RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque

Université Kasdi Merbah Ouargla.

Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat en 3ème cycle LMD

Filière: Mathématiques

Spécialité: Équations Différentielles aux dérivées Partielles et Analyse Numérique

Par: KASMI Lotfi

TITRE:

Contribution à l'étude de quelques problèmes fractionnaires àvec des conditions non locales

Soutenue publiquement le: 09/06/2021

Devant le jury composé de:

Dr. A. Bensayah	M. A. Univ Kasdi Merbah-Ouargla	Président
Dr. A. Guerfi	M. A. Univ Kasdi Merbah-Ouargla	Directeur de thèse
Pr. D. Ahmed Chacha	Professeur. Univ Kasdi Merbah-Ouargla	Examinateur
Pr. A. Mansour	Professeur. Univ Hamma Lakhdar-Eloued	Examinateur
Pr. A. Aissaoui	Professeur. Univ Hamma Lakhdar-Eloued	Examinateur
Dr. I. Merabet	M. A. Univ Kasdi Merbah-Ouargla	Examinateur

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, ma sincère gratitude et mes remerciements s'adressent à Dieu le Tout-Puissant qui m'a donné la force et le courage d'accomplir la présente thèse.

- Deuxièmement, j'exprime ma profonde gratitude à mes parents pour leurs encouragements, leur soutien et leur patience tout au long de mon travail !

- Au Professeur : Said Mesloub pour tous ses précieux conseils et assistance inoubliable, et pour sa formation pour moi, et pour tout ce qu'il a fait.

- Au Professeur : Hocine Guediri pour tous ses précieux conseils et ses aides consistants.

- Mes remerciements et ma reconnaissance vont également à :- Mon superviseur, Dr. Amara Guerfi pour le soutien qu'il m'a apporté, pour ses encouragements rassurants et pour son humanisme.

- Aux membres du jury qui me font l'honneur d'évaluer ce travail.

- Tout le personnel administratif de notre lycée et de notre université.

- Je remercie de tout mon coeur mon beau-frère, Bencheikh Rachid d'avoir assuré le suivi administratif de mon dossier, pour sa disponibilité et sa patience. Il m'a été d'une grande aide dans l'aboutissement de ce modeste travail.

- Mes remerciements vont par ailleurs à ma chère épouse, à la prunelle de mes yeux mon fils Iyad. Au réconfort de mon cœur ma fille Iline. À toutes mes chères soeurs et frères. À tous mes amis, mes proches et toute ma famille sont à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans l'achèvement de ma thèse.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse aux problèmes non locaux pour des équations intégro-différentielles hyperboliques, avec des conditions aux limites du type intégrale. On a développé la méthode des inégalités d'énergie pour des problèmes très compliqués, ou, on a appliqué la méthode pour un problème fractionnaire (au sens Caputo) bi-dimensionnel , les conditions du problème sont des conditions intégrales (non local) et classique (Neumann et Dirichlet), Nous avons étudié tous les problèmes ci-dessus en termes d'existence et d'unicité de la solution dans chaque cas.

La thèse est composée de 4 chapitres, le chapitre I est une introduction qui présente l'historique des problèmes non classiques étudiés, l'importance et le but du thème. Le chapitre II est consacré aux rappels de certains concepts préliminaires fondamentaux et outils de base dans ce travail concernant les opérateurs, la densité dans les espaces de Hilbert, les espaces fonctionnels, calcul fractionnaire, et certaines lemmes techniques.

Le chapitre III est comme suit : nous donnons l'énoncé du problème fractionnaire et les espaces de fonctions nécessaires. Ensuite, nous prouvons une estimation a priori à partir de laquelle on déduit l'unicité d'une solution forte du problème posé. Aussi, nous établissons l'existence de la solution de notre problème, en prouvant que la fermeture de la valeur de l'opérateur L généré par le problème, est dense dans l'espace d'Hilbert Y.

La méthode utilisée dans les problèmes classiques (l'estimation a priori), ont été développées au niveau fractionnaire et avec succès. (C'est le sujet de notre article).

Nous établissons l'existence et l'unicité de la solution forte pour le problème linéaire associé. Sur la base des résultats obtenus pour le problème linéaire, nous appliquons un processus itératif afin d'établir le bien posé du problème non linéaire.(dans chapitre IV).

Une conclusion générale. Une comparaison avec d'autres études et méthodes réalisées dans le même domaine et les difficultés, une perspective est apportée à la fin de la thèse ouvrant la voie à de futures recherches et applications.

Mots clés : Problème intégro-différentiel ; Existence et unicité ; Inégalité

d'énergie ; Conditions aux limites intégrales ; Problème fractionnaire non linéaire.

Abstract

In this work we are interested in nonlocal problems for hyperbolic integro-differential equations, with boundary conditions of the integral type. We have developed the method of energy inequalities for very complex problems, or, we have applied the method for a fractional problem (in the Caputo sense) two-dimensional, the conditions of the problem are integral (non-local) and classical conditions (Neumann and Dirichlet), We have studied all the above problems in terms of existence and uniqueness of the solution in each case.

The thesis begins with an introduction which presents the history of the non-classical problems studied, the importance and the purpose of the topic. Chapter II is devoted to reminders of some fundamental preliminary concepts and basic tools in this work concerning operators, density in Hilbert spaces, functional spaces, fractional calculus, and certain technical lemmas.

Chapter III is as follows : we give the statement of the fractional problem and the necessary function spaces. Then, we prove an a priori estimate from which we deduce the uniqueness of a strong solution of the problem posed. Also, we establish the existence of the solution of our problem, by proving that the closure of the value of the operator L generated by the problem, is dense in the space of Hilbert Y.

The method used in classical problems (the a priori estimation), have been developed at the fractional level and with success. (This is the subject of our article).

We establish the existence and the uniqueness of the strong solution for the associated linear problem. On the basis of the results obtained for the linear problem, we apply an iterative process in order to establish the good posed of the nonlinear problem (in chapter IV).

A general conclusion. A comparison with other studies and methods carried out in the same field and the difficulties, a perspective is brought at the end of the thesis opening the way to future research and applications.

Keywords : Integro-differential problem ; Existence and uniqueness ; Energy inequality ; Integral boundary conditions ; Nonlinear fractional problem.

Molakhas

Notations

$\mathcal{L}, \ell$	opérateurs.
$\Im_x f$	$= \int_0^x f(\xi) d\xi.$
$\Im_x^2 f$	$= \int_0^x \int_0^\eta f(\xi) d\xi d\eta.$
EDP	équation aux dérivées partielles.
EDF	équation différentielle fractionnaire.
I_0^α	intégrale fractionnaire d'ordre α.
${}_0^R\partial_t^a$	dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Reimann-Liouville.
${}_0^C\partial_t^a$	dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.
$R(L)$	Image de l'opérateur L.
$D(L)$	le domaine de l'opérateur L.
$L_p^2(Q)$	espace des fonctions u à carré intégrables avec poids, définies sur Q.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont des outils essentiels pour la modélisation et leur étude occupe les mathématiciens depuis le XVIIIe siècle avec les travaux d'Euler, D'Alembert, Lagrange et de Laplace ...etc. Au cours de ces quarante dernières années, de nombreux phénomènes et problèmes modernes, physiques et mécaniques, biologiques et technologiques modelés par des équations aux dérivées partielles (EDP), parabolique ou hyperbolique, mais avec des conditions intégrales. Ainsi, les conditions intégrales (conditions aux bords) peuvent être utilisées quand il est impossible de mesurer la quantité demandée à la frontière, où la valeur totale ou moyenne est inconnue. Plus précisement, les conditions standards (Dirichlet, Neumann, ...) qui sont prescrites de temps en temps ne sont pas toujours suffisantes car ils dépendent de l'environnement physique où les données peuvent être mesurées dans le domaine de la frontière étudiée. Dans certains cas, il est impossible de prescrire la solution au niveau des bords, parce que la valeur moyenne de la solution peut être seulement mesurée le long du bord ou le long d'une partie de celui-ci.

La signification physique des termes fondamentaux de l'intégrale (énergie totale, la température moyenne, la masse totale des impuretés, le débit total, temps, etc) a servi la raison principale de l'intérêt de plus en plus à ces problèmes.

Le problème de la modélisation mathématique des conditions intégrales est utilisé dans la théorie du transfert de chaleur [10], physique des plasmas (processus de diffusion de particules dans un plasma turbulent) [12], la dynamique des eaux souterraines [15], thermo-élasticité [20], génie chimique [21], certains procédés technologiques [24], en problèmes de biologie [27], les modèles démographiques [33], semi-conducteurs [37], l'oscillation d'un milieu [38], et dans les problèmes inverses de la théorie de la conduction thermique [54].

Pour toutes ces raisons, les équations aux dérivées partielles avec des conditions intégrales ont reçu une attention considérable. Cannon est le premier s'intéresse à l'étude de ces problèmes avec une condition intégrale :

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0,$$

dans la référence [5] en 1963, il est démontré par l'utilisation de la méthode du potentiel, l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème mixte, combinant une condition de Dirichlet avec condition intégrale pour l'équation de la chaleur dans l'étude de la conduction thermique dans une barre de métal. Toujours en utilisant la même méthode, en 1964 Kamynin a établi dans [6] l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème similaire avec une représentation plus large au moyen d'un système d'équations intégrales.

Dans des études sur la diffusion des particules dans un plasma turbulent et la propagation de la chaleur dans une tige mince, N. I. lonkin a démontré en [9] en 1977, en utilisant la méthode Fourier, l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte associant une condition de Dirichlet avec une condition intégrale pour l'équation de chaleur.

Par la suite, plusieurs travaux relatifs à ces problèmes ont été publiés parmi lesquels comprennent les travaux de Cannon- Van Der Hoek [13] en 1981, Cannon-Esteva Van Der Hoek [17] en 1987. Dans ces travaux, le sujet en question portait sur les problèmes mixtes liés à l'étude d'une équation uni dimensionnelle parabolique du second degré combinant une condition classique et intégrale par l'utilisation des méthodes différentes.

Dans les mêmes conditions aux limites que précédemment, les auteurs : Yurchuk [16] en 1986 ; Kartynnik [18] en 1990, et Benouar-Yurchuk [19] en 1991, ont montré l'existence et l'unicité de la solution pour un équations paraboliques de second ordre à l'aide de la méthode d'estimation a priori. Ensuite, plus de travail a été fait par changer l'équation parabolique et les conditions aux limites utilisées, par ex : Bouziani-Benouar [26] en 1995.

D'autres résultats sur quelques problèmes différents ont été mis en place, dans une série d'oeuvres séparées par Mesloub et all [32] en 1998, Pulkina [35, 39], pour les équations hyperboliques avec des conditions intégrales, pour les équations pseudo-hyperbolique nous mentionnons Bouziani [41, 60],et pseudo-parabolique dans Bouziani [42, 59] . Pour un ordre élevé nous mentionnons Mesloub [36, 58], aussi les problèmes ont été étudiés dans Merad et all[55] en 2013.

On peut aussi mentionner un nombre limité de problèmes semi-linéaires et non-linéaires pour des équations paraboliques et hyperboliques [44, 45] dans lesquels les auteurs ont étudié des problèmes mixtes avec des conditions intégrales.

Aussi N. Merazga dans [46] en 2006, a étudié les problèmes linéaires mixtes et semi-linéaires avec une condition non local, par un procédé basé sur une Rothe semi-discrétisation de temps du problème donné.

La méthode adoptée dans la plupart des articles précédents est celle des" inégalités d'énergie" ou ce qu'on appelle "estimations a priori". Cette méthode basée sur les idées de I.G. Pétrovski [1] en 1938, qui l'a utilisée dans la solution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, par la suite Leray.J [2] en 1952, et L. Garding [3] en 1957, ont fait des développements importants dans la méthode était introduite par A.A. Dezin et all [4] en 1959. Le procédé a également été utilisé et mis au point dans les travaux de N.I.Yurchuk [8, 14].

En fait, Cannon[5] en 1963, Ionkin[9] en 1977, et Yurchuk [16] en 1986, ont utilisé la condition intégrale :

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t). \tag{1}$$

Pour certaines classes d'équations paraboliques jusqu'en 1990, Kartynnik [18] a développé la méthode des inégalités d'énergie en prenant la condition intégrale mené d'une borne variable :

$$\int_0^b u(x,t)dx = E(t), b < 1. \tag{2}$$

Sur la base des études précédentes, plusieurs études ont été réalisées en modifiant l'équation (hyperbolique, parabolique, et le type de pseudo-mixte) ou en changeant l'ordre des dérivées et les conditions aux limites des problèmes étudiés.

Le but de la présente thèse est d'appliquer la méthode des inégalités d'énergie pour un problème fractionnaire bidimensionnel, avec des conditions aux bords intégrales (non local) et classiques (Neumann et Dirichlet).

D'abord, nous écrivons le problème posé sous la forme d'une équation opératorielle :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D(L), \tag{3}$$

où l'opérateur L est un opérateur d'un espace de Banach B dans un espace de Hilbert bien choisi F.

Deuxièmement, l'estimation a priori est établie pour l'opérateur L.

Enfin, nous démontrons la densité de valeurs de cet opérateur dans l'espace F.

Plus précisément, on démontre l'inégalité d'énergie suivante

$$\|u\|_B \le c\|Lu\|_F. \tag{4}$$

Il est à noter que, pour le problème dans la thèse, on obtient ce type d'estimations a priori en multipliant l'équation considérée par un opérateur intégro-différentielle Mu (contenant la fonction u, et ses dérivées avec une certaine fonction de poids) défini sur : $\Omega^\tau = (0,1) \times (0,\tau)$, et l'intégration dans le domaine Ω^τ. Le choix de l'opérateur Mu est très important, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite, nous montrons que l'opérateur L de B dans F admet une fermeture $\overline{L}$, donc la solution de l'équation opératorielle :

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \quad u \in D(\overline{L}), \tag{5}$$

est appelée une solution généralisée forte du problème étudié. En passant à la limite, l'estimation (4) sera étendue à $\overline{L}$, c-à-d :

$$\|u\|_B \leq c\|\overline{L}u\|_F. \tag{6}$$

Ainsi, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (5). Puisque l'image de l'opérateur $\overline{L}$ est fermée dans F et que $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$, la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F garantie l'existence de la solution forte du problème (3)

Pour l'étude d'un problème non linéaire avec condition intégrale, il faut d'abord étudier l'existence et l'unicité de la solution forte du problème linéaire avec les même conditions intégrales, en utilisant la méthode des inégalités d'énergie décrite dans le schéma précédent. Ensuite, on applique un processus itératif basé sur les résultats du problème linéaire, nous montrons l'existence, l'unicité de la solution faible généralisée du problème non linéaire.

Cette thèse contient des résultats intéressantes et originaux. elle est composée de quatre chapitres présentés comme suit ;

Le chapitre I commence par une introduction qui présente l'histoirque des problèmes non classiques étudiés.

Le chapitre II est consacré à des rappel de certains concepts préliminaires fondamentaux et outils de base dans ce travail concernant les opérateurs, la densité dans les espaces de Hilbert, les espaces fonctionnels, Calcul fractionnaire, et certains lemmes techniques.

Il y a plusieurs façons d'étudier les problèmes intégro-différentielle ou de trouver des solutions numériques à ces problèmes, nous n'avons pas cherché à les détailler, nous l'avons mentionné avec ses références, ce qui donne au lecteur une idée large de notre sujet.

Nous organisons le chapitre III comme suit : nous donnons l'énoncé du problème fractionnaire et les espaces de fonctions nécessaires. Ensuite, nous prouvons une estimation a priori à partir de laquelle on déduit l'unicité d'une solution forte de problème posé. Encore, nous établissons l'existence de la solution de notre problème, en prouvant que la fermeture de la valeur de l'opérateur L généré par le problème, est dense dans l'espace de Hilbert Y.

Les conditions aux limites dans ce dernier chapitre sont mixtes, où nous avons pris les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet, et les conditions aux limites intégrales des deux types. Le problème intégral est en dimension deux, et l'équation a un ordre fractionnaire (au sens de Caputo). La méthode utilisée dans le problème est l'estimation a priori, a été développé au niveau fractionnaire et appliquées avec succès.

Dans le Le chapitre V on prouve la solvabilité du problème non linéaire fractionnaire, en utilisant une estimation à priori et en appliquant un processus itératif basé sur les résultats obtenus pour le problème linéaire . Enfin nous démontrons l'existence, l'unicité de la solution faible du problème non linéaire.

Chapitre 1

Notions et préliminaires

Dans ces sections, nous rappelons les outils de base et les résultats préliminaires essentiels à notre travail.(Voir Brezis [72]).

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1.1. *(**espace vectoriel normé**) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\mathbb{K}$:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. *(**Espace de Banach**) Un espace de Banach E est un espace vectoriel normé complet (i.e, toute suite de Cauchy de E converge dans E).*

Définition 1.1.3. *(**Espace de Hilbert**) Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.*

1.1.1 Les distributions

Dans cette section, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$.

Les distributions sont des objets qui généralisent les fonctions localement intégrables et les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$. L'un des intérêts principaux de la théorie des distributions est de permettre la construction d'un calcul différentiel qui prolonge le calcul différentiel ordinaire et pour lequel toute distribution est indéfiniment dérivable. Cette théorie est devenue un outil essentiel, notamment dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Elle a aussi permis une modélisation mathématique pour de nombreux phénomènes physiques.

L'idée de base de la théorie des distributions est de définir les distributions par leur action sur un espace de fonctions appelées " fonctions-test". On peut noter que cette idée apparait déjà dans la définition de mesures et en particulier dans la définition des mesures de Radon. Pour tout multi-entier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et on désigne par D^α la dérivée partielle :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Définition 1.1.4. *On note par $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact, autrement dit*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); u(x) = 0, \forall x \in \Omega \backslash K \ \textit{ou}\ K = supp(\Omega) \ \textit{est un compact}\ \}.$$

Définition 1.1.5. *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\Omega)$.*

Les distributions forment un espace vectoriel noté $D'(\Omega)$.

Une distribution T est donc une application de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ faisant correspondre à une fonction test φ un nombre complexe noté $\langle T, \varphi \rangle$.

- Linéarité : $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega), \forall \lambda, \beta \in \mathbb{C} : \langle T, \lambda\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle$.

- Continuité : Si $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ alors $\langle T, \varphi_k \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{C}$ où $\langle ., . \rangle$ désigne le crochet de dualité.

Définition 1.1.6. *Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que*

$$T_j \longrightarrow T \quad \textit{dans} \quad D'(\Omega),$$

si

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Proposition 1.1.1. *Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $T \in L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$. Supposons que*

$$T_j \longrightarrow T \quad \textit{dans} \quad L^p(\Omega).$$

Alors,

$$T_j \longrightarrow T \quad \textit{dans} \quad D'(\Omega).$$

En particuler, soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_n)_n$ converge au sens des distributions vers f.

Démonstration. L'inégalité de Hölder montre que pour toute fonction test ϕ , on a

$$|\langle T_{f_n},\phi\rangle-\langle T_f,\phi\rangle|\leq\int_{\mathbb{R}^n}|f_n(x)-f(x)|\,|\phi(x)|dx\leq\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|f_n-f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Comme (f_n) converge vers f dans $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et donc on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\langle T_{f_n},\phi\rangle=\langle T_f,\phi\rangle\,.$$

□

1.1.2 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$

Soit Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n, n\geq 1$.

Définition 1.1.7. *Pour tout $p\in[1,\infty]$, on définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega);\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^p(\Omega),\forall i=\overline{1,n}\right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u dans la direction x_i au sens des distributions. Si $p\neq\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}=\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\|\nabla u\|^p_{(L^p(\Omega))^n}\right)^{1/p},$$

et pour $p=+\infty$.

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}=\max_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\,,$$

Définition 1.1.8. *Dans le cas $p=2$, on note :*

$$W^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega);\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),\forall i=\overline{1,n}\right\},$$

muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^1(\Omega)}&=(u,v)_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(u,v)_{L^2(\Omega)}+(\nabla u,\nabla v)_{(L^2(\Omega))^n},\end{aligned}\qquad(1.1)$$

et de la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\right)^{1/2}.$$

Proposition 1.1.2. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, aussi l'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.1), est un espace de Hilbert séparable.*

Théorème 1.1.3. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$ *c-à-d :*

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que : } u_n \to u \text{ dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

1.1.3 L'espace $L_p^2(\Omega)$

Pour l'étude de quelques problèmes posés, on a besoin de rappeler quelques espaces fonctionnels.
Soit $L^2(0,l)$, $l \in \mathbb{R}_+^*$, l'espace de Hilbert usuel muni d'un produit scalaire noté $(.,.)_{L^2(0,l)}$ et d'une norme associée $\|u\|_{L^2(0,l)}$.
L'espace de Hilbert $L^2(\Omega) = L_2(0,T,L_2(0,l)), \Omega = (0,l)\times(0,T)$ est constitué de classes de fonctions définies et de carrés intégrables dans Ω. Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ est noté $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ avec la norme $\|u\|_{L^2(\Omega)}$.
On désigne par $L_p^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions des carrés intégrables avec poids muni d'un produit scalaire dénoté $(.,.)_{L_p^2(\Omega)}$, défini par :

$$(u,v)_{L_p^2(\Omega)} = (\sqrt{p}u, \sqrt{p}v)_{L^2(\Omega)},$$

et d'une norme associée dénotée $\|u\|_{L_p^2(\Omega)}$ définie par :

$$\|u\|_{L_p^2(\Omega)} = \|\sqrt{p}u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega p(x)|u(x,.)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Si $p(x) = 1, L_p^2(\Omega)$ sont identifiés avec les espaces standards $L^2(\Omega)$. Voir [45].

1.1.4 L'espace $B_2^m(\Omega)$

Définition 1.1.9. *H est un espace de Hilbert avec une norme $\| \,.\, \|_H$*

1. *On note $L^2(0,T;H)$ l'ensemble de toutes les fonctions abstraites mesurables $u(.,t)$ de $(0,T)$ dans H associées, de la norme*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)} = \left(\int_0^T \|u(.,t)\|_H^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.2}$$

2. *L'espace $C(0,T;H)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues $u(.,t) : (0,T) \longrightarrow H$, équipées, de la norme*

$$\|u\|_{C(0,T;H)} = \max_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\|_H < \infty. \tag{1.3}$$

On note $C_0(0,1)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans $(0,1)$. Comme ces fonctions sont Lebesgue intégrables par rapport à x, nous pouvons définir sur $C_0(0,1)$ la forme bilinéaire donnée par

$$(u,w)=\int_0^1 \Im_x^m(u)\cdot\Im_x^m(w)dx, m\geq 1, \tag{1.4}$$

où

$$\Im_x^m u=\int_0^x \frac{(x-\zeta)^{m-1}}{(m-1)!}u(\zeta,t)\mathrm{d}\zeta \quad \textit{for } m\geq 1. \tag{1.5}$$

La forme bilinéaire (1.4) est un produit scalaire dans $C_0(0,1)$ qui n'est pas complet. Pour plus d'informations voir [60].

Définition 1.1.10. *On note $B_2^m(0,1)$ Le complété de $C_0(0,1)$ pour le produit scalaire (1.4), qui est dénoté par $(.,.)_{B_2^m(0,1)}$ et introduit dans [28]. La norme associée au produit scalaire (1.4) est :*

$$\|u\|_{B_2^m(0,1)}=\left(\int_0^1 (\Im_x^m u)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}=\|\Im_x^m u\|_{L^2(0,1)}\,,\ \textit{pour } m\geq 1. \tag{1.6}$$

Lemme 1.1.4. *Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante est vraie,*

$$\|u\|^2_{B_2^m(0,1)}\leq\frac{1}{2}\|u\|^2_{B_2^{m-1}(0,1)}. \tag{1.7}$$

Corollaire 1.1.5. *Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante est vraie,*

$$\|u\|^2_{B_2^m(0,1)}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^m\|u\|^2_{L^2(0,1)}. \tag{1.8}$$

Définition 1.1.11. *On note $L^2\left(0,T;B_2^m(0,1)\right)$ l'espace des fonctions qui sont carrées intégrables au sens de Bochner, avec le produit scalaire*

$$(u,w)_{L^2\left(0,T;B_2^m(0,1)\right)}=\int_0^T (u(.,t),w(.,t))_{B_2^m(0,1)}dt. \tag{1.9}$$

Comme l'espace $B_2^m(0,1)$ est un espace de Hilbert, on peut montrer que $L^2\left(0,T;B_2^m(0,1)\right)$ est également un espace de Hilbert. L'ensemble de toutes les fonctions abstraites continues dans $[0,T]$ équipées de la norme

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u(.,t)\|_{B_2^m(0,1)}, \tag{1.10}$$

est dénoté par $C^2\left(0,T;B_2^m(0,1)\right)$.

1.1.5 Existence de trace

On considère l'ensemble

$$L^2(\partial\Omega) = \left\{ w \text{ mesurable sur } \partial\Omega, \text{ tel que } \int_{\partial\Omega} w^2 d\Gamma < +\infty \right\},$$

c'est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire usuel.

Les fonctions de $H^1(\Omega)$ pour $n \geq 2$ ne sont pas nécessairement continues. Comme pour toute fonction mesurable, on ne peut donc parler de la valeur ponctuelle d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ que "presque partout". En particulier, il n'est pas possible de parler de "la valeur au bord", ou "trace" de $u \in H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$ au sens usuel vu que $\partial\Omega$ est un ensemble négligeable ou de mesure nulle. Il est si bien que pour le problème que nous étudions, il existe tout de même un moyen important pour définir la trace d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$, appelé théorème d'existence de trace, est le suivant.

Théorème 1.1.6. *(Existence de trace) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à frontière suffisamment régulière. Alors l'application trace*

$$\begin{aligned} l :& C^\infty(\bar{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) \\ & u \to lu = u_{|\partial\Omega}, \end{aligned}$$

se pronlonge par continuité en une application linéaire continue, notée encore l, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et il existe une constante c^* indépendante de u telle que

$$\|lu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant c^* \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce théorème, nous permet de parler de la valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$, et donc d'énoncer la formule d'intégration par parties.

Remarque 1.1.1. *L'application trace l n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Par contre, elle est surjective sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, où $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'indice fractionnaire $1/2$. On a :*

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ w \in L^2(\partial\Omega), \text{ tel que } \exists v \in H^1(\Omega), w = l(v) \right\}.$$

1.2 Opérateurs linéaire

Définition 1.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Un opérateur T est une application de E dans F :*

$$T : E \to F.$$

Tout opérateur T est complètement défini par son graphe $G(T)$ qui est un sous espace vectoriel de $E \times F$ défini par $G(T) = \{(u, Tu), u \in D(T)\}$, où $D(T)$ est le domaine de définition de l'opérateur T.

Définition 1.2.2. *Un opérateur T de E dans F est dit linéaire si et seulement si :*

$$\forall u_1, u_2 \in E, \forall \mu, \lambda \in \mathbb{K}, \quad T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2),$$

où $\mathbb{K}$ est le corps des scalaires de E et F.

Définition 1.2.3. *On dit que l'opérateur S est une extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tu = Su$ pour tout $u \in D(T)$ (Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$).*

Définition 1.2.4. *On dit que T est fermé si son graphe $G(T)$ est un fermé de $E \times F$.*

Proposition 1.2.1. *Un sous espace $G \subset E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si :*

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0. \tag{1.11}$$

Définition 1.2.5. *On dit qu'un opérateur linéaire T est fermable dans E s'il admet un prolongement (extension) fermé.*

Théorème 1.2.2. *(Théorème de l'isomorphisme) Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F, alors T est continu de F dans E.*

Théorème 1.2.3. *(Théorème du graphe fermé). Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T, G(T); est fermé dans $E \times F$. Alors T est continu.*

1.3 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.3.1. *Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F, on définit $M^\perp$ l'orthogonal de M, par*

$$M^\perp = \{f \in F, \langle f, g \rangle_F = 0, \forall g \in M\},$$

ou $\langle ., . \rangle_F$ représente le produit scalaire dans l'espace F.

Proposition 1.3.1. *Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F. Alors M est dense dans F si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.*

1.4 Calcul fractionnaire

1.4.1 Introduction

La dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et des intégrales fractionnaires en vue de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonctions, sommation des séries, ...). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue. De nombreux travaux sont apparus, spécialement sur la théorie de viscoélasticité et du mécanique du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation mathématique basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, d'où la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a); f^{(1)}(a)$, ... etc. Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ces problèmes a été proposée par M.Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélastité, donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville. Pour plus d'informations sur le calcul fractionnaire, voir[7, 23, 40].

1.4.2 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions spéciales telles que la fonction Gamma, et la fonction de Mittag-Leffler, qui sera utilisée dans d'autres chapitres, ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma

Définition 1.4.1. *On appelle fonction Gamma Eulérienne (ou intégrale Eulérienne de seconde espèce) la fonction notée* Γ *définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.12}$$

où z *est un nombre complexe quelconque tel que* $Re(z) > 0$.

Remarque 1.4.1. $\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 < z \leq 1$.

Proposition 1.4.1. *La fonction Gamma est définie et continue sur* $]0, +\infty[$.

Proposition 1.4.2. *Pour tout* $z \in \mathbb{R}_+^*$ *on a :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

La fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.4.2. *La fonction de Mittag-Leffler* $E_\alpha(z)$ *est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha > 0), \tag{1.13}$$

et la fonction Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ *est définie comme suite :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)} \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha, \beta > 0). \tag{1.14}$$

1.4.3 L'intégrale d'ordre fractionnaire

Considérons f une fonction définie pour tout $t > 0$. On pose

$$(If)(t) = \int_0^t f(x)dx, \left(I^2 f\right)(t) = \int_0^t (If)(u)du = \int_0^t \left(\int_0^u f(x)dx\right) du, \tag{1.15}$$

en répétant n fois, on obtient d'après la formule de Cauchy

$$\left(I^n f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-x)^{n-1} f(x)dx, \tag{1.16}$$

en utilisant la fonction Γ, on aura la définition suivante :

Définition 1.4.3. *(Voir[22, 71]) L'intégrale fractionnaire d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}^+$*; de la fonction* $f \in L^1[a,b]$*, est définie par*

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \tag{1.17}$$

$${}_tI_T^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{1-\alpha}} d\tau. \tag{1.18}$$

Propriété 1.4.1. *Pour* $\alpha; \beta > 0$ *on a :*

$$I^{\alpha} o I^{\beta} = I^{\beta} o I^{\alpha} = I^{\alpha+\beta}.$$

Et

$$\frac{d}{dt} I^{\alpha} f = I^{\alpha-1} f.$$

Théorème 1.4.3. *Soit* $f \in L^1[a,b]$ *et* $\alpha > 0$, *l'intégrale* $(I^{\alpha} f)(t)$ *existe pour tout* $t \in [a,b]$ *et la fonction* $I^{\alpha} f$ *elle même est un élément de* $L^1[a,b]$.

1.4.4 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.4.4. *(Voir[22, 71]) Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *et* h *une fonction localement intégrable définie sur* $[0,T]$. *La dérivée d'ordre* α *de* h *est définie par :*

1. Dérivée au sens de Riemann-Liouville à gauche

$$\begin{aligned} {}_0^R\partial_t^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{h(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, && (1.19) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} I^{n-\alpha} h(t). && (1.20) \end{aligned}$$

2. Dérivée au sens de Riemann-Liouville à droite

$${}_t^R\partial_T^{\alpha} h(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_t^T \frac{h(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau, \qquad (1.21)$$

où le nombre entier n *est choisi de telle manière que :* $n-1 < \alpha < n$.

En général, la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$\begin{aligned} {}_0^R\partial_t^{\alpha} C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{C}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau && (1.22) \\ &= \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.4. *Pour* $n-1 < \alpha < n$ *et* $m-1 < \beta < m$, *on a :*

1. *L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire.*
2. *En général* ${}_0^R\partial_t^{\alpha} o\, {}_0^R\partial_t^{\beta} \neq {}_0^R\partial_t^{\beta} o\, {}_0^R\partial_t^{\alpha}$.

1.4.5 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.4.5. *(Voir[22, 71]) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et h une fonction localement intégrable définie sur $[0,T]$. La dérivée d'ordre α de h est définie par :*

1. Dérivée au sens de Caputo à gauche

$$
{}_0^C\partial_t^\alpha h(t) = I^{n-\alpha}h^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{h^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{1.23}
$$

2. Dérivée au sens de Caputo à droite

$$
{}_t^C\partial_T^\alpha h(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^T \frac{h^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau, \tag{1.24}
$$

avec n un entier positif vérifiant l'inégalité : $n-1<\alpha<n$.

Pour la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo, on a :

$$
{}_0^C\partial_t^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{C^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau = 0. \tag{1.25}
$$

Lemme 1.4.5. *(Voir[50]) Soit $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}^+$ et soit $h(t)$ telle que ${}_0^C\partial_t^\alpha h(t)$ existe alors, on a les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo*

$$
\lim_{\alpha\to n} {}_0^C\partial_t^\alpha h(t) = h^{(n)}(t). \tag{1.26}
$$

1.4.6 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

$$
{}_0^C\partial_t^\alpha \left(I_0^\alpha h(t)\right) = h(t), \tag{1.27}
$$

et

$$
I_0^\alpha\left({}_0^C\partial_t^\alpha h(t)\right) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}t^k, \tag{1.28}
$$

pour $n=2$, on a

$$
I_0^\alpha\left({}_0^C\partial_t^\alpha h(t)\right) = h(t) - h'(0)t - h(0). \tag{1.29}
$$

1.4.7 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo

Définition 1.4.6. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ avec $n-1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*)$. Supposons que h est une fonction, telles que ${}_0^C\partial_t^\alpha h(t)$, ${}_0^R\partial_t^\alpha h(t)$ existent, alors*

$$ {}_0^R\partial_t^\alpha h(t) = {}_0^C \partial_t^\alpha h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0) t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \tag{1.30}$$

pour $n=2$ et $\frac{dh}{dt}(0) = h(0) = 0$, on a

$$ {}_0^R\partial_t^\alpha h(t) = {}_0^C \partial_t^\alpha h(t). \tag{1.31}$$

Pour plus de détails, reportez-vous à [22, 71].

1.4.8 Intégration par parties fractionnaires

Définition 1.4.7. *Si $v \in L^p(\Omega)$, $w \in L^q(\Omega)$ avec : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq 1+\alpha$, $p \geq 1, q \geq 1$, alors la formule suivante*

$$\int_0^T v(t)({}_0I_t^\alpha w)(t)dt = \int_0^T w(t)({}_tI_T^\alpha v)(t)dt, \tag{1.32}$$

définit l'intégration par parties fractionnaires.

Lemme 1.4.6. *(Voir[64]) Pour tout réel positif α, si $w \in {}^RB_0^\alpha(\Omega)$ et $v \in C_0^\infty(\Omega)$, alors*

$$\left({}_0^R\partial_t^\alpha \Im_x w(\bullet,t), v(\bullet,t)\right)_{(0,T)} = \left(\Im_x w(\bullet,t), {}_t^R\partial_T^\alpha v(\bullet,t)\right)_{(0,T)}, \tag{1.33}$$

. où l'espace fractionnaire ${}^RB_0^\alpha(\Omega)$ est le complété de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme

$$\|u\|_{{}^RB_0^\alpha(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{B_2(\Omega)} + \|{}_0^R\partial_t^\alpha\left(\Im_x u\right)\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.34}$$

Démonstration. En utilisant l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_\tau^T \frac{v(t)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{v(t)(t-\tau)^{1-s}}{1-s}\Big|_\tau^T - \frac{1}{1-s}\int_\tau^T v'(t)(t-\tau)^{1-s}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{v(T)(T-\tau)^{1-s}}{1-s}\right] - \frac{1}{1-s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_\tau^T v'(t)(t-\tau)^{1-s}\mathrm{d}t \\
&= \int_\tau^T \frac{v'(t)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

En utilisant à nouveau l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left({}_0^R\partial_t^s w(t), v(t)\right)_{(0,T)} &= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}\tau v(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{v(t)}{\Gamma(1-s)}\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}\tau\Big|_0^T - \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^T\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}\tau v'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^T\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}\tau v'(t)\mathrm{d}t. \qquad (1.36)
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant (1.35), le côté droit de (1.36) est reformulé en

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^T\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}\tau v'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^T\int_\tau^T \frac{v'(t)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}t w(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^T\left(\frac{d}{d\tau}\int_\tau^T \frac{v(t)}{(t-\tau)^s}\mathrm{d}t\right)w(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \left(w(\tau), {}_\tau^R\partial_T^s v(\tau)\right)_{(0,T)}. \qquad (1.37)
\end{aligned}$$

Enfin, la combinaison de (1.36) et (1.37) donne (1.33).

□

1.5 Inégalités importantes

1.5.1 Intégrale généralisée

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)dt + f(x,v(x))\frac{d}{dx}v(x) - f(x,u(x))\frac{d}{dx}u(x). \qquad (1.38)$$

1.5.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour toute $u, v \in L^2(\Omega)$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\left|\int_\Omega u(x)\cdot v(x)dx\right| \leq \left(\int_\Omega u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.39)$$

1.5.3 Inégalité de Hölder

Pour $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous avons

$$\int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx \leq \left(\int_\Omega |u^p(x)| \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v^q(x)| \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad p \geq 1. \tag{1.40}$$

Cette inégalité est la généralisation de l'inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz.(Voir[74])

1.5.4 Inégalité de Cauchy–ε

(Voir[74]). Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour a, b arbitraire dans $\mathbb{R}$ nous avons l'inégalité :

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2. \tag{1.41}$$

1.5.5 Inégalité de Young–ε

(Voir[74]). Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour a, b arbitraire dans $\mathbb{R}$ nous avons l'inégalité :

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{b}{\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}} \text{ ,pour tout } p > 1, \tag{1.42}$$

qui est la généralisation de l'inégalité de Cauchy avec ε.

1.5.6 Inégalité de Poincaré

Nous utilisons souvent les deux inégalités suivantes :
Les inégalités de Poincaré : (voir[66])

$$\begin{cases} \|\Im_y(V)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \dfrac{d^2}{2} \|V\|^2_{L^2_p(\Omega)}; \\ \|\Im^2_y(V)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \dfrac{d^2}{2} \|\Im_y(V)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \end{cases} \tag{1.43}$$

où

$$\Im_y(V) = \int_0^y V(x, \xi, t) d\xi, \quad \Im^2_y(V) = \int_0^y \int_0^\xi V(x, \eta, t) d\eta d\xi. \tag{1.44}$$

Lemme 1.5.1. *Pour $u \in L^2(0, l)$, on a l'estimation :*

$$\|\Im_x u\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(0,l)}. \tag{1.45}$$

avec

$$\Im_x(u) = \int_x^l u(\xi,t)d\xi. \tag{1.46}$$

Démonstration. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\begin{aligned}(\Im_x u)^2 &= \left[\int_x^l u(\xi,t)d\xi\right]^2 \leq \left[\int_x^l d\xi\right]\left[\int_x^l (u(\xi,t))^2 d\xi\right] \\ &\leq (l-x)\int_x^l (u(\xi,t))^2 d\xi \leq (l-x)\int_0^l (u(x,t))^2 dx,\end{aligned} \tag{1.47}$$

par l'intégration sur $(0;l)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^l (\Im_x u)^2\, dx &\leq \left(\int_0^l (l-x)dx\right)\left(\int_0^l (u(x,t))^2 dx\right) \\ &\leq \frac{l^2}{2}\int_0^l (u(x,t))^2 dx.\end{aligned} \tag{1.48}$$

Par conséquent, on aura :

$$\|\Im_x u\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}}\|u\|_{L^2(0,l)}. \tag{1.49}$$

□

Remarque 1.5.1. *L'inégalité* (1.49) *reste valable si on remplace l'intervalle* $(0;l)$ *par une région bornée* Ω *de* $\mathbb{R}^n$*. Il suffit de remplacer* l *par mes(*Ω*) (mesure de* Ω *) dans* (1.49).

1.5.7 Inégalité fractionnaire

Lemme 1.5.2. *(Voir[51]). Pour toute fonction absolument continue* $v(t)$ *sur l'intervalle* $[0,T]$*, l'inégalité suivante est valable*

$$v(t)\,{}_0^C\partial_t^\alpha v(t) \geq \frac{1}{2}\,{}_0^C\partial_t^\alpha v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1.50}$$

Démonstration. (Voir[51]) Il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}
&v(t){}_0^C\partial_t^\alpha v(t) - \frac{1}{2}\,{}_0^C\partial_t^\alpha v^2(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} v(t) \int_0^t \frac{v_\tau(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{2v(\tau)v_\tau(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{v_\tau(\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{v_\tau(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \int_\tau^t v_\eta(\eta)d\eta, \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t v_\eta(\eta)d\eta \int_0^\eta \frac{v_\tau(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \equiv I \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Par conséquent, pour prouver le lemme, il suffit de montrer que l'intégrale I est non négatif. L'intégrale I prend des valeurs non négatives, car

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\eta)^\alpha \frac{v_\eta(\eta)d\eta}{(t-\eta)^\alpha} \int_0^\eta \frac{v_\tau(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \\
&= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\eta)^\alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\int_0^\eta \frac{v_\tau(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \right)^2 d\eta \\
&= \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} \left(\int_0^\eta \frac{v_\tau(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \right)^2 d\eta \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

La preuve du lemme est complète.

□

Lemme 1.5.3. *(Voir[51]). Soit $y(t)$ une fonction absolument continue non négatif, satisfaisant l'inégalité*

$${}_0^C\partial_t^\alpha y(t) \leq cy(t) + k(t), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.53}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$, où c est une constante positive et $k(t)$ est une fonction non négative intégrable sur $[0,T]$. alors

$$y(t) \leq y(0)E_\alpha(ct^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(ct^\alpha)D_{0t}^{-\alpha}k(t), \tag{1.54}$$

où

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad et \quad E_{\alpha,\mu}(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}, \tag{1.55}$$

sont les fonctions de Mittag-Leffler.

Démonstration. (Voir [[43] ,p.17]). Soit ${}_0^C\partial_t^\alpha y(t) - c_1 y(t) = g(t)$; puis

$$y(t) = y(0)E_\alpha\left(c_1 t^\alpha\right) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(c_1(t-\tau)^\alpha\right) g(\tau) d\tau \tag{1.56}$$

En raison de l'inégalité $g(t) \leq c_2(t)$, la positivité de la fonction Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}\left(c_1(t-\tau)^\alpha\right)$ pour des paramètres donnés, et la croissance de la fonction $E_{\alpha,\alpha}(t)$, de (1.56), on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(0)E_\alpha\left(c_1 t^\alpha\right) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(c_1(t-\tau)^\alpha\right) c_2(\tau) d\tau \\ &\leq y(0)E_\alpha\left(c_1 t^\alpha\right) + \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}\left(c_1 t^\alpha\right) D_{0t}^{-\alpha} c_2(t) \end{aligned} \tag{1.57}$$

La preuve du lemme est complète. □

Lemme 1.5.4. *Si* $F(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$ *et* $0 < \alpha < 1$ *alors, on a :*

$$D_{0t}^{-\alpha-1} \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau. \tag{1.58}$$

Chapitre 2

Existence et unicité d'une solution du problème bidimensionnel pour une équation fractionnaire avec conditions intégrales

2.1 Introduction

De nombreux phénomènes physiques nous ramènent à l'étude des équations différentielles partielles fractionnelles. Nous mentionnons par exemple la viscoélasticité, le traitement du signal, l'électrochimie, la théorie du contrôle, les réseaux électriques, le flux de fluides, les médias poreux, la rhéologie, le transport diffusif, la théorie électromagnétique, les phénomènes de diffusion, sont des applications pour des équations différentielles fractionnelles. Pour l'expansion, voir [29, 31, 34, 61, 71, 73].
Les équations de diffusion fractionnaire apparaissent largement dans les phénomènes naturels ; celles-ci sont suggérées comme modèles mathématiques des problèmes physiques dans beaucoup de domaines, comme les équations de diffusion fractionnaires inhomogènes de la forme :

$$\partial_{0t}^{\beta} u = -Au + F(t), \qquad u(0) = f, \tag{2.1}$$

où ∂_{0t}^{β} est la dérivée fractionnaire Caputo, A est un opérateur auto-adjoint positif sur un espace de Hilbert H, $f \in H$, $F \in C(R^{+}; H)$, et $0 < \beta \leq 1$. La dérivé de Caputo est plus appropriée et naturelle pour les problèmes de modèles physiques, car il nous permet de traiter les données initiales inhomogènes facilement.

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour étudier l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes avec de valeur initiale d'ordre fractionnaire, comme la méthode de transformation de Laplace, méthode d'itération, la méthode de la série, la technique de transformée de Fourier, la méthode de calcul opérationnel, voir par exemple [11, 30, 47, 49, 75], mais dans le cas général, les solutions analytiques sont difficiles à obtenir pour la plupart des équations différentielles fractionnaires en particulier avec des conditions non locales (conditions intégrales), à savoir lorsque les données ne peuvent pas être mesurée sur la frontière ou une partie de celle-ci. En l'absence d'une solution précise, on recourt souvent à des méthodes numériques telles que : méthodes d'éléments finis ou des méthodes spectrales ou procédé de substitution (voir [52, 53, 65, 70]), qui repose fortement sur l'existence et l'unicité de la solution pour le problème variationnel. L'étude de l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles fractionnaires commence par la construction de la formulation variationnelle et le choix des espaces et des normes appropriées. Ensuite, nous utilisons le théorème du point fixe ou le théorème de Lax-Milgram pour prouver les résultats d'existence de la solution. Pour notre problème (2.2)-(2.5) , nous croyons que la méthode d'estimation priori est l'outil le plus puissant pour prouver l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation différentielle fractionnelle, et est plus approprié avec les conditions aux limites classiques et intégrales. Quelques articles utilisent la méthode de l'inégalité d'énergie pour l'étude des équations différentielles fractionnaires, nous citons par exemple : Alikhanov [51], Akilandeeswari et all [62], et Mesloub [68].

Notre travail[66] peut être considéré comme une extension et la généralisation des problèmes d'ordre entiers tels que [48]. Nous organisons notre chapitre comme suit : Dans la section 2, nous donnons l'énoncé du problème et les espaces de fonctions nécessaires et les différents outils qui peuvent être utilisés dans d'autres sections .Dans la section 3, nous prouvons une estimation a priori à partir de laquelle on déduit l'unicité d'une solution forte de problème(2.2)-(2.5), et sa dépendance par rapport aux données fournies. Dans la section 4, nous établissons l'existence de la solution du problème (2.2)-(2.5), en prouvant que la fermeture de l'ensemble des valeurs de l'opérateur L généré par le problème considéré est dense dans l'espace de Hilbert Y.

2.2 Position du problème

Soit $D = \Omega \times [0, T]$ un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ avec $\Omega = (0, c) \times (0, d) \subset \mathbb{R}^2$. Nous considérons l'équation fractionnaire bidimensionnelle suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{V_{\tau\tau}(x,y,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = F(x,y,t), \quad (x,y,t) \in D, \tag{2.2}$$

associée aux données initiales

$$\ell_1 V = V(x,y,0) = f(x,y), \quad \ell_2 V = V_t(x,y,0) = g(x,y), \tag{2.3}$$

les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet

$$V(c,y,t) = 0, \quad V_y(x,d,t) = 0, \tag{2.4}$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^c xV(x,y,t)dx = 0, \quad \int_0^d V(x,y,t)dy = 0. \tag{2.5}$$

Ici F est une fonction connue, où $F \in C(\overline{D})$.
$\partial_{0t}^{\beta+1}$; représente l' opérateur fractionnaire de Caputo d'ordre $\beta + 1$, telque :

$$\partial_{0t}^{\beta+1} V(x,y,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{V_{\tau\tau}(x,y,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau, \qquad 0 < \beta < 1, \tag{2.6}$$

$\Gamma(.)$ est la fonction Gamma.
$D_{0t}^{-\beta}$; désigne l'intégrale de Riemann-Liouville de l'ordre β, défini par :

$$D_{0t}^{-\beta} V(x,y,t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{V(x,y,\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau, \qquad 0 < \beta < 1 \tag{2.7}$$

La solution supposée $V \in C^{2,2,2}(\overline{D})$, l'espace des fonctions ainsi que leurs dérivée partielle de l'ordre 2 sont continus sur $\overline{D}$ pour leurs trois variables (x, y, t).
Pour plus de détails sur les équations différentielles fractionnaires, et les applications de calcul fractionnaire en physique (voir [29, 30, 31, 34, 47, 61, 71, 73, 75]).

Nous présentons maintenant les espaces fonctionnels appropriés nécessaires à notre problème posé. Soit l'espace de Lebesgue $L_p^2(D)$ avec poid (espace de Hilbert) associé de la norme finie

$$\|V\|_{L_p^2(D)}^2 = \int_D xV^2 dxdydt, \tag{2.8}$$

à partir du produit scalaire

$$(U,V)_{L_p^2(D)} = (xU,V)_{L^2(D)} \tag{2.9}$$

Soient $V_p^{1,y}(D)$,$V_p^1(D)$ et $V^1(D)$ les espaces de Sobolev associés des normes finies

$$\|V\|^2_{V_p^{1,y}(D)} = \|\Im_y(V)\|^2_{L_p^2(D)} + \|\Im_y(V_x)\|^2_{L_p^2(D)}, \tag{2.10}$$

$$\|V\|^2_{V_p^1(D)} = \|V\|^2_{L^2(D)} + \|V_x\|^2_{L_p^2(D)} + \|V_y\|^2_{L_p^2(D)}, \tag{2.11}$$

$$\|V\|^2_{V^1(D)} = \|V\|^2_{L^2(D)} + \|V_x\|^2_{L^2(D)}. \tag{2.12}$$

Le problème (2.2)-(2.5) peut être formulé sous forme opératorielle :

$$LV = W, \qquad \forall V \in D(L), \tag{2.13}$$

où $W = (F, f, g)$, et $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$ l'opérateur $L : X \longrightarrow Y$ avec le domaine de défnition

$$D(L) = \begin{cases} V \in L^2(D), \partial_{0t}^{\beta+1}V, V_t, V_x, V_y, V_{xx}, V_{yy} \in L^2(D), \\ V(c,y,t) = 0, \quad V_y(x,d,t) = 0, \\ \int_0^c xV(x,y,t)dx = 0, \quad \int_0^d V(x,y,t)dy = 0, t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.14}$$

Ici X est un espace de Banach de fonctions $V \in D(L)$ associé à la norme :

$$\|V\|^2_X = \sup_{0\le t\le T} \left(D_{0t}^{\beta-1}\|\Im_y(V_t)\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \|V\|^2_{V_p^{1,y}(\Omega)} \right), \tag{2.15}$$

et Y est l'espace de Hilbert associé à la norme finie

$$\|W\|^2_Y = \|F\|^2_{L_p^2(D)} + \|f\|^2_{V^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L_p^2(\Omega)} \tag{2.16}$$

$L_p^2(\Omega)$,$V_p^{1,y}(\Omega)$ et $V^1(\Omega)$ les espaces de Sobolev avec poids sur Ω, sont définis de façon analogue à ceux sur D.

2.3 Unicité de la solution

Dans cette section, nous prouvons un résultat d'unicité pour le problème (2.2)-(2.5), c'est-à-dire que nous établissons une estimation a priori à partir de laquelle nous déduisons l'unicité de la solution.

Théorème 2.3.1. *Pour toute $V \in D(L)$, il existe une constante positive M_5 indépendante de V tellque :*

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\left(D_{0t}^{\beta-1}\|\Im_y(V_t)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V\|^2_{V_p^{1,y}(\Omega)}\right)\\
&\le M_5\left(\int_0^T\|F\|^2_{L^2_p(\Omega)}dt+\|f\|^2_{V^1(\Omega)}+\|g\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

où

$$M_1=\max\left(1,\frac{d^2}{2}\right), \qquad (2.18)$$

$$M_2=\frac{M_1\max\left\{1,\dfrac{cd^2}{2},\dfrac{d^2}{2}\dfrac{T^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\right\}}{\min\left\{1,\dfrac{2}{cd^2}\right\}}, \qquad (2.19)$$

$$M_3=\Gamma(\beta)E_{\beta,\beta}(M_2T^\beta)\max\left(M_2,\frac{M_2T^{\beta+1}}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}\right), \qquad (2.20)$$

$$M_4=M_2M_3+M_2, \qquad (2.21)$$

$$M_5=M_4\left(1+\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right). \qquad (2.22)$$

Démonstration. En prenant le produit scalaire dans $L^2_p(\Omega)$ de l'équation 2.2 et l'opérateur intégro-différentiel

$$MV=-\Im^2_y(V_t)=-\int_0^y\int_0^\xi V_t(x,\eta,t)d\eta d\xi. \qquad (2.23)$$

Nous avons

$$\left(\partial_{0t}^{\beta+1}V-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{1}{x}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},-\Im^2_y(V_t)\right)_{L^2_p(\Omega)}=\left(F,-\Im^2_y(V_t)\right)_{L^2_p(\Omega)}. \qquad (2.24)$$

L'utilisation des conditions (2.4)-(2.5), puis l'intégration standard par parties de chaque terme du côté gauche dans (2.24), conduit à

$$\begin{aligned}
&-\left(\partial_{0t}^{\beta+1}V, \int_0^y \int_0^\xi V_t(x,\eta,t)d\eta d\xi\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&= \left(\partial_{0t}^{\beta}\left(\int_0^y V_t(x,\xi,t)d\xi\right), \left(\int_0^y V_t(x,\xi,t)d\xi\right)\right)_{L_p^2(\Omega)}, \qquad (2.25)\\
&\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right), \int_0^y \int_0^\xi V_t(x,\eta,t)d\eta d\xi\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_0^y V_x(x,\xi,t)d\xi, \int_0^y V_{xt}(x,\xi,t)d\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}, \qquad (2.26)\\
&\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \int_0^y \int_0^\xi V_t(x,\eta,t)d\eta d\xi\right)_{L_p^2(\Omega)} = (V, V_t)_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Par substitution de (2.25)-(2.27) dans (2.24) on obtient

$$\begin{aligned}
&2\left(\partial_{0t}^{\beta}\left(\Im_y(V_t)\right), \Im_y(V_t)\right)_{L_p^2(\Omega)} + \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega x\left(\Im_y(V_x)\right)^2 dxdy + \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega V^2 dxdy \\
&= -2\left(F, \int_0^y \int_0^\xi V_t(x,\eta,t)d\eta d\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

À la lumière du Lemme (1.5.2), le premier terme sur le côté gauche de (2.28) est estimée comme suit

$$2\left(\partial_{0t}^{\beta}\left(\Im_y(V_t)\right), \Im_y(V_t)\right)_{L_p^2(\Omega)} \geq \partial_{0t}^{\beta}\|\Im_y(V_t)\|^2_{L_p^2(\Omega)}. \qquad (2.29)$$

La combinaison de l'inégalité (2.29) et de l'égalité (2.28) donne :

$$\partial_{0t}^{\beta}\|\Im_y(V_t)\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \frac{\partial}{\partial t}\|\Im_y(V_x)\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \frac{\partial}{\partial t}\|V\|^2_{L^2(\Omega)} \leq -2\left(F, \int_0^y \int_0^\xi V_t(x,\eta,t)d\eta d\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}. \qquad (2.30)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-ε(1.41) et l'inégalité de Poincaré(1.43), nous en déduisons à partir de (2.30) que

$$\partial_{0t}^{\beta}\|\Im_y(V_t)\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \frac{\partial}{\partial t}\|\Im_y(V_x)\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \frac{\partial}{\partial t}\|V\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_1\left(\|F\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \|\Im_y(V_t)\|^2_{L_p^2(\Omega)}\right) \qquad (2.31)$$

où

$$M_1 = \max\left(1, \frac{d^2}{2}\right). \qquad (2.32)$$

En notant que

$$\int_0^t \partial_{0t}^{\beta} \|\Im_y(V_t)\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau = D_{0t}^{\beta-1} \|\Im_y(V_t)\|^2_{L^2_p(\Omega)} - \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \|\Im_y(V_t(x,y,0))\|^2_{L^2_p(\Omega)}. \tag{2.33}$$

En changeant t par τ, et l'intégration des deux côtés de (2.31) par rapport à τ sur $[0;t]$ on trouve :

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\beta-1} \|\Im_y(V_t)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\Im_y(V_x)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|V\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_1 \Bigg(\int_0^t \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau \\ + \int_0^t \|\Im_y(V_\tau(x,y,\tau))\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau + \frac{T^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \|\Im_y(g)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\Im_y(f_x)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \Bigg). \end{aligned} \tag{2.34}$$

En considérant les deux inégalités élémentaires suivantes

$$\|\Im_y(V)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \frac{d^2}{2} \|V\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \frac{cd^2}{2} \|V\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.35}$$

$$\|\Im_y(f_x)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \frac{d^2}{2} \|f_x\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \frac{cd^2}{2} \|f_x\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.36}$$

L'inégalité (2.34) prend la forme

$$\begin{aligned} & D_{0t}^{\beta-1} \|\Im_y(V_t)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\Im_y(V_x)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\Im_y(V)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \\ \leq & M_2 \left(\int_0^t \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau + \int_0^t \|\Im_y(V_\tau(x,y,\tau))\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau + \|f\|^2_{V^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_p(\Omega)} \right), \end{aligned} \tag{2.37}$$

où

$$M_2 = \frac{M_1 \max\left\{1, \frac{cd^2}{2}, \frac{d^2}{2} \frac{T^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\right\}}{\min\left\{1, \frac{2}{cd^2}\right\}}. \tag{2.38}$$

Maintenant, en omettant les deux derniers termes sur le côté gauche de (2.37) on a

$$\begin{aligned} & D_{0t}^{\beta-1} \|\Im_y(V_t)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \\ \leq & M_2 \left(\int_0^t \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau + \int_0^t \|\Im_y(V_\tau(x,y,\tau))\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau + \|f\|^2_{V^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_p(\Omega)} \right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

En appliquant le lemme (1.5.3) comme suit :

$$y(t) = \int_0^t \|\Im_y\left(V_\tau(x,y,\tau)\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau, \quad y(0) = 0 \tag{2.40}$$

$$\partial^\beta_{0t} y(t) = D^{\beta-1}_{0t} \|\Im_y\left(V_t\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}. \tag{2.41}$$

De là (2.39) devient

$$\int_0^t \|\Im_y\left(V_\tau(x,y,\tau)\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau \le M_3 \left(D^{-\beta-1}_{0t} \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|f\|^2_{V^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_p(\Omega)} \right), \tag{2.42}$$

où

$$M_3 = \Gamma(\beta) E_{\beta,\beta}(M_2 T^\beta) \max\left(M_2, \frac{M_2 T^{\beta+1}}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} \right). \tag{2.43}$$

La combinaison des inégalités (2.37) et (2.42) implique

$$\begin{aligned} & D^{\beta-1}_{0t} \|\Im_y\left(V_t\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|V\|^2_{V^{1,y}_p(\Omega)} \\ & \le M_4 \left(D^{-\beta-1}_{0t} \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \int_0^t \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau + \|f\|^2_{V^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_p(\Omega)} \right), \end{aligned} \tag{2.44}$$

où

$$M_4 = M_2 M_3 + M_2. \tag{2.45}$$

En vertu de l'inégalité (1.5.4),

$$D^{-\beta-1}_{0t} \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} \le \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^t \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau. \tag{2.46}$$

L'inégalité (2.44) devient

$$D^{\beta-1}_{0t} \|\Im_y(V_t)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|V\|^2_{V^{1,y}_p(\Omega)} \le M_5 \left(\int_0^t \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} d\tau + \|f\|^2_{V^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_p(\Omega)} \right) \tag{2.47}$$

$$\le M_5 \left(\int_0^T \|F\|^2_{L^2_p(\Omega)} dt + \|f\|^2_{V^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_p(\Omega)} \right). \tag{2.48}$$

Ensuite, nous prenons le supremum du côté gauche dans (2.47) par rapport à t sur $[0; T]$, nous obtenons l'estimation désirée (2.17) avec :

$$M_5 = M_4 \left(1 + \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right). \tag{2.49}$$

□

Corollaire 2.3.2. *Si pour toute fonction $V \in D(L)$, on a l'estimation suivante :*

$$\|V\|_X \leq \sqrt{M_5}\|LV\|_Y, \tag{2.50}$$

alors la solution du problème (2.2)–(2.5) *si elle existe, elle est unique dans X.*

Démonstration. Soient V_1 et V_2 deux solutions du problème (2.2)–(2.5)

$$\begin{cases} LV_1 = \mathcal{W} \\ LV_2 = \mathcal{W} \end{cases} \Longrightarrow LV_1 - LV_2 = 0,$$

et comme L est linéaire on obtient

$$L(V_1 - V_2) = 0,$$

d'après (2.50)

$$\|V_1 - V_2\|_X^2 \leq M_5\|0\|_Y^2 = 0.$$

Ce qui donne l'unicité de la solution $V_1 = V_2$ dans X. □

2.4 Existence de la solution

La démonstration de l'existence de la solution est basée sur la justification de :

1. L'opérateur $L : X \longrightarrow Y$ est fermable.
2. $R(L)$ est dense dans Y pour tout $V \in X$ et pour tout $\mathcal{W} = (F, f, g) \in Y$ arbitraire .

Proposition 2.4.1. *L'opérateur $L : X \longrightarrow Y$ est fermable.*

Démonstration. Supposer que $V_n \in D(L)$ est une suite telle que :

$$V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } X, \tag{2.51}$$

et

$$LV_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (F, f, g) \quad \text{dans } Y, \tag{2.52}$$

nous devons prouver que $F \equiv 0$, $f \equiv 0$, et $g \equiv 0$. Puisque $V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ dans X alors :

$$V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D). \tag{2.53}$$

En vertu de la continuité de la dérivation de $\mathcal{D}'(D)$ dans $\mathcal{D}'(D)$, (2.53) implique :

$$\mathcal{L}V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D), \tag{2.54}$$

Mais comme $\mathcal{L}V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F \quad$ dans $L^2(D)$, alors :

$$\mathcal{L}V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D), \tag{2.55}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(D)$, nous concluons que $F \equiv 0$.
En outre, par le fait que

$$lV_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{2.56}$$

et l'injection canonique de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est continue, (2.56) implique :

$$lV_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.57}$$

De plus, étant donné que :

$$V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } X,$$

et

$$\|lV_n\|_{L^2(\Omega)} \le \|V_n\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.58}$$

alors, nous avons :

$$lV_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{2.59}$$

par conséquent

$$lV_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.60}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, (2.59) et (2.60) impliquent que $f \equiv 0$. Le raisonnement est similaire pour prouver que $g \equiv 0$.

La preuve est analogue à celle de [36].

□

Définition 2.4.1. *Une solution de l'équation de l'opérateur :*

$$\overline{L}V = W = (F, f, g), \tag{2.61}$$

est appelée solution forte du problème (2.2)-(2.5) *où* $\overline{L}$ *la fermeture de l'opérateur* L *et* $D(\overline{L})$ *son domaine de définition.*

Les points du graphe de $\overline{L}$ sont limites de suite de points du graphe de L, en passant à la limite, l'estimation (2.17) peut être étendue à

$$\|V\|_X \le \sqrt{M_5}\|\overline{L}V\|_Y, \quad \forall V \in D(\overline{L}). \tag{2.62}$$

D'où l'on déduit les résultats suivants :

Corollaire 2.4.2. *Si une solution forte du problème* (2.2)-(2.5) *existe, il est unique et dépend continûment de* $W = (F, f, g) \in Y$.

Corollaire 2.4.3. *L'ensemble* $R(\overline{L})$ *de* $\overline{L}$ *est fermé dans* Y*, et* $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$.

Démonstration. Soit $y \in \overline{R(L)}$, alors il existe une suite de Cauchy $\{y_n\}_n$ dans Y constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y. \tag{2.63}$$

Il existe alors une suite correspondante $V_n \in D(L)$ telle que

$$LV_n = y_n. \tag{2.64}$$

De l'estimation (2.50), on obtient :

$$\|V_p - V_q\|_X \leq \sqrt{M_5}\|LV_p - LV_q\|_Y \longrightarrow 0, \tag{2.65}$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduire que $\{V_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans X, ainsi il existe $V \in X$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = V, \text{dans } X. \tag{2.66}$$

En vertu de la définition de $\overline{L}$ ($\lim_{n\to+\infty} V_n = V$, dans X, si $\lim_{n\to+\infty} LV_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = y$, alors $\lim_{n\to+\infty} \overline{L}V_n = y$ et comme $\overline{L}$ est fermé donc $\overline{L}V = y$) , la fonction V vérifie :

$$V \in D(\overline{L}), \overline{L}V = y. \tag{2.67}$$

Ainsi $y \in R(\overline{L})$, alors

$$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L}). \tag{2.68}$$

Aussi on conclut ici que $R(\overline{L})$ est fermé parce qu'il est complet (tout sous-espace complet d'un espace métrique–non nécessairement complet– est fermé).

Il reste à montrer l'inclusion inverse.

Soit $y \in R(\overline{L})$, alors il existe une suite $\{y_n\}_n$ dans Y constituée des éléments de l'ensemble $R(\overline{L})$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y. \tag{2.69}$$

où $y \in R(\overline{L})$, car $R(\overline{L})$ est un sous-ensemble fermé d'un espace complet Y, donc $R(\overline{L})$ est complet. Il existe alors une suite correspondante $V_n \in D(\overline{L})$ telle que

$$\overline{L}V_n = y_n. \tag{2.70}$$

De l'estimation (2.50), on obtient :

$$\|V_p - V_q\|_X \leq \sqrt{M_5}\|\overline{L}V_p - \overline{L}V_q\|_Y \longrightarrow 0, \tag{2.71}$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduire que $\{V_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans X, ainsi il existe $V \in X$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = V, \text{dans } X. \tag{2.72}$$

Une fois encore, il existe une suite correspondante $\{L(V_n)\}_n \in R(L)$ telle que

$$LV_n = \overline{L}V_n \quad \text{sur} \quad R(L), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.73}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} LV_n = y, \tag{2.74}$$

En conséquence $y \in \overline{R(L)}$, et alors on conclut que :

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}. \tag{2.75}$$

□

Maintenant on doit prouver que $R(L)$ est dense dans F pour tout $u \in B$ et pour tout $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in F$ arbitraire.

Pour prouver l'existence d'une solution forte $V = \overline{L}^{-1}W = \overline{L^{-1}}W$ du problème (2.2)-(2.5) $\forall W = (F, f, g) \in Y$, il suffit de prouver que $\overline{R(L)} = Y$, la densité de $R(L)$ dans Y est équivalente à l'orthogonalité d'un vecteur $W = (F, f, g) \in Y$ à l'ensemble $R(L)$. A cet effet, nous commençons par le théorème suivant (la preuve de la densité dans le cas particulier).

Théorème 2.4.4. *Pour certaines fonctions $G \in L_p^2(D)$,et pour tout $U \in D_0(L) = \{U/U \in D(L), \ell_1 U = 0, \quad \ell_2 U = 0\}$, on a*

$$(\mathcal{L}U, G)_{L_p^2(D)} = 0, \tag{2.76}$$

Alors , $G = 0$ presque partout dans le domaine D.

Démonstration. L'équation (2.76) peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\partial_{0t}^{\beta+1}U - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, G\right)_{L_p^2(D)} = 0. \tag{2.77}$$

Soit $h(x, y, t)$ une fonction satisfait les conditions (2.3)-(2.5) et

$$h, h_x, h_y, \int_0^t h(x,y,s)ds, x\int_0^t h_x(x,y,s)ds, x\int_0^t h_y(x,y,s)ds, \partial_{0t}^{\beta+1}h \in L^2(D). \tag{2.78}$$

Ensuite, nous supposons

$$U(x,y,t)=\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds. \tag{2.79}$$

En remplaçant $U(x,y,t)$ dans (2.77) on a

$$\left(\partial_{0t}^{\beta+1}\left(x\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(x\int_0^t\int_0^s h_x(x,y,z)dzds\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^t\int_0^s h_y(x,y,z)dzds\right),G\right)_{L^2(D)}=0. \tag{2.80}$$

Maintenant, nous supposons que la fonction

$$G(x,y,t)=-\int_0^y\int_0^\xi\int_0^t h(x,\eta,s)dsd\eta d\xi. \tag{2.81}$$

Ensuite, l'équation (2.80) devient

$$-\left(\partial_{0t}^{\beta+1}\left(\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds\right),\int_0^y\int_0^\xi\int_0^t h(x,\eta,s)dsd\eta d\xi\right)_{L_p^2(D)}$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\int_0^t\int_0^s h_x(x,y,z)dzds\right),\int_0^y\int_0^\xi\int_0^t h(x,\eta,s)dsd\eta d\xi\right)_{L^2(D)}$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^t\int_0^s h_y(x,y,z)dzds\right),\int_0^y\int_0^\xi\int_0^t h(x,\eta,s)dsd\eta d\xi\right)_{L^2(D)}=0. \tag{2.82}$$

En tenant compte du fait que la fonction h vérifie les conditions (2.3)-(2.5), puis l'intégration par parties de chaque terme (2.82) on a

$$-\left(\partial_{0t}^{\beta+1}\left(\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds\right),\int_0^y\int_0^\xi\int_0^t h(x,\eta,s)dsd\eta d\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}$$
$$=\left(\partial_{0t}^{\beta}\left(\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right),\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}, \tag{2.83}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\int_0^t\int_0^s h_x(x,y,z)dzds\right),\int_0^y\int_0^\xi\int_0^t h(x,\eta,s)dsd\eta d\xi\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$=\left(\int_0^y\int_0^t\int_0^s h_x(x,\xi,z)dzdsd\xi,\int_0^y\int_0^t h_x(x,\xi,s)dsd\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\int_0^y\int_0^t\int_0^s h_x(x,\xi,z)dzdsd\xi\right\|^2_{L_p^2(\Omega)}, \tag{2.84}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^t\int_0^s h_y(x,y,z)dzds\right),\int_0^y\int_0^\xi\int_0^t h(x,\eta,s)dsd\eta d\xi\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$=\left(\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds,\int_0^t h(x,y,s)ds\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.85}$$

Le remplacement de (2.83), (2.84), et (2.85) dans (2.82) donne

$$2\left(\partial_{0t}^{\beta}\left(\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right),\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\|\int_0^y\int_0^t\int_0^s h_x(x,\xi,z)dzdsd\xi\right\|^2_{L_p^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\|\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds\right\|^2_{L^2(\Omega)}=0. \tag{2.86}$$

En utilisant le lemme (1.5.2), le premier terme du côté gauche de (2.86) peut être estimé comme suit :

$$2\left(\partial_{0t}^{\beta}\left(\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right),\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right)_{L_p^2(\Omega)}$$
$$\geq \partial_{0t}^{\beta}\left\|\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right\|^2_{L_p^2(\Omega)}, \tag{2.87}$$

Et de l'équation (2.86) avec (2.87) on obtient

$$\partial_{0t}^{\beta}\left\|\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right\|^2_{L_p^2(\Omega)}+\frac{\partial}{\partial t}\left\|\int_0^y\int_0^t\int_0^s h_x(x,\xi,z)dzdsd\xi\right\|^2_{L_p^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\|\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq 0. \tag{2.88}$$

En remplaçant t par τ et l'intégration de (2.88) par rapport à τ sur $[0;t]$ donne

$$D_{0t}^{\beta-1}\left\|\int_0^y\int_0^t h(x,\xi,s)dsd\xi\right\|^2_{L_p^2(\Omega)}+\left\|\int_0^y\int_0^t\int_0^s h_x(x,\xi,z)dzdsd\xi\right\|^2_{L_p^2(\Omega)}$$
$$+\left\|\int_0^t\int_0^s h(x,y,z)dzds\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq 0. \tag{2.89}$$

Nous trouvons de l'inégalité (2.89), Nous trouvons : $G \equiv 0$ presque partout dans D. $\square$

Théorème 2.4.5. *L'ensemble $R(L)$ de l'opérateur L, coïncide avec tout l'espace Y.*

Démonstration. Soit $W = (\varphi, g_1, g_2) \in R(L)^{\perp}$ tel que :

$$(\mathcal{L}u, \varphi)_{L^2_p(D)} + (\ell_1 u, g_1)_{V^1(\Omega)} + (\ell_2 u, g_2)_{L^2_p(\Omega)} = 0. \tag{2.90}$$

Si nous mettons $u \in D_0(L)$ dans (2.90) on a

$$(\mathcal{L}u, \varphi)_{L^2_p(D)} = 0, \quad \forall u \in D_0(L). \tag{2.91}$$

En vertu du théorème 2.4.4 on en déduit que $\varphi \equiv 0$, donc (2.90) devient

$$(\ell_1 u, g_1)_{V^1(\Omega)} + (\ell_2 u, g_2)_{L^2_p(\Omega)} = 0, \quad \forall u \in D(L). \tag{2.92}$$

Étant donné que les opérateurs de traces ℓ_1 et ℓ_2 sont indépendants, et $R(\ell_1)$ et $R(\ell_2)$ sont partout denses dans les espaces $V^1(\Omega)$ et $L^2_p(\Omega)$, respectivement. alors, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$. Par conséquent $W = 0$. Donc $R(L_0)^{\perp} = 0$ c-à-d $\overline{R(L_0)} = Y$.

Considérons maintenant le cas général. Du fait que $R(L_0)$ est dense dans Y, on conclut qu'on peut prouver que $R(L)$ est dense dans Y au moyen de la méthode de continuation le long du paramètre. On ne va pas décrire l'application de cette méthode car elle est analogue à celle utilisée dans [25].

Cela achève la démonstration du théorème (2.4.5).

$\square$

Remarque 2.4.1. *Pour trouver une solution semi-analytique du problème, nous pouvons utiliser la méthode de transformée de Laplace et l'algorithme de Stehfest[56]. Il existe également plusieurs autres méthodes, par exemple : la perturbation de l'homotopie, ou la méthode de Galerkin. Pour plus de détails et quelques exemples numériques, voir [67, 69].*

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution du problème non linéaire

3.1 Position du problème

Soit $D = \Omega \times [0, T]$ un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ avec $\Omega = (0, c) \times (0, d) \subset \mathbb{R}^2$. Nous considérons le problème fractionnaire bidimensionnel non linéaire :

$$\partial_{0t}^{\beta+1} V - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial V}{\partial x}) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = F(x, y, t, V, V_x, V_y), (x, y, t) \in D, \quad (3.1)$$

on associé les conditions initiales

$$\ell_1 V = V(x, y, 0) = f(x, y), \quad \ell_2 V = V_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad (3.2)$$

les conditions aux limites classiques

$$V(c, y, t) = 0, \quad V_y(x, d, t) = 0, \quad (3.3)$$

et les conditions intégrales (non locales)

$$\int_0^c xV(x, y, t)dx = 0, \quad \int_0^d V(x, y, t)dy = 0. \quad (3.4)$$

Ici F est une fonction connue, where $F : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est une fonction lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$|F(x, y, t, u_1, v_1, w_1) - F(x, y, t, u_2, v_2, w_2)| \leq \delta(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|), \quad (3.5)$$

δ est une constante positive assez petit.

Si F est une fonction lipschitzienne alors elle est continue (encore plus fort, toute fonction lipschitzienne est uniformément continue).

La fonction $F(x, y, t, V, V_x, V_y)$ est une fonction non linéaire, et la condition (3.5) n'a aucun effet sur la non-linéarité de F. Le cas linéaire est lorsque F ne dépend que de x, y, t.

3.2 Existence de la solution

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème non linéaire (2.2)-(2.5). En nous appuyant sur les résultats obtenus précédemment, nous appliquons un processus itératif pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème non linéaire. Si u est une solution de problème (2.2)-(2.5) et Ψ est une solution du problème

$$\begin{cases} \pounds\Psi = \partial_{0t}^{\beta+1}\Psi - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}(x\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}) - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y, t) \in D, \\ \quad \ell_1\Psi = \Psi(x, y, 0) = f(x, y), \quad \ell_2\Psi = \Psi_t(x, y, 0) = g(x, y), \\ \quad \Psi(c, y, t) = 0, \quad \Psi_y(x, d, t) = 0, \\ \quad \int_0^c x\Psi(x, y, t)dx = 0, \quad \int_0^d \Psi(x, y, t)dy = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

puis $w(x, y, t) = u(x, y, t) - \Psi(x, y, t)$ est une solution de

$$\pounds w = \partial_{0t}^{\beta+1}w - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial w}{\partial x}) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = G(x, y, t, w, w_x, w_y), (x, y, t) \in D, \tag{3.7}$$

$$\ell_1 w = w(x, y, 0) = 0, \quad \ell_2 w = w_t(x, y, 0) = 0, \tag{3.8}$$

$$w(c, y, t) = 0, \quad w_y(x, d, t) = 0, \tag{3.9}$$

$$\int_0^c xw(x, y, t)dx = 0, \quad \int_0^d w(x, y, t)dy = 0, \tag{3.10}$$

où

$$G(x, y, t, w, w_x, w_y) = F(x, y, t, w + \Psi, w_x + \Psi_x, w_y + \Psi_y)$$

et satisfait à la condition

$$|G(x, y, t, u_1, v_1, w_1) - G(x, y, t, u_2, v_2, w_2)| \leq \delta(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|). \tag{3.11}$$

Selon le théorème (2.3.1), problème (3.6) a une solution unique qui dépend continûment de $f \in V^1(\Omega)$ et $g \in L_p^2(\Omega)$. Il reste à résoudre le problème

(3.7)-(3.10). Nous prouverons que le problème (3.7)-(3.10) admet une solution unique faible.

L'idée générale est de construire une suite d'itération $(w^{(n)})_{n\in N}$ qui converge vers un élément $w \in V_p^1(D)$ ce sera une solution du problème à l'étude (3.7)-(3.10).

Supposons que w et $v \in C^1(D)$, tel que :

$$v(x,y,T) = w(x,y,0) = 0, \qquad v_t(x,y,T) = w_t(x,y,0) = 0, \tag{3.12}$$

$$\int_0^c xv(x,y,t)dx = \int_0^c xw(x,y,t)dx = 0, \tag{3.13}$$

$$\int_0^d v(x,y,t)dy = \int_0^d w(x,y,t)dy = 0. \tag{3.14}$$

Pour $v \in C^1(D)$, on a :

$$\left(\pounds w, \Im_{xyy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)} = \left(G, \Im_{xyy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}, \tag{3.15}$$

telque

$$\Im_{xyy}(\xi v) = \int_0^x \left(\int_y^d \left(\int_0^\eta \xi v\,(\xi,\mu,t)\,d\mu\right) d\eta\right) d\xi, \tag{3.16}$$

compte tenu des hypothèses ci-dessus, nous obtenons

$$\left(\partial_{0t}^{\beta+1} w, \Im_{xyy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)} = -\left(\partial_{0t}^{\beta+1}\Im_y(w), \Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}, \tag{3.17}$$

$$-\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}\right), \Im_{xyy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)} = \left(\Im_y(w_x), x\Im_y(v)\right)_{L_p^2(D)}, \tag{3.18}$$

$$-\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \Im_{xyy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)} = \left(w, \Im_x(\xi v)\right)_{L^2(D)}, \tag{3.19}$$

$$\left(G, \Im_{xyy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)} = \left(\Im_y(G), \Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}. \tag{3.20}$$

L'insertion de (3.17)-(3.20) dans (3.15) donne

$$A\,(w,v) = -\left(\partial_{0t}^{\beta+1}\Im_y(w), \Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)} + \left(\Im_y(w_x), x\Im_y(v)\right)_{L_p^2(D)} + \left(w, \Im_x(\xi v)\right)_{L^2(D)}. \tag{3.21}$$

où

$$A\,(w,v) = \left(\Im_y(G), \Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}. \tag{3.22}$$

Définition 3.2.1. *Une fonction $w \in V_p^1(D)$ est appelée une solution faible du problème* (3.7)-(3.10) *si* (3.9) *et* (3.22) *détiennent.*

Nous définissons maintenant la suite d'itération $(w^{(n)})_{n\in N}$ comme suit ; On choisit $w^{(0)} = 0$. Compte tenu de l'élément $w^{(n-1)}$, alors pour n = 1, 2,. . . résoudre le problème itéré :

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\beta+1} w^{(n)} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial w^{(n)}}{\partial x}\right) - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial y^2} = G\left(x,y,t,w^{(n-1)},w_x^{(n-1)},w_y^{(n-1)}\right), \\ \quad w^{(n)}(x,y,0) = 0, \quad w_t^{(n)}(x,y,0) = 0, \\ \quad w^{(n)}(c,y,t) = 0, \quad w_y^{(n)}(x,d,t) = 0, \\ \quad \int_0^c x w^{(n)}(x,y,t)dx = 0, \quad \int_0^d w^{(n)}(x,y,t)dy = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Pour n fixé, le théorème (2.3.1) montre que le problème (3.23) a une solution unique $w^{(n)}(x,y,t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Maintenant, nous posons $V^{(n)}(x,y,t) = w^{(n+1)}(x,y,t) - w^{(n)}(x,y,t)$, on obtient alors le nouveau problème suivant

$$\partial_{0t}^{\beta+1} V^{(n)} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2} = \beta^{(n-1)}(x,y,t), \tag{3.24}$$

$$V^{(n)}(x,y,0) = 0, \quad V_t^{(n)}(x,y,0) = 0, \tag{3.25}$$

$$V^{(n)}(c,y,t) = 0, \quad V_y^{(n)}(x,d,t) = 0, \tag{3.26}$$

$$\int_0^c x V^{(n)}(x,y,t)dx = 0, \quad \int_0^d V^{(n)}(x,y,t)dy = 0, \tag{3.27}$$

où

$$\beta^{(n-1)}(x,y,t) = G\left(x,y,t,w^{(n)},w_x^{(n)},w_y^{(n)}\right) - G\left(x,y,t,w^{(n-1)},w_x^{(n-1)},w_y^{(n-1)}\right).$$

Lemme 3.2.1. *Supposons que la condition* (3.11) *est vérifiée, alors pour le problème fractionnaire linéaire* (3.24)-(3.27)*, nous avons l'estimation a priori suivante :*

$$\|V^{(n)}\|_{V_p^1(D)} \le K\|V^{(n-1)}\|_{V_p^1(D)}, \tag{3.28}$$

où $K = C_4 T$ est une constante positive .

Démonstration. En prenant le produit scalaire dans $L_p^2(\Omega)$, de l'équation (3.24) et l'opérateur

$$MV = V_t^{(n)} - \Im_y^2(V_t^{(n)}),$$

on obtient

$$\left(\partial_{0t}^{\beta+1} V^{(n)}, V_t^{(n)} - \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} - \left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right), V_t^{(n)} - \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)}$$
$$- \left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2}, V_t^{(n)} - \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} = \left(\beta^{(n-1)}(x,y,t), V_t^{(n)} - \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)}. \tag{3.29}$$

L'intégration par parties et la prise en compte des conditions (3.25)-(3.27), donne

$$\begin{aligned}
\left(\partial_{0t}^{\beta+1}V^{(n)}, V_t^{(n)}\right)_{L_p^2(\Omega)} &= \left(\partial_{0t}^{\beta}V_t^{(n)}, V_t^{(n)}\right)_{L_p^2(\Omega)}, \\
&\geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\|V_t^{(n)}\|^2_{L_p^2(\Omega)}, \qquad (3.30)\\
-\left(\partial_{0t}^{\beta+1}V^{(n)}, \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} &= -\left(\partial_{0t}^{\beta}V_t^{(n)}, \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&= \left(\partial_{0t}^{\beta}\left(\Im_y(V_t^{(n)})\right), \left(\Im_y(V_t^{(n)})\right)\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\|\Im_y\left(V_t^{(n)}\right)\|^2_{L_p^2(\Omega)}, \qquad (3.31)\\
-\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right), V_t^{(n)}\right)_{L_p^2(\Omega)} &= \left(V_x^{(n)}, V_{tx}^{(n)}\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|V_x^{(n)}\|^2_{L_p^2(\Omega)}, \qquad (3.32)\\
\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right), \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} &= \left(\Im_y(V_x^{(n)}), \Im_y(V_{tx}^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\Im_y\left(V_x^{(n)}\right)\|^2_{L_p^2(\Omega)}, \qquad (3.33)\\
-\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2}, V_t^{(n)}\right)_{L_p^2(\Omega)} &= \left(V_y^{(n)}, V_{yt}^{(n)}\right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|V_y^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.34)\\
\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2}, \Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} &= \left(V^{(n)}, V_t^{(n)}\right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|V^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\beta^{(n-1)}(x,y,t), V_t^{(n)}\right)_{L_p^2(\Omega)} &= \left(\beta^{(n-1)}, V_t^{(n)}\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\|\beta^{(n-1)}\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|V_t^{(n)}\|^2_{L_p^2(\Omega)}. \qquad (3.36)\\
\left(\beta^{(n-1)}(x,y,t), -\Im_y^2(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} &= \left(\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right), \Im_y(V_t^{(n)})\right)_{L_p^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L_p^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|\Im_y(V_t^{(n)})\|^2_{L_p^2(\Omega)}. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Le remplacement de (3.30)-(3.37) dans (3.29), donne

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\left(\|\Im_y\left(V_t^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_t^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\Im_y\left(V_x^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_x^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|V^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|V_y^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leq\frac{\varepsilon}{2}\left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)+\frac{1}{2\varepsilon}\left(\|\Im_y(V_t^{(n)})\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_t^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right),
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

On prend $\varepsilon=1$,

en échangeant t par τ, et l'intégration des deux côtés de (3.38) par rapport à τ sur $[0;t]$, la prise en compte les conditions initiales (3.25) , on trouve

$$
\begin{aligned}
&D_{0t}^{\beta-1}\left(\|\Im_y\left(V_t^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_t^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)+\left(\|\Im_y\left(V_x^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_x^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)\\
&+\left(\|V^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|V_y^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leq\int_0^t\left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)d\tau\\
&+\int_0^t\left(\|\Im_y(V_\tau^{(n)})\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_\tau^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Maintenant, en omettant les deux derniers termes sur le côté gauche de (3.39) on a

$$
\begin{aligned}
&D_{0t}^{\beta-1}\left(\|\Im_y\left(V_t^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_t^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)\\
&\leq\int_0^t\left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)d\tau\\
&+\int_0^t\left(\|\Im_y(V_\tau^{(n)})\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_\tau^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

En appliquant le lemme (1.5.3) comme suit :

$$
y(t)=\int_0^t\left(\|\Im_y\left(V_\tau^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_\tau^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)d\tau,\quad y(0)=0 \tag{3.41}
$$

$$
\partial_{0t}^{\beta}y(t)=D_{0t}^{\beta-1}\left(\|\Im_y\left(V_t^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_t^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right). \tag{3.42}
$$

De là (3.40) devient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\left(\|\Im_y\left(V_\tau^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|V_\tau^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)d\tau\\
&\leq C_1\left(D_{0t}^{-\beta-1}\left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)}+\|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

où

$$C_1 = \Gamma(\beta) E_{\beta,\beta}(T^\beta). \tag{3.44}$$

En combinant les inégalités (3.39) et (3.43) on obtient

$$\begin{aligned}
&D_{0t}^{\beta-1}\left(\|\Im_y\left(V_t^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|V_t^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) + \|V^{(n)}\|^2_{V^1_p(\Omega)} \\
&\leq C_2\left(D_{0t}^{-\beta-1}\left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right)\right. \\
&\left. + \int_0^t \left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) d\tau\right),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

où

$$C_2 = \frac{\max\{1, C_1\}}{\min\left\{1, \frac{2}{cd^2}\right\}}. \tag{3.46}$$

En vertu de l'inégalité (1.5.4),

$$\begin{aligned}
&D_{0t}^{-\beta-1}\left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) \\
&\leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^t \left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

L'inégalité (3.45) devient

$$\begin{aligned}
&D_{0t}^{\beta-1}\left(\|\Im_y\left(V_t^{(n)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|V_t^{(n)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) + \|V^{(n)}\|^2_{V^1_p(\Omega)} \\
&\leq C_3\left(\int_0^t \left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) d\tau\right), \\
&\leq C_3\left(\int_0^T \left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) d\tau.\right),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

où

$$C_3 = C_2\left(1 + \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right). \tag{3.49}$$

En omettant le premier terme du côté gauche dans (3.48), nous obtenons

$$\|V^{(n)}\|^2_{V^1_p(\Omega)} \leq C_3\left(\int_0^T \left(\|\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} + \|\beta^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(\Omega)}\right) d\tau\right). \tag{3.50}$$

Concernant le côté droit de (3.50), nous avons ces estimations

$$\begin{aligned}
&\int_D x\left(\beta^{(n-1)}\right)^2 dxdydt \\
&\leq \delta^2 \int_D x(|V^{(n-1)}| + |V_x^{(n-1)}| + |V_y^{(n-1)}|)^2 dxdydt \\
&\leq 3\delta^2\left(\|V^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(D)} + \|V_x^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(D)} + \|V_y^{(n-1)}\|^2_{L^2_p(D)}\right).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_D x\left(\Im_y\left(\beta^{(n-1)}\right)\right)^2 dxdy \\
&\leq \delta^2 \int_D x(|\Im_y\left(V^{(n-1)}\right)| + |\Im_y\left(V_x^{(n-1)}\right)| + |\Im_y\left(V_y^{(n-1)}\right)|)^2 dxdy \\
&\leq 3\delta^2 \left(\|\Im_y\left(V^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(D)} + \|\Im_y\left(V_x^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(D)} + \|\Im_y\left(V_y^{(n-1)}\right)\|^2_{L^2_p(D)}\right).
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

En considérant l'inégalité élémentaires suivante

$$
\|\Im_y\left(V\right)\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \frac{d^2}{2}\|V\|^2_{L^2_p(\Omega)} \leq \frac{cd^2}{2}\|V\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.53}
$$

En combinant les inégalités (3.50),(3.51),(3.52) et (3.53) on obtient

$$
\|V^{(n)}\|^2_{V^1_p(\Omega)} \leq C_4\|V^{(n-1)}\|^2_{V^1_p(D)} \tag{3.54}
$$

où

$$
C_4 = \left(\frac{d^2}{2} + 1\right) 3C_3\delta^2 \max\{1; c\}.
$$

L'intégration des deux côtés de (3.54) par rapport à t sur l'intervalle $[0, T]$, implique

$$
\|V^{(n)}\|_{V^1_p(D)} \leq K\|V^{(n-1)}\|_{V^1_p(D)}, \tag{3.55}
$$

où $K = C_4T$

□

Théorème 3.2.2. *Supposons que la condition* (3.11) *est satisfaite, et si* δ *assez petit, on peut avoir* $0 < K < 1$*. Alors le problème non linéaire fractionnaire* (3.7)-(3.10) *admet une solution faible dans* $V^1_p(D)$*.*

Démonstration. Il résulte de (3.55) que la série $\sum_{n=0}^{\infty} V^{(n)}$ converge si $0 < K < 1$. Comme $V^{(n)}(x, y, t) = w^{(n+1)}(x, y, t) - w^{(n)}(x, y, t)$, il en résulte que la suite $(w^{(n)})_{n\in N}$ définie par :

$$
\begin{aligned}
w^{(n)}(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} V^{(k)}(x, y, t) + w^{(0)}(x, y, t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{(k+1)} - w^{(k)}\right) + w^{(0)}(x, y, t), \qquad k = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

converge vers un élément $w \in V^1_p(D)$ qui doit être prouvé qu'il est une solution du problème (3.7)-(3.10). En d'autres termes, w doit satisfaire

$$
A\left(w, v\right) = \left(\Im_y(G), \Im_{xy}(\xi v)\right)_{L^2_p(D)}, \tag{3.56}
$$

$$w(c,y,t)=0, \quad w_y(x,d,t)=0, \tag{3.57}$$

pour le problème (3.23), on a :

$$A\left(w^{(n)},v\right)=\left(\Im_y\left(G\left(x,\eta,t,w^{(n-1)},w_x^{(n-1)},w_\eta^{(n-1)}\right)\right),\Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}, \tag{3.58}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned}
&A\left(w^{(n)}-w,v\right)+A\left(w,v\right)\\
&=\left(\Im_y\left(G\left(x,\eta,t,w^{(n-1)},w_x^{(n-1)},w_\eta^{(n-1)}\right)\right)-\Im_y\left(G\left(x,\eta,t,w,w_x,w_\eta\right)\right),\Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}\\
&+\left(\Im_y\left(G\left(x,\eta,t,w,w_x,w_\eta\right)\right),\Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Maintenant, à partir de l'équation différentielle partielle (3.23), on a

$$\begin{aligned}
&A\left(w^{(n)}-w,v\right)\\
&=\left(v,\partial_{0t}^{\beta+1}\Im_{xyy}\left(\xi\left(w^{(n)}-w\right)\right)\right)_{L_p^2(D)}-\left(v,\Im_{xyy}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(w^{(n)}-w\right)\right)\right)\right)_{L_p^2(D)}\\
&-\left(v,\Im_{xyy}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(w^{(n)}-w\right)\right)\right)\right)_{L_p^2(D)}, \qquad (3.60)\\
&=\left(v,\Im_{xyy}\left(\xi G\left(\xi,\eta,t,\left(w^{(n-1)}-w\right),\left(w_\xi^{(n-1)}-w_\xi\right),\left(w_\eta^{(n-1)}-w_\eta\right)\right)\right)\right)_{L_p^2(D)}.
\end{aligned}$$

L'application du lemme(1.4.6) au premier terme de la partie droite de (3.60), et l'intégration par parties de chaque terme du côté droit de (3.60), et l'utilisation de conditions(3.12)-(3.14) sur v et w, impliquent

$$\begin{aligned}
A\left(w^{(n)}-w,v\right)&=-\left(\Im_y(w^{(n)}-w),\partial_{tT}^{\beta+1}\Im_{xy}\left(\xi v\right)\right)_{L_p^2(D)}\\
&+\left(\Im_y(w_x^{(n)}-w_x),x\Im_y(v)\right)_{L_p^2(D)}+\left(w^{(n)}-w,\Im_x(\xi v)\right)_{L^2(D)}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux termes du côté droit de (3.61), obtenir

$$\begin{aligned}
&-\left(\Im_y\left(\left(w^{(n)}-w\right)\right),\partial_{tT}^{\beta+1}\Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}\\
&\leq\frac{d}{\sqrt{2}}\left\|\partial_{tT}^{\beta+1}\Im_{xy}(\xi v)\right\|_{L_p^2(D)}\left\|w^{(n)}-w\right\|_{L_p^2(D)},\\
&\leq\frac{dc}{\sqrt{2}}\left\|w^{(n)}-w\right\|_{L^2(D)}\left\|\partial_{tT}^{\beta+1}\Im_{xy}(\xi v)\right\|_{L_p^2(D)},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\left(\Im_y(w_x^{(n)}-w_x),x\Im_y(v)\right)_{L_p^2(D)}\leq\left\|\Im_y(w_x^{(n)}-w_x)\right\|_{L_p^2(D)}\left\|x\Im_y(v)\right\|_{L_p^2(D)}, \tag{3.63}$$

$$\left(w^{(n)}-w,\Im_x(\xi v)\right)_{L^2(D)}\leq\left\|w^{(n)}-w\right\|_{L^2(D)}\left\|\Im_x(\xi v)\right\|_{L^2(D)}. \tag{3.64}$$

Le remplacement de (3.62)-(3.64) dans (3.61), donne ensuite

$$A\left(w^{(n)} - w, v\right)$$

$$\leq C\left\|w^{(n)} - w\right\|_{V_p^1(D)}\left(\left\|\partial_{tT}^{\beta+1}\Im_{xy}(\xi v)\right\|_{L_p^2(D)} + \left\|x\Im_y(v)\right\|_{L_p^2(D)} + \left\|\Im_x(\xi v)\right\|_{L^2(D)}\right), \tag{3.65}$$

où

$$C = \max\left(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{dc}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

De l'autre côté de (3.59), nous avons

$$\left(\Im_y\left(G\left(x,\eta,t,w^{(n-1)},w_x^{(n-1)},w_\eta^{(n-1)}\right)\right) - \Im_y\left(G\left(x,\eta,t,w,w_x,w_\eta\right)\right), \Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}$$

$$\leq \frac{3d^2}{2}\delta \max\left(1,c\right)\left\|w^{(n-1)} - w\right\|_{V_p^1(D)}\left\|\Im_{xy}(\xi v)\right\|_{L_p^2(D)}. \tag{3.66}$$

Prendre en compte (3.66) et (3.65), et passant à la limite dans (3.59) quand $n \longrightarrow \infty$, on obtient

$$A\left(w,v\right) = \left(\Im_y\left(G\left(x,\eta,t,w,w_x,w_\eta\right)\right), \Im_{xy}(\xi v)\right)_{L_p^2(D)}, \tag{3.67}$$

Pour conclure ce problème (3.7)-(3.10) admet une solution faible, nous devons démontrer que les conditions (3.9) sont satisfaites. Comme $w \in V_p^1(D)$, puis $\int_0^t w_y(x,y,s)ds \in C(\overline{D})$ et $\int_0^t w(x,y,s)ds \in C(\overline{D})$, nous concluons que : $w(c,y,t) = 0$, $w_y(x,d,t) = 0$, p.p. □

Il reste maintenant à prouver l'unicité de la solution du problème (3.7)-(3.10).

3.3 Unicité de la solution

Théorème 3.3.1. *Si la condition* (3.11) *est satisfaite, et si* δ *assez petit, on peut avoir* $0 < K < 1$*. Alors la solution du problème* (3.7)-(3.10) *est unique.*

Démonstration. Soit $w_1, w_2 \in V_p^1(D)$ deux solutions de (3.7)-(3.10) , posons : $V = w_1 - w_2 \in V_p^1(D)$ elle satisfait

$$\partial_{0t}^{\beta+1}V - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \beta\left(x,y,t\right), \tag{3.68}$$

$$V(x,y,0) = 0, \quad V_t(x,y,0) = 0, \tag{3.69}$$

$$V(c,y,t) = 0, \quad V_y(x,d,t) = 0, \tag{3.70}$$

$$\int_0^c xV(x,y,t)dx = 0, \qquad \int_0^d V(x,y,t)dy = 0. \tag{3.71}$$

où

$$\beta\,(x,y,t)=G\left(x,y,t,w_1,\frac{\partial w_1}{\partial x},\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)-G\left(x,y,t,w_2,\frac{\partial w_2}{\partial x},\frac{\partial w_2}{\partial y}\right).$$

En suivant la même procédure que pour prouver le lemme(3.2.1), nous obtenons

$$\|V\|_{V_p^1(D)}\leq K\|V\|_{V_p^1(D)}, \tag{3.72}$$

où K est la même constante que dans le lemme(3.2.1). Comme $0<K<1$, on déduit de (3.72) cette

$$(1-K)\|V\|_{V_p^1(D)}=0,$$

ce qui implique que $V=w_1-w_2=0$, et donc $w_1=w_2\in V_p^1(D)$. Ce qui achève la démonstration du théorème (3.3.1). $\square$

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce travail on s'intéresse aux problèmes non locaux pour des équations intégro-différentielles, les conditions non locales sont des types intégraux. On a développé la méthode des inégalités d'énergie pour des problèmes très compliqués, ou, on a appliqué la méthode des inégalités d'énergie pour un problème fractionnaire bidimensionnel, les conditions de problème sont des conditions intégrales (non local) et classiques (Neumann et Dirichlet).

Le bien posé des équations intégro-différentiells est prouvé. la méthode des inégalités d'énergie a été appliquée avec succès à un problème d'ordre fractionnaire, tel que l'opérateur fractionnaire est au sens de Caputo. L'existence et l'unicité d'une solution des problèmes intégro-différentiels sont trouvées. où la solvabilité des problèmes a été prouvée, et l'existence d'une solution faible pour des problèmes non linéaires.

Il existe d'autres méthodes pour étudier les problèmes d'existence de solution pour les problèmes fractionnaires, par exemple, nous mentionnons ; Théorème du point fixe de Schauder (voir [57]). Cette théorie repose sur quatre étapes et plus de conditions (complètement continue, relativement compacte, convexe..). De plus, les conditions aux limites pour la plupart des problèmes étudiés sont classiques (Neumann), La même chose à propos du théorème de Lax-Milgram (voir [63]), contrairement à la méthode d'inégalité d'énergie, qui est appliquée avec différentes conditions aux limites, et moins de conditions sur les espaces fonctionnelles. C'est ce qui lui donne l'efficacité et la préférence.

Quelques méthodes numériques ont été évoquées pour résoudre les problèmes étudiés. La première est la transformation de Laplace et l'utilisation de sa transformation inverse pour obtenir la solution numérique. Le deuxième outil est la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (LT- HPM), aussi la méthode d'itération variationnelle ou La décomposition d'Adomian.

Il est important de noter une foisencore qu'il n'existe pas encore de théorie générale pour les problèmes non locaux semblables à ceux des problèmes conventionnels. Cela est dû à la nouveauté relative de ce thème d'une part et à la complexité des questions qu'il soulève d'autre part. Chaque problème nécessite alors un traitement spécifique, qui souligne l'actualité du sujet abordé dans cette thèse. Il est rapporté que de nombreux problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts.

Bibliographie

[1] I.G. Petrovsky. Uber das cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentialgeichungen in gebit der nichtanalystischen funktionen. *Bull. Univ d'etat, Moscow N*, page 7, 1938.

[2] J. Leray. Lectures on hyperbolic differential equations with variable coefficients. *Princeton, Just for Adv. study*, 1952.

[3] L. Garding. Cauchy problem for hyperbolic equation, university of chicago. *Lecture notes*, 1957.

[4] A.A. Dezin. Existence and uniqueness theorems for solutions of boundary problems for partial differential equations in function spaces. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 14(3) :21–73, 1959.

[5] J.R. Cannon. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21(2) :155–160, 1963.

[6] L.I. Kamynin. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(6) :33–59, 1964.

[7] J. Spanier K.B. Oldham. The fractional calculus, vol. 111 of mathematics in science and engineering, 1974.

[8] N.I. Yurchuk. A priori estimates of solutions of boundary-value problems for certain differential equations. *Diff. Equa*, 12(4) :512–518, 1976.

[9] N.I. Ionkin. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differentsial'nye Uravneniya*, 13(2) :294–304, 1977.

[10] E.I. Moiseev N.I. Ionkin. A problem for a heat equation with two-point boundary conditions. *Differentsial'nye Uravneniya*, 15(7) :1284–1295, 1979.

[11] V. Namias. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25(3) :241–265, 1980.

[12] A.A. Samarskii. Some problems of the theory of differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 16(11) :1925–1935, 1980.

[13] others J.R. Cannon, J. van der Hoek. The existence of and a continuous dependence result for the solution of the heat equation subject to the specification of energy. 1981.

[14] N.I. Yurchuk. *The method of energy inequalities in the study of operatordifferential equations*. PhD thesis, Dissertation, Moscow, 1981.

[15] A.M. Nakhushev. On certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and its applications in ground waters dynamics. *Differentsialnie Uravnenia*, 18 :72–81, 1982.

[16] N.J. Yurchuk. A mixed problem with an integral condition for some parabolic equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 22 :2117–2126, 1986.

[17] J. Van Der Hoek J.R. Cannon, S.P. Esteva. A galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(3) :499–515, 1987.

[18] A.V. Kartynnik. Three point boundary value problem with an integral space variables conditions for second order parabolic equations, di er. *Uravn*, 26 :1568–1575, 1990.

[19] N.J. Yurchuk N. Benouar. A mixed problem with an integral condition for parabolic equations with a bessel operator. *Differentsial'nye Uravneniya*, 27(12) :2094–2098, 1991.

[20] M. Shillor P. Shi. On design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity. *Theoretical aspects of industrial design*, pages 76–82, 1992.

[21] K.Y. Chan Y.S. Choi. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 18(4) :317–331, 1992.

[22] S.G. Samko A.A. Kilbas, O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives (theory and applications), 1993.

[23] B. Ross K.S. Miller. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, john-wily and sons. *Inc. New York*, 1993.

[24] A.V. Filinovskiĭ L.A. Muraveĭ. On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 74(1) :219, 1993.

[25] A. Bouziani. Mixed problem for certain non-classical equations containing a small parameter. *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 5(7) :389–400, 1994.

[26] N. Benouar A. Bouziani. Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 321(9) :1177–1182, 1995.

[27] A.M. Nakhushev. Equations of mathematical biology. *Vysshaya Shkola, Moscow*, 1 :995, 1995.

[28] A. Bouziani. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 9(3) :323–330, 1996.

[29] F. Mainardi. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Chaos, Solitons & Fractals*, 7(9) :1461–1477, 1996.

[30] I. Podlubny. The laplace transform method for linear differential equations of the fractional order. *arXiv preprint funct-an/9710005*, 1997.

[31] J.H. He. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167(1-2) :57–68, 1998.

[32] A. Bouziani S. Mesloub. Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles. *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 9(1) :61–72, 1998.

[33] S.P. Kurdyumov V.A. Belavin, S.P. Kapitsa. A mathematical model of global demographic processes with regard to the spatial distribution. *Computational mathematics and mathematical physics*, 38(6) :849–865, 1998.

[34] J.H. He. Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations. *Bull. Sci. Technol*, 15(2) :86–90, 1999.

[35] L.S. Pulkina. A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations. 1999.

[36] A. Bouziani S. Mesloub. On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 22(3) :511–519, 1999.

[37] A. Zhou W. Allegretto, Y. Liu. A box scheme for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems. *Dynamics of continuous discrete and impulsive systems*, 5(1-4) :209–223, 1999.

[38] G.A. Avalishvili D.G. Gordeziani. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. *Matematicheskoe modelirovanie*, 12(1) :94–103, 2000.

[39] L.S. Pulkina. Thel 2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential Equations*, 36(2) :316–318, 2000.

[40] F. Mainardi R. Gorenflo. Essentials of fractional calculus. 2000.

[41] M.S. Temsi A. Bouziani. On a pseudohyperbolic equation with a nonlocal boundary condition. *Kobe journal of mathematics*, 21(1) :15–31, 2004.

[42] A. Bouziani. Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 291(2) :371–386, 2004.

[43] A.V. Pskhu. Partial differential equations of fractional order, 2005.

[44] A. Bouziani. Solution of a transmission problem for semilinear parabolic-hyperbolic equations by the time-discretization method. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006, 2006.

[45] S. Mesloub. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. *Journal of mathematical analysis and applications*, 316(1) :189–209, 2006.

[46] A. Bouziani N. Merazga. Rothe time-discretization method for the semilinear heat equation subject to a nonlocal boundary condition. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006, 2006.

[47] S. Momani Z.M. Odibat. Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(1) :27, 2006.

[48] S. Mesloub. On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions. *Nonlinear Analysis : Theory, methods & applications*, 68(9) :2594–2607, 2008.

[49] Z. Tomovski R. Hilfer, Y. Luchko. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized riemann-liouville fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal*, 12(3) :299–318, 2009.

[50] C. Xu X. Li. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(3) :2108–2131, 2009.

[51] A.A. Alikhanov. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations. *Differential equations*, 46(5) :660–666, 2010.

[52] C. Xu X. Li. Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation. *Communications in Computational Physics*, 8(5) :1016, 2010.

[53] Y. Yan N.J. Ford, J. Xiao. A finite element method for time fractional partial differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 14(3) :454–474, 2011.

[54] M.I. Ismailov N.B. Kerimov. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 396(2) :546–554, 2012.

[55] A.L. Marhoune A. Merad. Strong solution for a high order boundary value problem with integral condition. *Turkish Journal of Mathematics*, 37(2) :299–307, 2013.

[56] H.T. Yang Z.J. Fu, W. Chen. Boundary particle method for laplace transformed time fractional diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 235 :52–66, 2013.

[57] Mouffak Benchohra and Jamal E Lazreg. Existence and uniqueness results for nonlinear implicit fractional differential equations with boundary conditions. *Rom. J. Math. Comput. Sci*, 4(1) :60–72, 2014.

[58] S. Mesloub. On an initial boundary value problem for a class of odd higher order pseudohyperbolic integrodifferential equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014.

[59] O. Cenap A. Merad, A. Bouziani. Inversion laplace transform for integrodifferential parabolic equation with purely nonlocal conditions. *Hacettepe journal of mathematics and statistics*, 44(5) :1087–1097, 2015.

[60] O. Cenap A. Kilicman A. Merad, A. Bouziani. On solvability of the integrodifferential hyperbolic equation with purely nonlocal conditions. *Acta Mathematica Scientia*, 35(3) :601–609, 2015.

[61] F. Mainardi A. Giusti. A dynamic viscoelastic analogy for fluid-filled elastic tubes. *Meccanica*, 51(10) :2321–2330, 2016.

[62] N. Annapoorani A. Akilandeeswariy, K. Balachandran. Solvability of hyperbolic fractional partial differential equations. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 7(4) :1570–1585, 2017.

[63] MAKSIM V Kukushkin. Theorem of existence and uniqueness of solution for differential equation of fractional order. *arXiv preprint arXiv :1711.06224*, 2017.

[64] B. Abdelfatah O. Taki-Eddine. A priori estimates for weak solution for a time-fractional nonlinear reaction-diffusion equations with an integral condition. *Chaos, Solitons & Fractals*, 103 :79–89, 2017.

[65] J. Lin S.Y. Reutskiy. A semi-analytic collocation method for space fractional parabolic pde. *International Journal of Computer Mathematics*, 95(6-7) :1326–1339, 2018.

[66] S. Mesloub L. Kasmi, A. Guerfi. Existence of solution for 2-d time-fractional differential equations with a boundary integral condition. *Advances in Difference Equations*, 2019(1) :1–12, 2019.

[67] Jesus Martín-Vaquero and Ahcene Merad. Existence, uniqueness and numerical solution of a fractional pde with integral conditions. *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 24(3) :368–386, 2019.

[68] I. Bachar S. Mesloub. On a nonlocal 1-d initial value problem for a singular fractional-order parabolic equation with bessel operator. *Advances in Difference Equations*, 2019(1) :1–14, 2019.

[69] S. Obaidat S. Mesloub. Homotopy analysis method for a fractional order equation with dirichlet and non-local integral conditions. *Mathematics*, 7(12) :1167, 2019.

[70] Y. Zhang J. Lin, Y. Xu. Simulation of linear and nonlinear advection–diffusion–reaction problems by a novel localized scheme. *Applied Mathematics Letters*, 99 :106005, 2020.

[71] J.J. Trujillo A.A. Kilbas, H.M. Srivastava. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier, 2006.

[72] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[73] R. Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific, 2000.

[74] Dragoslav S Mitrinovic and Petar M Vasic. *Analytic inequalities*, volume 1. Springer, 1970.

[75] I. Podlubny. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.