q_y , q_z). L'option triangulaire dégénérée ne doit être utilisée que comme éléments de remplissage dans la génération de maillages. [83]

Dans ce travail, les différents éléments de maillages ont été utilisés sur plaque isotrope.

Chapitre III : Résultat et discussion

III.1 Introduction :

L'objectif de notre étude est l'identification des caractéristiques dynamiques (fréquences et modes propres,...) des plaques isotropes en vibration libre.

Lors de la recherche des fréquences et modes propres, les équations de mouvement sont résolues par simulation numérique (méthode des éléments finis). Le but est consisté de calculer à investir l'analyse des paramètres fréquentiels naturelles d'une plaque rectangulaire à phase isotrope avec différente fixité sur les deux bords. Les fréquences propres des plaques sont déterminées par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS Mechanical APDL, la solution du problème aux valeurs propres est obtenue d'après une déformée de fonction de forme qui vérifie les conditions aux limites de la plaque.

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de certains paramètres fondamentaux tels que les conditions aux limites, les dimensions de la plaque, l'épaisseur de la plaque et différents éléments de maillage et la nature de matériau.

III.2 Analyses vibratoires libres des plaques isotropes minces :

Cette recherche portera sur l'analyse des vibrations libres de la plaque isotrope et l'effet des propriétés. Nous avons travaillé sur des plaques en aluminium pour l'analyse.

Ces propriétés ont été largement exploitées dans l'aérospatiale, le transport ferroviaire architectural et les applications et elles sont également utilisées pour les ponts. Nous comptons sur les recherches antérieures pour obtenir des résultats et les comparer aux résultats antérieurs. Le chercheur Ramu et S.C. Mohanty [64] a été utilisé pour obtenir ses résultats dans un programme Matlab mais le chercheur Ganesh Naik Guguloth [84] utilise un logiciel Ansys Workbench.

La formulation d'analyse des éléments finis pour les éléments rectangulaires à quatre nœuds. Il y a trois degrés de liberté à chaque nœud, l'un est le long de l'épaisseur de la plaque et les deux autres sont des rotations le long des directions X et Y, utilisées différentes conditions aux limites (AAAA, EEEE).

La plaque rectangulaire solide est modélisée dans le logiciel Ansys 18.2 et Le nombre d'éléments pris est de 9216. En utilisant l'élément coque SHELL181 pour les plaques isotropes minces.

Les propriétés et les dimensions matériaux qui sont prises en compte pour l'analyse des plaques rectangulaires sont mentionnées par Ramu et al [64].

III.2.1 Formes des conditions aux limites :

Cas d'appuis homogène :

- Plaque simplement appuyée AAAA
- Plaque totalement encastrée EEEE

Les conditions aux limites utilisées pour la plaque simplement appuyée (AAAA) sont montrées dans la Figure III.1, et la plaque encastrée (EEEE) sont montrées dans la Figure III.2

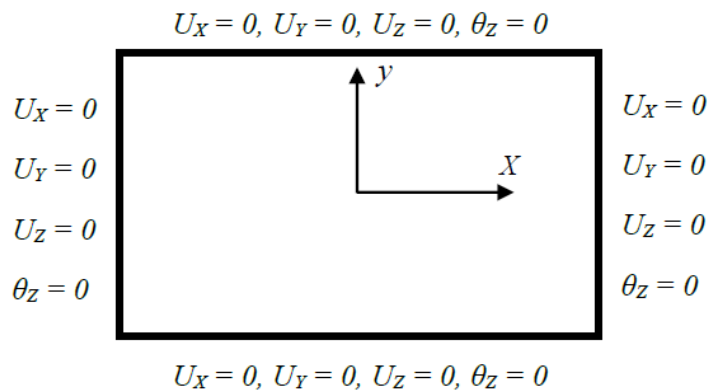


Figure III.1 Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (AAAA)

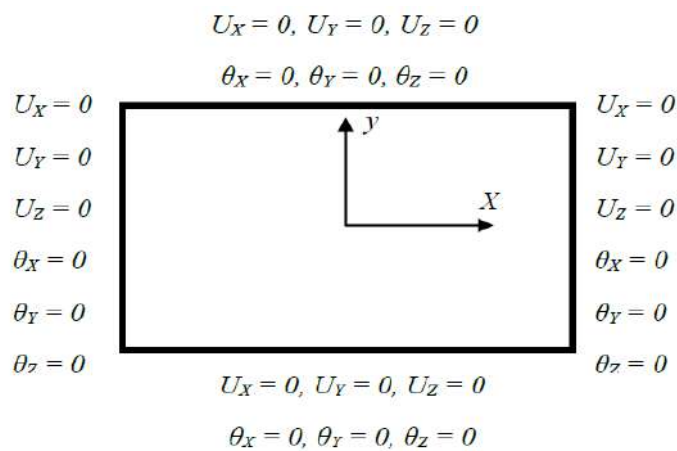


Figure III.2 Conditions aux limites, plaque encastrée (EEEE)

III.2.2 Matériau :

Les propriétés du matériau de la plaque rectangulaire sont les suivantes :

Considérons une plaque rectangulaire mince isotrope et homogène et de dimensions a, b et h et on suppose que ses cotés sont parallèles aux axes x et y.

Tableau III.1 Les propriétés du matériau et les dimensions de la plaque

Matériau	Aluminium			
Module de Young E	$E = 70 \text{ GPa}$			
Densité ρ	2700 kg/m ³			
Rapport de Poisons	$\nu = 0.3$			
Les dimensions de la plaque prises				
Longueur de la plaque a	$a = 600 \text{ mm}$			
Largeur de la plaque b	$b = 400 \text{ mm}$			
Épaisseur h	6.25mm	12.5 mm	25 mm	50 mm

III.2.3 Comparaison des résultats :

Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs :

Les résultats obtenus pour les dix modes en utilisant ANSYS 18 pour les plaques simplement appuyées (AAAA) avec les quater rapports de largeur-sur-épaisseur de la plaque (96, 48, 24,12) .et calcul l'erreur de pourcentage enter les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes.

Les fréquences exclusives obtenues par le FEM sont comparées avec leurs fréquences exactes en comparant l'erreur de pourcentage avec la relation :

$$\varepsilon = \frac{f_{\text{exacte}} - f_{\text{FEM}}}{f_{\text{exacte}}} \cdot 100[\%]$$

ε : Il représente l'écart ou l'erreur en pourcentage

f_{exacte} : La valeur de sa fréquence exacte

f_{FEM} : La valeur de la fréquence propre déterminée par méthode les éléments fini

Tableau III.2 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R=96:

Mode	f_{mn} (Hz)				Erreur ϵ %
	Résolution exacte [64]	Résultats par matlab [64]	Résultats Ansys Workbench [84]	Résultats par Ansys APDL 18.2	
1	136.5	135.8	136.92	136.56	-0,04395604
2	262.6	259.9	263.27	262.60	0
3	420.1	417.6	422.27	420.16	-0,01428231
4	472.7	466.8	474.53	472.68	0,00423101
5	546.2	535.9	547.86	546.17	0,00549249
6	756.35	733.7	758.07	756.17	0,02379851
7	766.85	757.1	--	766.80	0,00652018
8	892.9	888.3	--	892.78	0,01343935
9	1018.9	997.8	--	1018.7	0,01962901
10	1050.4	1012.1	--	1050.2	0,01904037

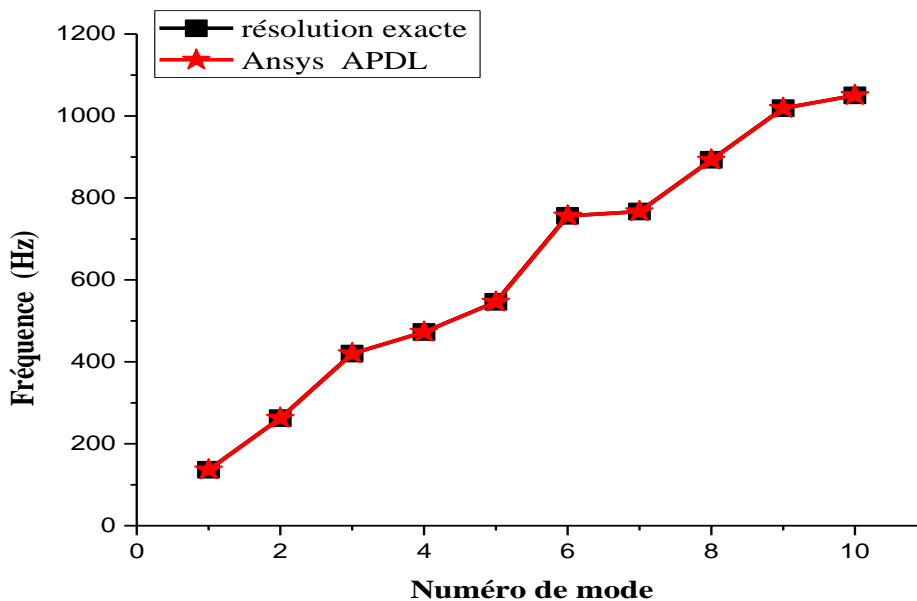


Figure III.3 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes R= 96

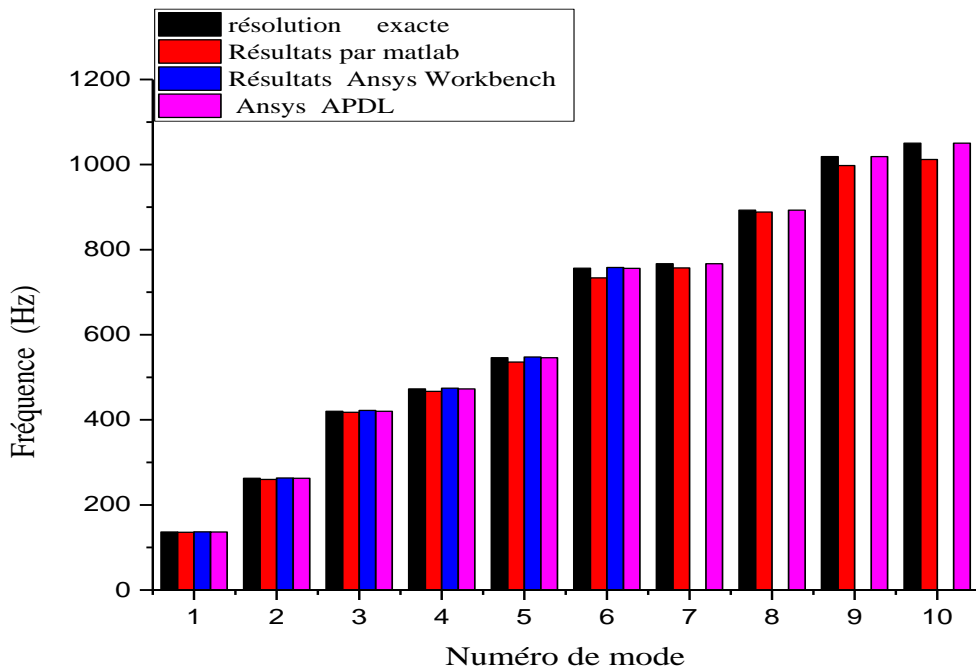


Figure III.4 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et Avec les résultats des chercheurs R= 96

Tableau III.3 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R= 48 :

Mode	$f_{mn}(\text{Hz})$				Erreur ϵ %
	Résolution exacte [64]	Résultats par matlab [64]	Résultats Ansys Workbench [84]	Résultats par Ansys APDL 18.2	
1	273.1	271.7	272.17	273,12	-0,00732332
2	525.2	519.8	522.27	525,2	0
3	840.3	835.2	833.59	840,32	-0,0023801
4	945.4	933.7	940.3	945,36	0,00423101
5	1092.5	1071.9	1083.3	1092,3	0,01830664
6	1512.7	1467.5	1493.7	1512,3	0,02644278
7	1533.7	1514.4	--	1533,6	0,00652018
8	1785.8	1776.6	--	1785,6	0,01119946
9	2037.9	2024.2	--	2037,5	0,01962805
10	2100.9	2263.4	--	2100,3	0,02855919

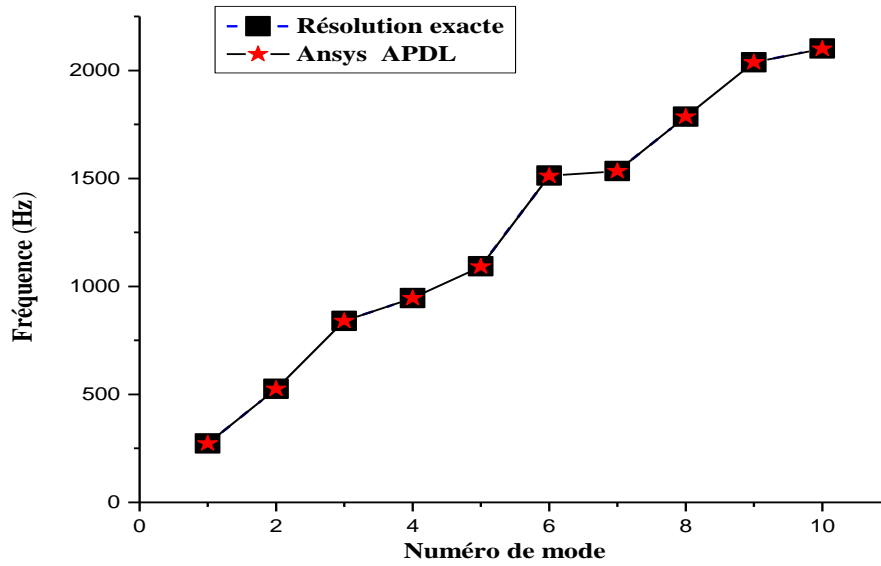


Figure III.5 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes
R= 48

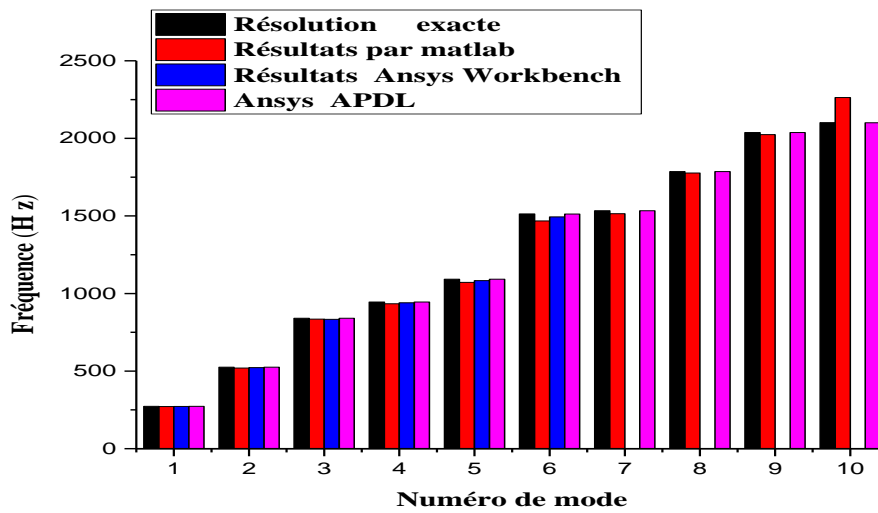


Figure III.6 Comparaison par entre les fréquences obtenues par ANSYS et Avec les résultats des chercheurs R= 48

Tableau III.4 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R= 24 :

Mode	f_{mn} (Hz)				Erreur ϵ %
	Résolution exacte [64]	Résultats par matlab [64]	Résultats Ansys Workbench [84]	Résultats par Ansys APDL 18.2	
1	546.2	543.5	535.26	546,24	-0,00732332
2	1050.4	1039.7	1019.8	1050,4	0
3	1680.7	1670.5	1634.9	1680,6	0,0059499
4	1890.8	1867.5	1823.1	1890,7	0,00528877
5	2185.0	2143.7	2088.3	2184,7	0,01372998
6	3025.4	2935.1	2847.7	3024,7	0,02313744
7	3067.4	3028.7	--	3067,2	0,00652018
8	3571.6	3553.3	--	3571,1	0,01399933
9	4075.9	4048.3	--	4075	0,02208101
10	4201.9	4526.9	--	4200,6	0,03093839

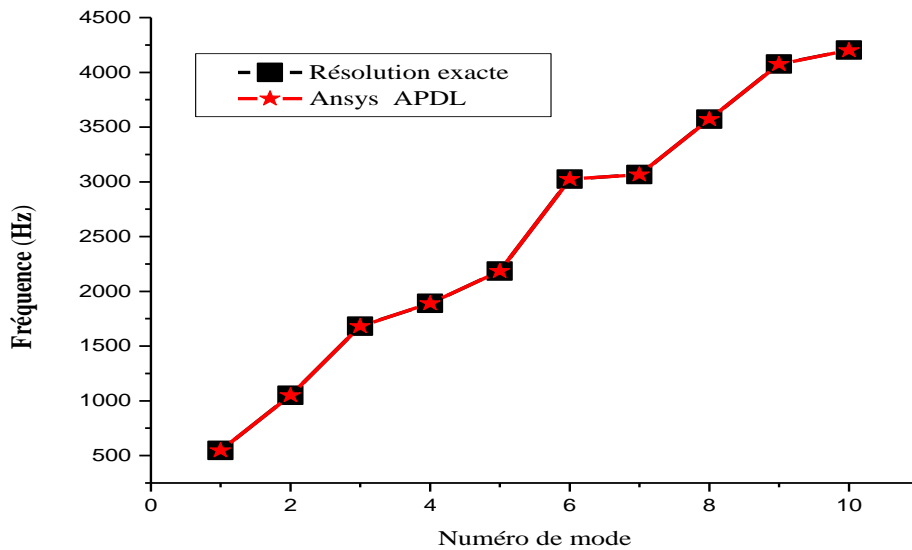


Figure III.7 Comparaison par courbe entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes R=24

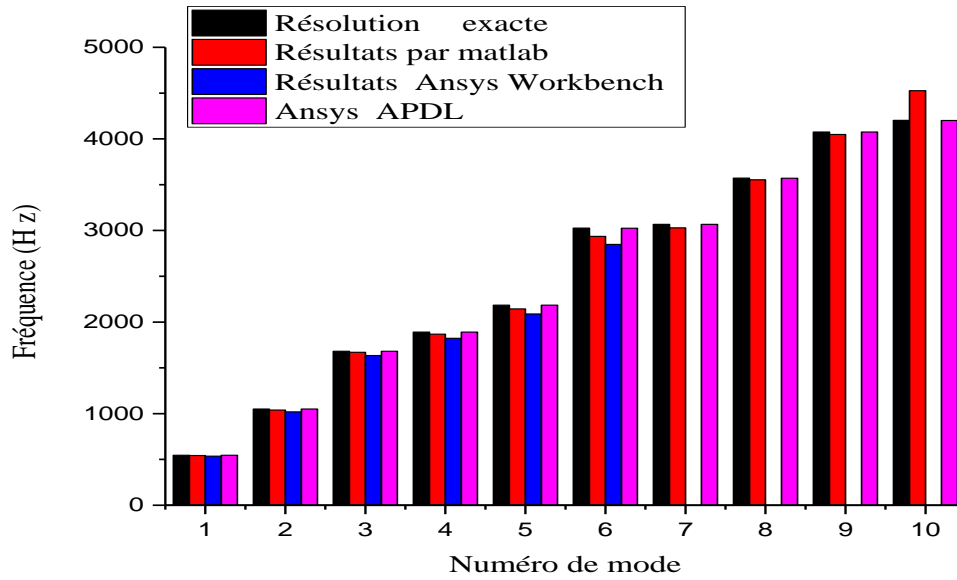


Figure III.8 Comparaison par colonne entre les fréquences obtenues par ANSYS et avec les résultats des chercheurs R=24

Tableau III.5 Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes et les résultats deux chercheurs pour R= 12:

Mode	$f_{mn}(\text{Hz})$				Erreur ϵ %
	Résolution exacte [64]	Résultats par matlab [64]	Résultats Ansys Workbench [84]	Résultats par Ansys APDL 18.2	
1	1092.5	1087	1024	1092,5	0
2	2100.9	2079.4	1906.8	2100,8	0,00475986
3	3361.5	3341	3008.8	3361,3	0,00594972
4	3781.7	3735	3100.6	3781,4	0,00793294
5	4370.1	4278.4	3316	4369,4	0,01601794
6	6050.8	5870.2	3748.1	5823,2	3,76148608
7	6134.8	6057.5	--	6049,4	1,39205842
8	7143.3	7106.5	--	6134,4	14,1237243
9	8151.82	7982.4	--	6973,7	14,4522328
10	8403.9	8096.7	--	7142,2	15,0132676

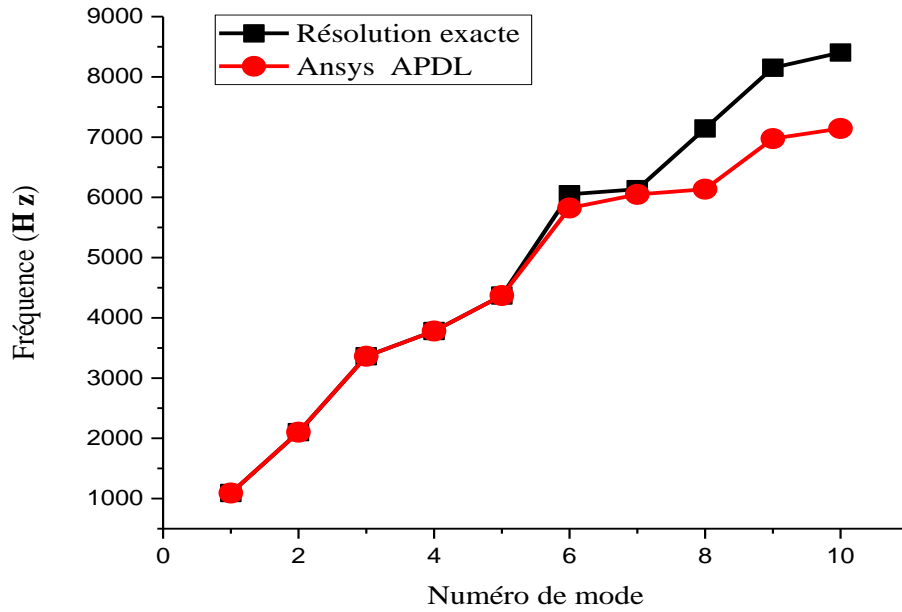


Figure III.9 Comparaison par courbe entre les fréquences obtenues par ANSYS et les fréquences exactes R= 12

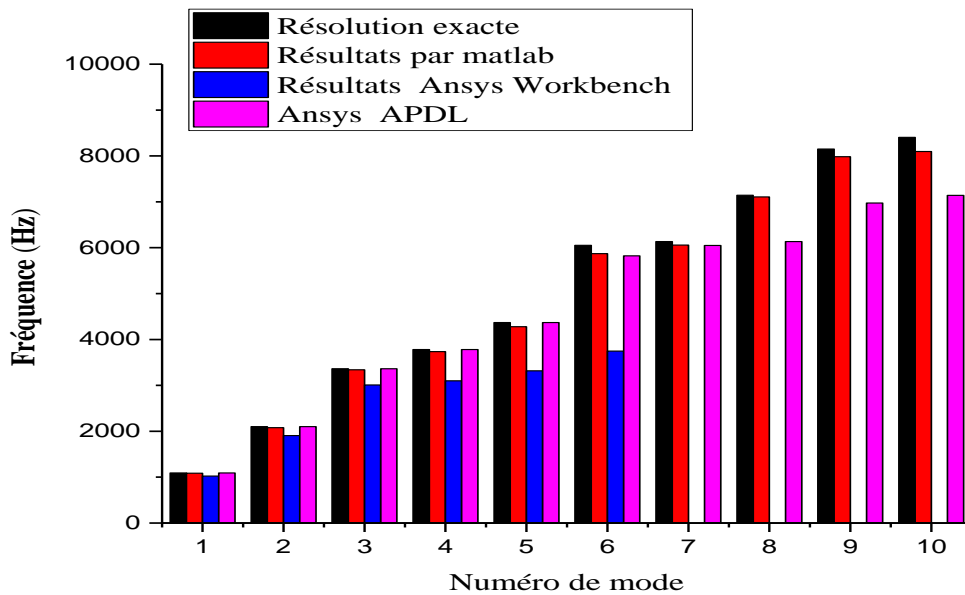


Figure III.10 Comparaison par colonne entre les fréquences obtenues par ANSYS et Avec les résultats des chercheurs R= 12

En comparant les résultats obtenus avec ceux des chercheurs, les résultats obtenus sont plus proches des résultats exactes, C'est une comparaison des résultats que nous constatons que, Plus la plaque est épaisse, plus la valeur d'erreur est élevée, C'est à cause d'une relation Kirchhoff.

III.2.4 Effet d'élément du maillage :

Le nombre d'éléments de maillage varie selon la taille des éléments. On a observé qu'en augmentant ou en diminuant la taille des éléments à partir d'une certaine valeur, la différence en pourcentage entre les résultats actuels et les résultats numériques publiés commence par conséquent, l'adaptation du maillage est une étape critique et vitale pour de tels cas.

En effectuant l'étude d'adaptation de maillage, éléments de maillage (120x120) Parce que ce paramètre de maillage a donné lieu à une différence minimale en pourcentage entre les données numériques actuelles et publiées.

Les tableaux suivants représentent la comparaison des valeurs d'erreur de maillage où les résultats étaient représentés par des courbes et des colonnes, Comparaison par colonne des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour $R = (12, 24)$ dans ANNEXE A.

Tableau III.6 Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d'erreur pour $R=96$

Mode	Résolution exacte	Résultats par maillage 96x96	Erreur ϵ % Pour maillage 96x96	Résultats par maillage 120x120	Erreur ϵ % Pour maillage 120x120
1	136.5	136.56	-0,04395604	136.56	-0,04395604
2	262.6	262.60	0	262.61	0,00380807
3	420.1	420.16	-0,01428231	420.17	-0,0166627
4	472.7	472.68	0,00423101	472.69	0,00211551
5	546.2	546.17	0,00549249	546.20	0
6	756.35	756.17	0,02379851	756.24	0,01454353
7	766.85	766.80	0,00652018	766.82	0,00391211
8	892.9	892.78	0,01343935	892.83	0,00783962
9	1018.9	1018.7	0,01962901	1018.8	0,00981451
10	1050.4	1050.2	0,01904037	1050.3	0,00952018

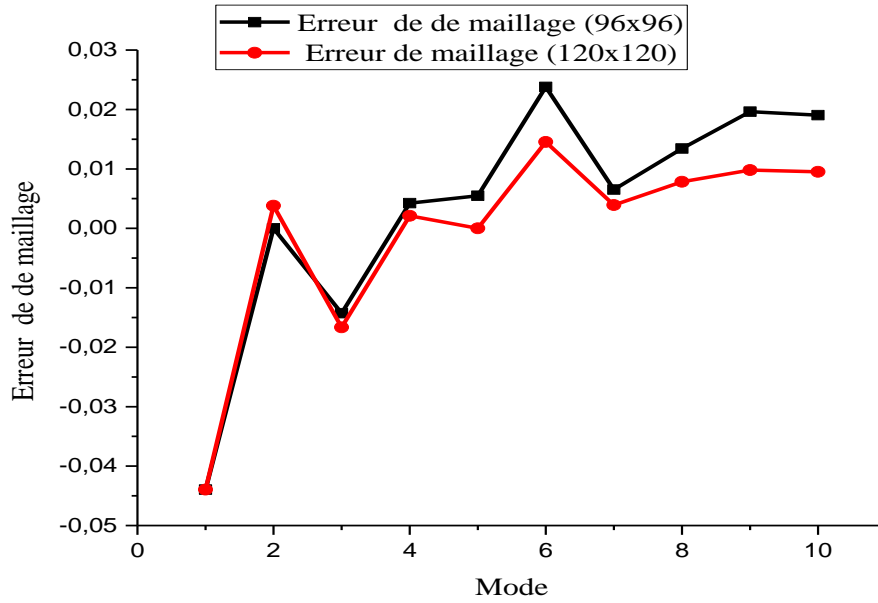


Figure III.11 Comparaison par courbe des valeurs d’erreur pour différents éléments du maillage pour R=96

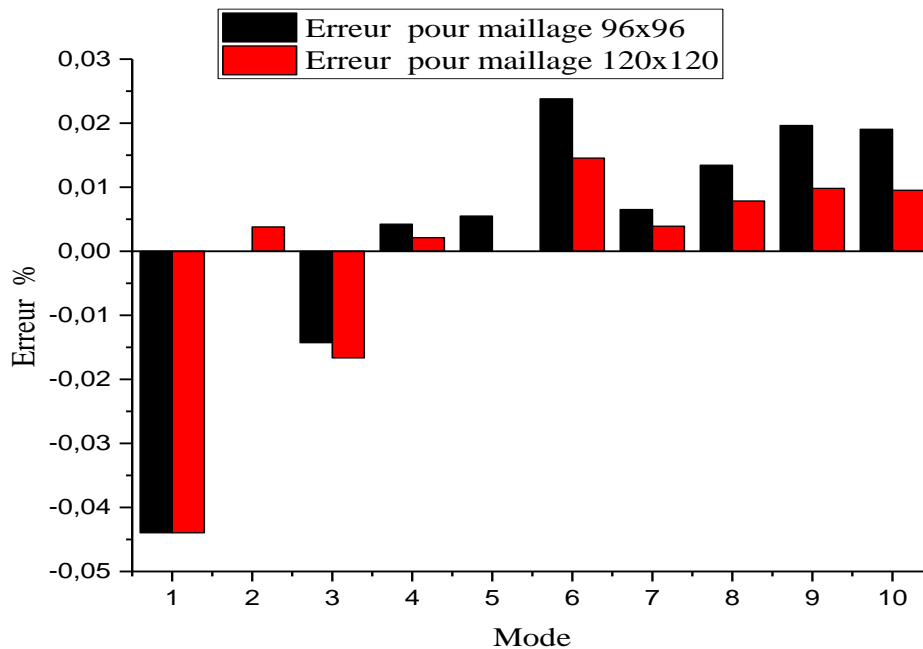


Figure III.12 Comparaison par colonne des valeurs d’erreur pour différents éléments du maillage pour R=96

Tableau III.7 Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d'erreur pour $R=48$:

Mode	Résolution exacte	Résultats par maillage 96x96	Erreur ϵ % Pour maillage 96x96	Résultats par maillage 120x120	Erreur ϵ % Pour maillage 120x120
1	273.1	273,12	-0,00732332	273,12	-0,00732
2	525.2	525,2	0	525,22	-0,00381
3	840.3	840,32	-0,0023801	840,35	-0,00595
4	945.4	945,36	0,00423101	945,39	0,00106
5	1092.5	1092,3	0,01830664	1092,4	0,00915
6	1512.7	1512,3	0,02644278	1512,5	0,01322
7	1533.7	1533,6	0,00652018	1533,6	0,00652
8	1785.8	1785,6	0,01119946	1785,7	0,0056
9	2037.9	2037,5	0,01962805	2037,7	0,00981
10	2100.9	2100,3	0,02855919	2100,6	0,01428

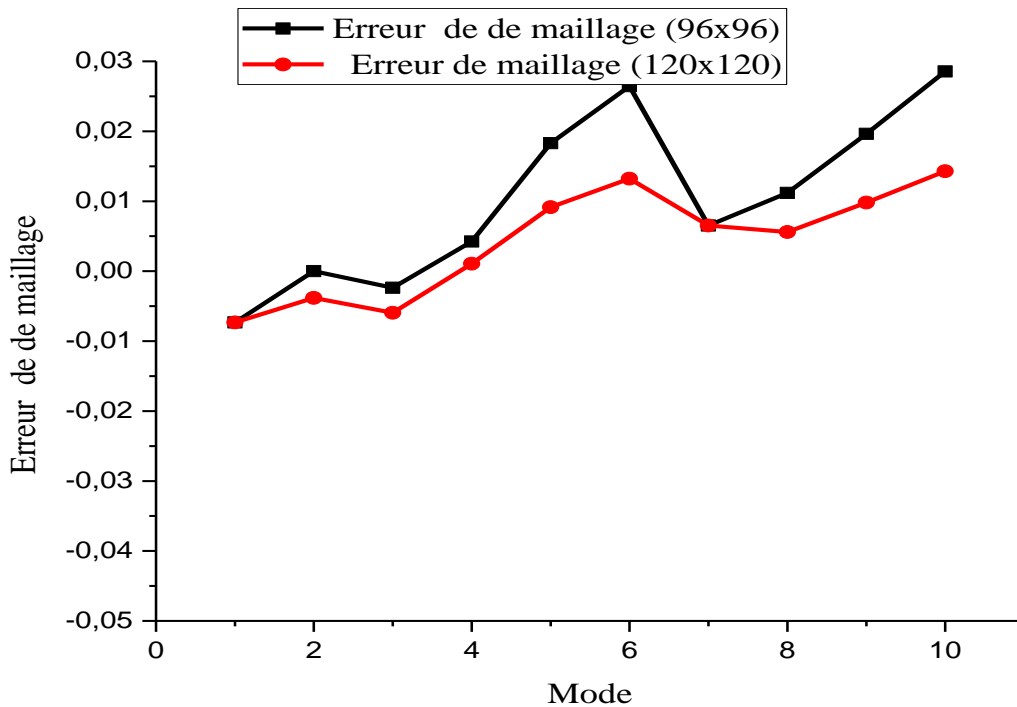


Figure III.13 Comparaison par courbe des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour $R=48$

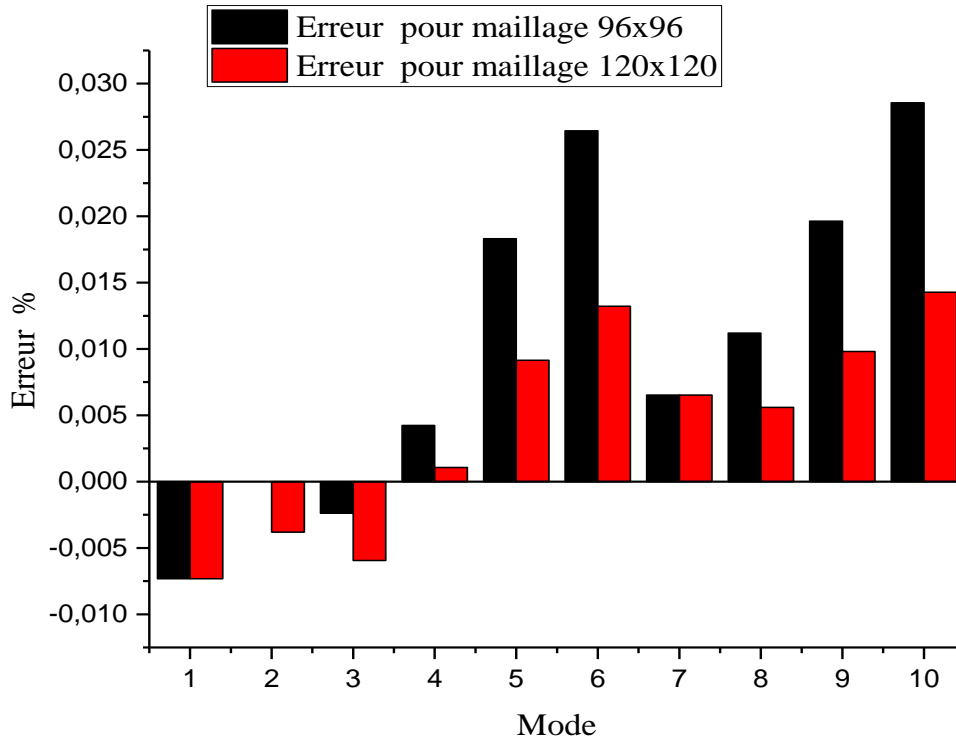


Figure III.14 Comparaison par colonne des valeurs d’erreur pour différents éléments du maillage pour R= 48

Tableau III.8 Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d’erreur pour R= 24

Mode	Résolution exacte	Résultats par maillage 96x96	Erreur ϵ % Pour maillage 96x96	Résultats par maillage 120x120	Erreur ϵ % Pour maillage 120x120
1	546.2	546,24	-0,00732332	546,24	-0,00732
2	1050.4	1050,4	0	1050,4	0
3	1680.7	1680,6	0,0059499	1680,7	0
4	1890.8	1890,7	0,00528877	1890,8	0
5	2185.0	2184,7	0,01372998	2184,8	0,00915
6	3025.4	3024,7	0,02313744	3024,9	0,01653
7	3067.4	3067,2	0,00652018	3067,3	0,00326
8	3571.6	3571,1	0,01399933	3571,3	0,0084
9	4075.9	4075	0,02208101	4075,3	0,01472
10	4201.9	4200,6	0,03093839	4201,1	0,01904

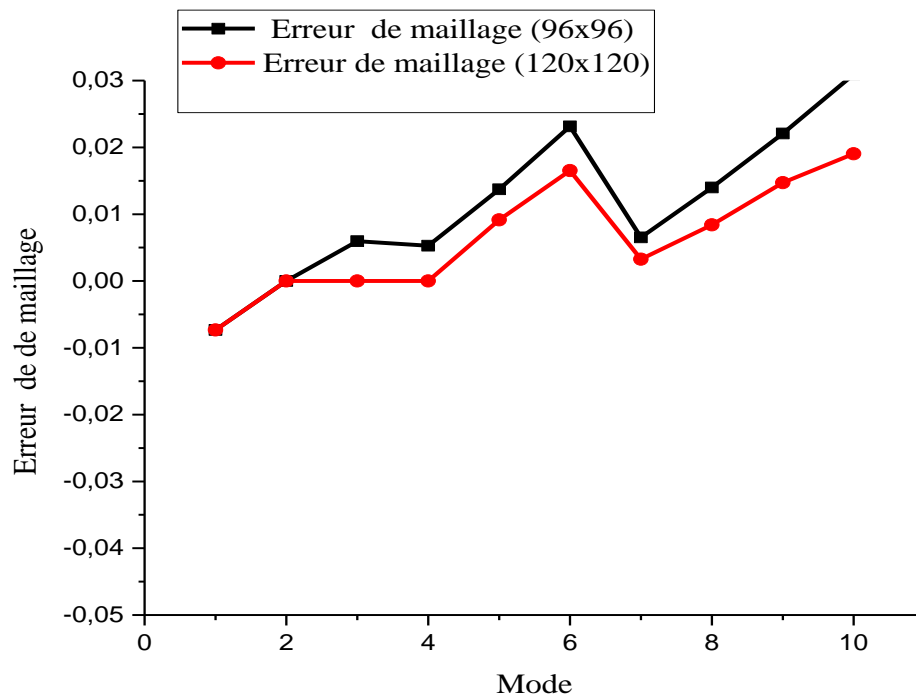


Figure III.15 Comparaison par courbe des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R= 24

Tableau III.9 Comparaison des résultats des différents éléments du maillage et des valeurs d'erreur pour R= 12

Mode	Résolution exacte	Résultats par maillage 96x96	Erreur ε % Pour maillage 96x96	Résultats par maillage 120x120	Erreur ε % Pour maillage 120x120
1	1092.5	1092,5	0	1092,5	0
2	2100.9	2100,8	0,00475986	2100,9	0
3	3361.5	3361,3	0,00594972	3361,4	0,00297
4	3781.7	3781,4	0,00793294	3781,5	0,00529
5	4370.1	4369,4	0,01601794	4369,6	0,01144
6	6050.8	5823,2	3,76148608	5823,2	3,76149
7	6134.8	6049,4	1,39205842	6049,9	1,38391
8	7143.3	6134,4	14,1237243	6134,6	14,12092
9	8151.82	6973,7	14,4522328	6973,5	14,45469
10	8403.9	7142,2	14,4522328	7142,6	15,00851

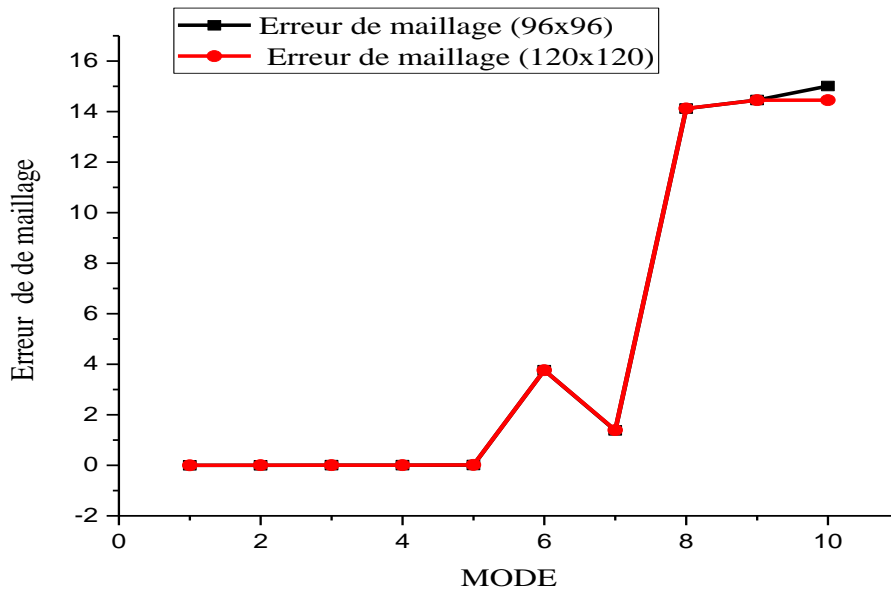


Figure III.16 Comparaison par courbe des valeurs d’erreur pour différents éléments du maillage pour R= 12

Le tableau ci-après présente les résultats obtenus par ANSYS aux conditions limites EEEE :

Tableau III.10 les résultats obtenus par ANSYS aux conditions limites EEEE

MODE	$f_{mn}(Hz)$			
	h= 0.05	h= 0.025	h=0.0125	h=0.00625
1	2069,4	1034,7	517,34	258,67
2	3195,7	1597,8	798,92	399,46
3	5066,8	2533,4	1266,7	633,34
4	5097,5	2548,7	1274,4	637,19
5	5823,2	3057,4	1528,7	764,34
6	6114,7	3862,6	1931,3	965,65
7	6973,5	3950,5	1975,3	987,63
8	7649,7	4800	2400	1200
9	7725,2	5212,8	2606,4	1303,2
10	7901,1	5310,8	2655,4	1327,7

III.2.4 Effet de rapport a/h :

Parmi les facteurs primordiaux aussi qu'on peut jouer avec pour avoir une bonne rigidité est l'épaisseur de la plaque (h). Dans cette partie on va étudier l'effet de rapport a/h sur les fréquences naturelles pour les plaques. Les tableaux en ANNEXE B montrent les fréquences propres pour les dix premiers modes des deux plaques (AAAA, EEEE) avec les quater rapports de dimensions. Le tableau III.11 montre les résultats obtenus ainsi, les figures montrent la variation de la fréquence en fonction du rapport a/h pour un rapport de dimension (1, 1.5, 2, 2.5) respectivement Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec R = (2, 2.5) C'est dans ANNEXE B.

Tableau III.11 Fréquences propres pour différents rapports a/h et rapport R

Conditions aux limites	a/h	f_{mn} (Hz)			
		1	1.5	2	2.5
AAAA	96	84.038	136.56	210.09	304.63
	48	168.08	273.12	420.18	609.26
	24	336.15	546.24	840.37	1218.5
	12	672.30	1092.5	1680.7	2437.1
EEEE	96	153.20	258.67	418.52	629.07
	48	306.40	517.34	837.03	1197.9
	24	612.80	1034.7	1674.1	2516.3
	12	1225.6	2069.4	3348.1	5032.6

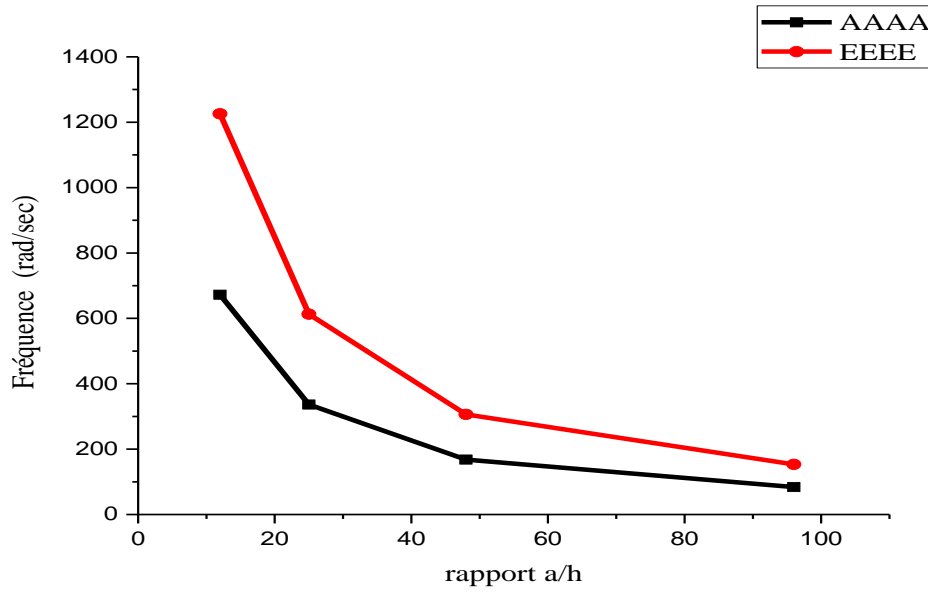


Figure III.17 Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec $R = 1$

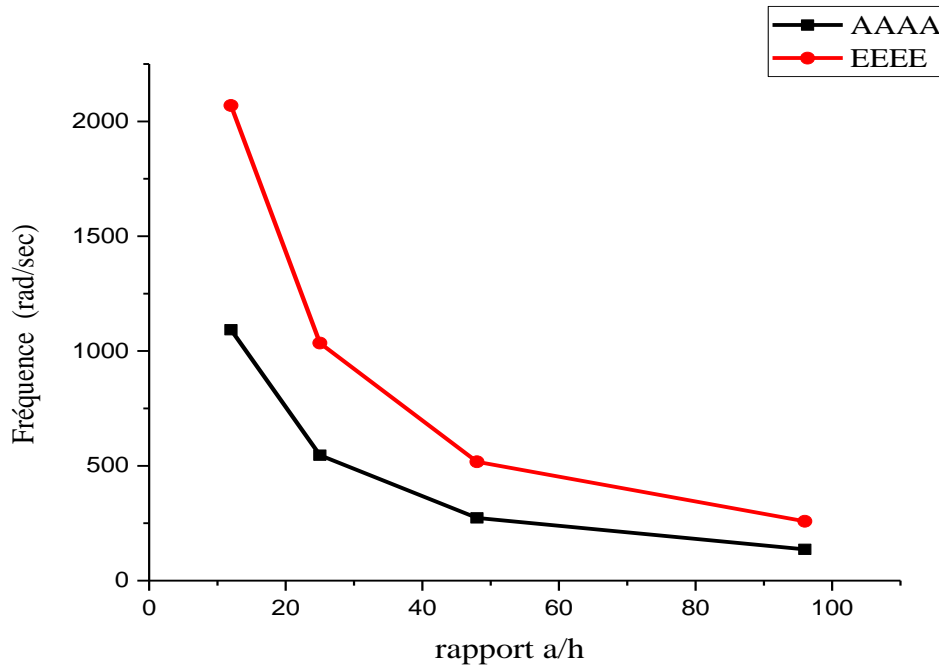


Figure III.18 Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec $R = 1.5$

A partir des courbes précédentes, on constate bien que la plaque n'a pas le même comportement pour les différents rapports de la plaque (a/h) à savoir :

- L'écart de fréquence propre pour les conditions aux limites (AAAA, EEEE) devient de plus en plus moins au fait d'augmenter le rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque.
- La rigidité de la plaque se diffère d'un rapport à un autre pour les mêmes conditions aux limites.
- D'après courbes, plus le rapport (a/b) est élevé, moins le rapport (a/h) est élevé, plus la plaque est rigide.
- la plaque EEEE est la plus rigide dans les différents rapports.
- La plaque AAAA est la plus souple dans les quater cas.

III.2.5 Effet de rapport de dimension a/b :

Parmi les facteurs majeurs qui influent sur le comportement vibratoire de la plaque, le rapport longueur-sur-largeur (a/b). Les figures suivants représentent la variation des fréquences propres en fonction de quater rapports R (1, 1.5, 2, 2.5) de la plaque sollicitée ayant Conditions aux limites, simplement appuyée (AAAA) et encastrée (EEEE).

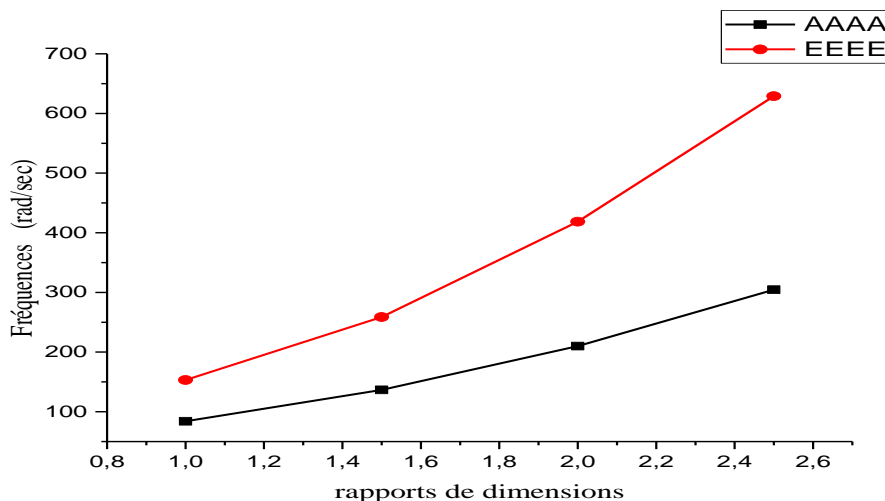


Figure III.19 Fréquences propres en fonction rapport de dimension $R=96$

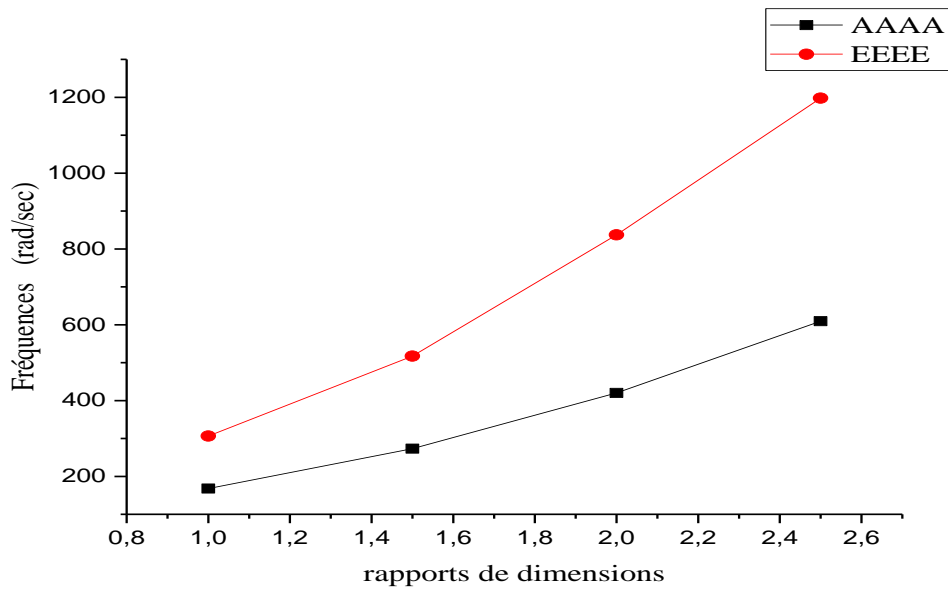


Figure III.20 Fréquences propres en fonction rapport de dimension R=48

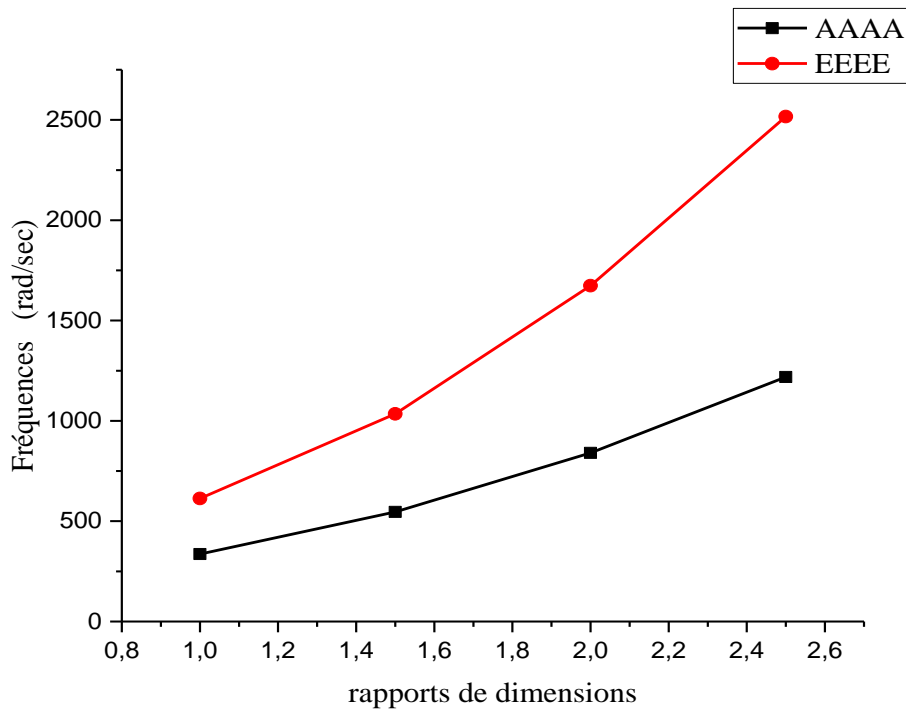


Figure III.21 Fréquences propres en fonction rapport de dimension R=24

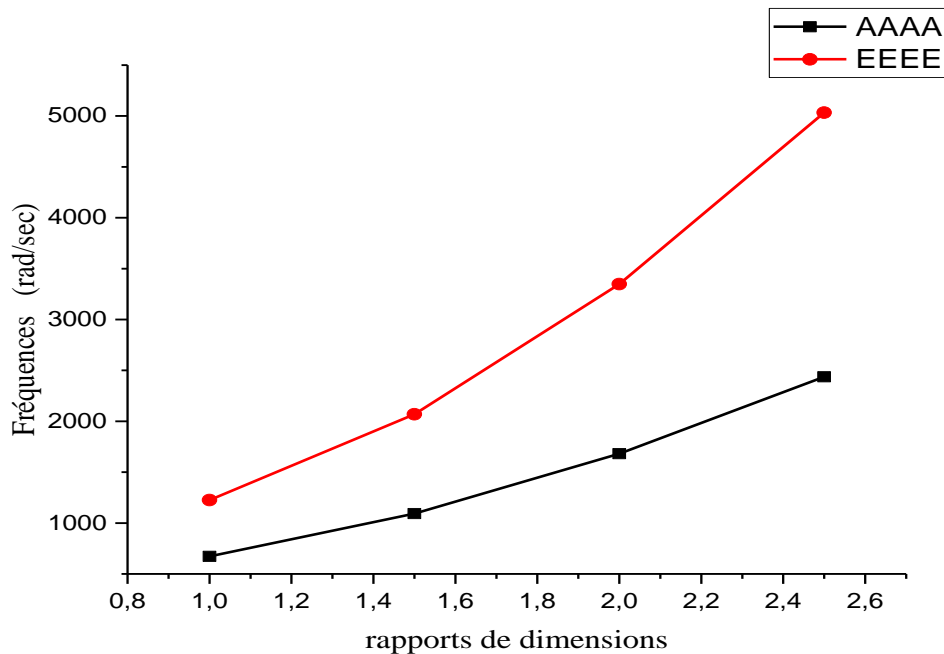


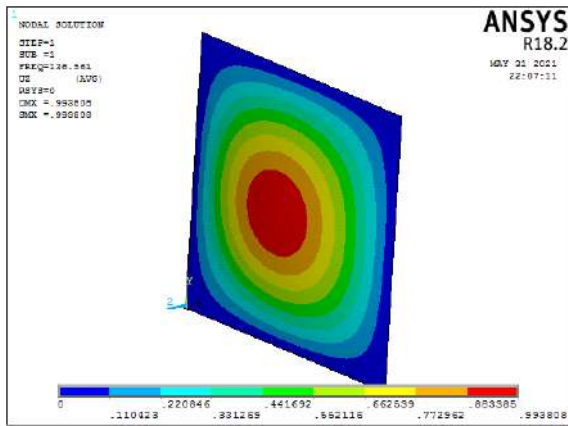
Figure III.22 Fréquences propres en fonction rapport de dimension $R=12$

En analysant les courbes précédentes on peut tirer les conclusions suivantes :

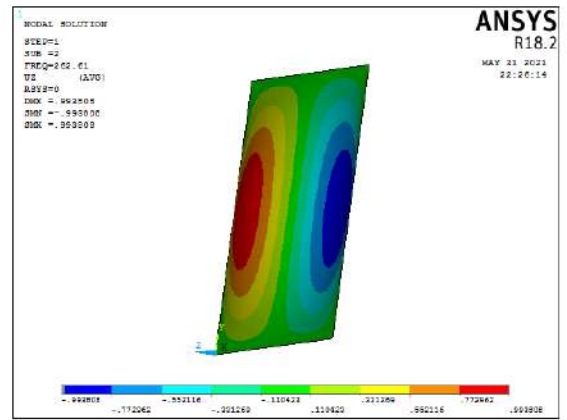
- La rigidité des plaques examinées devient plus en plus moins avec l'augmentation de rapport (a/b) avec les quater rapports de largeur-sur-épaisseur (a/h).
- Pour les quater rapports R , la plaque AAAA est la plus souple, tandis que la plaque EEEE est la plus rigide quelque soit le rapport (a/b).

III.2.6 Présentation six premiers modes propres de la plaque :

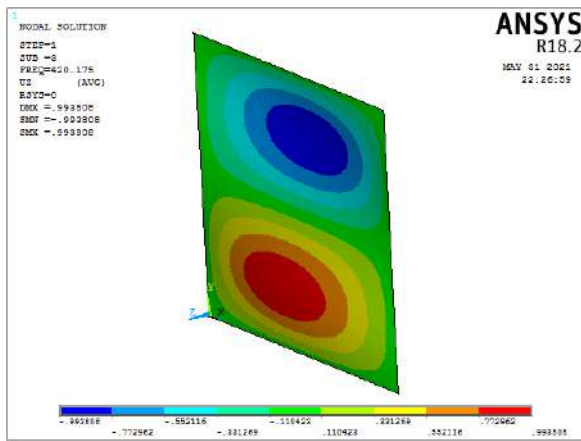
La vibration de tous les points d'un système mécanique à une fréquence donnée est appelée mode propre de vibration [85] la figure III.22 et la figure III.24 montre les modes propres appropriés pour la plaque (AAA, EEEE), étant donné que rapport de largeur-sur-épaisseur sur **96** et rapport de dimension c'est **1.5**, la figure III.23 montre les modes propres pour la plaque AAAA par un programme Matlab [64].



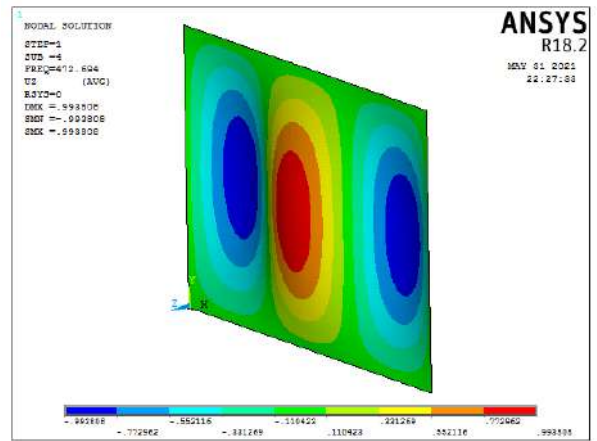
$f_{11} = 136.56 \text{ Hz}$



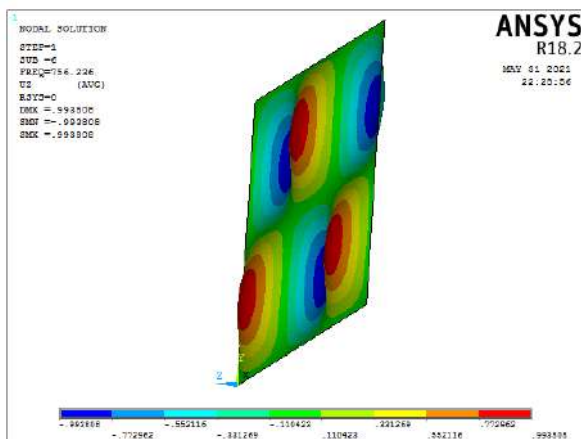
$f_{12} = 420.17 \text{ Hz}$



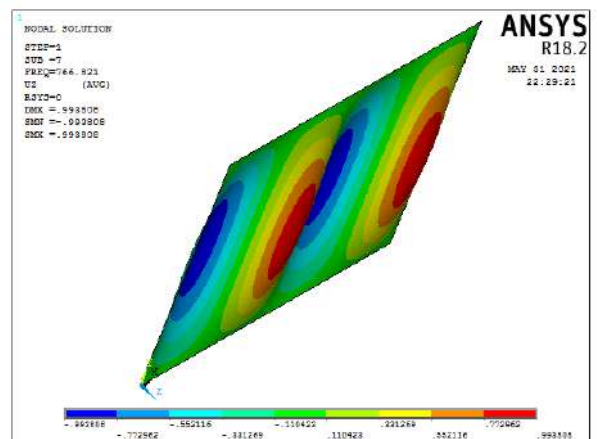
$f_{21} = 262.61 \text{ Hz}$



$f_{31} = 472.69 \text{ Hz}$

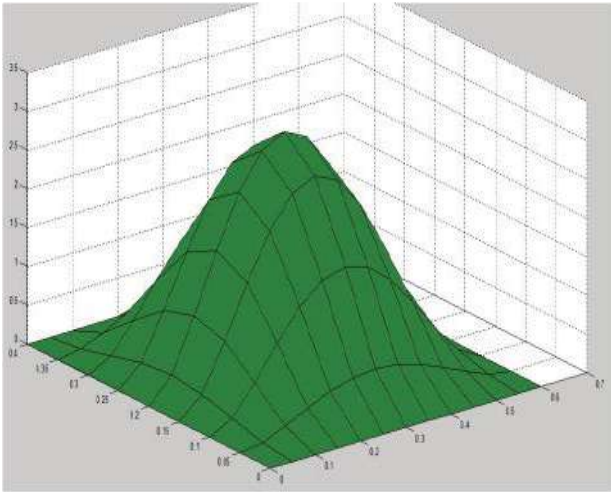


$f_{32} = 546.20 \text{ Hz}$

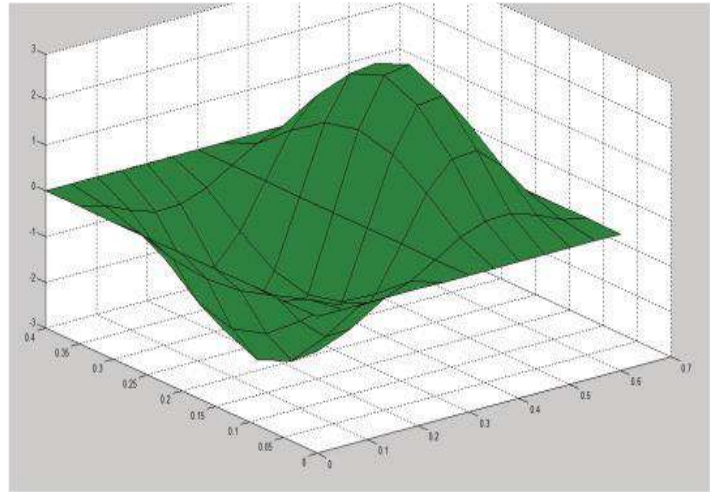


$f_{41} = 756.24 \text{ Hz}$

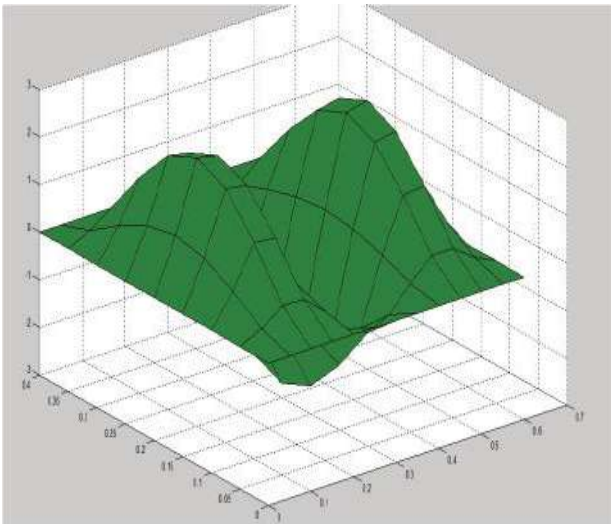
Figure III.23 Fréquences et modes propres pour la plaque AAAA



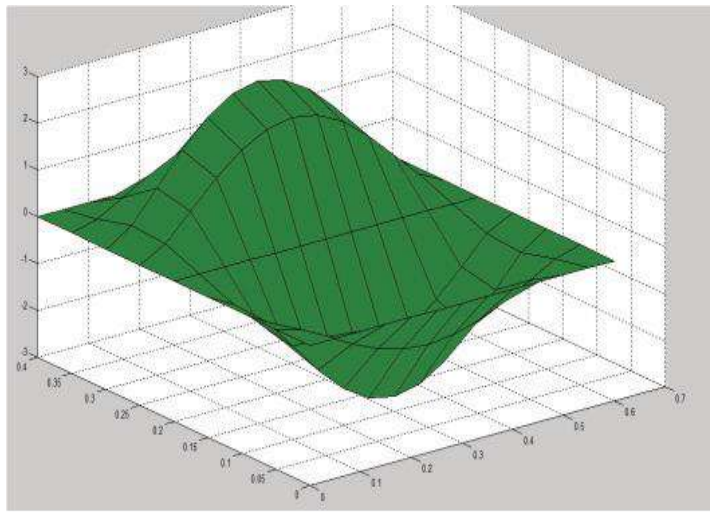
Mode (1)



Mode (2)

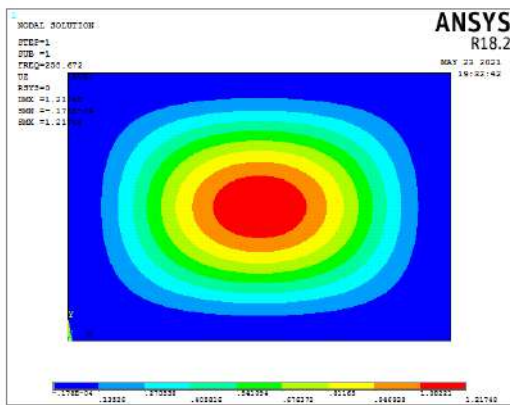


Mode (3)

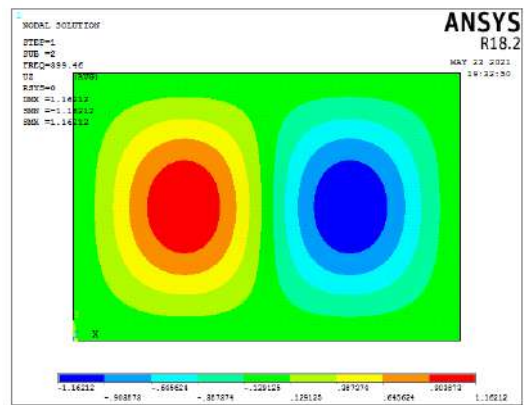


Mode (4)

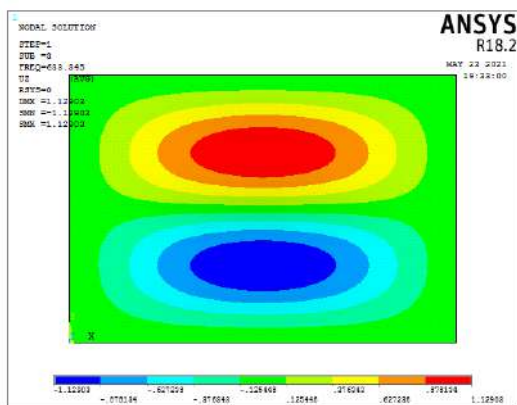
Figure III.24 Modes propres pour la plaque AAAA par Matlab [64]



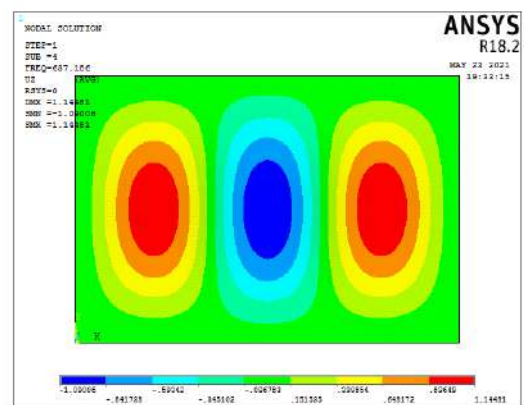
$$f_{11} = 258,67 \text{ Hz}$$



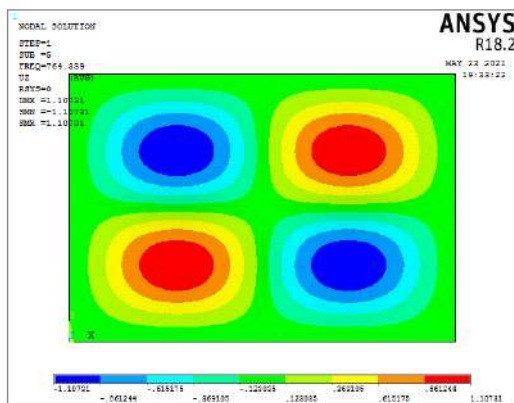
$$f_{21} = 633,34 \text{ Hz}$$



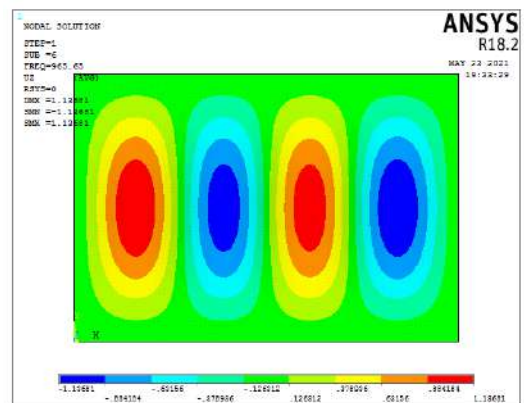
$$f_{12} = 399,46 \text{ Hz}$$



$$f_{31} = 637,19 \text{ Hz}$$



$$f_{22} = 764,34 \text{ Hz}$$



$$f_{41} = 965,65 \text{ Hz}$$

Figure III.25 Modes propres pour la plaque EEEE

III.3 Etude des vibrations des plaques à différentes conditions aux limites et dimensions :

Pour étudier ces effets, nous utilisons les données et les résultats de recherches antérieures pour les comparer aux résultats obtenus, où le chercheur M.E. Biancolini [86] a utilisé un programme NASTRAN v.70.5, qui était basé sur les résultats du chercheur Haermon [87].

L'étude concerne la variation des fréquences propres d'une plaque mince isotrope en fonction du rapport de dimension $R=a/b$ ($R=1.25, 1.33, 1.5$) sous différentes conditions aux limites (AAAA, EEEE, AAEA, EAEE, AEAE, AAEE). La solution a été recherchée, pour la méthode numérique (logiciel Ansys ®), en utilisant un maillage de 80 x 80 et l'élément coque SHELL 181 pour les plaques isotropes minces.

Le tableau représente les propriétés, le tableau représente les dimensions de a, b et h.

- Propriété des matières utilisées :

Tableau III.12 Les propriétés du matériau

Propriété et symbole	Valeur	Unité
Module de Young E	10	GPa
Densité ρ	7800	kg/m ³
Rapport de Poisons	0.2	

- Propriétés géométriques de la plaque :

Tableau III.13 les dimensions de la plaque

Les dimensions de la plaque prises		
Longueur de la plaque a (m)	4	
Largeur de la plaque b (m)	3	3.2 2.667
Épaisseur h (m)	0.01	

III.3 .1 Comparaison des résultats :

Les résultats obtenus pour les dix premiers modes en utilisant ANSYS APDL 18.2 pour les plaques différentes conditions aux limites avec les trois rapports de dimension $R (a/b) = (1.25, 1.33, 1.5)$ sont rapportés dans les tableaux et les figures, les comparatifs avec ceux qui trouvés par M.E. Biancolini .al (NM) [86] et Haermon [87] , Comparaison par colonne et courbe des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour les plaques (EAEE, AEAE ,AAEE, AAEA) $R=1.5$ dans ANNEXE C .

Tableau III.14 Comparaison des résultats ANSYS/Nastran et Haermon pour les plaques (AAAA, EEEE) $R=1.5$

Mode	$f_{mn}(Hz)$					
	AAAA			EEEE		
	ANSYS	Nastran	Haermon	ANSYS	Nastran	Haermon
1	1,1045	1.06	1.019	2,092	2.02	1.485
2	2,1242	2.05	1.915	3,2309	3.13	2.032
3	3,3982	3.27	3.144	5,1217	4.96	3.468
4	3,8236	3.68	3.439	5,154	4.99	3.080
5	4,4174	4.26	3.872	6,1809	5.99	3.544
6	6,1159	5.89	5.077	7,8113	7.74	4.55
7	6,2029	--	--	7,9864	--	--
8	7,2203	--	--	9,703	--	--
9	8,239	--	--	10,538	--	--
10	8,4937	--	--	10,735	--	--

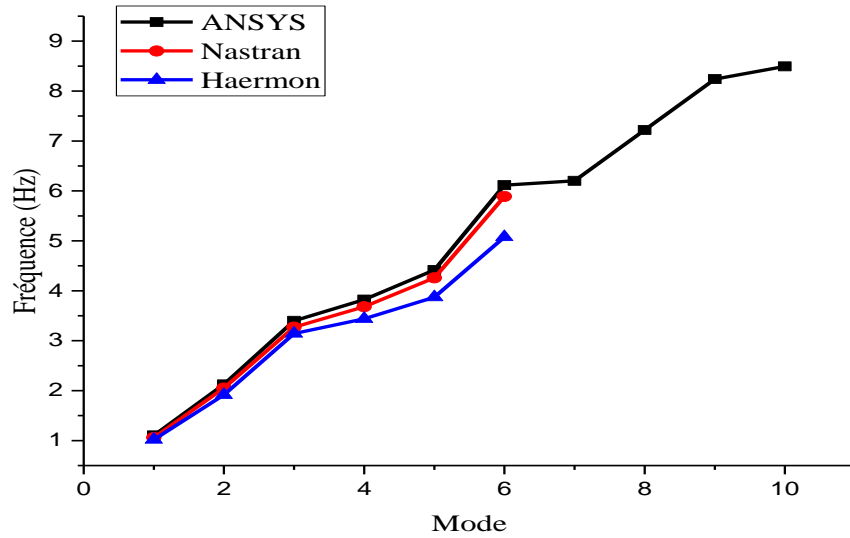


Figure III.26 Comparaison par courbe des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque AAAA $R=1.5$

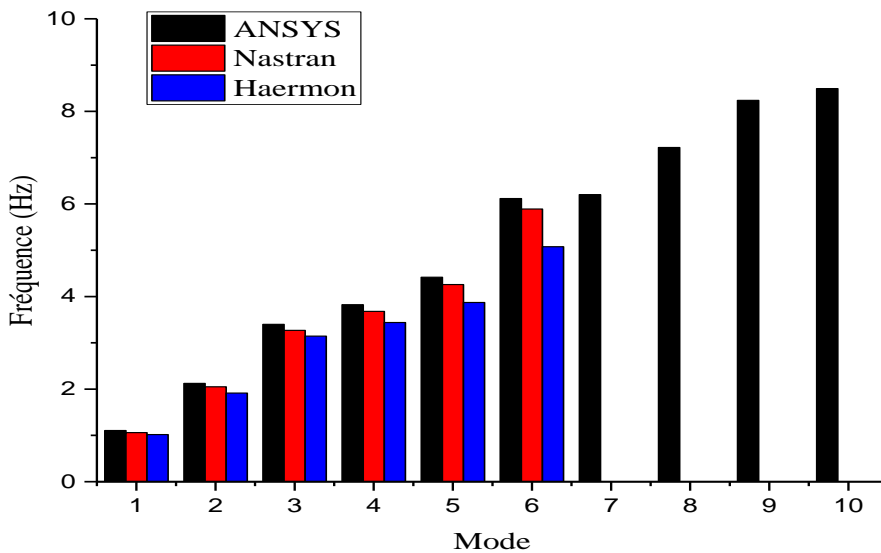


Figure III.27 Comparaison par colonne des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque AAAA $R=1.5$

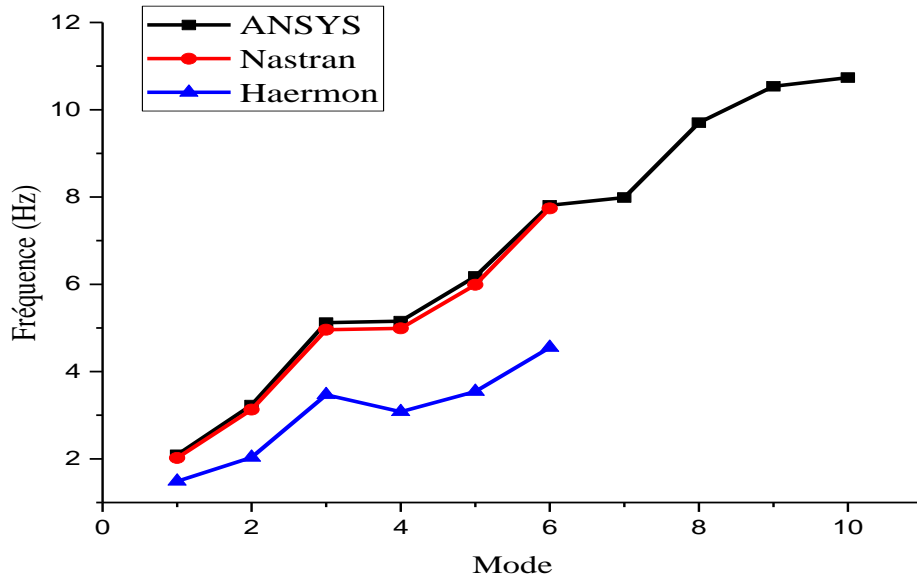


Figure III.28 Comparaison par courbe des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque EEEE $R=1.5$

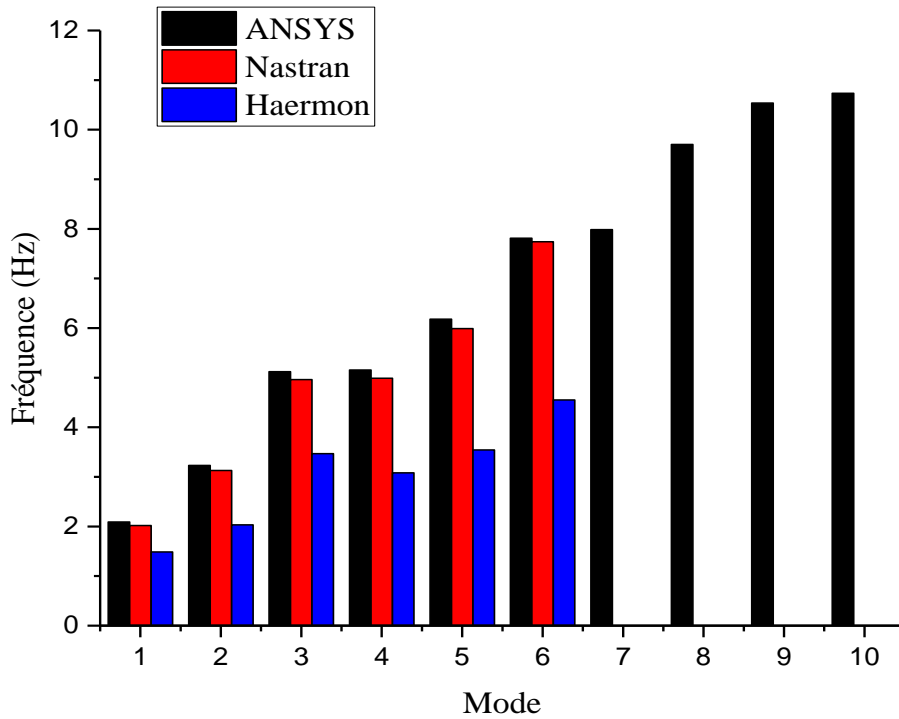


Figure III.29 Comparaison par colonne des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque EEEE $R=1.5$

Tableau III.15 Comparaison des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour les plaques (EAEE, AEAE) $R=1.5$

Mode	$f_{mn}(\text{Hz})$					
	EAEE			AEAE		
	ANSYS	Nastran	Haermon	ANSYS	Nastran	Haermon
1	2,0033	1.94	1.405	1,3461	1.3	0.88
2	2,9511	2.89	1.894	2,7386	2.64	2.237
3	4,6721	4.91	3.532	3,5193	3.41	1.971
4	5,0741	4.53	2.712	4,8084	4.64	4.218
5	6,0051	5.81	4.034	4,8269	4.68	2.836
6	7,1372	7.39	4.647	6,8785	6.65	4.784
7	7,6356	--	--	7,2976	--	--
8	9,6707	--	--	7,5496	--	--
9	9,9954	--	--	8,5256	--	--
10	10,316	--	--	9,6267	--	--

Tableau III.16 Comparaison des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour les plaques (AAEE, AAEA) $R=1.5$

Mode	$f_{mn}(\text{Hz})$					
	AAEE			AAEA		
	ANSYS	Nastran	Haermon	ANSYS	Nastran	Haermon
1	1,5457	1.5	0.937	1,4643	1.41	1.236
2	2,6357	2.55	1.564	2,376	2.3	1.483
3	4,2112	4.07	2.9708	4,0036	4.01	3.931
4	4,4557	4.32	2.571	4,1657	3.88	2.229
5	5,2509	4.07	3.812	5,0826	4.90	4.152
6	6,9774	6.76	5.408	6,3397	6.44	4.7007
7	7,0083	--	--	6,6714	--	--
8	8,4134	--	--	8,3818	--	--
9	9,4371	--	--	8,9564	--	--
10	9,478	--	--	9,3172	--	--

Tableau III.17 Comparaison des résultats *ANSYS/Nastran* pour les plaques pour (AAAA, EEEE, EAEE) pour $R=1.25$

Mode	AAAA		EEEE		EAEE	
	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran
1	0,86195	0.84	1,5915	1.56	1,4807	1.45
2	1,871	1.82	2,796	2.74	2,4851	2.43
3	2,4386	2.37	3,6476	3.57	3,5881	3.51
4	3,4473	3.46	4,7526	4.65	4,2471	4.16
5	3,5527	3.36	4,7567	4.66	4,5481	4.45
6	5,066	--	6,618	6.48	6,223	6.09
7	5,1284	--	6,788	--	6,7227	--
8	5,9072	--	7,4126	--	6,7491	--
9	6,0743	--	7,8536	--	7,7033	--
10	7,4819	--	9,2094	--	8,6216	--

Tableau III.18 Comparaison des résultats *ANSYS/Nastran* pour les plaques (AEAE, AAEE, AAEA) aux limites pour $R=1.25$

Mode	AEAE		AAEE		AAEA	
	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran
1	1,3461	1.11	1,1895	1.17	1,0935	1.07
2	2,7386	2.45	2,3032	2.26	2,0213	1.98
3	3,5193	2.53	3,0087	2.95	2,9541	2.88
4	4,8084	4.44	4,0671	4.04	3,657	3.58
5	4,8269	3.83	4,1272	3.97	3,8737	3.78
6	6,8785	5.81	5,8412	5.70	5,4703	5.34
7	7,2976	--	5,8936	--	5,8555	--
8	7,5496	--	6,6363	--	5,9856	--
9	8,5256	--	6,9292	--	6,787	--
10	9,6267	--	8,3168	--	7,7592	--

Tableau III.19 Comparaison des résultats *ANSYS/Nastran* pour les plaques pour (AAAA, EEEE, EAEE) pour $R=1.33$

Mode	AAAA		EEEE		EAEE	
	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran
1	0,93437	0.91	1,7388	1.70	1,6365	1.60
2	1,9434	1.89	2,9176	2.86	2,618	2.54
3	2,7282	2.66	4,0913	4.00	4,0365	3.95
4	3,6251	3.53	4,8581	4.76	4,3616	4.27
5	3,7369	3.64	5,1783	5.07	4,9822	4.87
6	5,4179	5.28	7,0143	6.87	6,6359	6.49
7	5,7175	--	7,5095	--	6,8273	--
8	5,9796	--	7,6689	--	7,632	--
9	6,7258	--	8,7178	--	8,5778	--
10	7,7712	--	9,5847	--	9,0137	--

Tableau III.20 Comparaison des résultats *ANSYS/Nastran* pour les plaques pour (AEAE, AAEE, AAEA) pour $R=1.33$

Mode	AEAE		AAEE		AAEA	
	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran	Ansys	Nastran
1	1,1363	1.17	1,2949	1.27	1,2046	1.18
2	2,5166	2.51	2,3971	2.35	2,1236	2.08
3	2,5846	2.81	3,3711	3.30	3,32	3.23
4	3,9111	4.50	4,2137	4.13	3,7513	3.68
5	4,5598	4.09	4,4193	4.31	4,2351	4.13
6	5,1597	6.07	6,1809	6.03	5,8233	5.69
7	5,9552	--	6,655	--	6,0748	--
8	6,4099	--	6,7198	--	6,6198	--
9	7,2673	--	7,6829	--	7,549	--
10	8,4115	--	8,6464	--	8,103	--

III.3.2 Effet de conditions aux limites :

En vue d'examiner le comportement des plaques isotropes vis-à-vis les six conditions aux limites telles qu'il est illustré précédemment on étudie la variation de fréquences propres en fonction des modes propres des plaques ayant les rapports de dimension R (a/b)= (1.25, 1.33, 1.5).

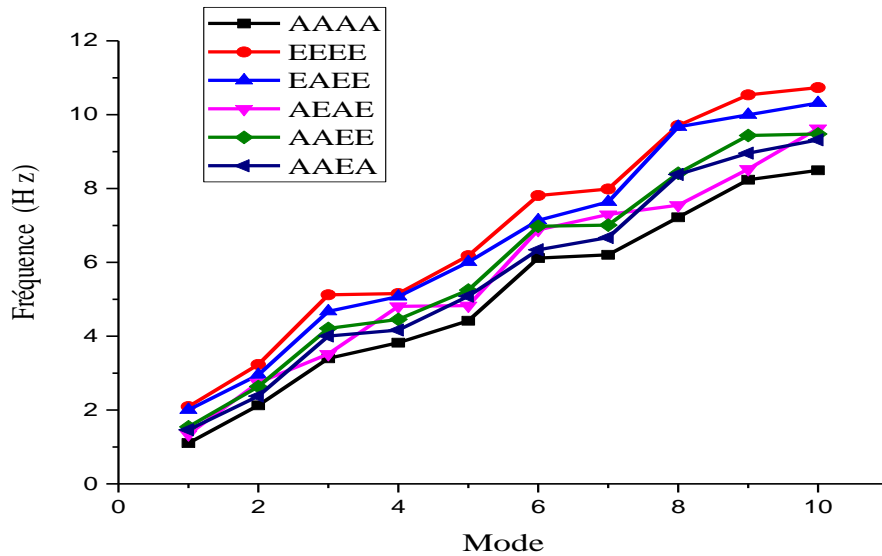


Figure III.30 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R =1.5

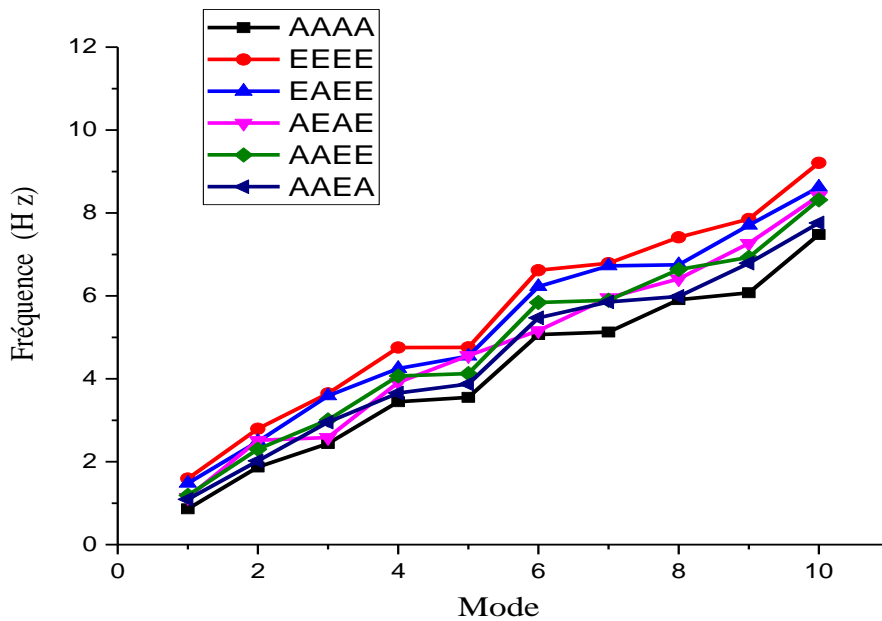


Figure III.31 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R =1.25

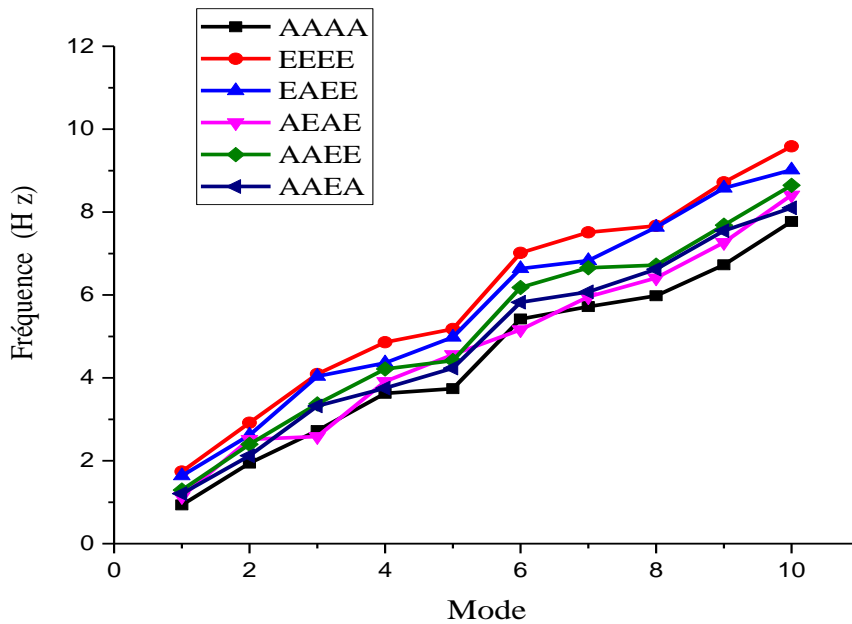


Figure III.32 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec $R = 1.333$

En analysant les trois courbes précédentes, il est clair que quelque soit le rapport de dimension R la plaque a le même comportement. En effet, les fréquences propres pour les dix premiers modes de la plaque simplement appuyée (*AAAA*) et encastree (*EEEE*) font les extrémités bas et haut respectivement et les autres plaques se situent entre les deux tout dépend des valeurs de la fréquence. Ce comportement est dû à la fréquence propre qui dépend de la rigidité de la plaque, de faite que la plaque encastree sur ses quatre côtés soit la plus rigide, tandis que la plaque simplement appuyée soit la plus souple.

III.3.3 Effet de rapport de dimension a/b :

Parmi les facteurs majeurs qui influent sur le comportement vibratoire de la plaque isotrope, le rapport longueur-sur-largeur (a/b). Le tableau et la figure suivants représentent la variation des fréquences propres en fonction de trois rapports $R = (1.25, 1.33, 1.5)$. de la plaque sollicitée ayant les six conditions aux limites.

Tableau III.21 Fréquences propres pour les trois rapports de dimension

<i>Conditions aux limites</i>	<i>f_{mn}(Hz)</i>		
	<i>1.25</i>	<i>1.333</i>	<i>1.50</i>
AAAA	0,86195	0,93437	1,1045
EEEE	1,5915	1,7388	2,092
EAEE	1,4807	1,6365	2,0033
AAEA	1,1363	1,1363	1,3461
AAEE	1,1895	1,2949	1,5457
AEAE	1,0935	1,2046	1,4643

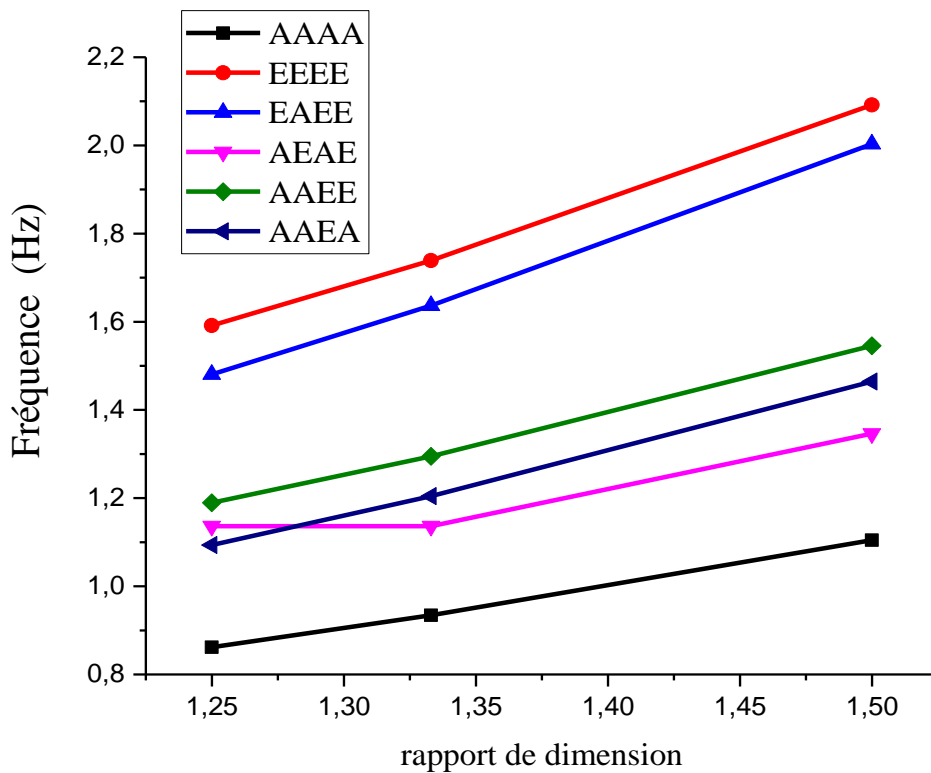


Figure III.33 Fréquences propres en fonction rapport de dimension

En référençant à la courbe précédente, on constate bien que la plaque n'a pas le même comportement pour les différents rapports R à savoir :

- La fréquence propre pour les six conditions aux limites augmente avec l'augmentation du rapport.
- La rigidité de la plaque se diffère d'un rapport à un autre pour les mêmes conditions aux limites. Les deux plaques ($EEEE$, $EAE E$) est la plus rigide pour différent le cas de rapport (a/b) que les autres conditions.
- Le comportement des plaques $AAAA$, $AAEA$, $AAEE$, ont le même comportement vis-à-vis le rapport de dimension a/b (même forme de courbe).
- La plaque $AEAE$ a le même comportement en valeur du rapport de dimension (1.25 et 1.33) et se différent de plus en plus avec l'augmentation du rapport.
- La plaque $AAAA$ est la plus souple dans les trois cas.

III.4 Étude des effets de la condition limite encastree pour plaque isotrope carrée :

Dans ce travail, nous étudions l'effet des conditions limites sur les vibrations des plaques.

Une plaque carrée est considérée comme un exemple numérique. La plaque est en aluminium, et ses propriétés matérielles sont les suivantes : Module de Young $E = 69\text{GPa}$, rapport de Poisson $\nu = 0,33$, et densité de masse $\rho = 2700\text{ kg/m}^3$. La taille de la plaque carrée est $L = 1\text{ m}$, et son épaisseur est $h = 0,001\text{m}$. Pour les études numériques, deux types de conditions limites sont pris en compte :

Exemple 1 : une plaque carrée avec un support de bordure sans bride (L-E-L-E) support de bordure, comme le montre la Figure III.33.

Exemple 2 : plaque carrée avec support de bordure à serrage libre (L-L-L-E), comme le montre la Figure III.33.

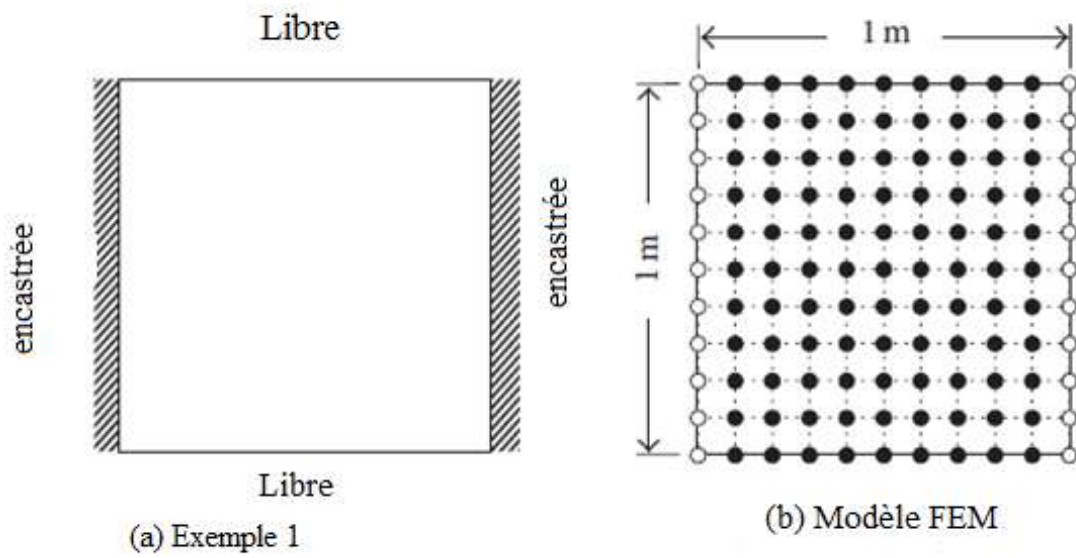


Figure III. 34 Plaque carrée avec support de libre – encastrée - libre – encastrée (L-E-L-E), exemple 1

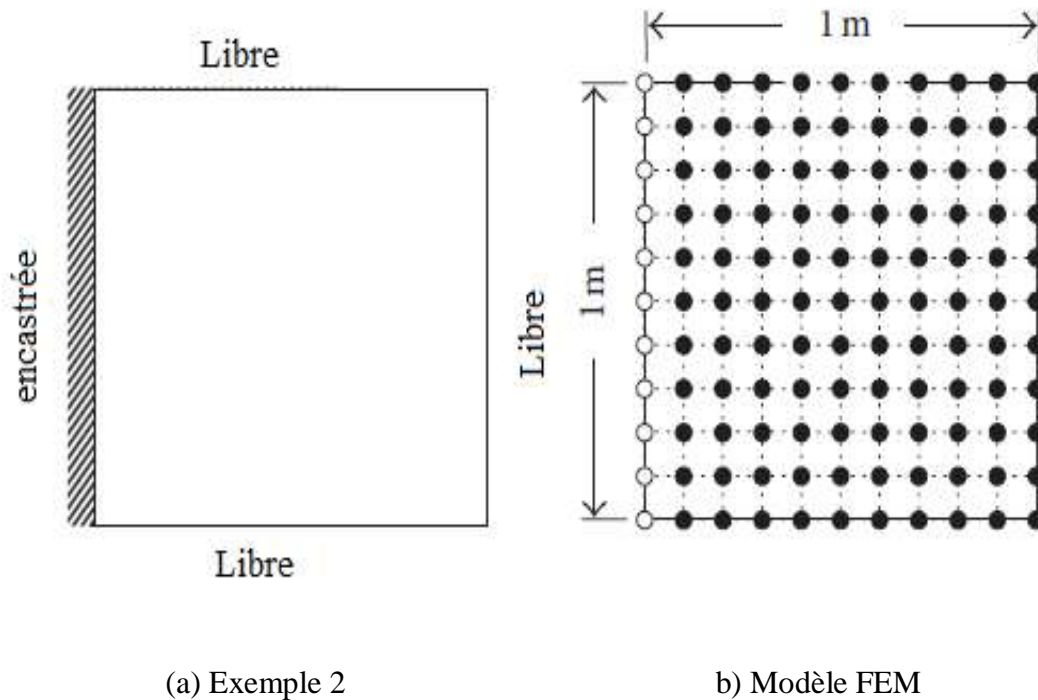


Figure III.35 Plaque carrée avec support de libre – libre - libre – encastrée (L-L-L-E), exemple 2

III.4 .1 Comparaison des résultats :

Les résultats obtenus pour les dix premiers modes en utilisant ANSYS pour les plaques carrées différentes conditions aux limites (L-E-L-E) et (L-L-L-E) dans les tableaux comparatifs avec ceux qui trouvés par Ilwook Park [88].

- compare les fréquences naturelles (Hz) de la plaque carrée (L-E-L-E) obtenues en utilisant Ansys 11 [89] la FEM [90] et la présente pour la méthode numérique (logiciel Ansys ®), en utilisant un maillage de 100 x 100 et l'élément coque SHELL181 :

Tableau III.22 Comparaison par Les résultats obtenus et ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque L-E-L-E

MODE	FEM [90]			Ansys 11 [89]	Ansys 18.2 présent
	$n_E = 10 \times 10$ $n_D = 330$	$n_E = 50 \times 50$ 7650	$n_E = 100 \times 100$ 30300	$n_E = 100 \times 100$ 40400	$n_E = 100 \times 100$ 40400
1	5.454	5.442	5.441	5.441	5.4413
2	6.453	6.449	6.448	6.449	6.4491
3	10.58	10.65	10.66	10.66	10.657
4	15.09	15.02	15.02	15.02	15.019
5	16.48	16.44	16.44	16.45	16.445
6	19.36	19.56	19.57	19.57	19.574
7	21.19	21.42	21.43	21.43	21.430
8	29.69	29.50	29.50	29.50	29.496
9	29.78	30.44	30.47	30.47	30.474
10	31.20	31.06	31.06	31.06	31.060

Note : n_E = nombre total d'éléments finis n_D = nombre total de degrés de liberté.

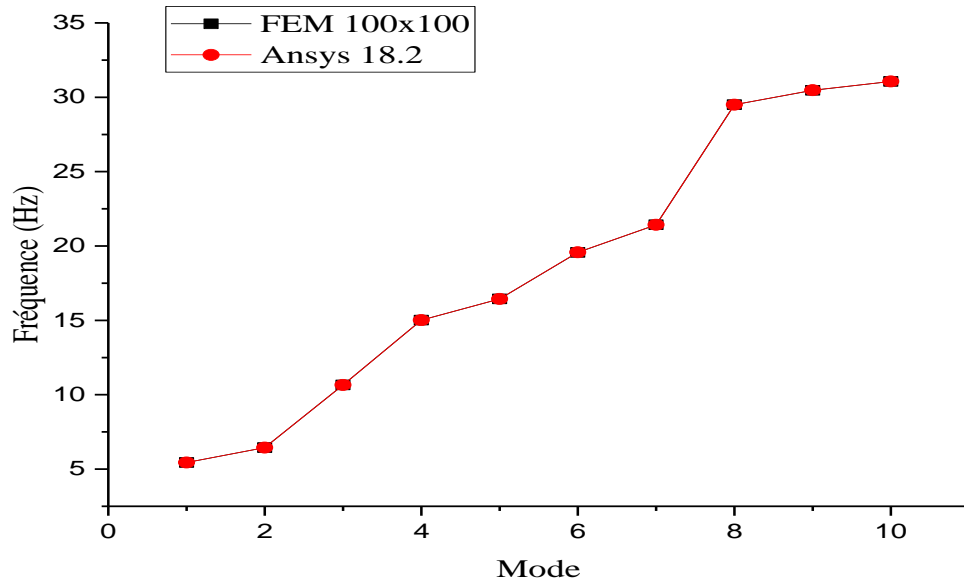


Figure III.36 Comparaison par courbe Les résultats ANSYS/FEM (100 x 100) de la variation des fréquences propres en fonction de modes pour la plaque *L-E-L-E*

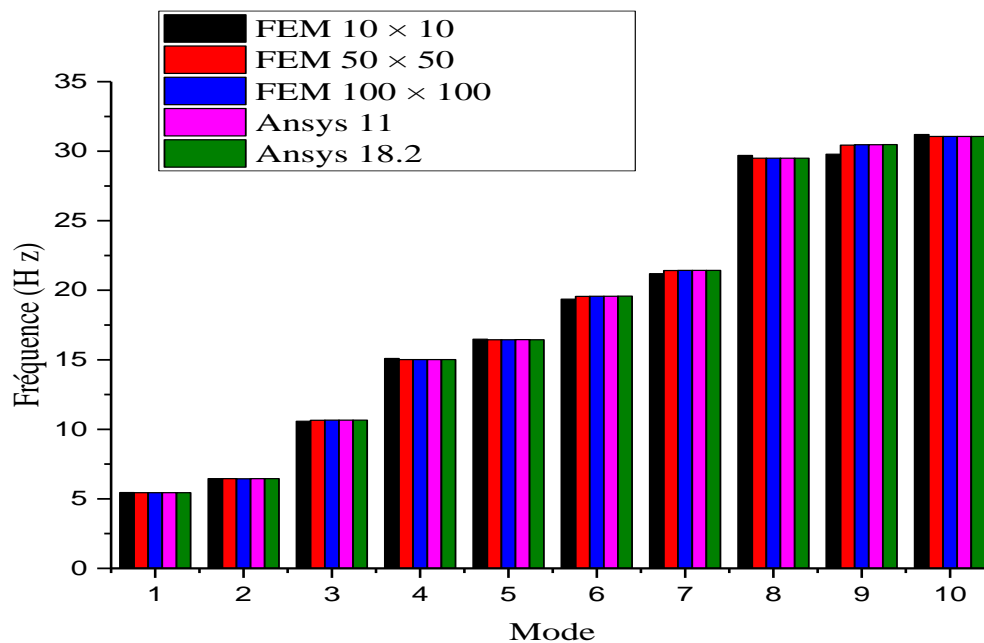
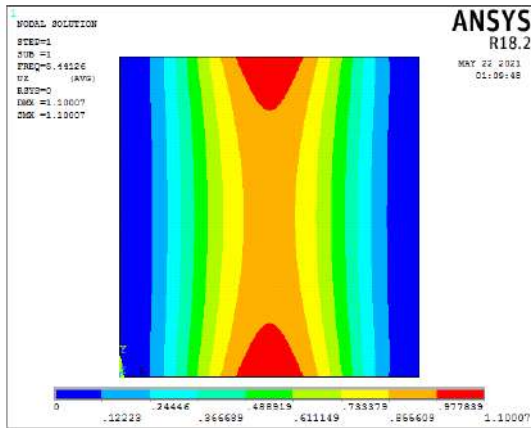
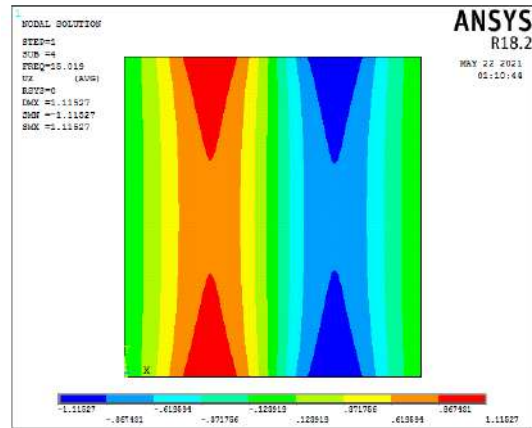


Figure III.37 Comparaison par colonne Les résultats ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction de modes pour la plaque *L-E-L-E*

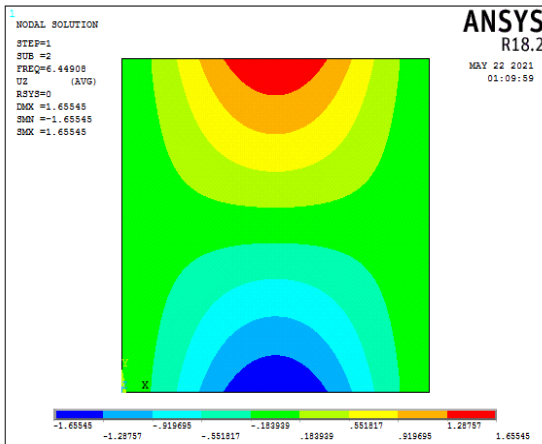
Modes propres pour la plaque carrée *L-E-L-E* :



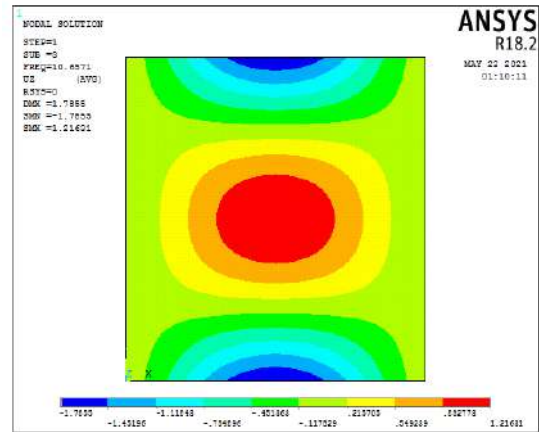
$$f_{11} = 5.4413 \text{ Hz}$$



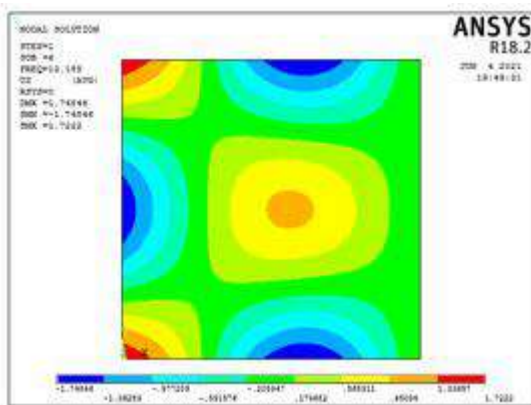
$$f_{12} = 6.4491 \text{ Hz}$$



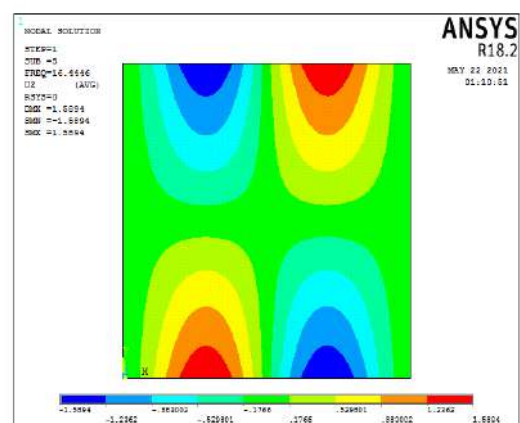
$$f_{21} = 10.657 \text{ Hz}$$



$$f_{31} = 15.019 \text{ Hz}$$



$$f_{23} = 19.574 \text{ Hz}$$



$$f_{22} = 16.445 \text{ Hz}$$

Figure III.38 Modes propres pour la plaque carrée *L-E-L-E*

- Compare les fréquences naturelles (Hz) de la plaque carrée (L-L-L-E) obtenues par Ansys 11 [89], FEM [90] et la présente pour la méthode numérique logiciel Ansys 18.2 :

Tableau III.23 Comparaison Les résultats obtenus et ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque $L-L-L-E$

MODE	FEM [90]			Ansys 11 [89]	Ansys 18.2 présent
	$n_E= 10 \times 10$ $n_D = 330$	$n_E= 50 \times 50$ 7650	$n_E= 100 \times 100$ 30300	$n_E= 100 \times 100$ 40400	$n_E= 100 \times 100$ 40400
1	0.851	0.851	0.851	0.851	0.85148
2	2.060	2.059	2.059	2.059	2.0594
3	5.206	5.194	5.193	5.194	5.1936
4	6.655	6.662	6.662	6.662	6.6621
5	7.530	7.526	7.526	7.527	7.5267
6	13.13	13.18	13.18	13.19	13.185
7	15.09	15.04	15.04	15.04	15.041
8	15.68	15.67	15.66	15.67	15.665
9	17.41	17.39	17.39	17.389	17.388
10	22.47	22.69	22.70	22.70	22.703

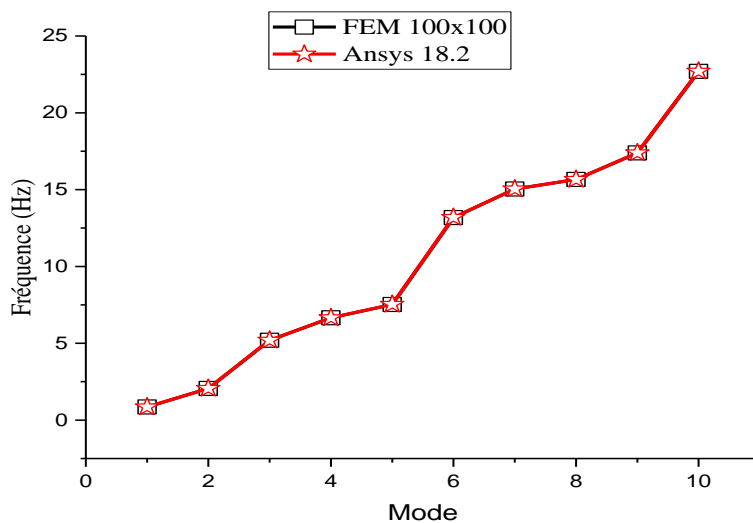


Figure III.39 Comparaison par courbe Les résultats ANSYS /FEM (100 x 100) de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque $L-L-L-E$

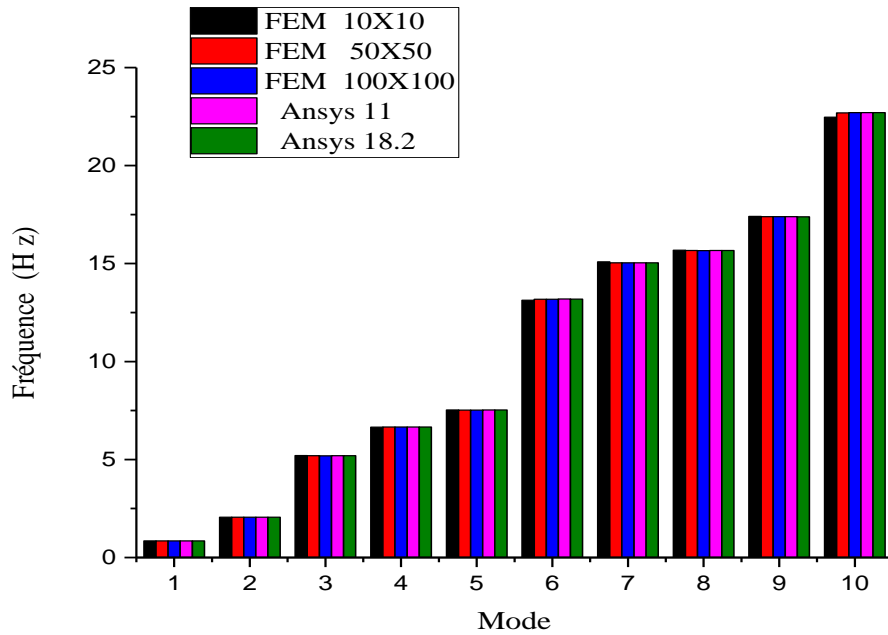
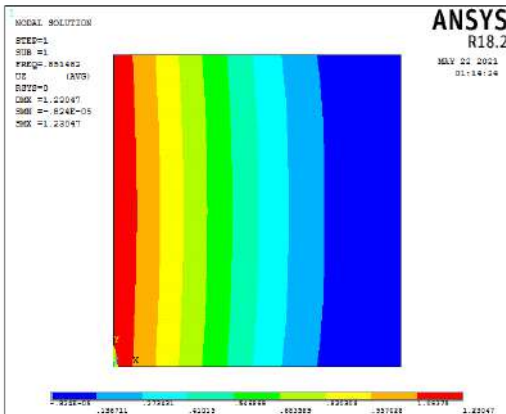
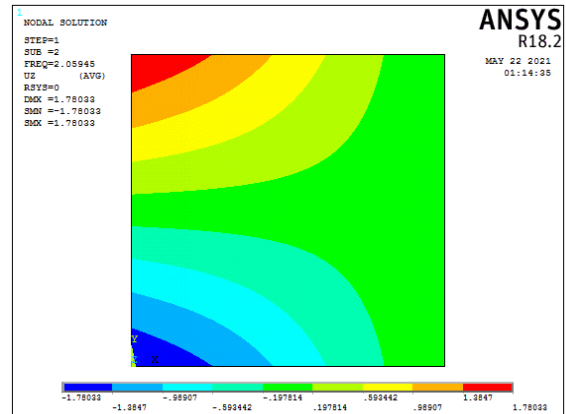


Figure III. 40 Comparaison par colonne Les résultats obtenus et ANSYS/FEM de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque $L-L-L-E$

Modes propres pour la plaque carrée $L-L-L-E$:



$$f_{11} = 0.85148 \text{ Hz}$$



$$f_{21} = 2.0594 \text{ Hz}$$

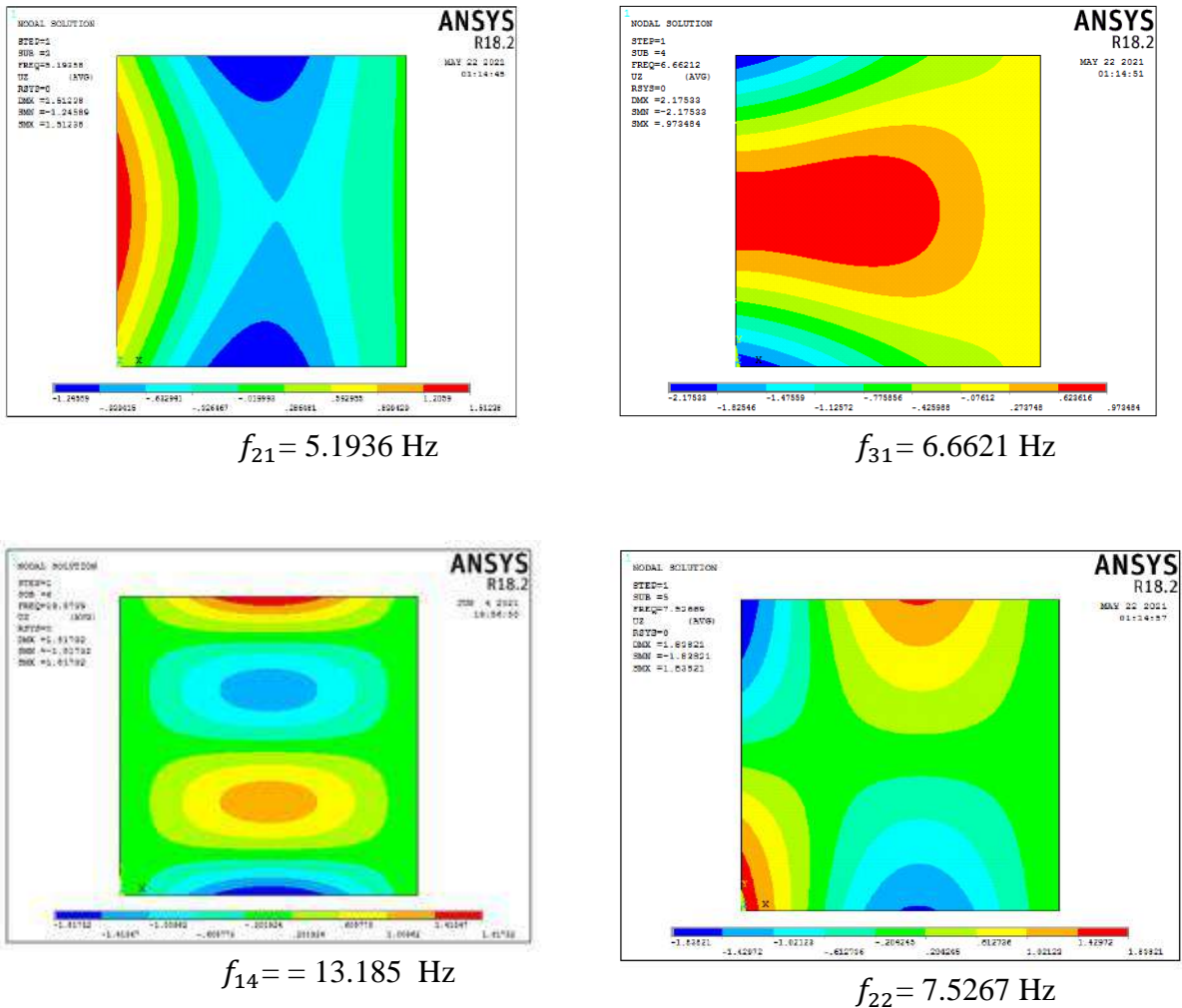


Figure III. 41 Modes propres pour la plaque carrée *L-L-L-E*

Résultats antérieurs et comparaison entre les deux plaques isotrope carrées (L-E-L-E) et (L-L-L-E) , Nous trouvons que la plaque (L-E-L-E) est plus rigidité que la plaque (L-L-L-E) . Selon qu'il condition limite en encastree sont répétées pour plaque selon que plus rigidité pour plaque isotrope.

III.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, deux études sur la prédiction et le comportement vibratoire des plaques isotrope en employant le code de calcul *ANSYS* après avoir vérifié la consistance des résultats obtenus par ce dernier en les comparant avec ceux que annoncés dans les littératures .

La première est celle des plaques en aluminium, elle consiste à déterminer les fréquences de pulsation propres et leurs modes associés pour différents rapports longueur-sur-épaisseur *R* en

fonction de l'effet des conditions aux limites (AAAA, EEEE) et le rapport de dimension R . Nous avons aussi étudié un effet d'éléments de maillage. Les principales conclusions sont :

- À mesure que l'épaisseur de la plaque augmente, la valeur d'une erreur dans les résultats obtenus grâce à un programme augmente.
- L'écart de fréquence propre pour les conditions aux limites (AAAA, EEEE) devient de plus en plus moins au fait d'augmenter le rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque
- La rigidité de la plaque se diffère d'un rapport à un autre pour les mêmes conditions aux limites.
- plus le rapport (a/b) est élevé, moins le rapport (a/h) est élevé, plus la plaque est rigide.
- la plaque EEEE est la plus rigide et La plaque AAAA est la plus souple dans les différents rapports.
- C'est effet Le nombre d'éléments de maillage nous constatons que Les éléments d'ordre supérieur mènent à des résultats plus précis que les éléments d'ordre inférieur.

Dans la deuxième, une étude des plaques isotropes. Les plaques ayant différents rapports de dimension R sont examinées en fonction de l'effet des conditions aux limites, et Comme conclusion principale on peut citer :

- les fréquences propres pour les dix premiers modes de la plaque simplement appuyée (AAAA) et encastree (EEEE) font les extrémités bas et haut respectivement et les autres plaques se situent entre les deux tout dépend des valeurs de la fréquence.
- La plaque AEAE a le même comportement en valeur du rapport de dimension (1.25 et 1.33) et se différent de plus en plus avec l'augmentation du rapport.
- La fréquence propre pour les six conditions aux limites augmente avec l'augmentation du rapport a/b .

Dans la troisième, une étude des plaques isotropes carrées. Les plaques ayant différents les conditions aux limites (L-E-L-E) et (L-L-L-E), Comme conclusion principale on peut citer :

- Augmente la rigidité de la plaque, chaque fois qu'une condition limite encastree est répétée dans plaque.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, détermination par simulation numérique des paramètres modaux pour les plaques isotropes, les plaques isotropes minces Comme l'aluminium. Utilisé dans de plusieurs industries, comme les avions et les automobiles. Il est nécessaire d'étudier le comportement et les caractéristiques dynamiques de ces plaques, les fréquences propres et leurs modes associés.

Jusqu'à maintenant, les méthodes analytiques restent limitées dans la résolution des problèmes vibratoires et l'obtention des résultats exacts. L'approche par éléments finis s'est avérée être une méthode puissante et largement applicable pour l'analyse de ce type des problèmes pour lesquels des solutions analytiques sont presque impossibles à trouver.

Une vérification de la consistance des résultats obtenus par la méthode des éléments finis sous ANSYS pour l'analyse vibratoire des de plaques isotropes minces en faisant une comparaison avec des résultats existants dans les littératures.

En employant le code de calcul ANSYS, on a fait une étude détaillée pour prédire le comportement vibratoire de plaques isotropes minces sous différentes conditions aux limites, , rapports de dimension longueur-sur-largeur et longueur-sur-épaisseur , différentes le nombre d'éléments de maillage.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

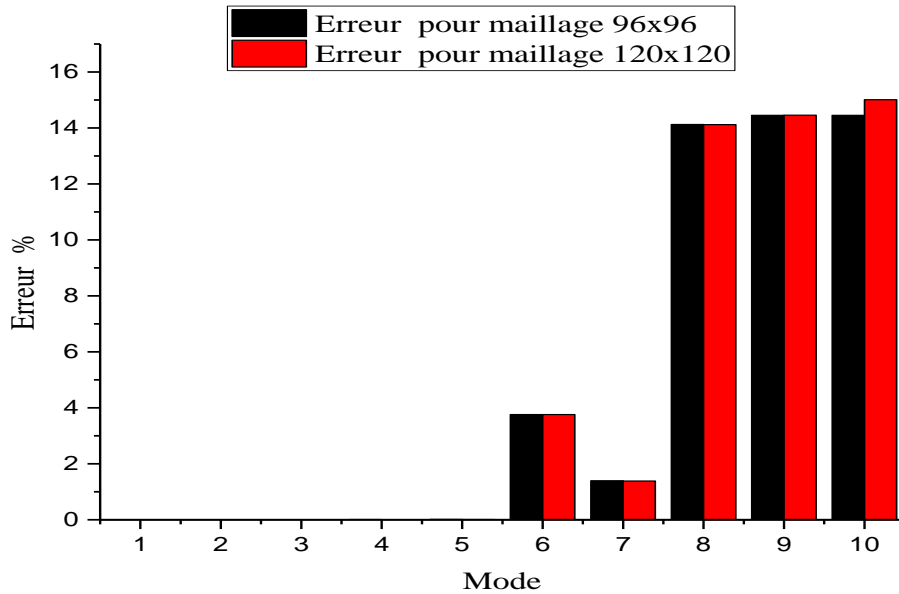
- [1] **Szilard, R.** (2004). " *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*". *Appl. Mech. Rev.*, 57(6), B32-B33
- [2] **Rajesh, K., & Saheb, K. M.** (2016). " *Linear free vibration analysis of rectangular Mindlin plates using coupled displacement method*". *Mathematical Models in Engineering*, 2(1), 41-47.
- [3] **Bottega, W. J.** (2014). " *Engineering vibrations*". CRC Press.
- [4] **Truesdell, C.** (1984). " *Timoshenko's history of strength of materials*" (1953). In *An Idiot's Fugitive Essays on Science* (pp. 251-253). Springer, New York, NY.
- [5] **Euler, L.**, " *De motu vibratorio tympanorum, Novi Commentari Acad Petropolit*", vol. 10, pp. 243–260 (1766).
- [6] **Chladni, E.F.**, " *Die Akustik, Leipzig*", 1802.
- [7] **Bernoulli, J., Jr.**, " *Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers, Nova Acta Acad Petropolit*", vol. 5, pp. 197–219 (1789).
- [8] **Germain, S.**, " *Remarques sur la nature, les bornes et l'etendue de la question des surfaces elastiques et equation general de ces surfaces*", Paris, 1826.
- [9] **Lagrange, J.L.**, *Ann Chim*, vol. 39, pp. 149–207 (1828).
- [10] **Cauchy, A.L.**, " *Sur l'equilibre le mouvement d'une plaque solide*", *Exercises Math*, vol. 3, p. 328 (1828).
- [11] **Poisson, S.D.**, " *Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastique*", *Mem Acad Sci*, vol. 8, p. 357 (1829).
- [12] **Navier, C.L.M.H.**, " *Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris*", 1823.
- [13] **Kirchhoff, G.R.**, " *Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastischem scheibe, J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik*", vol. 40, pp. 51–88 (1850).
- [14] **Lord Kelvin and Tait, P.G.**, " *Treatise on Natural Philosophy*", vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 1883.
- [15] **Clebsch, A.** " *Theorie de l'Elasticite des Corps Solids, Avec des Notes Entendues de Saint-Venant*", Dunod, Paris, pp. 687–706 (1883).
- [16] **Levy, M.**, " *Memoire sur la theorie des plaques elastiques planes*", *J Math Pure Appl*, vol 3, p. 219 (1899).
- [17] **Krylov, A.N.**, " *On stresses experienced by a ship in a sea way*", *Trans Inst Naval Architects*, vol. 40, London, pp. 197–209, 1898.
- [18] **Bubnov, I.G.**, " *Theory of Structures of Ships*", vol. 2, St . Petersburg, 1914.
- [19] **Galerkin, B.G.**, " *Thin Elastic Plates, Gostrojisdats, Leningrad*", 1933 (in Russian).
- [20] **Timoshenko, S.P.**, " *On large deflections of circular plates*", *Mem Inst Ways Commun*, 89, 1915
- [21] **Timoshenko, S.P.**, " *Sur la stabilite des systemes elastiques, Ann des Points et Chaussees*", vol. 13, pp. 496–566; vol. 16, pp. 73–132 (1913).
- [22] **Timoshenko, S.P.** and Woinowsky-Krieger, S., " *Theory of Plates and Shells*", 2nd edn, McGraw-Hill, New York, 1959.

- [23] **Hencky, H.**, "*Der spannungszustand in rechteckigen platten (Diss.)*", Z Andew Math and Mech, vol. 1 (1921).
- [24] **Huber, M.T.**, "*Probleme der Static Techish Wichtiger Orthotroper Platten, Warsawa*", 1929
- [25] **von Karman, T.**, "*Festigkeitsprobleme in Maschinenbau, Encycl der Math Wiss*", vol. 4, pp.348–351 (1910).
- [26] **von Karman, T.**, "*Ef Sechler and Donnel, L.H. The strength of thin plates in compression*", Trans ASME, vol. 54, pp. 53–57 (1932).
- [27] **Nadai, A** "*Die formänderungen und die spannungen von rechteckigen elastischen platten*", Forsch a.d. Gebiete d Ingeieurwesens, Berlin, Nos. 170 and 171 (1915).
- [28] **Foppl, A.**, "*Vorlesungen über technische Mechanik*", vols 1 and 2, 14th and 15th edns, Verlag R., Oldenburg, Munich, 1944, 1951.
- [29] **Gehring, F.**, "*Vorlesungen über Mathematiceche Physik, Mechanik*", 2nd edn, Berlin, 1877.
- [30] **Boussinesq, J.**, "*Complements anne étude sur la theorie de l'équilibre et du mouvement des solides elastiques*", "J de Math Pures et Appl", vol. 3, ses. t.5 (1879).
- [31] **Leknitskii, S.G.**, "*Anisotropic Plates (English translation of the original Russian work)*", Gordon and Breach, New York, 1968.
- [32] **Reissner, E.**, "*The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*", J Appl Mech Trans ASME, vol. 12, pp. A69–A77 (1945).
- [33] **Volmir, A.S.**, "*Flexible Plates and Shells, Gos. Izd-vo Techn.-Teoret*". Lit-ry, Moscow, 1956 (in Russian).
- [34] **Panov, D.Yu.**, "*On large deflections of circular plates*", Prikl Matem Mech, vol. 5, No. 2, pp. 45–56 (1941) (in Russian).
- [35] **Bryan, G.N.**, "*On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane*", Proc London Math Soc, 22, 54–67 (1981)
- [36] **Cox, H.L.**, "*Buckling of Thin Plates in Compression*", Rep. and Memor., No. 1553,(1933).
- [37] **Hartmann, F.**, "*Knickung, Kippung, Beulung*", Springer-Verlag, Berlin, 1933.
- [38] **Dinnik, A.N.**, "*A stability of compressed circular plate, Izv Kiev Polyt In-ta*", 1911 (in Russian).
- [39] **Nadai, A.**, "*Über das ausbeulen von kreisförmigen platten, ZeitschrVDJ*", No.9,10 (1915).
- [40] **Meissner, E.**, "*Über das knicken kreisförmigen schein, Schweiz Bauzeitung*", 101, pp. 87–89 (1933).
- [41] **Southwell, R.V. and Scan, S.**, "*On the stability under shearing forces of a flat elastic strip*", Proc Roy Soc, A105, 582 (1924).
- [42] **Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.**, "*Theory of Elastic Stability*", 2nd edn, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [43] **Karman, Th., Sechler, E.E. and Donnel, L.H.**, "*The strength of thin plates in compression*", Trans ASME, 54, 53–57 (1932).
- [44] **Levy, S** "*Bending of Rectangular Plates with Large Deflections*", NACA, No.737, 1942.
- [45] **Marguerre, K.**, "*Die mittragende briele des gedru cken plattenstreifens*",

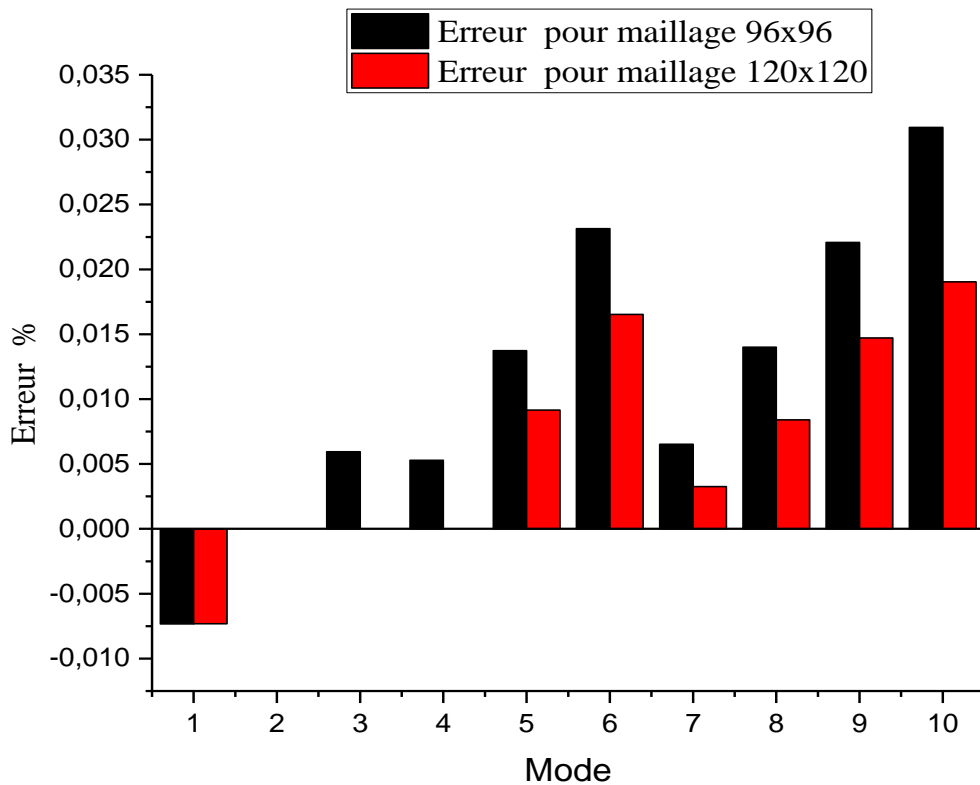
- Luftfahrtforschung, 14, No. 3, 1937.
- [46] **Gerard, G. and Becker, H.**, "*Handbook of Structural Stability*", Part1 – Buckling of Flat Plates, NACA TN 3781, 1957.
- [47] **Volmir, A.S.**, "*Stability of Elastic Systems*", Gos Izd-vo Fiz-Mat. Lit-ry, Moscow, 1963
- [48] **Cox, H.L.**, "*The Buckling of Plates and Shells. Macmillan*", New York, 1963.
- [49] **Voight, W.**, "*Bemerkungen zu dem problem der transversalem schwingungen rechteckiger platten*", Nachr. Ges (Go'ttingen), No. 6, pp. 225–230 (1893).
- [50] **Ritz, W.**, "*Theorie der transversalschwingungen, einer quadratischen platte mit frein randern*", Ann Physic, Bd., 28, pp. 737–786 (1909).
- [51] **Timoshenko, S.P. and Young, D.H.**, "Vibration Problems in Engineering", John Wiley and Sons., New York, 1963.
- [52] **Den Hartog, J.P.**, "*Mechanical Vibrations, 4th edn, McGraw-Hill*", New York, 1958.
- [53] **Thompson, W.T.**, "*Theory of Vibrations and Applications*", Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [54] **Leissa, A.W.**, "Vibration of Plates, "National Aeronautics and Space Administration", Washington, D.C., 1969.
- [55] **Timoshenko, S.P.**, "*History of Strength of Materials*", McGraw-Hill, New York, 1953.
- [56] **Truesdell, C.**, "*Essays in the History of Mechanic*.", Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [57] **Vinson, J. R.** (2005). "*Plate and panel structures of isotropic, composite and piezoelectric materials, including sandwich construction*" (Vol.120). Springer Science & Business Media.
- [58] **Ma, C-C and Lin, C-C** (2001) "*Experimental Investigation of Vibrating Laminated Composite Plates by Optical Interferometry Method*," *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 3, March, pp. 491-497
- [59] web site https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Hooke
- [60] **Moës, N.** (2011). *Mécanique des milieux continus* (Doctoral dissertation, Ecole Centrale de Nantes (ECN)).
- [61] **Gay, Daniel.** "Composite materials: design and applications". CRC press, 2014
- [62] **Huang, H. C.** "(2012). *Static and dynamic analyses of plates and shells: theory, software and applications*". Springer Science & Business Media.
- [63] **Bert, C. W., & Malik, M.** " (1994). *Frequency equations and modes of free vibrations of rectangular plates with various edge conditions* ". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 208(5), 307-319.
- [64] **Ramu, I., & Mohanty, S. C.** (2012). "*Study on free vibration analysis of rectangular plate structures using finite element method*". *Procedia engineering*, 38, 2758-2766.
- [65] **Altabay, W. A., Noori, M., & Wang, L.** (2018). "Using ANSYS for Finite Element Analysis", Volume I: A Tutorial for Engineers.
- [66] MSC/NASTRAN, MacNeal-Schwendler Corp., 600 Suffolk St., Lowell, MA, 01854.
- [67] **DeSalvo, G. J.** (1973). Swanson JA "*ANSYS Engineering Analysis System User's Manual*". Swanson Analysis Systems.
- [68] COSMOS/M, "*Structural Research & Analysis Corp.* ", 12121 Wilshire Blvd., Los Angeles, CA90025.

- [69] web site: <http://www.mscsoftware.com>
- [70] web site: <http://ce6000.cegatech.edu>.
- [71] *Computers & Structures, Inc.*, 1995 University Ave., **Berkeley**, CA 94704.
- [72] **Kurowski, Paul**. "Engineering Analysis with SolidWorks Simulation 2013". SDC
- [73] **Decha-Umphai, K.**(1987). "Finite element methodology for nonlinear free and harmonic forced vibrations of beam and plate structures".
- [74] **Altabay, W. A., Noori, M., & Wang, L.** (2018). "Using ANSYS for Finite Element Analysis", Volume I: A Tutorial for Engineers
- [75] **Madenci, E., & Guven, I.**(2015). "The finite element method and applications in engineering using ANSYS®". Springer
- [76] **Logan, D. L.** (2016). "A first course in the finite element method". Cengage Learning.
- [77] **Khennane, A.**(2013). "Introduction to finite element analysis using MATLAB® and abaqus". CRC Press.
- [78] **LO, Daniel SH.** "Finite element mesh generation." CRC Press, 2014.
- [79] **Alawadhi, E. M.** (2015). " Finite element simulations using ANSYS." CRC Press.
- [80] **Frey, P. J., & George, P. L.** (2007). *Mesh generation: application to finite elements*.IST
- [81] **Thompson, M. K., & Thompson, J. M.** (2017). " ANSYS mechanical APDL for finite element analysis." Butterworth-Heinemann.
- [82] "Analysis of Plates by using ANSYS ", **N.V.Divya , Syed Rizwan** , December 2016
- [83] Logiciel ANSYS APDL 18.2 Tutorial Guide
- [84] **Guguloth, G. N., Singh, B. N., & Ranjan, V.** (2019). "Free vibration analysis of simply supported rectangular plates." *Vibroengineering PROCEDIA*, 29, 270-273.
- [85] web site : <https://www.maxicours.com/se/cours/les-modes-propres-de-vibration-et->
- [86] **Biancolini, M. E., Brutti, C., & Reccia, L.** (2005). "Approximate solution for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates". *Journal of sound and vibration*, 288 (1-2), 321-344.
- [87] **Hearmon, R. F. S.** (1959). "The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or supported edges". *J. appl. Mech.*, 26, 537-540.
- [88] **Park, I., Kim, T., & Lee, U.** (2016). "Frequency domain spectral element model for the vibration analysis of a thin plate with arbitrary boundary conditions". *Mathematical Problems in Engineering*, 2016.
- [89] **Release, A. N. S. Y. S.** (2006). "11.0 Documentation for ANSYS", ANSYS. Inc., Canonsburg, PA, USA.
- [90] **T. Y. Yang**, "Finite Element Structural Analysis", Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1986
- [91] **Werfalli, N. M., & Karoud, A. A.** (2012). "Free vibration analysis of rectangular plates using Galerkin-based finite element method". *International Journal of Mechanical Engineering*, 2(4), 59-67.
- [92] **SBRYVM, R.** (2017). "Vibrational Analysis of Aluminum 6061 Plate". *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 6,15038-15045.

ANNEXE A : Effet d'élément du maillage



Comparaison par colonne des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R=12



Comparaison par colonne des valeurs d'erreur pour différents éléments du maillage pour R= 24

ANNEXE B : Effet de rapport longueur-sur-épaisseur

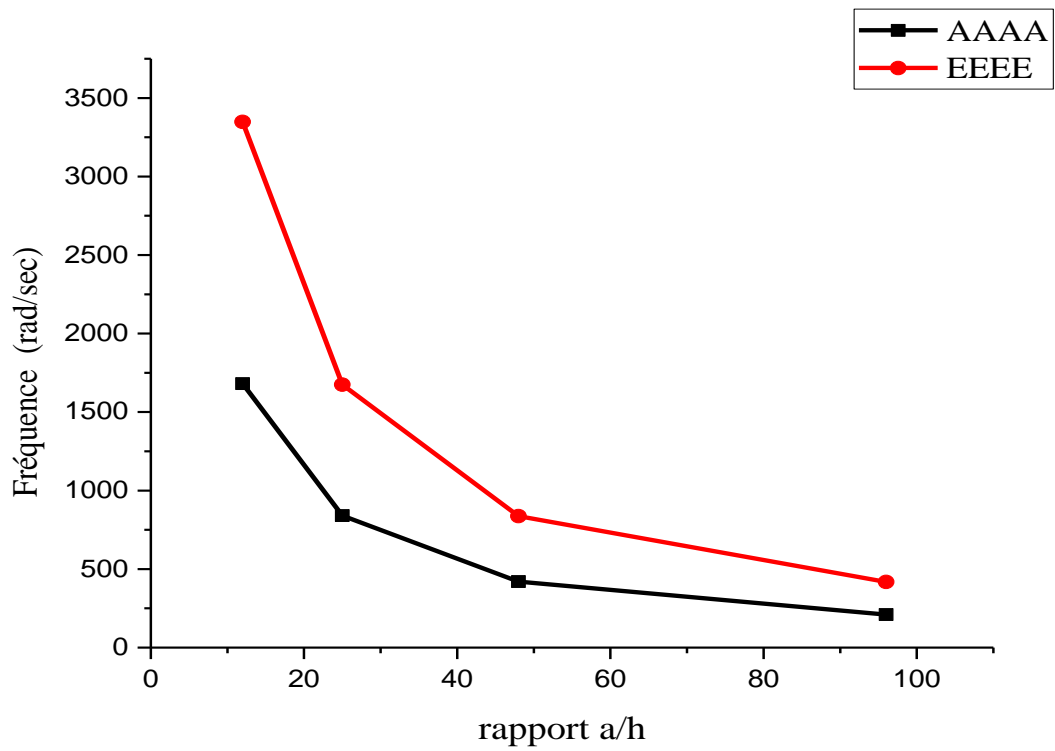
Conditions aux limites	Mode	$f_{mn}(Hz)$ $R=1$			
		96	48	24	12
AAAA	1	84,038	168,08	336,15	672,3
	2	210,09	420,18	840,36	1680,7
	3	210,09	420,18	840,36	1680,7
	4	336,13	672,26	1344,5	2689
	5	420,17	840,35	1680,7	3361,4
	6	420,17	840,35	1680,7	3361,4
	7	546,19	1092,4	2184,8	4369,5
	8	546,19	1092,4	2184,8	4369,5
	9	714,28	1428,6	2857,1	5033,8
	10	714,28	1428,6	2857,1	5033,8
EEEE	1	153,2	306,4	612,8	1225,6
	2	312,45	624,9	1249,8	2499,6
	3	312,45	624,9	1249,8	2499,6
	4	460,67	921,33	1842,7	3685,3
	5	560,15	1120,3	2240,6	4481,2
	6	562,81	1125,6	2251,2	4502,5
	7	702,36	1404,7	2809,4	5033,8
	8	702,36	1404,7	2809,4	5033,8
	9	896,19	1792,4	3584,8	5618,9
	10	896,19	1792,4	3584,8	5618,9

Annexe

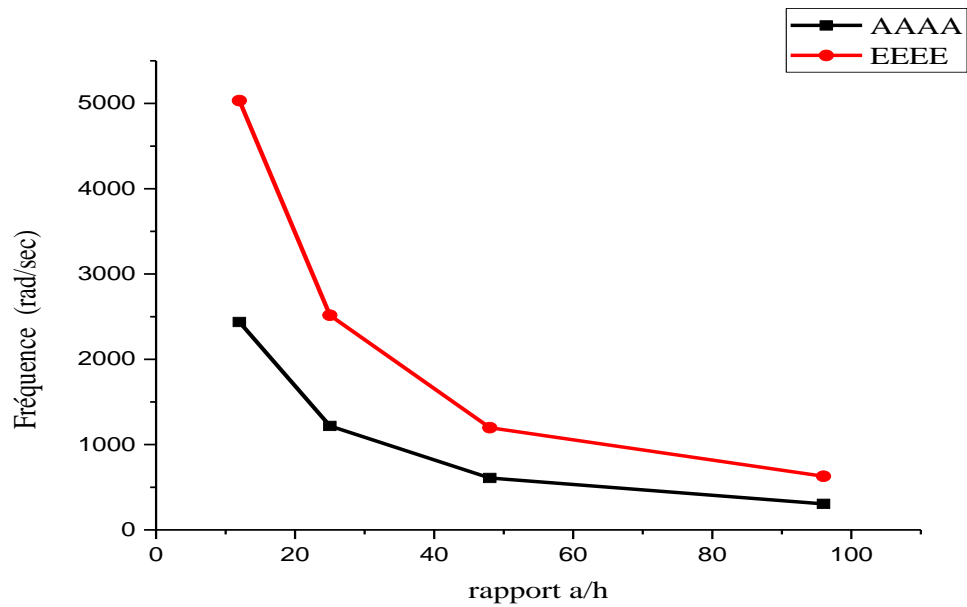
Conditions aux limites	Mode	$f_{mn}(\text{Hz})$ $R=2$			
		96	48	24	12
AAAA	1	210,09	420,18	840,37	1680,7
	2	336,13	672,27	1344,5	2689,1
	3	546,2	1092,4	2184,8	4369,6
	4	714,28	1428,6	2857,1	5714,3
	5	840,29	1680,6	3361,2	6722,3
	6	840,31	1680,6	3361,2	6722,5
	7	1050,3	2100,6	4201,1	6780,6
	8	1218,5	2437	4873,9	8402,2
	9	1344,2	2688,5	5376,9	9031,4
	10	1554,5	3109	6218	9504
EEEE	1	418,52	837,03	1674,1	3348,1
	2	541,92	1083,8	2167,7	4335,4
	3	762,32	1524,6	3049,3	6098,5
	4	1078,4	2156,8	4313,6	6780,6
	5	1089,4	2178,8	4357,7	8627,1
	6	1210,1	2420,3	4840,5	8715,4
	7	1417,7	2835,3	5670,7	9031,4
	8	1485,8	2971,6	5943,2	9504
	9	1715,8	3431,6	6780,6	3348,1
	10	1981,6	3963,1	6863,2	4335,4

Annexe

Conditions aux limites	Mode	$f_{mn}(\text{Hz})$ $R=2.5$			
		96	48	24	12
AAAA	1	304,63	609,26	1218,5	2437,1
	2	430,66	861,33	1722,7	3445,3
	3	640,71	1281,4	2562,8	5125,7
	4	934,78	1869,6	3739,1	7478,2
	5	1092,4	2184,8	4369,7	7843,7
	6	1218,4	2436,8	4873,6	8739,3
	7	1312,9	2625,8	5251,6	9747,2
	8	1428,3	2856,7	5713,4	10503
	9	1722,2	3444,4	6888,8	10748
	10	1775,1	3550,2	7100,5	11149
EEEE	1	629,07	1197,9	2516,3	5032,6
	2	739,8	1308	2959,2	5918,4
	3	942,22	1554,3	3768,9	7537,8
	4	1241,6	1967,9	4966,5	7843,7
	5	1636	2564,8	6544,1	9932,9
	6	1678,2	3285,2	6712,8	10748
	7	1792,7	3347,3	7170,8	11149
	8	1989	3421,1	7843,7	11471
	9	2122,2	3695,8	7956,1	12427
	10	2272,1	4121,4	8488,7	13088

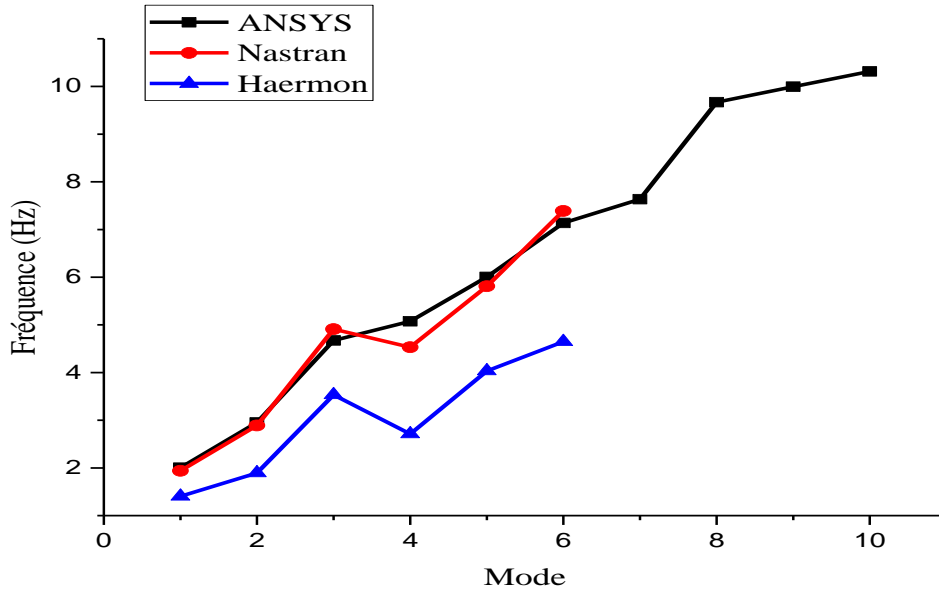


Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h , plaque avec $R = 2$

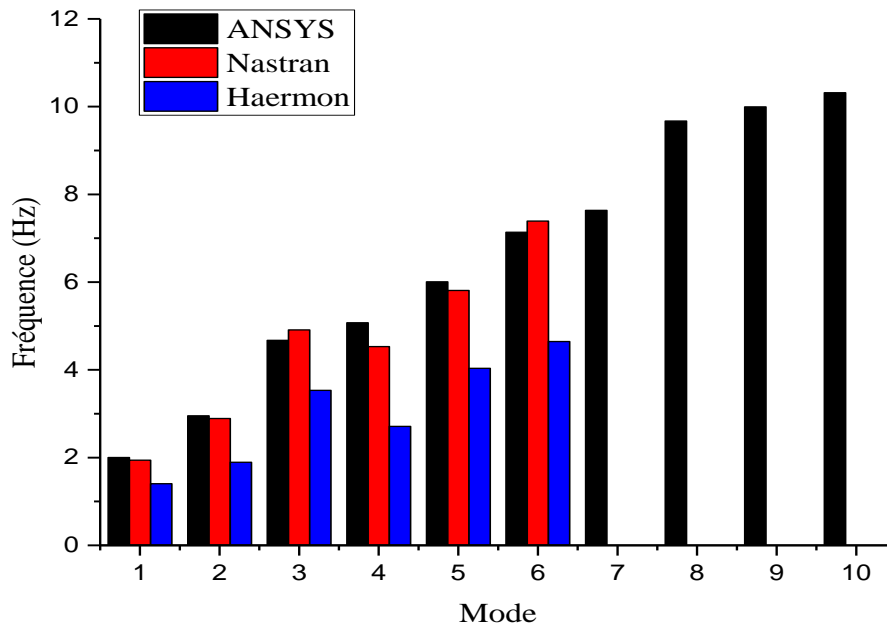


Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h , plaque avec $R = 2.5$

ANNEXE C : Etude des vibrations des plaques à différentes conditions aux limites et dimensions

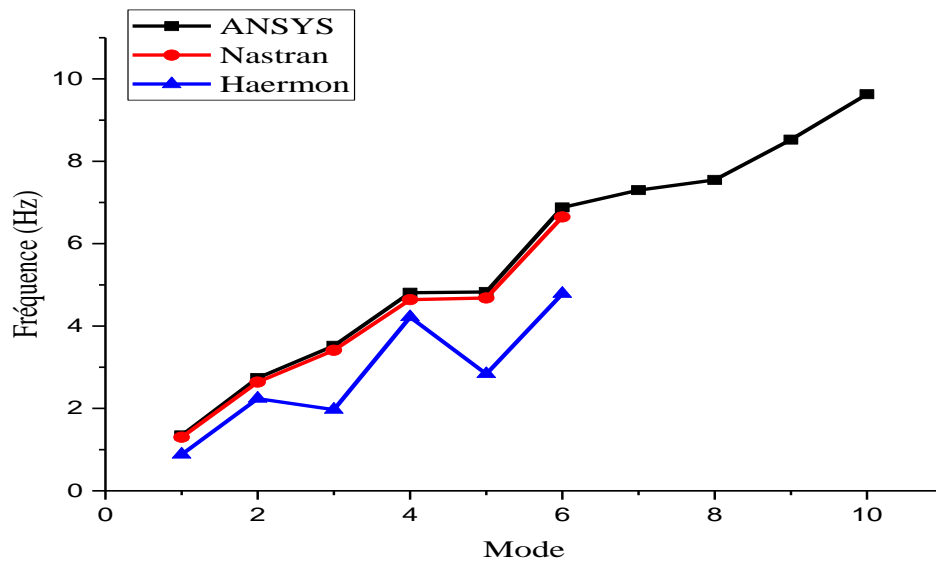


Comparaison par courbe des résultats *ANSYS/Nastran* et Haermon pour la plaque EAEE $R=1.5$

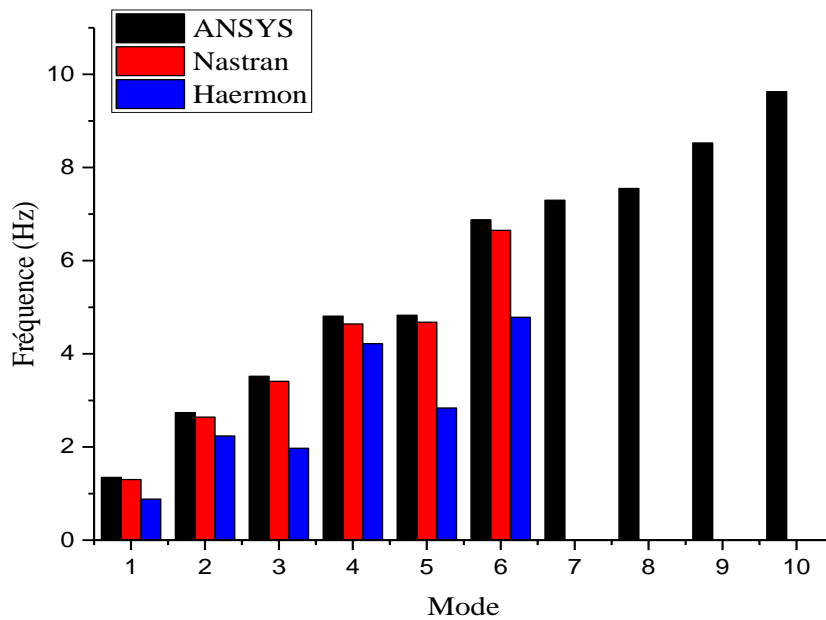


Comparaison par colonne des résultats *ANSYS/Nastran* et Haermon pour la plaque EAEE $R=1.5$

Annexe

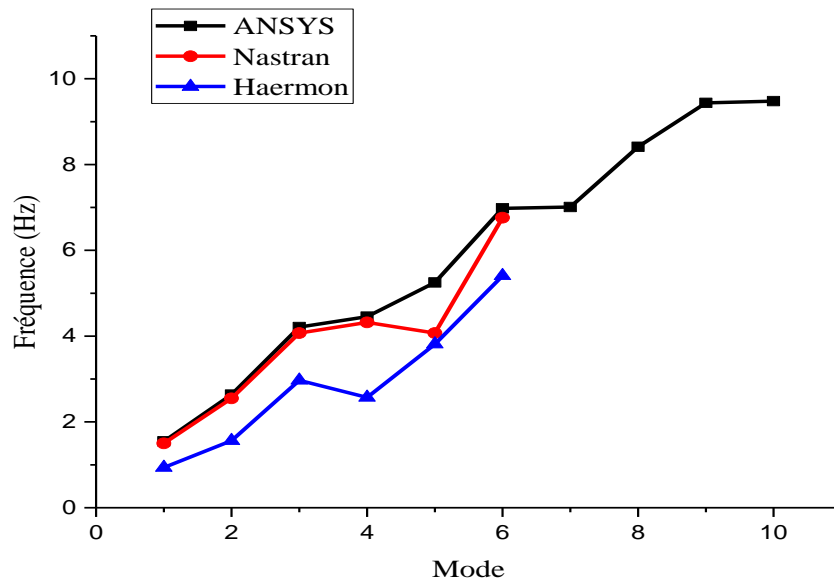


Comparaison par courbe des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque AEAE
 $R=1.5$

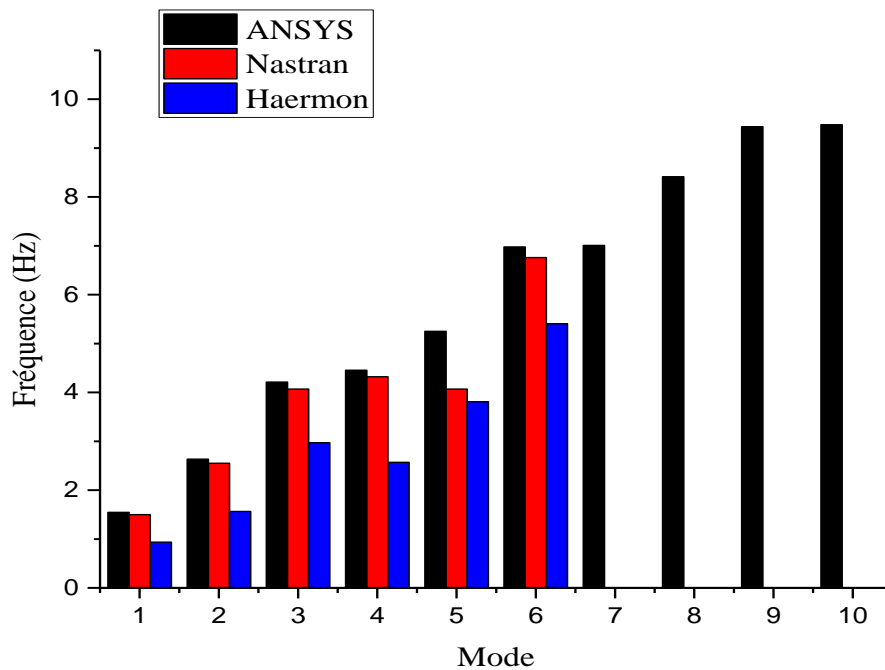


Comparaison par colonne des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque AEAE
 $R=1.5$

Annexe

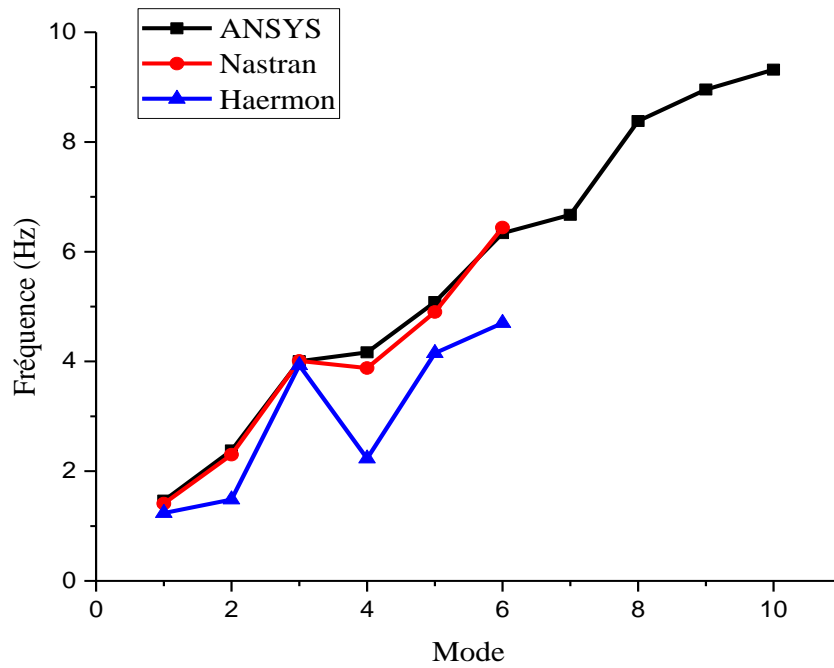


Comparaison par courbe des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque AAEE
 $R=1.5$

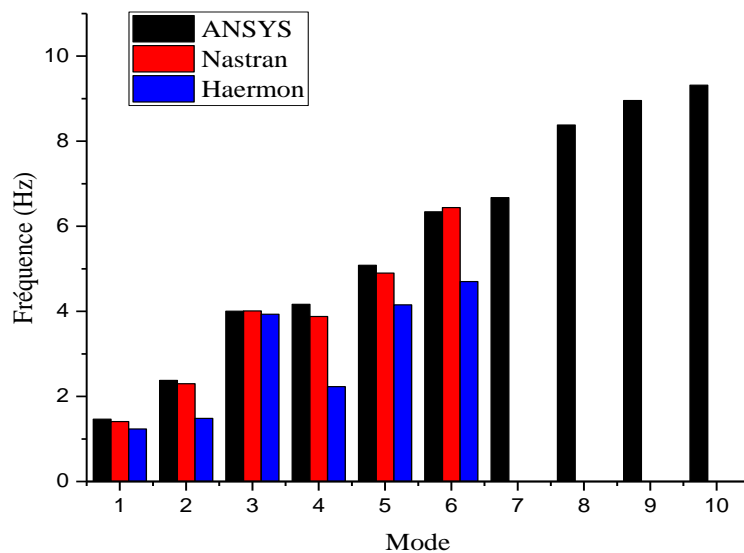


Comparaison par colonne des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque AAEE
 $R=1.5$

Annexe



Comparaison par courbe des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque *AAEA*
 $R=1.5$



Comparaison par colonne des résultats *ANSYS/Nastran et Haermon* pour la plaque *AAEA*
 $R=1.5$