



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**

**Faculté des mathématiques et sciences de la  
matière**

N° d'ordre :  
N° de série :

**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**

**MASTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Modélisation et Analyse numérique**

**Par : seguiai ayoubé**

**Thème**

Modélisation du problème de Signorini avec frottement de Coulomb pour les  
coques minces

**Soutenu publiquement le : 24/06/2021**

**Devant le jury composé de :**

Amara Abdelkader

M.A. université KASDI Merbah-Ouargla Président

Kaliche Kalthoum

M.B. université KASDI Merbah-Ouargla Examineur

Mr. MEZABIA MOHAMMED EL HADI

M.A. université KASDI Merbah-Ouargla Rapporteur

# didicas

Je dédie ce travail et ce succès à mes chers  
parents glaciaux Ismael et ma mère Fatima

---

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout mes professeurs tout ma carrière universitaire, en particulier ceux qui m'ont aidé et le directeur de ma thèse de fin d'études, M. Magyoub Muhammad Al-Hadi et tous mes remerciements à mes amis, Abdul Razzak Adel Qusayy Basim Jamal Al-Da Mamad Al-Hadi, Ma Muhammad, Abdul Latif et Nasir Bukh Youssef, et je n'oublie pas mon frère Muhammad, mon père et ma mère, mais oublie Farid et Cheryl.

---

# Table DES matières

---

<b>Dédicace</b>	<b>1</b>
<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Notations et conventions</b>	<b>2</b>
0.1 Introduction .....	5
<b>1 Modélisation asymptotique du problème de Signorini d'une coque mince linéarisée</b>	<b>8</b>
Description de la géométrie d'une coque mince .....	8
Le cas avec frottement .....	9
Problème classique $(\hat{P}^\varepsilon.C)$ .....	9
Problème variationnel $(\hat{P}^\varepsilon.V)$ .....	11
Problème variationnel $(\hat{P}^\varepsilon.V)$ en coordonnées curvilignes .	11
Passage à un domaine de référence .....	13
Etude asymptotique .....	15
<b>2 Modèles couplé flexion-membranaires</b>	<b>18</b>
2.0.1 Modèles formel couplé flexion-membranaires .....	18

*TABLE DES MATIÈRES*

Le cas avec frottement de Coulomb.....	19
Etude de la convergence des solutions du problème variationnel mis à l'échelle $P(\varepsilon, \Omega)$ .....	29

---

## **Table DES figures**

---

Transformation du domaine.....	10
Coordonnées curvilignes.....	12
Transformation en domaine indépendant de $\varepsilon$ .....	15

---

## NOTATIONS ET CONVENTIONS

---

Dans toute la suite de cette thèse, nous utiliserons les conventions suivantes :

> les indices latins ( $i, j, k, \dots$ ) varient de 1 à 3.

> les indices grecs ( $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots$ ) varient de 1 à 2.

> les composantes contravariantes d'un vecteur (ou d'un tenseur) sont notées avec des indices supérieurs et les composantes covariantes avec indices inférieurs. La convention de sommation sur les indices répétés est utilisée.

$$\sum_{i=1}^{i=3} u_i v^i$$

>  $u = u(\mathbf{u}_i)$  vecteur de composantes  $u_i$ .

>  $u \cdot v = u_i v_i$  produit scalaire euclidien.

>  $n$  normale unitaire extérieure.

>  $u_N = u \cdot n$  la composante normale du déplacement.

>  $u = (u_T, u_N)$ ,  $u_T$  la composante tangentielle du déplacement.

>  $\sigma_N = (\sigma(u)n)n$  la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale  $n$ .

>  $\sigma(u)n = (\sigma_T, \sigma_N)$ ,  $\sigma_T$  la composante tangentielle du vecteur  $\sigma(u)n$ .

>  $\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  dérivée de  $u_j$  par rapport à  $x_i$ .

>  $\text{div} \sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij} e_i$  divergence du tenseur  $\sigma(u)$ .

## TABLE DES FIGURES

---

- >  $|u| = \sqrt{u \cdot u}$  norme vectorielle euclidienne.
- >  $A = (A_{ijkl})$  : tenseur de rigidité d'ordre 4 .
- >  $D(\Omega)$  : l'espace des fonctions testes.  $\Omega$  domaine ( ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne) de  $\mathbb{R}^3$ .
- >  $\omega$  : domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne) de  $\mathbb{R}^2$ .
- >  $S$  : la surface moyenne de  $\Omega$ .
- >  $(a_1, a_2, a_3)$  : (resp.  $(a^1, a^2, a^3)$ ) base covariante (resp. contravariante ) associée à la surface moyenne  $S$ .
- >  $(g_1, g_2, g_3)$  : (resp.  $(g^1, g^2, g^3)$ ) base covariante (resp. contravariante ) associée à  $\Omega$ .
- >  $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  : composantes covariantes du tenseur métrique et du tenseur de courbure associées à  $S$ .
- >  $g_{ij}$  : (resp.  $g^{ij}$ ) composantes covariantes (resp. contravariante ) du tenseur métrique associées à  $\Omega$ .
- >  $S$  désigne une surface dans l'espace Euclidien habituel.
- >  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  désignent les symboles de Christoffel.
- >  $\Gamma_0$  désigne une partie de la frontière de mesure non nulle.
- > le triplet  $(a^1, a^2, a^3)$  forme la base contravariante en tout point de  $S$ .
- >  $C(\Omega)$  espace des fonctions continues définies sur  $\Omega$ .
- >  $C^k(\Omega), k > 0$  espace des fonctions continues définies sur  $\Omega$ , dont les dérivées partielles d'ordres  $\leq k$  sont continues .
- >  $C^\infty(\Omega)$  : espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$
- >  $D(\Omega)$  : espace des fonctions de  $C^\infty(\Omega)$  à support compact.
- >  $D'$  : l'espace des distributions.
- >  $\sim$ : la convergence faible.
- >  $H^s(\Omega)$  : espace de Sobolev d'ordre  $s$ .
- >  $b(u, v)$  : la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion.
- >  $a(u, v)$  : la forme bilinéaire d'énergie de déformation membranaire.
- >  $\varepsilon$  : l'épaisseur ou le rapport de l'épaisseur à une autre dimension de la coque
- >  $M^3$  : ensemble des matrices d'ordre 3.

*TABLE DES FIGURES*

---

>  $M_+^3 = \{A \in M^3, \det A > 0\}$ .

>  $S^3$  : ensemble des matrices symétriques d'ordre 3.

>  $S_>^3$  : ensemble des matrices symétriques définie-positive d'ordre 3.

>  $O^3$  : ensemble des matrices orthogonales d'ordre 3.

>  $O_+^3 = \{R \in O^3, \det R = 1\}$ .

---

# INTRODUCTION gÉNÉRALE

---

## INTRODUCTION

---

---

Le contact unilatéral des corps solides, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. La formulation de ce problème (sans frottement) a été décrite par Signorini [15] que Fichera [4] a fait l'analyse de ce problème.

Ensuite, viennent les travaux de G.Duvaut et J.L.Lions [2] qui ont rajouté le frottement aux problèmes de contact et ils ont pu écrire ce problème sous forme d'un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas d'un frottement de Tresca (i.e.avec un seuil de frottement fixe qui ne dépend pas de la contrainte normale). Dans [2].

Le premier résultat d'existence de solutions pour le problème de Signorini avec frottement a été établi au début des années 80. Nečas, Jaršek et Haslinger [12] ont prouvé un résultat d'existence pour une barre élastique en dimension deux sous la condition d'un coefficient de frottement assez petit. Des résultats plus généraux sont donnés ensuite par *Jarušek* [7], Kato [8], Eck et *Jarušek* [3]. Récemment, R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu [6] ont trouvé des conditions de non unicité des solutions.

Récemment, Y.Renard [13] a donné un critère d'unicité de solution pour le problème de contact avec frottement. Ce résultat est très important pour la recherche de solutions multiples.

## 0.1. INTRODUCTION

- On désigne par structures minces , les corps solides dont l'une des dimensions (l'épaisseur, le diamètre) est petite devant les autres. Ce sont les plaques, les coques, les barres, les filaments.... En 2002 ;J.C.Paumier[11] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince encastrée, de modèle de Kirchhoff-Love, contre un obstacle rigide où il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement . En 2010 ; Léger et Miara [9] ont étudié pour les coques peu profonde en élasticité linéaire sans frottement par l'utilisation de la méthode de convergence.
- Bensayah, Chacha et Ghezal on généralisé les résultats de Paumier aussi les travaux sur l'approche asymptotique par la méthode de convergence pour le contact unilatéral des coques minces membrananes elliptiques et flexurales Rodrigues-Aros [14]

Miara

L'objectif de cette thèse est d'étudier

la modélisation asymptotique du problème de Signorini des coques Flexurale linéairement élastiques homogènes dans le cas avec frottement

Le premier chapitre concerne l'analyse asymptotique du problème de Signorini sans frottement pour une coque minc homogène et isotrope. On commence d'abord par la mise en équation du problème ainsi sa formulation variationnelle. En suite, on procède à l'application du processus de l'analyse asymptotique comme suivant :

- Mise à l'échelle du domaine .
- Mise à l'échelle des inconnues et forces appliquées.
- Développements asymptotiques des inconnues
- Identification des problèmes aux ordres successifs.

Le deuxième chapitre concerne :

1. la méthode des développements asymptotiques formelles dans le cas avec frottement de Coulomb

*o.1. INTRODUCTION*

2. Ensuite , on a validé ce résultat à l'aide de la méthode de convergence .

---

# Modélisation asymptotique du PROBLEME DE Signorini d'une coque mince linéarisée

---

## INTRODUCTION

---

---

Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section comporte la géométrie des coques minces. Dans la deuxième section, on part du problème classique formulé en coordonnées cartésiennes et puisque les coordonnées curvilignes sont mieux adaptées pour les coques, on reformule le problème variationnel en coordonnées curvilignes et ceci dans le cas avec frottement.

### 1.1 DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE D'UNE COQUE MINCE

---

---

On considère un ouvert  $\Omega^\varepsilon = \omega \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ ,  $\varepsilon > 0$  de frontière  $\Gamma^\varepsilon$ . Soit  $\vartheta^\varepsilon : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction de classe  $C^3$ .  $\Theta$  une application suffisamment régulière dans  $\bar{\Omega}^\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On

## 1.2. LE CAS AVEC FROTTEMENT

---

définit une coque comme étant un corps élastique tridimensionnel dont la configuration de référence est  $\bar{\Omega}^\varepsilon = \Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon)$  où  $\Theta(x^\varepsilon) = \vartheta(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon g_3(x_1, x_2)$  pour tout  $x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$  et  $\alpha^\varepsilon$  est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne  $\omega = \Theta^\varepsilon(\bar{\omega})$  de la coque, pour  $\varepsilon$  assez petit, l'application  $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme (voir [?]) et on

suppose aussi qu'elle préserve l'orientation, i.e  $\det \nabla^\varepsilon \Theta(x^\varepsilon) > 0, \forall x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ .

On suppose que  $\bar{\Omega}^\varepsilon$  est occupé par un corps linéairement élastique, homogène et isotrope.

Dans sa configuration naturelle : une coque d'épaisseur  $2\varepsilon$  dont les constantes de Lamé sont notées par  $\lambda > 0, \mu > 0$  et sont supposées indépendantes de  $\varepsilon$ . On suppose que la coque en question est soumise à des forces volumiques de densité  $\hat{f}^\varepsilon \in (L^2(\hat{\Omega}^\varepsilon))^3$ , sa face

inférieure  $\hat{\Gamma}^\varepsilon_- = \Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_-)$  soumise à des forces surfaciques de densité  $\hat{h}^\varepsilon \in (L^2(\hat{\Gamma}^\varepsilon_-))^3$  sa face latérale est encadrée uniquement sur  $\Theta^\varepsilon(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$  qui est une partie non vide de  $\hat{\Gamma}_0^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon)$  représentant sa face latérale totale. On suppose aussi que cette coque entre en contact unilatéral sur sa face supérieure  $\hat{\Gamma}_+^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon)$  contre une fondation rigide où ( $\hat{d}^\varepsilon \geq 0$ ) est la fonction d'interstice définie sur  $\hat{\Gamma}_+^\varepsilon$  et qui désigne la distance entre la face supérieure et la fondation rigide mesurée dans la direction normale.  $\Lambda$  son coefficient de frottement. On note par l'indice T la composant tangentielle, et par l'indice N

## 1.2 LE CAS AVEC FROTTEMENT

---

### Problème classique ( $\hat{P}^\varepsilon.C$ )

Les équations d'équilibre exprimées en fonction du premier tenseur des contraintes sont

1.2. LE CAS AVEC FROTTEMENT

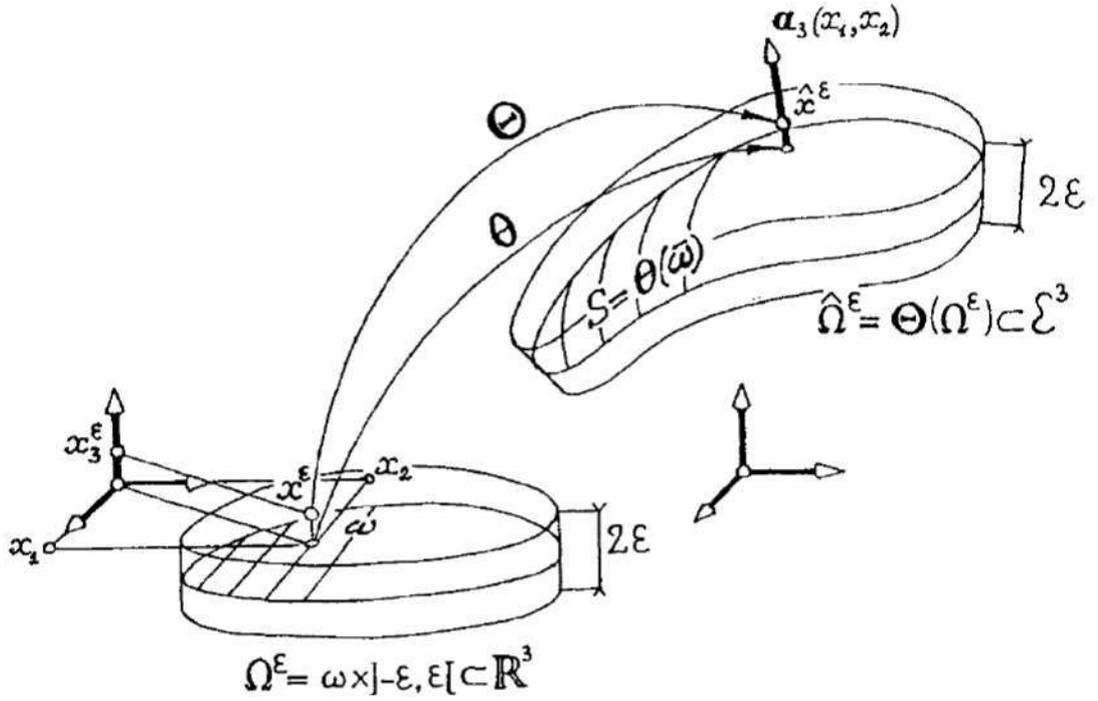


Figure 1.1 – Transformation du domaine

données en coordonnées cartésiennes par

$$\begin{aligned}
 & \square \text{ Trouver } u^\epsilon \text{ telque :} \\
 & \square -\hat{\partial}^\epsilon \hat{\rho}^\epsilon(\hat{u}^\epsilon) = \hat{f}^\epsilon \text{ dans } \hat{\Omega}^\epsilon \\
 & \square \hat{\partial}_{ij}^\epsilon(\hat{u}^\epsilon) \hat{n}_j^\epsilon = \hat{h}_i^\epsilon \text{ sur } \hat{\Gamma}_-^\epsilon \\
 & \hat{P}^\epsilon . C \quad \hat{u}^\epsilon = \hat{g} \text{ sur } \hat{\Gamma}_0^\epsilon \\
 & \square \hat{u}_N^\epsilon \leq \hat{d}^\epsilon, \hat{G}_N^\epsilon \leq 0, \hat{G}_N^\epsilon(\hat{u}_N^\epsilon - \hat{d}^\epsilon) = 0, \text{ sur } \hat{\Gamma}_+^\epsilon \\
 & \square |\hat{\partial}^\epsilon| < \nu |\hat{\partial}^\epsilon|_N \Rightarrow \hat{u}_\tau^\epsilon = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}_+^\epsilon
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où

$$|\hat{\partial}^\epsilon| < \nu |\hat{\partial}^\epsilon|_N \Rightarrow \exists \delta > 0, \hat{u}^\epsilon = -\delta \hat{\partial}^\epsilon \text{ sur } \hat{\Gamma}_+^\epsilon$$

$$\sigma_{ij}^\epsilon(\hat{u}^\epsilon) = \hat{A}^{ijkl, \epsilon} \hat{e}_{kl}^\epsilon(\hat{u}^\epsilon), \tag{1.2}$$

$$\hat{A}^{ijkl, \epsilon} = \lambda^\epsilon \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu^\epsilon (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) : \lambda^\epsilon, \mu^\epsilon \text{ coefficients élastiques de Lamé,} \tag{1.3}$$

$$\hat{e}_{ij}^\epsilon(\hat{u}^\epsilon) = \frac{1}{2} (\hat{\partial}_i^\epsilon \hat{u}_j^\epsilon + \hat{\partial}_j^\epsilon \hat{u}_i^\epsilon) \text{ composantes du tenseur de déformation linéarisé.} \tag{1.4}$$

## 1.2. LE CAS AVEC FROTTEMENT

### Remarque 1.2.1

$\hat{G}_N^\varepsilon$  présente la densité de force de pression et  $\hat{G}_T^\varepsilon$  la densité des forces de frottement.

### Problème variationnel ( $\hat{P}^\varepsilon.V$ )

En appliquant la formul de Green, on a ( $\hat{P}^\varepsilon.V$ )

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\hat{U}^\varepsilon, \hat{G}^\varepsilon) \in \mathbf{K}(\hat{\Omega}^\varepsilon) \times \mathbf{H}^{-2}(\hat{\Gamma}^{\text{ext}}) \text{ tel que :} \\ \hat{P}^\varepsilon.V \quad & \hat{a}^\varepsilon(\hat{U}^\varepsilon, \hat{V}^\varepsilon) = \hat{L}^\varepsilon(\hat{V}^\varepsilon) + \langle \hat{G}_T^\varepsilon, \hat{V}_T^\varepsilon \rangle \quad \forall \hat{V}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\hat{\Omega}^\varepsilon) \\ & \langle \hat{G}_N^\varepsilon, \hat{V}_N^\varepsilon - \hat{U}_N^\varepsilon \rangle \geq 0, \quad \forall \hat{V}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\hat{\Omega}^\varepsilon) \\ & \langle \hat{G}_N^\varepsilon, \hat{V}_T^\varepsilon - \hat{U}_T^\varepsilon \rangle + \langle \nu |\hat{G}_T^\varepsilon|, |\hat{V}_T^\varepsilon| - |\hat{U}_T^\varepsilon| \rangle \geq 0, \quad \forall \hat{V}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\hat{\Omega}^\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\hat{a}^\varepsilon(\hat{U}^\varepsilon, \hat{V}^\varepsilon) = \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{A}^{ijkl,\varepsilon} \hat{e}^\varepsilon_{ij}(\hat{U}^\varepsilon) \hat{e}^\varepsilon_{kl}(\hat{V}^\varepsilon) d\hat{X}^\varepsilon$$

$$\hat{L}^\varepsilon(\hat{V}^\varepsilon) = \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{f}^\varepsilon_i \hat{V}_i d\hat{X}^\varepsilon + \int_{\hat{\Gamma}^\varepsilon} \hat{h}^\varepsilon \hat{V}_i d\hat{\Gamma}^\varepsilon + \int_{\hat{\Gamma}^\varepsilon} \hat{f}^\varepsilon_{ij} \hat{V}_i d\hat{X}^\varepsilon + \int_{\hat{\Gamma}^\varepsilon} \hat{g}^\varepsilon_{ij} \hat{V}_i d\hat{\Gamma}^\varepsilon$$

$$\mathbf{V}(\hat{\Omega}^\varepsilon) = \{ \hat{V}^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\hat{\Omega}^\varepsilon), \hat{V}_N^\varepsilon = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}^\varepsilon \}, \quad \mathbf{H}^1(\hat{\Omega}^\varepsilon) = (H^1(\hat{\Omega}^\varepsilon))^3$$

$$\mathbf{K}(\hat{\Omega}^\varepsilon) = \{ \hat{V}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\hat{\Omega}^\varepsilon) / \hat{V}_N^\varepsilon \leq \hat{d}^\varepsilon \text{ sur } \hat{\Gamma}^{\text{ext}} \}$$

### Problème variationnel ( $\hat{P}^\varepsilon.V$ ) en coordonnées curvilignes

Le système de coordonnées cartésiennes  $x^\varepsilon = (x_i)$  étant mal adapté à l'étude des coques, on utilise un système de coordonnées curvilignes  $x^\varepsilon = (x^i)$ , où  $\hat{x}^\varepsilon = \Theta(x^\varepsilon)$ , qui suivent de façon plus naturelle la "géométrie" de la coque. Pour cela, on définit le vecteur  $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = \partial^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) \quad \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ . Lorsque  $\varepsilon$  est suffisamment petit, ces vecteurs sont linéairement indépendants et forment donc une base en tout point de  $\hat{\Omega}$  que l'on appelle base covariante. On peut alors construire la base contravariante formée de vecteurs  $g^{j,\varepsilon}$  définis par la relation  $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \cdot g^{j,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \delta_i^j$  et définir le tenseur métrique tridimensionnel par ses composantes covariantes  $g_{ij}^\varepsilon = g_i^\varepsilon \cdot g_j^\varepsilon$  ou contrvariantes  $g^{j,\varepsilon} = g^{i,\varepsilon} g^{j,\varepsilon}$ .

## 1.2. LE CAS AVEC FROTTEMENT

On note respectivement les symboles de Christoffel et les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique par

$\Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} = \partial_i^\varepsilon g_j^\varepsilon \cdot g^{k,\varepsilon}$  l'élément de volume de  $\Theta^\varepsilon(\hat{\Omega}^\varepsilon)$  est  $\sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon$ , où  $g^\varepsilon = \det(g^\varepsilon_{ij})$ . On note aussi les composantes contravariantes des forces volumiques et surfaciques respectivement par  $\hat{f}_i^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon)\hat{e}^i = f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \quad \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ ,  $\hat{h}_i^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon)\hat{e}^i = h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \quad \forall x^\varepsilon \in (\Gamma_-^\varepsilon)$ . Les composantes de chaque champs de vecteurs  $\hat{v}^\varepsilon = (\hat{v}_i^\varepsilon) \in \mathbf{V}(\hat{\Omega}^\varepsilon)$  sont données par  $\hat{v}_i^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon)\hat{e}^i = v^i(x^\varepsilon)g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)$ ,  $\forall \hat{x}^\varepsilon \in \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) \in \{\hat{\Omega}^\varepsilon\}^-$ , et on utilise les relations  $v^i(x^\varepsilon) = \hat{v}_i^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon)[g^\varepsilon(x^\varepsilon)]^j$  où  $[g^\varepsilon(x^\varepsilon)]^j$  est la  $j^{eme}$  composante du vecteur  $g^\varepsilon(x^\varepsilon)$ . Pour plus de détails (voir [?] et [1]) (voir figure 1.2).

Pour tout  $\hat{v}_N^\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_+^\varepsilon)$  on a  $\hat{v}_N^\varepsilon = \hat{v}_i^\varepsilon \hat{n}^{i,\varepsilon} = (v_i^\varepsilon g^{i,\varepsilon})(g_3^\varepsilon) = v_3^\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon)$ .

On définit  $\varphi_3$  dans l'espace  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)$  pour tout  $v_3 \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+))_\varepsilon$  par  $\langle \varphi_3, \sqrt{g} \rangle_\varepsilon = \langle \varphi_N^\varepsilon, \hat{v}_N^\varepsilon \rangle_\varepsilon$  pour tout  $\hat{v}_N^\varepsilon \in (H^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_+^\varepsilon))_\varepsilon$ .

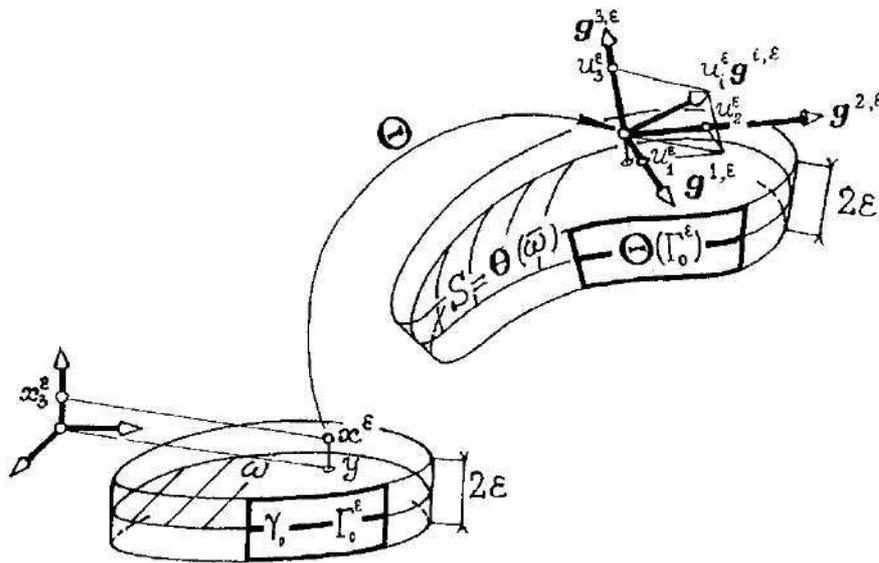


Figure 1.2 – Coordonnées curvilignes

Alors le problème variationnelle  $(\hat{P}^\varepsilon \cdot V)$  en coordonnées curvilignes est formulé sous

## 1.2. LE CAS AVEC FROTTEMENT

la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (u^\varepsilon, G^\varepsilon) \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \times \mathbf{H}^{-2}(\Gamma^\varepsilon) \text{ tel que :} \\
 & a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle G^{i,\varepsilon}, \sqrt{g^\varepsilon} \rangle_{\mathbf{V}(\Omega^\varepsilon)} \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \\
 & (P^\varepsilon \cdot V) \quad \langle G^{3,\varepsilon}, (v^\varepsilon - u^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \geq 0 \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \\
 & \quad \langle G^{i,\varepsilon}, (v^\varepsilon - u^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,\varepsilon}|, (|v^\varepsilon| - |u^\varepsilon|) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \geq 0 \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \\
 & \text{où} \\
 & a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{kll}^\varepsilon(v^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \quad A^{ijkl,\varepsilon} = \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu (g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon}) \\
 & e_{ill}^\varepsilon(v^\varepsilon) = \frac{1}{2} (v_{ill}^\varepsilon + v_{ill}^\varepsilon), \quad v_{ill}^\varepsilon = \partial^i v^j - \Gamma^{kj} v^k \\
 & L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon \\
 & \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon = (v^i) \in \mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \text{ on } \Gamma_0^\varepsilon\} \\
 & \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) / v_3^\varepsilon \leq d^\varepsilon \text{ on } \Gamma_+^\varepsilon\}, \quad d^\varepsilon = d^\varepsilon
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

### Passage à un domaine de référence

On définit l'ouvert  $\Omega = \omega \times ]-1, +1[$ . A tout point  $x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$  de  $\Omega^\varepsilon = \omega \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ , on associe le point  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de  $\Omega$  par  $x_\alpha^\varepsilon = x_\alpha$  et  $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$ .

On définit les ensembles suivants :

$$\Gamma = \gamma \times [-1, +1], \quad \Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1, +1] \text{ et } \Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}.$$

On note  $x = (x_i)$  un point de  $\Omega$  et on pose  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

$$\text{d'où : } \partial^\varepsilon = \partial_\alpha \text{ et } \partial^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3.$$

A toute fonction  $\kappa^\varepsilon$  définie sur  $\Omega^\varepsilon$ , on associe la fonction "mise à l'échelle" définie sur  $\Omega$  par

$$\kappa^\varepsilon(x^\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)(x), \quad x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \quad x \in \Omega.$$

On définit ainsi les fonctions :

$$\begin{aligned}
 & \lambda^\varepsilon = \lambda, \quad \mu^\varepsilon = \mu, \quad g^\varepsilon(x^\varepsilon) = g(\varepsilon)(x), \quad d^\varepsilon(x^\varepsilon) = d(\varepsilon)(x) \\
 & u_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = u_i(\varepsilon)(x), \quad v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = v_i(\varepsilon)(x), \quad f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^i(\varepsilon)(x), \text{ pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \Omega^\varepsilon \\
 & h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = h^i(\varepsilon)(x), \quad A^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) = A^{ijkl}(\varepsilon)(x) \text{ pour } x^\varepsilon \in \Gamma_-^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_-
 \end{aligned}$$

1.2. LE CAS AVEC FROTTEMENT

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^3(\varepsilon)(x) \quad \text{pour } x^\varepsilon \in \Gamma_+^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_+$$

$$e_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon)(x^\varepsilon) = e_{ij}(\varepsilon, v(\varepsilon))(x) = e_{ij}(\varepsilon; v)(x), \quad \Gamma^k(\mathcal{F})(x) = \Gamma^{k,\varepsilon}(x^\varepsilon), \quad \forall x^\varepsilon \in \overline{\Omega^\varepsilon} \text{ et } x \in \Omega.$$

Alors, le problème variationnel  $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$  (??) se reformule sur le domaine fixe comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (u(\varepsilon), G(\varepsilon)) \in \mathbf{K}(\Omega) \times (H^{-1/2}(\Gamma_+)) \quad \text{tel que :} \\
 P(\varepsilon, \Omega) \quad & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{kll}(\varepsilon, u(\varepsilon)) e_{ijl}(\varepsilon, v) - \frac{g(\varepsilon)}{v_3 - u_3(\varepsilon)} \sqrt{g(\varepsilon)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\
 & \langle G_T(\varepsilon), ((v - u(\varepsilon)) - (v_T - u_T(\varepsilon))) \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle + \langle \Lambda |G^3(\varepsilon)|, | - |u_T(\varepsilon)| \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle \geq 0 \\
 & \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

tels que :

$$\begin{aligned}
 L(v) &= \int_{\Omega} f^i(\varepsilon)(x) v^i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_+} g^i(\varepsilon)(x) v^i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \\
 e_{ijl}(\varepsilon, v) &= \frac{1}{2} (v_{ijl}(\varepsilon) + v_{jli}(\varepsilon)) \\
 v_{ijl}(\varepsilon, v) &= \partial_j v_i - \Gamma^k(\varepsilon) v_k
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{v = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

$$\mathbf{K}(\Omega) = \{v \in \mathbf{V}(\Omega) / v_3 \leq d\}, \quad d = d^\varepsilon$$

## 1.2. LE CAS AVEC FROTTEMENT

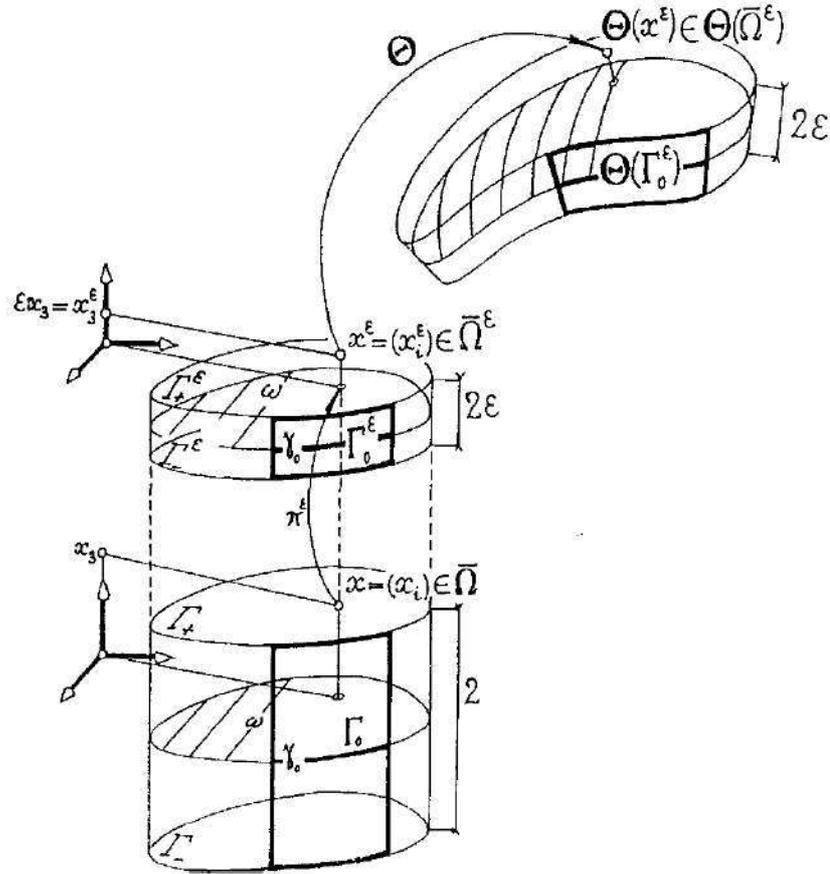


Figure 1.3 – Transformation en domaine indépendant de  $\varepsilon$ .

### Etude asymptotique

On montre que le premier terme du d'éveloppement asymptotique est solution d'un problème bi-dimensionnel.

On voit que la forme du problème  $P(\varepsilon, \Omega)$  permet d'appliquer la méthode des d'éveloppements asymptotiques formels. On suppose a priori que  $u(\varepsilon)$  admet un d'éveloppement asymptotique, de la forme :

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon^1 u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots \text{ avec } u^0 \in \mathbf{K}(\Omega), u^q \in \mathbf{H}^1(\Omega), q = 1, 2, \dots \text{ et } u^0 = 0 \quad (1.8)$$

$$G^i(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} G^{i,-2} + \varepsilon^{-1} G^{i,-1} + G^{i,0} + \varepsilon G^{i,1} + \varepsilon^2 G^{i,2} + \dots \quad (1.9)$$

avec

$$G^{i,k} \in H^{-2, \frac{1}{2}}, k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

العنوان : نمذجة مشكلة السينيوريني مع احتكاك كولوم للقذائف الرقيقة

الكلمات المفتاحية :

- مشكلة كلاسيكية
- مشكلة متغيرة
- مشكلة متغيرة في انحناء الاحداثيات
- الانتقال الى مجال مرجعي
- دراسة مقارنة
- نماذج غشاء انثناء مقترن رسمية
- دراسة تقارب حل مشكلة التغير المتدرج

الملخص :

الهدف من هذا العمل هو تحويل جسم ليس له شكل محدد ذو بعدين الى جسم ذو ثلاث ابعاد

Title: Modeling the Signorini problem with Coulomb's friction of thin shells

key words :

classic problem

Variable problem

A variable problem in the curvature of the coordinates

Move to a reference field

Approach Study

Formal Coupled Flexion Membrane Models

Study of the convergence of solving the problem of gradual change

Summary :

The aim of this work is to transform an object that has no definite two-dimensional shape into a three-dimensional object

Titre : Modélisation du problème de Signorini avec le frottement de Coulomb de coques minces

les mots clés :

problème classique

Problème variable

Un problème variable dans la courbure des coordonnées

Se déplacer vers un champ de référence

Étude d'approche

Modèles formels de membrane de flexion couplée

Etude de la convergence de la résolution du problème du changement graduel

Sommaire :

Le but de ce travail est de transformer un objet qui n'a pas de forme bidimensionnelle définie en un objet tridimensionnel