

N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique



UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARTGLA

Faculté des Mathématiques et  
des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE: MATHÉMATIQUES

Spécialité: mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de

Master en mathématiques

Présenté par:

BEHMENE MOHAMMED SAID

Thème

# Systemes dynamiques discrets sans points fixes: Comportement dynamique

Soutenu publiquement : 17/06/2021

soutenu devant le Jury composé de

Abassi Houcine M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla

**Président**

Ben cheik Abed Elkarim M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla

**Examineur**

Koudri Mohammed M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla

**Examineur**

Mammeri Mohammed M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla

**Rapporteur**

Promotion : 2020 \ 2021

•

”

# Remerciements

*En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude. Je tiens à remercier sincèrement, **Abassi***

***Houssine** et **ben chikh abdlkarim** Mes remerciements vont également a Monsieur **Mr***

***Abassi Houssine** , d'avoir accepte d'etre président du jury de cette mémoire Mes remerciement vont aussi a Monsieur : **Mr ben chikh abdlkarim** pour leur participation au jury. qui, en tant que Directeurs de mémoire, ce sont toujours montrés à l'écoute et très disponibles Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à **Mr M.Mammeri** docteur à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, pour avoir accepté de diriger ce travaille.*

*Je le remercie infiniment pour avoir toujours été présent par ses conseils, ses encouragements et sa gentillesse. Je voudrai aussi le remercier pour sa disponibilité et du temps consacré à mon travail de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail. tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ontentendu, il me serait impossible de terminer sans adresser une pensée chaleureuse à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements pendant de longues années, sans qui je n'aurais pu arriver à ce niveau d'études.*

*Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches amies, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de mes étude. Merci à tous et à toutes.*

## Je dédie ce travail

Mes parents : Ma mère , qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude. Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi. Mes frères et soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes encadreur Mr M.Mammeri de qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis et Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu dans les moments difficiles ce prodigieux travail a toute ma famille.

# Table des matières

<b>Liste des figures</b>	<b>3</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Système dynamique discret</b>	<b>8</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	8
1.2 Systèmes dynamiques continus . . . . .	8
1.3 Système dynamique discret . . . . .	9
1.4 Points fixes et points périodiques . . . . .	10
1.5 Transitivite . . . . .	12
1.6 l'ensemble limite positif . . . . .	12
1.7 Bassin d'Attraction . . . . .	13
<b>2 Système dynamique discret non linéaire</b>	<b>14</b>
2.1 Introduction . . . . .	14
2.2 Système dynamique discret non linéaire . . . . .	15
2.3 Stabilité du point fixe . . . . .	15
2.4 Bifurcation (Route vers le chaos) . . . . .	16
2.5 Le phénomène chaotique . . . . .	17
2.6 Diagramme de bifurcation . . . . .	17
2.7 Attracteur . . . . .	18
Différents types d'attracteurs . . . . .	19

2.8	Attracteurs chaotiques . . . . .	19
2.9	Exposant de L'yapunov . . . . .	20
2.10	Les attracteurs cachés . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Attracteurs chaotiques cachées en 2D</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Modèle de l'application . . . . .	28
3.3	Points fixes et analyse de stabilité . . . . .	28
3.4	Cas 1 : pas de point fixe . . . . .	29
3.5	Cas 2 : point fixe unique . . . . .	30
3.6	Cas 3 : Deux points fixes . . . . .	31
3.4.1	Attracteurs chaotiques sans point fixe . . . . .	32
	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Table des figures

2.1	Le diagramme de bifurcation de l'application Hénon . . . . .	18
2.2	Attracteur de Lorenz . . . . .	21
2.3	Attracteur chaotique caché (domaine vert) dans Le système de Chua. . . . .	22
2.4	Deux attracteurs chaotiques cachés et un attracteur périodique caché co- existent triviaux dans le circuit de Chua . . . . .	23
2.5	Attracteur Chaotique auto-excité (domaine vert) dans Le système de Chua. . . . .	24
3.1	Attracteur chaotique (noir) est le de Bassins d'attraction . . . . .	32
3.2	Attracteur chaotique (noir) est le de Bassins d'attraction. . . . .	33



# Liste des tableaux

3.1	Les résultats sont présentées dans le tableau 1	. . . . .	32
3.2	Les résultats sont présentées dans le tableau 2	. . . . .	33

# Notations

- $\dim L$  : Dimension de l'ensemble  $L$
- $2D$  : Deux dimensions ou bidimensionnel
- $\det(J)$  : Déterminant de la matrice jacobienne
- $\text{tr}(J)$  : La trace de la matrice jacobienne
- $J$  : La matrice jacobienne
- $(\text{Les})$  : Les exposants de Lyapunov

# Introduction

Historiquement, les systèmes dynamiques ont évolué et se sont spécialisés au cours de ce siècle. En effet, à la fin de ce siècle, le mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà démontré le phénomène de sensibilité aux conditions élémentaires lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. Au cours des siècles passés, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** a mené des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer la différence entre deux chemins avec des conditions initiales similaires, lorsque cette différence évolue de façon exponentielle, on parle de sensibilité aux conditions initiales. Ses travaux seront d'une grande valeur pour l'étude de certains aspects de **la théorie du chaos**.

En 1963, le météorologue **Edward Lorenz** a souligné la nature chaotique. Il est clair que les travaux des prédécesseurs de **Lorenz** étaient très importants pour comprendre le chaos déterministe, mais il faut souligner que ce qui permettra aux scientifiques de mieux comprendre les systèmes chaotiques, c'est l'ordinateur. En effet, les équations différentielles qui régissent un système chaotique sont nécessairement non linéaires, dont la résolution est généralement impossible. Si un système dynamique contient au moins deux exposants de **Lyapunov** positifs, alors le système est considéré comme hyperdiffusif. Le comportement dynamique des systèmes très diffus est plus complexe que celui d'un simple système chaotique.

Dans ce mémoire, sous le titre **Systèmes dynamiques discrets sans points fixes : Comportement dynamique**", nous nous proposons de démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité pour des solutions de quelques équations opérationnelles non linéaires.

Ce mémoire est scindé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires. On rappellera les principales définitions et notions générales et spécifiques aux systèmes discretes, de tels systèmes peuvent être linéaires. utilisées tout au long de ce manuscrit (mémoire) concernant, définitions aux systèmes discretes et les points fixes et leurs stabilités, Réversibilité, Transitivité.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudiés quelques problèmes abstraits : des systèmes d'équations discretes non linéaires, Ces modèles sont très utilisés principales définitions et notions bifurcation, attracteurs, attracteurs chaotiques, attracteurs cachés, exposants de Lyapunov. etc

Enfin, dans le 3ème chapitre est consacré à l'étude de la dynamique cachée d'une classe de systèmes à deux dimensions, et une attention particulière est accordée à l'existence de points fixes et persistance dans ces applications. Nous concentrons notre attention sur trois scénarios typiques qui peuvent générer la dynamique cachée, c'est-à-dire pas de point fixe, un point fixe, deux points fixes.

# Chapitre 1

## Systeme dynamique discret

### 1.1 Systemes dynamiques

**Définition 1.1.1** un système dynamique est défini par un triplet  $(X, T, \varphi)$ , constitué de l'espace d'états  $X$ , du domaine temporel  $T$  et d'une fonction de transition d'état  $\varphi : X \times T \rightarrow X$ , qui possède la propriété, pour tout  $x \in X$  et  $t_{1,t} \in T$  :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x \\ \varphi(\varphi(x, t_1), t_2) = \varphi(x, t_1 + t_2) \end{cases}$$

On distingue deux grandes catégories de systèmes dynamiques : les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret. Si  $T = \mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}$ , le système est dit à temps continu, et si  $T = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , le système est dit à temps discret.

### 1.2 Systemes dynamiques continus

Dans le cas général, un système dynamique continu peut être représenté par une équation différentielle. Selon l'équation, on distingue quelques types différents de systèmes. Une équation différentielle de type :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Où :  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n - X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^{\pm} \in D \subset \mathbb{R}^n$

permet de définir un système dynamique autonome à temps continu  $(D, \mathbb{R}^+, \varphi)$  où  $\varphi$  est la solution de une équation Cette solution est donnée par :

$$\varphi(X_0, t) = X_0 + \int_0^t F(X(s)) ds$$

Si la fonction  $F$  est une fonction de l'état  $X(t)$  et de la variable du temps  $t$  i.e :  $\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t))$  on dit que le système dynamique est non autonome.

### Exemple 1.

Considérons l'équation différentielle autonome suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = e^{-\varphi(t)} \\ \varphi(0) = x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{fixé}) \end{cases}$$

La solution de ce système est :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \varphi(x, t) = \ln(t + e^x) \end{aligned}$$

Cette solution définit un système dynamique continu  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \varphi)$ . En effet ;

- 1)  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .
- 2)  $\varphi(x, 0) = \ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 3)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}_+ :$

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(x, t), \tau) &= \varphi(\ln(t + e^x), \tau) \\ &= \ln(\tau + e^{\ln(t + e^x)}) \\ &= \ln(\tau + t + e^x) \\ &= \varphi(x, t + \tau). \end{aligned}$$

## 1.3 Système dynamique discret

### Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solution périodiques, grâce à l'application de Poincaré aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des équations discrets,

ou, dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Un équation discret est de la forme :

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Un système dynamique discret est un triplet  $(X, T, f)$ , formé par un espace temporel  $T$  généralement  $T = \mathbb{N}$ , un espace métrique non vide  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  appelé espace des phases, et par une fonction continue  $f : X \rightarrow X$ . Pour un état  $x_0 \in X$  fixé, l'orbite d'état initial  $x_0 \in X$  est la suite  $\varphi_{x_0} : \mathbb{N} \rightarrow X$  qui indique l'état du système à chaque instant  $n \in \mathbb{N}$ . Si au temps  $n = 0$ , le système se trouve en  $x_0$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_{x_0}(n) = f^n(x_0)$$

où  $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$ .

L'orbite  $(\varphi_{x_0}(t))_{t \in \mathbb{N}}$  peut être vue comme la solution de l'équation aux différences autonome avec condition initiale  $x_0$  :

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{N}, x(0) = x_0$$

Un système dynamique discret  $(X, \mathbb{N}, f)$  est complètement déterminé par l'application  $f$  de  $X$  dans  $X$  telle que :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

l'application  $f$  est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle.

## 1.4 Points fixes et points périodiques

### Définition

On appelle "point fixe" d'un équation tout point  $x_n$  tel que

$$F(x_n) = x_n$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre. En général, on trouve les points fixes en résolvant l'équation :

$$f(x) = x$$

L'étude de ces points se ramène donc à la théorie des points fixes des fonctions numériques.

## Définition

Une orbite  $O(x_0)$  s'appelle périodique s'il existe un  $p > 0$  telle que

$$x(n+p) = x(n), \forall n \quad (1.1)$$

Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un  $p > 0$  et un  $N > 0$  tels que l'égalité (1.1) est vérifiée pour tout  $n > N$ . Une orbite périodique  $O(x_0)$  est toujours une suite de points périodique. Tous ces points s'appellent point périodique de période  $p$  du système. Le plus petit nombre  $p$  qui vérifie (1.1) s'appelle "période fondamentale" de l'orbite  $O(x_0)$ .

## Définition 2

Soit  $(X, \mathbb{N}, f)$  un système dynamique discret. Un point  $x \in X$  est appelé point périodique de période  $k \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si  $f^k(x) = x$  et pour tout  $h < k$  on a  $f^h(x) \neq x$ . Le cycle engendré par  $x$  est alors  $\xi = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ , où  $x_i = f^i(x), i = 0, \dots, (k-1)$ . Les points périodiques de période 1 sont les points fixes de  $f$  et sont parfois appelés points d'équilibre.

Nous notons  $P_k(f)$  l'ensemble des points périodiques de période  $k$ . L'ensemble de tous les points périodiques est :

$$P(f) = \{x \in X / \exists k \in \mathbb{N}^*, x \in P_k(f)\}$$

les éléments de  $P(f)$  sont appelés singularités de dimension 0. Lorsque la dimension de l'espace des phases  $X$  est supérieure à un, il existe des singularités de dimension un, qui sont les courbes invariantes par l'application  $f$  ( ou  $f^k, k \in \mathbb{N}^*$ ). Dans le plan des phases ( $X = \mathbb{R}^2$ ), une courbe définie par l'équation :  $\Gamma(x, y) = C$ , où  $C \in \mathbb{R}$ , est invariante par l'application  $f$  ( ou  $f^k$ ), si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante -

$$\Gamma(f(x, y)) = \Gamma(x, y) \text{ ou } \Gamma(f^k(x, y)) = \Gamma(x, y)$$



## Exemple

Soit  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy))$  un système dynamique discret ; le cercle unité  $\Gamma(x, y) = C_{(0,0,1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$  est invariant par l'application  $f$ . En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma(f(x, y)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2 + y^2)^2 = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} = \Gamma(x, y) \end{aligned}$$

## 1.5 Transitivite

### Définition :

Un système dynamique discret  $(X, \mathbb{N}, f)$  est transitif si et seulement si pour chaque couple d'ensembles non-vides ouverts  $A, B \subseteq X$ , il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que :

$$f^k(A) \cap B \neq \emptyset$$

## 1.6 l'ensemble limite positif

### Définition :

Soit  $(X, \mathbb{N}, f)$  un système dynamique discret, on appelle l'ensemble Limite Positif d'un point  $x$  de l'espace des phases  $X$ , l'ensemble est :

$$\omega(x) = \{y \in X / \forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \exists t \geq t_0 : d(y, f^t(x)) < \epsilon\}$$

- 1) Un point  $x$  est dit récurrent si  $x \in \omega(x)$ , il est transitoine s'il n'est pas récurrent.
- 2) On notera  $\omega(A)$  l'ensemble limite d'un ensemble  $A$

$$\omega(A) = \bigcup \omega(x)$$

## 1.7 Bassin d'Attraction

**Définition :**

Le bassin d'Attraction, noté  $B(A)$ , d'un ensemble  $A \subset X$  est l'ensemble des points ou encore des condition initiales) de l'espace des phases tels que toutes les trajectoires qui en sont issues, convergent asymptotiquement vers  $A$ . Autrement dit :

$$B(A) = \{x \in X / \omega(x) \subset A\}$$

# Chapitre 2

## Systeme dynamique discret non lineaire

### 2.1 Introduction

Les effets dynamiques de la linéarité font l'objet d'études par un grand nombre de chercheurs : mathématiciens, physiciens, géologues, chimistes, biologistes, astronomes, économistes, ingénieurs, etc. Ces chercheurs s'inspirent souvent mutuellement de leurs travaux, car des modèles « Général » émergent souvent de systèmes non linéaires apparemment différents [23][24][25]. En ce sens, les dynamiques non linéaires sont hautement interdisciplinaires. Cependant, la dynamique non linéaire était à l'origine une branche de la physique. La dynamique non linéaire a été démontrée pour la première fois dans les équations du mouvement de Newton. Il présente ainsi une vision nouvelle et utile de la connaissance, qui met l'accent sur « les aspects qualitatifs de l'ingénierie du comportement dynamique des systèmes complexes », à mesure que les paramètres externes changent. Cette vision a contribué à l'avancement des connaissances non seulement dans les domaines traditionnels de la physique mais aussi dans d'autres programmes de recherche scientifique, où une approche mathématique unique pour comprendre le monde est bénéfique. Il convient également de noter que la dynamique non linéaire est souvent initialement considérée comme un projet quelque peu marginal par de nombreux chercheurs incertains du potentiel de financement d'un domaine de recherche émergent. Mais dans de nombreux cas, cette discipline a produit un nouvel ensemble de modèles pour étudier des problèmes fondamentaux dans les sciences mathématiques.

## 2.2 Système dynamique discret non linéaire

### Définition

Un système dynamique discret non linéaire est définie par équation aux differences suivant :

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x_0 \text{ donne} \end{cases}, t \in \mathbb{N}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction derivable et  $x_t \in \mathbb{R}^n$  est le variable d'état. où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction dérivable .

## 2.3 Stabilité du point fixe

Il est difficile de trouver des solution de systèmes non linéaires. Souvent, ces solution a ne fournissent pas suffisamment d'informations sur les facteurs qui contrôlent la stabilité du système. Par conséquent, nous avon a besoin de méthodes analytiques pour faciliter l'étude du comportement de ce système non linéaire .L'approximation linéaire du système non linéaire est l'un des moyens les plus efficaces d'étudier la stabilité des systèmes non linéaires.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction réelle définie une équations discrète, soit  $Df(x_0)$  sa matrice Jacobéenne évaluée au point fixe  $x_0$  de l'application  $f$ , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe  $x_0$  on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

- Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.
- Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit instable si l'un des multiplicateur et de module strictement supérieur à 1 .
- Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit point selle et au moins un multiplicateur est de module strictement infirmer à 1 et les autres multiplicateur sont tous de module strictement supérieur à 1.

## 2.4 Bifurcation (Route vers le chaos)

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la « bifurcation ». Ce concept fait référence à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque ses paramètres changent. La bifurcation signifie que Changement qualitatif dans la dynamique du système, qui résulte d'un changement dans un configuration du système. Par exemple, déstabiliser l'équilibre et l'apparence ou la disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est appelée le point de bifurcation.

### Différents types de bifurcations régulières

Dans cette section, on considère trois types de bifurcation : locales : Le bifurcation de doublement de période, le bifurcation point selle (ou noeud-col) et le bifurcation de Neimark. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par le linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcation étudiées correspondent toujours à  $(|\lambda_i| = 1)$  (ou  $\lambda_i$  représente les multiplicateurs) **bifurcation flip ou doublement de période** ( $\lambda = -1$ ) cette bifurcation a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à -1 une cycle d'ordre  $k$  qui subit cette bifurcation va changer de nature ont créer un cycle d'ordre  $2k$  de le même nature. c'est-d-dire, ne point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

### Bifurcation fold ou noeud-col ( $\lambda = 1$ )

Le bifurcation  $\lambda = +1$  correspond à le situation ou l'un des multiplicateurs est égale a +1. Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre  $k$  en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable .

### Bifurcation de Neimark ( $\lambda = e^{\pm\theta}$ )

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobéenne possède deux multiplicateurs complexes conjuguées  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  et de plus  $|\lambda_2| = |\lambda_1| = 1$ .

## 2.5 Le phénomène chaotique

Un rôle très important dans la théorie moderne des systèmes dynamiques est joué par les phénomènes chaotiques. Pour les systèmes dynamiques discrets, plusieurs notions ont été introduites pour caractériser ce type de comportement : l'entropie ou les exposants de Lyapunov (Ruelle, Takens, Lorenz). Dans l'espace de phase, le chaos donne lieu à des trajectoires appelées attracteur chaotiques. [Devaney, 1989 a proposé la définition suivante, couramment utilisée dans la littérature.

### Définition

Un système dynamique discret  $(X, \mathbb{N}, f)$  est chaotique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) Sensitivité aux conditions initiales .
- 2) Il est régulier.
- 3) Il est transitif.

## 2.6 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un trace des points de l'état stationnaire de système en fonction du paramètre de contrôle (ou bifurcation). Les graphiques qui explicitent ces bifurcations, sont logiquement appelés diagrammes de bifurcation. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état et variable une diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée la transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

## Exemple

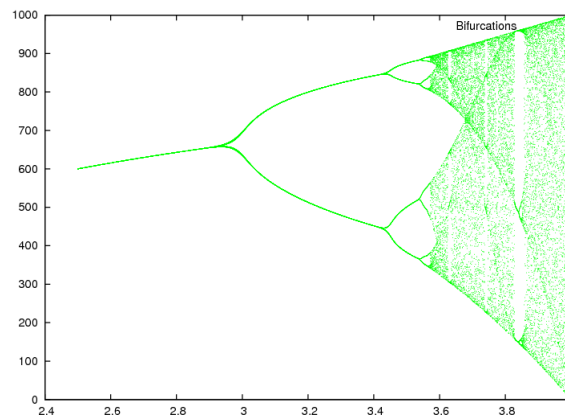


FIGURE 2.1 – Le diagramme de bifurcation de l'application Hénon

## 2.7 Attracteur

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques. Il existe quatre types distincts : un point, un cycle limite, un tore ou avoir une structure encore plus complexe de type fractale .

1. L'attracteur "point fixe" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
  2. L'attracteur "cycle limite" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
  3. L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".
  4. Les attracteurs étranges sont bien plus complexes que les autres, ils seront définis ultérieurement, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière.
- Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle. On donne une seule définition possible d'attracteur :

## Définition

Soit  $\langle \mathbb{R}^2, f \rangle$  une équation discret, une sous-partie  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $A$  est fermée ;
2.  $A$  est positivement invariante ;
3.  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :
  - (a)  $U$  est positivement invariant ;
  - (b)  $U$  est attiré par  $A$  :  $\forall u \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} d(f^t(u); A) = 0$  :

## Différents types d'attracteurs

Comment distinguer un phénomène chaotique d'un phénomène aléatoire? C'est la question que se posent les physiciens lorsqu'ils sont confrontés au comportement chaotique d'un système. Il existe trois types d'attracteurs qui caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et ils peuvent être de trois sortes : Les points fixes, les cycles limites (orbites périodiques) et les cycles limites (quasi-périodiques).

## 2.8 Attracteurs chaotiques

Jusqu'en 1963 on ne connaissait que trois types d'attracteurs : le point fixe, le cycle limite. Le tracé représentant l'évolution d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps se comporte de manière "étrange" par rapport aux attracteurs des systèmes simples comme nous l'avons vu plus haut. C'est pourquoi D. Ruelle l'a nommé "attracteur étrange". Un attracteur est dit étrange ou chaotique lorsque les points le constituant génèrent des trajectoires sensibles aux conditions initiales. Un attracteur chaotique est généralement associé à l'existence d'une infinité de trajectoires instables de tous ordres. Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteurs. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.



## Définition

Soit  $A$  est un attracteur de  $\mathbb{R}^2$ , on dit que  $A$  est un attracteur étranges  $l$  est chaotique ( $A$  vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), un lecteur intéressé pour consulter [19].

## 2.9 Exposant de L'ypunov

L'étude formelle de la théorie du chaos met à notre disposition différents outils permettant d'identifier sans ambiguïté si la dynamique d'un application est chaotique ou non. Parmi ces outils, on peut citer les exposants de Lyapunov qui constituent une approche très naturelle de la mesure de l'état de chaos d'un application. Le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace de phases que l'on appelle un attracteur étrange. Ce non d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace de phases, en imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. quant au terme d'étrange .

Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I). C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. on peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence. L'exposants de Lyapunov mesurent aux conditions initiales par le degré de divergence. L'exposants de Lyapunov mesurent l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, différentes.

## Exemple

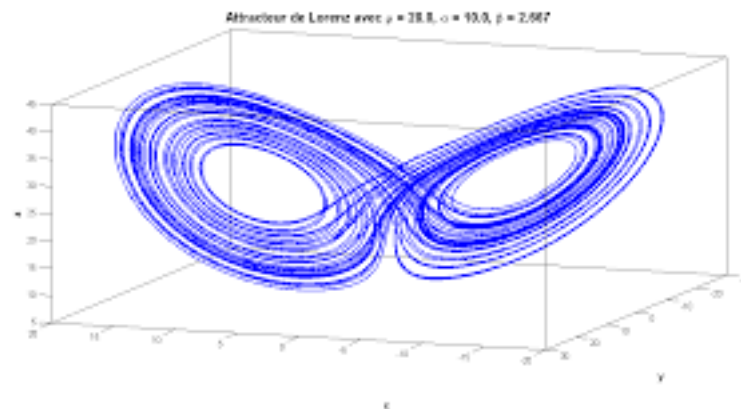


FIGURE 2.2 – Attracteur de Lorenz

## 2.10 Les attracteurs cachés

Les attracteurs cachés ont des bassins d'attraction, qui ne sont pas liés aux équilibres et sont «cachés» quelque part dans l'espace des phases. Par exemple, les attracteurs cachés sont des attracteurs dans les systèmes sans équilibre. Par exemple, systèmes dynamiques électromécaniques rotatifs avec l'effet Sommerfeld (1902), dans les systèmes avec un seul équilibre, qui est stable. Par exemple, la conjecture d'Aizerman (1949) et la conjecture de Kalman (1957) sur la monostabilité des systèmes de contrôle non linéaires. L'un des premiers problèmes théoriques connexes est la deuxième partie de la deuxième partie du 16<sup>e</sup> problème de Hilbert sur le nombre et la disposition mutuelle des cycles limites dans les systèmes polynomiaux bidimensionnels où les cycles limites stables imbriqués sont des attracteurs périodiques cachés. La notion d'attracteur caché est devenue un catalyseur pour la découverte d'attracteurs cachés dans de nombreux modèles dynamiques appliqués [14][20].

En général, le problème avec les attracteurs cachés est qu'il n'existe pas de méthodes générales simples pour tracer ou prédire de tels états pour la dynamique du système. Alors que pour les systèmes bidimensionnels, les oscillations cachées peuvent être étudiées à l'aide de méthodes analytiques (voir, par exemple, les résultats sur la deuxième

partie du 16 problème de Hilbert), pour l'étude de la stabilité et des oscillations dans des systèmes multidimensionnels non linéaires complexes, des méthodes numériques sont souvent utilisées. Dans le cas multidimensionnel, l'intégration de trajectoires avec des données initiales aléatoires est peu susceptible de fournir une localisation d'un attracteur caché car un bassin d'attraction peut être très petite et la dimension de l'attracteur elle-même peut être bien inférieure à la dimension du système considéré. Par conséquent, pour la localisation numérique des attracteurs cachés dans un espace multidimensionnel, il est nécessaire de développer des procédures de calcul analytiques-numériques spéciales, qui permettent de choisir des données initiales dans le domaine d'attraction de l'oscillation cachée (qui ne contient pas de voisinages d'équilibres) puis d'effectuer le calcul de trajectoire. homotopie et suite numérique une séquence de systèmes similaires est construite, de telle sorte que pour le premier système (de départ) les données initiales pour le calcul numérique de la solution oscillante (oscillation de départ) peuvent être obtenues analytiquement, puis la transformation de cette oscillation de départ dans la transition d'un système à un autre est suivi numériquement [14] [15] [20].

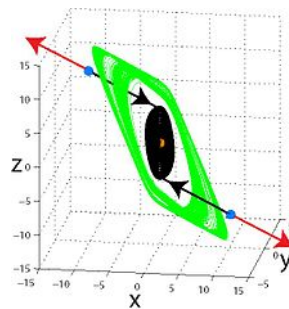


FIGURE 2.3 – Attracteur chaotique caché (domaine vert) dans Le système de Chua. .

**Définition :** Un attracteur est appelé attracteur caché si son bassin d'attraction ne croise pas un certain voisinage ouvert de points d'équilibre; sinon, on l'appelle un attracteur auto-excité.

La classification des attracteurs comme étant cachés ou auto-excités a été introduite par G. Leonov et N. Kuznetsov en lien avec la découverte du caché Attracteur Chua pour la première fois en 2009 année. De même, une oscillation bornée arbitraire, n'ayant pas nécessairement un voisinage ouvert comme bassin d'attraction dans l'espace des phases, est classée comme une oscillation auto-excitée ou cachée Chaotique attracteur auto-excité (domaine vert) dans Le système de Chua. Les trajectoires avec des données initiales au voisinage de deux points de selle (bleu) et d'un point d'équilibre nul (orange) tendent (en vert) à l'attracteur chaotique attracteur caché (domaine vert) dans Le système de Chua. Les trajectoires avec des données initiales au voisinage de deux points de selle (bleu) tendent (flèche rouge) vers l'infini ou tendent (flèche noire) vers un point d'équilibre zéro stable (orange).

Deux attracteurs chaotiques cachés et un attracteur périodique caché coexistent avec deux attracteurs triviaux dans le circuit de Chua (de la couverture ) [20][17].

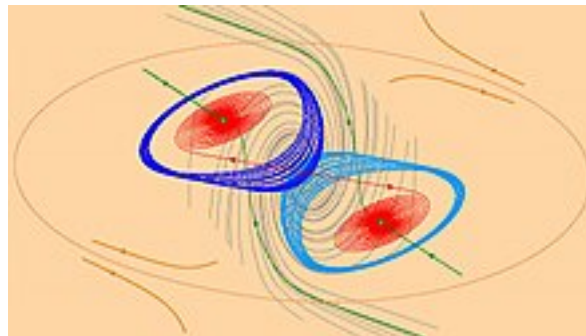


FIGURE 2.4 – Deux attracteurs chaotiques cachés et un attracteur périodique caché coexistent triviaux dans le circuit de Chua

## Attracteurs auto-excités

Pour un attracteur auto-excité, son bassin d'attraction est lié à un équilibre instable et, par conséquent, les attracteurs auto-excités peuvent être trouvés numériquement par une procédure de calcul standard dans laquelle, après un processus transitoire, une trajectoire, commençant dans un voisinage de un équilibre instable, est attiré par l'état d'oscillation puis le trace (voir, Par exemple auto-oscillation traiter). Ainsi, les attracteurs auto-excités, même coexistant dans le cas de multistabilité, peuvent être facilement révélés et visualisés numériquement. Dans le Système Lorenz, pour les paramètres classiques, l'attracteur est auto-excité par rapport à tous les équilibres existants et peut être visualisé par n'importe quelle trajectoire à partir de leurs environs cependant, pour certaines autres valeurs de paramètres, deux attracteurs triviaux coexistent avec un attracteur chaotique qui est auto-excité par rapport à l'équilibre zéro uniquement. Attracteurs classiques en Van der Pol, Beluosov – Zhabotinsky, Rössler, Chua, Hénon les systèmes dynamiques sont auto-excités[20]. Une conjecture est que la dimension de Lyapunov d'un attracteur auto-excité ne dépasse pas la dimension de Lyapunov de l'un des équilibres instables dont la variété instable croise le bassin d'attraction et visualise l'attracteur[15][16].

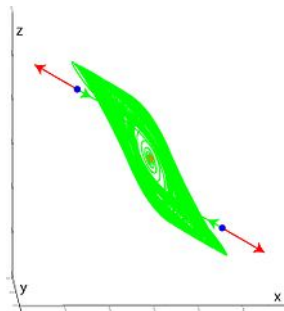


FIGURE 2.5 – Attracteur Chaotique auto-excité (domaine vert) dans Le système de Chua.

# Chapitre 3

## Attracteurs chaotiques cachées en 2D

### 3.1 Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude de la dynamique cachée d'une classe de applications en 2D inspirées de la l'application de Hénon Du point de vue du calcul, **Leonov et al** ont proposé une nouvelle classification des attracteurs [2, 3]. Si le bassin d'attraction d'un attracteur n'intersecté pas de petits voisinages de points fixes, cet attracteur est appelé attracteur caché. Sinon, on l'appelle un attracteur auto-excité. Les attracteurs auto-excités peuvent être localisés numériquement par la procédure de calcul standard, c'est-à-dire choisir un point de la variété instable au voisinage d'un point fixe instable, puis tracer l'état de l'attracteur. Alors qu'il n'y a pas de moyen régulier de prédire de l'existence ou la coexistence d'attracteurs cachés dans un système puisque leurs bassins d'attraction ne sont pas liés à des équilibres instables. On ne peut donc garantir la localisation d'un attracteur caché en suivant ses trajectoires avec des conditions initiales aléatoires car son bassin d'attraction pourrait être très petit. Des algorithmes pour trouver des attracteurs cachés dans les systèmes non linéaires ont été proposés par **Bragin et al** [4], et l'un de ces algorithmes a été utilisé pour localiser les attracteurs cachés dans le système de Chua [5,6]. au cours des dernières années, il y avait un intérêt croissant pour l'étude des attracteurs chaotiques cachés dans les systèmes continus. Par exemple **Wei** a étudié un système chaotique autonome tridimensionnel simple sans équilibre [7]. La particularité de ce système est qu'il existe un contrôleur constant qui permet d'ajuster le type d'attrac-

teurs chaotiques **Jafari et coll** [8] ont effectué une recherche systématique pour trouver des systèmes chaotiques tridimensionnels supplémentaires avec des non-linéarités quadratiques et aucun équilibre **Wei et all** Ont étudié un nouveau système hyperchaotique en 4D par prolongation de les équations de Lorenz généralisées sans diffusion [9], et le nouveau modèle n'a montré aucun point fixe mais un hyperchaos à deux sprails (two-scroll hyperchaos) avec une dynamique chaotique, quasi périodique et périodique.. Dans [10], **Molaie et Al** ont trouvé qu'un point d'équilibre stable coexistait avec 23 flux chaotiques simples avec des non-linéarités quadratiques en utilisant le critère de stabilité de **Routh-Hurwitz** et la recherche informatique systématique. **Wei et Zhang** sont rapporté la découverte d'un système autonome non-Sil'nikov en 4D avec trois non-linéarités quadratiques, et ont observé des attracteurs hyperchaotiques cachés avec un point fixe stable. Dans [12] **Wei et Yang** ont étudié un nouveau système chaotique autonome en 3D qui affichait des attracteurs chaotiques à double défilement à deux sprains (two-scroll) dans un domaine de paramètres très large avec deux point fixes stables. De plus, un équilibre de ligne a été trouvé dans les neuf flux chaotiques simples avec des non-linéarités quadratiques [13], et **Wang et Chen** ont proposé une méthode [14] pour construire le système chaotique avec un nombre pré-assigné de points fixes (avec nombre de points fixes prédéfini). En attendant, la coexistence d'attracteurs cachés a attiré l'attention de nombreux chercheurs, [15–19]. Dans [15, 16], les attractrices rares et cachés dans l'oscillateur de **Pol-Dung** excité à excitation externe ont été étudiés en utilisant le concept de points perpétuels dans [17]. Dans [18], un cycle limite stable coexistant a été trouvé dans un système chaotique qui n'a qu'un seul point fixe stable **Li et Sprott** Sprott [19] ont étudié un nouveau système de Lorenz simplifié en 4D et ont obtenu qu'il possédait un tore attractif dans certaines régions de l'espace des paramètres coexistant avec soit une paire symétrique d'attracteurs chaotiques ou avec une paire symétrique de cycles limites dont les limites du bassin avaient une structure fractale complexe. Dans [20], des attracteurs cachés qui coexistaient avec un équilibre stable ont été observés dans un système de forage indiquant que de telles oscillations cachées peuvent provoquer des échecs de forage coûteux. De plus, les attracteurs cachés dans les systèmes chaotiques à plusieurs marches [21–23] ont également été étudiés dans [26]. D'autre part, la dynamique des applications

en temps discret, telles que l'application logistique et la l'application de Hénon, a été largement étudiée dans différentes disciplines alimentées par leurs larges applications en économie, biologie et ingénierie (voir [27] pour des exemples). Cependant, il y a très peu de résultats sur les attracteurs cachés dans les applications à temps discret. Dans [29], trois contre-exemples du second ordre à la conjecture de Kalman en temps discret ont été construits et des solutions périodiques stables cachées ont été montrées pour ces exemples. Zhusubaliyev et al. [28] ont étudié la multi stabilité et les attracteurs cachés dans un convertisseur DC/DC à plusieurs niveaux qui a été réduit à l'analyse de l'application en 2D par morceaux lisse avec des frontières multiples en intégrant les équations de mouvement pour le système en temps continu de l'événement de commutation à événement de commutation. Dans [28], certains attracteurs cachés dans une application en 1D ont été introduits en prolonge l'application logistique. Dans ce mémoire, nous étudierons une classe de applications en 2 D et explorerons leurs attracteurs cachés. Notre objectif principal est de concevoir une approche schématique pour étudier les attracteurs cachés dans les systèmes à temps discret. Les résultats permettraient d'étudier les mécanismes des dynamiques cachées et l'évolution de leurs bassins d'attraction dans les systèmes à temps discret de grande dimension.



### 3.2 Modèle de l'application

Il s'agit d'une forme d'application de Hénon, nous considérons une classe d'applications en 2D présentées Par l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = a_1 x_k + a_2 y_k + a_3 x_k^2 + a_4 y_k^2 + a_5 x_k y_k + a_6, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  sont des coefficients réels. La matrice jacobienne de l'application est donnée par

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 + 2a_3 x_k + a_5 y_k & a_2 + 2a_4 y_k + a_5 x_k \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

et l'équation caractéristique de la matrice jacobienne peut être calculée comme si est :

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \quad (3.3)$$

où  $\det(J) = -(a_1 + 2a_3 x_k + a_5 y_k)$  est le déterminant de la matrice jacobienne, et  $\text{tr}(J) = a_2 + 2a_4 y_k + a_5 x_k$  est la trace de la matrice jacobienne. Selon la théorie de la matrice, la somme des valeurs propres de la matrice jacobienne est égale à  $\text{tr}(J)$  au produit des valeurs propres de la matrice jacobienne est égale à  $\det(J)$ .

### 3.3 Points fixes et analyse de stabilité

la application de Le point fixe  $(x, y)$  doit satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x = y \\ y = a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ensuite, le problème de la recherche d'un point fixe peut être transformé en résolution de l'équation suivante par rapport à  $y$

$$(a_3 + a_4 + a_5)y^2 + (a_1 + a_2 - 1)y + a_6 = 0 \quad (3.5)$$

Supposons qu'il existe un point fixe  $(x, y)$  de l'application (3.1). Le point fixe est stable si les solutions  $\lambda_1, \lambda_2$  de l'équation caractéristique vérifient que  $|\lambda_{1,2}| < 1$ . Pour établir conditions la stabilité des points fixes, est utilisé le lemme de Shur-cohn .

### Lemme 1

— Le point fixe  $(x, y)$  de la application (3.1) est stable si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} \det(J) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J) - \det(J) - 1 < 0 \\ \operatorname{tr}(J) + \det(J) + 1 > 0 \end{cases}$$

où  $\det(J) = -(a_1 + 2a_3x + a_5y)$  est le déterminant de la matrice jacobienne, et  $\operatorname{tr}(J) = a_2 + 2a_4y + a_5x$  est la trace de la matrice jacobienne.

### Remarque 1

— Si  $\det(J) = 1, \lambda_1 \lambda_2 = 1$ .

— Si  $\operatorname{tr}(J) + \det(J) + 1 = 0$ , il y a une vraie racine  $\lambda = -1$ .

— Si  $\operatorname{tr}(J) - \det(J) - 1 = 0$ , il y a une vraie racine  $\lambda = -1$

Si  $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0, \Delta = (a_1 + a_2 - 1)^2 - 4(a_3 + a_4 + a_5)a_6$  est le discriminant .

### 3.4 Cas 1 : pas de point fixe

— Si  $a_3 + a_4 + a_5 = 0, a_1 + a_2 - 1 = 0$  et  $a_6 \neq 0$ , l'équation (3.5) n'admet pas de solution, et la application (3.1)n'admet pas de point fixe.

Pour toute existence d'attracteurs, ils doivent être cachés car les bassins d'attraction de ces attracteurs ne contiennent aucun point fixe.

— Si  $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0$  et  $\Delta < 0$ , alors l'équation (3.5) n'admet pas de solution, et la application (3.1) n'a pas de point. Encore une fois, s'il existe un attracteur, il doit être caché

puisque le bassin d'attraction de la application (3.1) n'admet pas point fixe .

### 3.5 Cas 2 : point fixe unique

- Si  $a_3 + a_4 + a_5 = 0$  et  $a_1 + a_2 - 1 \neq 0$ , l' équation(3.5) admet une solution unique  $y = -\frac{a_6}{a_1+a_2-1}$ , et la application (3.1) admet un point fixe  $(x^*, y^*)$ , ou  $x^* = y^* = -\frac{a_6}{a_1+a_2-1}$ . Ce point fixe est stable si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de la matrice jacobienne  $J_1 = J|_{x=x^*, y=y^*}$  se trouvent dans le cercle unitaire, c'est-à-dire.  $|\lambda_i| < 1$ , ou  $i = 1, 2$ . d'après le lemme 1, le point fixe  $(x^*, y^*)$  est stable si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} \det(J_1) - 1 < 0, \\ \text{tr}(J_1) - \det(J_1) - 1 < 0, \\ \text{tr}(J_1) + \det(J_1) + 1 > 0 \end{cases}$$

qui conduit à

$$\begin{cases} (a_1 - a_1 a_2 + 2a_3 a_6 + a_5 a_6 - a_1^2)/(a_1 + a_2 - 1) - 1 < 0 \\ a_2 - (a_1 - a_1 a_2 + 2a_3 a_6 + a_5 a_6 - a_1^2)/(a_1 + a_2 - 1) \\ -(2a_4 a_6)/(a_1 + a_2 - 1) - (a_5 a_6)/(a_1 + a_2 - 1) - 1 < 0, \\ a_2 + (a_1 - a_1 a_2 + 2a_3 a_6 + a_5 a_6 - a_1^2)/(a_1 + a_2 - 1) \\ -(2a_4 a_6)/(a_1 + a_2 - 1) - (a_5 a_6)/(a_1 + a_2 - 1) + 1 > 0. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe d'autres attracteurs à l'exception de ce point fixe car le point fixe  $(x^*, y^*)$  est stable et les bassins d'attraction ne peuvent contenir aucun point fixe, ces attracteurs de la application (3.1) sont cachées.

- Si  $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0$  et  $\Delta = 0$ , l' équation (3.5) admet deux racines réelles égaux  $y_1 = y_2 = -\frac{a_1+a_2-1}{2(a_3+a_4+a_5)}$ , et la application (3.1) admet un point fixe  $(x^*, y^*)$ , ou  $x^* = y^* = -\frac{a_1+a_2-1}{2(a_3+a_4+a_5)}$ . Cependant, la matrice jacobienne à ce point fixe  $J_2 = J|_{x=x^*, y=y^*}$  satisfait  $\text{tr}(J_2) = \det(J_2) + 1$  ce qui implir que les valeurs propres de la matrice jacobienne sont égales à 1. Ainsi le point fixe  $(x^*, y^*)$  n'est pas stable.

### 3.6 Cas 3 : Deux points fixes

— Si  $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0$  et  $\Delta > 0$ , l'équation (3.5) admet deux racines réelles distinctes  $y_{1,2} = \frac{-(a_1+a_2-1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(a_3+a_4+a_5)}$ , et la application (3.1) admet deux points fixes  $(x_{1,2}^*, y_{1,2}^*)$ , ou  $x_{1,2}^* = y_{1,2}^* = \frac{-(a_1+a_2-1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(a_3+a_4+a_5)}$ . Ces deux le points fixe sont stables si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  des matrices jacobiennes  $J_3 = J|_{x=x_1^*, y=y_1^*}$  et  $J_4 = J|_{x=x_2^*, y=y_2^*}$  sont tous se trouvent dans le cercle unitaire, c'est.-à-dire.  $|\lambda_i| < 1$ , où  $i = 1, 2$ . Ainsi les deux points fixes sont stables si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(J_3) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_3) - \det(J_3) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_3) + \det(J_3) + 1 > 0 \\ \det(J_4) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_4) - \det(J_4) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_4) + \det(J_4) + 1 > 0. \end{array} \right.$$

Cependant, en utilisant la commande "simplifier" dans le logiciel de calcul scientifique MATLAB, le les conditions sont "FAUX", ce qui implique qu'il y a une contraction de ces inégalités. Alors ça indique que la système ne peut pas avoir deux points fixes stables.

### 3.4.1 Attracteurs chaotiques sans point fixe

Si on fixe les paramètres

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 0.2 \quad a_4 = 0,71 \quad a_5 = -0,91 \quad \text{et} \quad a_6 = -1,14$$

alors l'application (3.1) :

TABLE 3.1 – Les résultats sont présentées dans le tableau 1

cas 1	l'application	$(x_0, y_0)$	(Les)	$(\overline{\dim}_L)$
exemple	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = y_k + 0.2y_k^2 + 0,71y_k^2 - 0,91y_k^2 - 1,14, \end{cases}$	(0,93, -0,44)	0,0623, -0,3248	1,1947

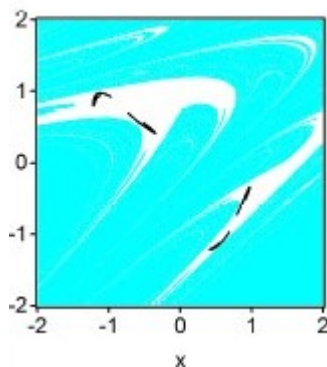


FIGURE 3.1 – Attracteur chaotique (noir) est le de Bassins d'attraction .

On peut vérifier que l'application présenté dans le tableau 1 vérifié  $a_3 + a_4 + a_5 = 0$ , et  $a_1 + a_2 - 1 = 0$ , et  $a_6 \neq 0$ , ce qui indiquer qu'ils n'ont pas de point fixe. Alors les attracteur obtenus dans l'application (3.1) sont cachées.

2) Attracteurs chaotiques sans point fixe II :

Si on fixe les paramètres

$$a_1 = 2.16, a_2 = -0.02, a_5 = 0.6, \text{ et } a_6 = 0.76,$$

alors l'application (3.1) :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 2.16x_k^2 - 0.02y_k^2 + 0.6x_ky_k + 0.76, \end{cases} \tag{3.6}$$

TABLE 3.2 – Les résultats sont présentées dans le tableau 2

cas 2	l'application	$(x_0, y_0)$	(Les)	$(\overline{\dim}_L)$
exemple	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 2.16x_k^2 - 0.02y_k^2 + 0.6x_ky_k + 0.76, \end{cases}$	(0,51, -5,04	0,0467,-1,1251	1,0419

n peut vérifier que l'application présenté dans le tableau 2 vérifié  $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ , et  $\Delta < 0$ , et  $a_6 \neq 0$ , ce qui indiquer qu'ils n'ont pas de point fixe. Alors les attracteur obtenus dans l'application (3.1) sont cachées.

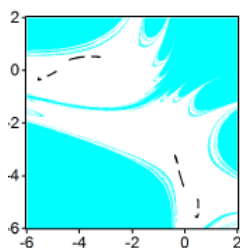


FIGURE 3.2 – Attracteur chaotique (noir) est le de Bassins d'attraction.

# Conclusion

Ce mémoire étudie la dynamique cachée d'une classe de cartes bidimensionnelles inspirées par l'application de Hénon. Une considération particulière est apportée à l'existence de points fixes et à leurs stabilités dans ces applications.

Notre préoccupation se concentre sur trois scénarios typiques qui peuvent générer des dynamiques cachées, c'est-à-dire aucun point fixe, un seul point fixe et deux points fixes. Un programme de recherche informatique est utilisé pour explorer les attracteurs chaotiques cachés de l'application. Nos résultats montrent que les bassins de certains attracteurs cachés sont minuscules, de sorte que la procédure de calcul standard pour la localisation n'est pas disponible. La méthode d'exploration schématique proposée dans ce mémoire pourrait être généralisée pour étudier la dynamique cachée des applications de grande dimension.

# Bibliographie

- [1] Hénon, M. : A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 50, 69-77 (1976).
- [2] Leonov, G.A., Kuznetsov, N.V., Kuznetsova, O.A., Seledzhi, S.M., Vagaitsev, V.I. : Hidden oscillations in dynamical systems. *Trans. Syst. Control* 6, 54-67 (2011).
- [3] Leonov, G.A., Kuznetsov, N.V. : Hidden attractors in dynamical systems : from hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. *Int. J. Bifurcat. Chaos* 23, 1330002 (2013).
- [4] Bragin, V.O., Vagaitsev, V.I., Kuznetsov, N.V., Leonov, G.A. : Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua's circuits. *J. Comp. Syst. Sci. Int.* 50, 511-543 (2011).
- [5] Leonov, G.A., Kuznetsov, N.V., Vagaitsev, V.I. : Localization of hidden Chua's attractors. *Phys. Lett. A* 375, 2230-2233 (2011).
- [6] Leonov, G.A., Kuznetsov, N.V., Vagaitsev, V.I. : Hidden attractor in smooth Chua systems. *Physica D* 241, 1482-1486 (2012).
- [7] Wei, Z. : Dynamical behaviors of chaotic systems with no equilibria. *Phys. Lett. A* 376, 102-108 (2011).
- [8] Jafari, S., Sprott, J.C., Golpayegani, S. : Elementary chaotic flows with no equilibria. *Phys. Lett. A* 377, 699-702 (2013).
- [9] Wei, Z., Wang, R., Liu, A. : A new finding of the existence of hyperchaotic attractors with no equilibria. *Math. Comput. Simul.* 100, 13-23 (2014)
- [10] Molate, M., Jafari, S., Sprott, J.C., Golpayegani, S. : Simple chaotic flows with one stable equilibrium. *Int. J. Bifurcat. Chaos* 23, 1350188 (2013)



- 
- [11] Gumowski, I. & Mira, C. " Dynamique Chaotique " (Ed. Cépadues, Toulouse)(1980).
- [12] J.Guckenheimer & P.Holmes. " Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields ". Springer Verlag, Berlin. (1983).
- [13] Anna, D. . Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret(2003).
- [14] Dudkowski D .; Jafari S .; Kapitaniak T .; Kuznetsov N. V .; Leonov G. A .; Prasad A. . "Attracteurs cachés dans les systèmes dynamiques". Rapports de physique (une section de révision des lettres de physique)(2016).
- [15] LKuznetsov, N.V .; Leonov, G.A .; Mokaev, T.N .; Prasad, A .; Shrimali, M.D. "Dimension de Lyapunov à temps fini et attracteur caché du système Rabinovich". Dynamique non linéaire. 92 (2018).
- [16] Leonov G.A .; Kuznetsov N.V. . "Attracteurs cachés dans les systèmes dynamiques. Des oscillations cachées dans les problèmes de Hilbert-Kolmogorov, Aizerman et Kalman à l'attracteur chaotique caché dans les circuits de Chua". International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering (2013).
- [17] Chen, G .; Kuznetsov, N.V .; Leonov, G.A .; Mokaev, T.N. "Les attracteurs cachés sur un chemin : les systèmes Glukhovsky-Dolzhansky, Lorenz et Rabinovich". International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering (2015)
- [18] Kuznetsov N.V .; Leonov G.A .; Vagaitsev V.I "Méthode analytique-numérique pour la localisation d'attracteur du système généralisé de Chua" (2010).
- [19] Volterra, V., *Variazioni e uttuazioni del numero in specie animali conventi*, Mem.Acad. Lincei. 2, 31113, (1926).
- [20] Bragin V.O .; Vagaitsev V.I .; Kuznetsov N.V .; Leonov G.A. . "Algorithmes pour trouver des oscillations cachées dans des systèmes non linéaires. Les conjectures d'Aizerman et de Kalman et les circuits de Chua"(2011).
- [21] Gumowski, I. Mira, C." Dynamique Chaotique " (Ed. C ´epadues, Toulouse)(1980).
- [22] Li, C., Sprott, J.C. : Coexisting hidden attractors in a 4-D simplified Lorenz system. Int. J. Bifurcat. Chaos 24, 1450034 (2014).
- [23] M. Mammeri, Precise long-term prediction of behavior in a 3-D chaotic map, Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol. 13, no. 13, 4859-4865, (2018).
-

- 
- [24] M. Mammeri, Symmetry and Periodic-Chaos in 3-D Sinusoid Discrete Maps, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 9.no. 1, 1-9, (2017).
- [25] M. Mammeri, A Large Chaotic Region in a 3-D Sinusoid Discrete Map. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*. Vol. 55, no. 3, 133-144, (2016).
- [26] Jafari, S., Pham V.T., Kapitaniak T. : Multi-scroll chaotic sea obtained from a simple 3D system without equilibrium. *Int. J. Bifurcat. Chaos* 26, 1650031 (2016).
- [27] Sprott, J.C. : *Strange attractors : creating patterns in chaos*. MT books, New York (2000).
- [28] Jafari, S., Pham, T., Moghtadaei, M., Kingni, S.T. : The relationship between chaotic maps and some chaotic systems with hidden attractors. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, accepted (2016).
- [29] Heath, W.P., Carrasco, J., Senb M. : Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture. *Automatica* 60, 140-144 (2015).