République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option **: Probabilités et Statistique**

Par :

Guemmoula Imane

Titre :

Existence du contrôle optimal pour l'EDSs linéaires

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Ben brahim Radhia**	UKM, OUARGLA	Encadreur
Dr.	**Mansoul Brahim**	UKM, OUARGLA	Président
Dr.	**Saouli Mostapha abdelouahab**	UKM, OUARGLA	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail :

à ma chère mère, la bougie de ma vie.

à mon chèr père, qui souffret pour mon éducation.

Allah vous protège.

à mes sœurs et frères, mon bras droit dans ma vie :

Malika, Fouzia et Soumia

Abd eldjalile, Walid et Salahe edinne.

à mes fidèles amis : Rachida et Oumessaad.

à ma famille et tous mes amis.

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant «**Allah**» le tout
puissant de m'avoir donné le force et la volonté
pour terminer ce travail.
En second lieu,
je tiens à remercier mon encadreur **Ben brahim Radhia**
pour conseil et son aide durant toute la période du travail.
Mes vifs remerciements,
vont également aux membres du jury
pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner
ma travail et de l'enrichir par leurs propositions.
Et je n'oublie pas de remercier tous ceux qui m'ont aide à faire ce travail,
en particulier ma chére **Hamed Ikram**.

Table des matières

Introduction

Le contrôle stochastique ou contrôle optimal stochastique est un sous-domaine de la théorie du contrôle qui représente une description mathématique de la façon de se comporter de manière optimale, le contrôle stochastique vise à concevoir le chemin temporel des variables contrôlées qui effectue la tâche de contrôle souhaitée avec un coût minimum, remonte la théorie du contrôle optimal aux années 50, en 1958 **Bellman** a été le premier à s'intéresser à l'aspcet stochastique, cette théorie utilisé pour modéliser beaucoup de situations en sciences de l'ingénieur, en sciences économiques et sociales et de façon plus générale dans tous les domaines utilisant les applications des mathématiques.

Le cadre général de ce mémoire étude le problème du contrôle optimal stochastique. Plus précisément, l'existence de contrôle optimal stochastique strict pour les équations différentielles stochastiques linéaires(EDSL), ce sont des systèmes dynamiques évoluant de façon aléatoire dans le temps, ce qui pourrait être considéré comme une généralisation des équations différentielles ordinaires et Le principal outil du calcul stochastique est le calcul Itô, qui a été introduit par **Kiyoshi Itô**, dans les années 40 pour construire, l'EDSs a trouvé de nombreuses applications tels physique, la biologie et l'économie. Plus récemment, l'application la plus spectaculaire est son rôle dans la finance mathématique.

L'objectif du problème de contrôle stochastique est de minimiser une certainne fonction de coût $J(.)$ sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles. tq J définie par :

$$J(u_t) = E\left\{ l(X_T) + \int_0^T h(t, X_t, u_t)dt \right\}.$$

Où (X_t) est une solution d'une équation diffrentielle stochastique linéaire contrôlée de la forme suivant :

$$\begin{cases} X_t = z + \int_0^t (AX_s + Bu_s)ds + \int_0^t (CX_s + Du_s)dB_s. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

Où $X_0 = z$ le condition intial et $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ espace de probabilité filtré.

Ce travail est organisée de la manière suivante :

Chapitre 01 : le premier chapitre est consacré au généralité sur les probabilité et calcule stochastique dont on représente quelque définitions de base (la tribu, l'espace de probabilités, mesuré, le processus stochastique, la filtration, martingales et intégral stochastique...etc).

Chapitre 02 : le deuxième chapitre on introduira l'étude du l'équation différentielle stochastique, et aussi nous citons le théorème d'existence et d'unicité de la solution des l'EDSs, avec l'équation différentielle stochastique linéaire.

Chapitre 03 : le dernier chapitre on représente le problème de ce mémoire, nous traitons le problème d'existence de contrôle optimal strict pour les équations diffrentielles stochastiques linéaires, dans le cas où l'ensemble des contrôles admissibles convexe et compact et la fonction du coût convexe.

Chapitre 1

Rappel sur les probabilités et calcul stochastique

Dans ce chapitre on peut donner quelques concepts de base au notions stochastique les principaux définitions, le plus utilisation souvent élémentaires concernant les probabilités, les processus aléatoires et calcul stochastique, au strict nécessaire pour la suite du mémoire.

1.1 La tribu

[4]

Définition 1.1.1 *: On dit une tribu (ou $\sigma-$algébre) sur Ω, une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensemble de Ω (appellés événements) tq :*

1. $\{\phi\} \in \mathcal{F}$.

2. $B \in \mathcal{F} \Longrightarrow B^C \in \mathcal{F}$.

3. $(B_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \mathcal{F}$.

Remarque 1.1.1 *: Une intersection des tribus est une tribu, mais l'union n'est pas nécessairement.*

1.2 une mesure de probabilité

Définition 1.2.1 *: Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω, on appellé une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ un application $\mathbb{P}$:$\otimes \longrightarrow [0,1]$ tq :*

$$\mathbb{P}(\{\phi\}) = 0 \quad et \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

$\forall (B_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{F}$ disjoints on a :

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i).$$

Remarque 1.2.1 *Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ appellé un espace de probabilité.*

1.3 La filtration

[4]

Définition 1.3.1 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on appellé filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus sur Ω (i.e $\forall s \leq t \qquad \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$).*

Remarque 1.3.1 *:*

1. On dit que $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré.

2. Si Ω ensemble dénombrable, on dit espace de probabilité filtré discret.

1.4 Variable aléatoire

[9]

Définition 1.4.1 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on appellé variable aléatoire tout fonctions mesurables :*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors :

$$X \text{ est un variable aléatoire} \Longrightarrow (\forall \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(\beta) \in \mathcal{F} \iff \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in \beta\} \in \mathcal{F}).$$

1.5 La loi de probabilité

[4]

Définition 1.5.1 *: Soit X est un v.a definié sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on appellé la loi de v.a X est une mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$avec la façon suivant :*

$$\mathbb{P}_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]\,.$$
$$B \longmapsto \mathbb{P}_x(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{X \in B\}).$$

Remarque 1.5.1 *: La loi d'une variable aléatoire dans le cas continue donne par la fonction de densité f vérifier les conditions :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0.$
2. $\int_R f(x)dx = 1.$

1.6 Processus stochastique

[4]

Définition 1.6.1 *: On appellé un processus stochastique, est une famille de variable aléatoire $X = (X_t)_{t\in T}$ indxée par l'ensemble T définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$à valeur dans un espace mesurable (E, ξ) appellé espace d'etat.*

Remarque 1.6.1 *: Tout processus dépend de deux paramétre ω et t tq :*

*1.**Pour* **t*fixé* :** l'etat du processus est variable aléatoire $X_t(\omega)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

*2.**Pour** ω **fixé :** l'etat du processus est trajectoire.*

1.7 L'espérance conditionnelle

[4]

Définition 1.7.1 *: Soit X un variable aléatoire sur$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on definit l'espérance de variable aléatoire comme suit :*

1. Si X v.a discret :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(\{X = x_i\}).$$

2. Si X v.a continue (avec une densité f_x) :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Définition 1.7.2 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on appellé probabilité conditionnelle de l'evenement A sachant B tq :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbb{P}(\mathbf{B})}, tq\ \mathbb{P}(\mathbf{B}) \neq 0.$$

Définition 1.7.3 *: Soit G une sous-tribu de $\mathcal{F}$, la probabilité conditionnelle par rapport à tribu défine par :*

$$\forall A \in \mathcal{F} \qquad \mathbb{P}(\mathbf{A}/\mathbf{G}) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_A/\mathbf{G}\right).$$

Définition 1.7.4 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une espace de probabilté et soit X v.a intégrable :*

1. Conditionnellement par rapport évènement B :

$$\mathbb{E}(X/B) = \frac{\mathbb{E}(X.1_B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\int_B X d\mathbb{P}_x}{\mathbb{P}(B)}.$$

2. Conditionnellement par rapport tribu :

Soit G une sous-tribu de $\mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/G)$ est unique v.a G-mesurable tq :

$$\forall B \in G \qquad \int_B \mathbb{E}(X/G) d\mathbb{P}_x = \int_B X d\mathbb{P}_x.$$

Propriété 1.7.1 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soit G une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et soient X, Y deux v.a réelles intégrables sur cette espace alors :*

1. linéairité :

$$\mathbb{E}(\alpha X + Y/G) = \alpha \mathbb{E}(X/G) + \mathbb{E}(Y/G).$$

2. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/G)) = \mathbb{E}(X)$.

3. $\mathbb{E}(X/G) = X$ *(si X est G-mesurable).*

4. $\mathbb{E}(XY/G) = Y\mathbb{E}(X/G)$ *(si Y est $G-$mesurable).*

5. $\mathbb{E}(X/G) \geq 0$ *si*$X \geq 0$.

6. Si H est une sous-tribu de G (i.e $H \subset G$) alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/G)/H) = \mathbb{E}(X/H)$.

Proposition 1.7.1 *: (**Inégalité de jensen**) Soit X un v.a intégrable, soit $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe alors on a :*

$$Q(\mathbb{E}(X/G)) \leq \mathbb{E}(Q(X)/G).$$

1.8 Martingales

Définition 1.8.1 *: Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré et une suite $\{X_t\}$de v.a réelles, on dit que X_t est $\mathcal{F}_t-$martingale (ou martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si :*

1.$\forall t \in \mathbb{R} \qquad X_t$ *intégrable (i.e* $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$).

2. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

3. $\forall s < t \qquad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$.

Remarque 1.8.1 *: Si la dernière condition remplacée par :*

1. $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$, *on dit que* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *sur-martingale.*

2. $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$, *on dit que* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *sous-martingale.*

3. Si $\{X_t\}$ *sur-martingale et sous-martingale en même temps alors* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *une martingale.*

Propriété 1.8.1 *: Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique :*

- Si $(X_t)_{t\geq 0}$ *un martingale alors la fonction* $t \longmapsto \mathbb{E}(X_t)$ *est constante c-à-d :*

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_t).$$

- Si $(X_t)_{t\geq 0}$ *un sous-martingale alors la fonction* $t \longmapsto \mathbb{E}(X_t)$ *est croissante c-à-d :*

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathbb{E}(X_0) \leq \mathbb{E}(X_t).$$

- Si $(X_t)_{t\geq 0}$ *un sur-martingale alors la fonction* $t \longmapsto \mathbb{E}(X_t)$ *est décroissante c-à-d :*

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_t).$$

- Si $(X_t)_{t\geq 0}$ *un martingale alors :*

$$\forall t, p \geq 0 \qquad \mathbb{E}(X_{t+p} \backslash \mathcal{F}_t) = X_t.$$

- ***Inégalité maximale de Doob :*** *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *une sous-martingale positive, alors pour tout* $\lambda > 0$ *on a :*

$$P(\max_{0\leq k\leq t}(X_k) \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X_t)}{\lambda}.$$

- Inégalité de Doob : *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *, de carré intégrable et* $X_0 = 0$ *(*$\mathbb{P}p.s$*) alors :*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_t|^p).$$

1.9 Mouvement brownien

Définition 1.9.1 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un processus à valeur réelle, on appellé B_t est mouvement brownien standard si verifié :*

1. $B_0 = 0 \qquad \mathbb{P}$ *p.s.*

2. $t_0 = 0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, *les accroissements* $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} (0 \leq i \leq n-1)$ *sont independants.*

3. $0 \leq s \leq t$, *l'accroissement* $B_t - B_s$ *suit la loi normale centrée et de variance* $(t-s)$.

4. $t \longmapsto B_t(\omega)$ *est continue* $\qquad (p.s)$.

1.10 Intégrale stochastique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ espace de probabilité filtré, et soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est mouvement brownien, on désigne par la filtration du mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ tq :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t).$$

Définition 1.10.1 *: L'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme :*

$$\int_0^t X_s dB_s.$$

tq : X_t processus stochastique adapté et carré intégrable.

Propriété 1.10.1 *:1. Linéairté :*

$$\int_0^t (\alpha X_s + Y_s) dB_s = \alpha \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Y_S dB_s.$$

2. Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}(\int_0^t {X_s}^2 ds).$$

3. $(\int_0^t X_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ *est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

4. $(\int_0^t X_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ *est continu* $\quad (p.s)$.

1.10.1 Processus d'Itô

Définition 1.10.2 *: Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré et soit* B_t *MB. On appellé processus d'Itô est un processus de valeur réel sous la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t g_s dB_s.$$

Avec : X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

f_s *et* g_s *sont deux processus* $\mathcal{F}_t$*-adaptés verifiant les conditions d'intégrabilité :*

$$(\int_0^T |f_s|\, ds < \infty \qquad p.s) \text{ et } (\int_0^T \left\|{g_s}^2\right\| ds < \infty \qquad p.s).$$

On dit que f *le coefficient de dérive (ou le drift), et* g *est le coefficient de diffusion.*

1.10.2 Formule d'Itô

Théorème 1.10.1 *Soit* X_t *un processus d'Itô et soit* $h(t,x)$ *est une fonction réelle de classe* C^1 *par rapport à* t,*de classe* C^2 *par rapport à* x, *dérivées bornées alors :*

$$h(t, X_t) = h(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial h(s, X_s)}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial h(s, X_s)}{\partial x} dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h(s, X_s)}{\partial x^2} d\left\langle X\right\rangle_s.$$

Chapitre 2

Les équations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre, on étudions les équations différentielles stochastiques. Puis, nous étudions les résultats principaux d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différetielle stochastique. Finalement, on termine par la solution des equations différentielles stochastiques linéaires.

2.1 Notions et définitions

[4]

Définition 2.1.1 *: On appellé l'equation différentielle stochastique tq coefficient de dérive f et coefficient de diffusion g, tout équation donnée sous la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t \qquad \forall t \in [0, T] \, . \\ X_0 = z. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où : T un réel strictement positif.

– f :$[0, T] \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *et* g :$[0, T] \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^{n \times d}$ *sont deux fonctions boréliennes.*

– $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard sur* $\mathbb{R}^d$ *définié sur un espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$.

– z *un v.a quelconque indépendante du MB.*

On dit que (X_t) *est une solution de l'EDS (2.1), si elle verifié l'équation intégralé.*

$$X_t = z + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dB_s.$$

Exemple 2.1.1 ***: Brownien Géometrique***

$$\begin{cases} dX_t = b_t X_t dt + \sigma_t X_t dw_t. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

Où : b_t, σ_t *sont deux processus adapté et borné.*

2.2 Solution forte et solution faible

[11]

Ils existe deux type de solutions pour l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = z + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dB_s.$$

Définition 2.2.1 ***(Solution forte) :*** *On appellé que un processus stochastique* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est une solution forte de l'EDS (2.1) avec le condition initial* X_0 *si :*

1. X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour tout* $t \in [0, T]$.

2. On a les conditions :

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^t |f(s, X_s)|\, ds < \infty\right\} = \mathbb{P}\left\{\int_0^t g(s, X_s)^2 ds < \infty\right\} = 1.$$

3. Pour tout $t \in [0, T]$ *on a :*

$$X_t = z + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s.$$

Avec probabilité 1.

Définition 2.2.2 ***(Solution faible) :*** *La solution faible de l'équation différentielle stochastique (2.1) est un triplet :*

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré.*

2. $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien (standard).*

3. X_t *un processus* $\mathcal{F}_t-$*adapté.*

les processus X_t *et* B_t *sont définis sur le même espace donné et vérifient :*

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^t |f(s, X_s)| \, ds < \infty\right\} = \mathbb{P}\left\{\int_0^t g(s, X_s)^2 ds < \infty\right\} = 1 \qquad \forall t \geq 0.$$

et

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

Remarque 2.2.1 *:*

- ***L'unicité faible :****si touts les solutions ont toujour même loi.*

- ***L'existence faible :*** *si (2.1) admet solution.*

- ***L'unicite trajectorielle :*** *si l'espace de probabilité et le mouvement brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$*sont fixé et touts deux solutions* X *et* Y *sont indistinguables.*

- ***L'existence forte :****si (2.1) admet solution adapté à la filtration brownien.*

2.3 Théorème d'existence et d'unicité

[4]

Théorème 2.3.1 *: Soit f et g sont continues, on suppose qu'il existent deux constantes K et C tq :*

Pour tout $t \in [0,T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

1. ***Croissance linéaire :***

$$|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq C(1 + |x|).$$

2. ***Condition de lipshitz :***

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K\,|x - y|\,.$$

3. $\mathbb{E}(|z|^{\,2}) < \infty.$

Alors l'EDS (2.1) admet une unique solution, de plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X|^{\,2}) < \infty.$$

Preuve. :L'existence : On procéde comme pour les équations différentielles stochastiques avec une méthode d'approximation de **Picard** pour cela on pose :

$$\begin{cases} X_t^{n+1} = z + \int_0^t f(s, X_s^n)ds + \int_0^t g(s, X_s^n)dB_s. \\ X_t^0 = 0. \end{cases}$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puis qu'il est clair par récurrence pour chaque n ,le processus (X_t^{n+1}) est adapté et a des trajectoires continues, alors le processus $g(s, X_s)$ aussi vérifie les mêmes propriétés.

Soit l'intervalle $[0, T]$ tq, $T > 0$ vérifiant d'apord par récurrence sur n qu'il existe un constant $\mathbf{C}_n$, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E}(|X_t^n|^2) \leq C_n.$$

Pour $n = 0$ clair.

On suppose à présent que ceci est vrai pour l'ordre (n) et vérifions que cela reste vrai pour l'ordre $(n + 1)$.

$$|X_t^{n+1}|^2 = |z + \int_0^t f(s, X_s^n)ds + \int_0^t g(s, X_s^n)dB_s|^2.$$

Comme $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ alors :

$$|X_t^{n+1}|^2 \leq 3[|z|^2 + |\int_0^t f(s, X_s^n)ds|^2 + |\int_0^t g(s, X_s^n)dB_s|^2].$$

Par passage a l'espérance on a :

$$\mathbb{E}|X_t^{n+1}|^2 \leq 3[|z|^2 + \mathbb{E}(|\int_0^t f(s, X_s^n)ds|^2) + \mathbb{E}(|\int_0^t g(s, X_s^n)dB_s|^2)].$$

D'aprés la proprétié de l'isometrie d'Itô alors :

$$\mathbb{E}|X_t^{n+1}|^2 \leq 3[|z|^2 + \mathbb{E}(|\int_0^t f(s, X_s^n)ds|^2) + \mathbb{E}(|\int_0^t g(s, X_s^n)^2 ds|)].$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz alors :

$$\mathbb{E}(|X_t^{n+1}|^2) \leq 3[|z|^2 + \mathbb{E}(|\int_0^t g(s, X_s^n)^2 ds|) + T\mathbb{E}(|\int_0^t f(s, X_s^n)^2 ds|)].$$

D'aprés la croissance linéaire on a :

$$\mathbb{E}(|X_t^{n+1}|^2) \leq 3[|z|^2 + \mathbb{E}(\int_0^t K^2(1+|X_t^n|^2)ds) + T\mathbb{E}(\int_0^t K^2(1+|X_t^n|^2)ds)].$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_t^{n+1}|^2) &\leq 3[|z|^2 + K^2(1+T)\int_0^t (1+\mathbb{E}(|X_t^n|^2)ds],\\ &\leq 3[|z|^2 + K^2(1+T)T(1+C_n)],\\ &= C_{n+1} < \infty.\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(|X_t^{n+1}|^2) < \infty.$$

On va majorer par récurrence :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2].$$

On a :

$$\begin{aligned}X_t^{n+1} - X_t^n = &\int_0^t (f(s, X_s^n) - f(s, X_s^{n-1}))ds\\ &+ \int_0^t (g(s, X_s^n) - g(s, X_s^{n-1}))dB_s.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2) = \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t} | &\int_0^t (f(s, X_s^n) - f(s, X_s^{n-1}))ds\\ &+ \int_0^t (g(s, X_s^n) - g(s, X_s^{n-1}))dB_s|^2).\end{aligned}$$

Comme $(a+b)^2 \leq a^2+b^2$ et par l'inégalité de Doob :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2) \leq 2[\mathbb{E}(|\int_0^t |f(s,X_s^n)-f(s,X_s^{n-1}))ds|^2 \\ +4|\int_0^t (g(s,X_s^n)-g(s,X_s^{n-1}))dB_s|^2)].\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schawrz alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2) \leq 2[T\mathbb{E}(\int_0^t |f(s,X_s^n)-f(s,X_s^{n-1})|^2ds) \\ +4\mathbb{E}(|\int_0^t (g(s,X_s^n)-g(s,X_s^{n-1}))dB_s|^2)].\end{aligned}$$

Par l'isomitré d'itô on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2) \leq 2[T\mathbb{E}(\int_0^t |(f(s,X_s^n)-f(s,X_s^{n-1})|^2ds) \\ +4\mathbb{E}(|\int_0^t (g(s,X_s^n)-g(s,X_s^{n-1}))|^2ds)].\end{aligned}$$

Comme f et g sont lipshitziennes pour tout $t\in[0,T]$ on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2) \leq 2TK^2\mathbb{E}(\int_0^t |X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds) \\ +8K^2\mathbb{E}(\int_0^t |X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds).\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2) &\leq 2K^2(T+4)\int_0^t \mathbb{E}(\sup_{0\leq u\leq s}|X_u^n-X_u^{n-1}|^2)ds, \\ &\leq C_T\int_0^t \mathbb{E}(\sup_{0\leq u\leq s}|X_u^n-X_u^{n-1}|^2)ds.\end{aligned}$$

Où : $C_T = 2K^2(T+4)$.

Alors, en applicant l'inégalité de Doob à $|X_u^n - X_u^{n-1}|^2$ (par la même méthode) on a :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq u\leq s}|X_u^n - X_u^{n-1}|^2) \leq C_T\int_0^t \mathbb{E}(\sup_{0\leq v\leq u}|X_v^{n-1} - X_v^{n-2}|^2)du.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{n+1} - X_s^n|^2) &\leq C_T\int_0^t (C_T\int_0^t \mathbb{E}(\sup_{0\leq v\leq u}|X_v^{n-1} - X_v^{n-2}|^2du)ds),\\
&\leq C_T^2\mathbb{E}(\sup_{0\leq v\leq u}|X_v^{n-1} - X_v^{n-2}|^2)\int_0^t(\int_0^s du)ds,\\
&\leq C_T^2\mathbb{E}(\sup_{0\leq v\leq u}|X_v^{n-1} - X_v^{n-2}|^2)\frac{t^2}{2},\\
&\leq C_T^2\frac{T^2}{2}\,\mathbb{E}(\sup_{0\leq v\leq u}|X_v^{n-1} - X_v^{n-2}|^2).
\end{aligned}$$

Par répète cette méthode plusieur fois, on obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^{n+1} - X_s^n|^2) &\leq C_T^n\frac{T^n}{n!}\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^1 - X_s^0|^2,\\
&\leq DC_T^n\frac{T^n}{n!}.
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Tchebychev on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{n+1} - X_s^n| > \frac{1}{2^{n+1}}) &\leq \frac{D\frac{C_T^nT^n}{n!}}{(\frac{1}{2^{n+1}})^2},\\
&= 4D\frac{(4C_TT)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{n+1} - X_s^n| > \frac{1}{2^{n+1}}\right] &\leq 4D\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4C_TT)^n}{n!},\\
&= 4D\exp(4C_TT).\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

On applicant le lemme de Borel-cantelli alors :

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{n+1}-X_s^n|>\frac{1}{2^{n+1}} \qquad \forall n\in\mathbb{N}]=0.$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{n+1}-X_s^n|\leq\frac{1}{2^{n+1}} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\right]=1.$$

i.e :

$$\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{n+1}-X_s^n|\leq\frac{1}{2^{n+1}} \qquad \forall n\geq n_0, n_0\in\mathbb{N}.$$

Posons à la somme on obtenir :

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^m-X_s^n| &\leq \sum_{k=(m\wedge n)-1}^{m\vee n}\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{k+1}-X_s^k|,\\ &\leq \sum_{k=(m\wedge n)-1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}},\\ &\leq \frac{1}{2^{m\wedge n}}.\end{aligned}$$

Pour : $m\wedge n\geq n_0(\omega)$ où :$m\vee n=\max\{m,n\}$ et $m\wedge n=\min\{m,n\}$.

Alors le processus $(X^n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de cauchy, donc convergente, il existe un processus continu $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ tq :

$$\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^n-X_t|\longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad n\longrightarrow\infty.$$

Donc ($\mathbb{P}$ $\quad p.s$), X_t^n converge vers X_t.

2.L'unicité : Commençons par établir l'unicité, sur le même mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, on se donne deux solutions $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ tq $X_0=Y_0$, pour tout $t\in[0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}X_t - Y_t = &\int_0^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s))ds \\ &+ \int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))dB_s.\end{aligned}$$

On utilisant le fait que $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$:

$$\begin{aligned}|X_t - Y_t|^2 = &|\int_0^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s))ds \\ &+ \int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))dB_s|^2, \\ &\leq 2[|\int_0^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s))ds|^2 \\ &+ |\int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))dB_s|^2].\end{aligned}$$

Par passage a l'esperance on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) \leq &2\mathbb{E}(|\int_0^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s))ds|^2) \\ &+ 2\mathbb{E}(|\int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))dB_s|^2).\end{aligned}$$

D'aprés proprétié d'isométrie d'Itô alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) \leq &2\mathbb{E}[|\int_0^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s))|^2 ds] \\ &+ 2\mathbb{E}[|\int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))|^2 ds].\end{aligned}$$

Par l'inégalité de cauchy-schawrz on a :

$$\mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) \leq 2T\mathbb{E}(|\int_0^t (f(s,X_s) - f(s,Y_s))|^2 ds) + 2\mathbb{E}(|\int_0^t (g(s,X_s) - g(s,Y_s))|^2 ds).$$

On a f et g sont lipshitziennes alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) &\leq 2T\mathbb{E}(\int_0^t K^2 |X_s - Y_s|^2 ds) \\ &+ 2\mathbb{E}(\int_0^t K^2 |X_s - Y_s|^2 ds), \\ &\leq 2K^2(T+1) \int_0^t \mathbb{E}(|X_s - Y_s|^2) ds.\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall $\forall t \in [0,T]$:

Avec $a = 0$, $b = 2K^2(T+1)$ et $h = 0$ **:**

Soit $h(t) = E(|X_t - Y_t|^2)$:

$$\begin{aligned}h(t) &\leq b \int_0^t h(s) ds + a, \\ &\leq 2K^2(T+1) \int_0^t h(s) ds + 0.\end{aligned}$$

Alors :

$$h(t) = 0 \exp(2K^2(T+1)t) = 0.$$

Donc :

$$\mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) = 0.$$

$$\Longrightarrow X_t = Y_t \qquad \forall t \in [0,T].$$

Alors l'EDS (2.1) admet un unique solution forte. ■

2.4 Les équations différentielles stochastiques linéaires

[11]

Définition 2.4.1 *: Soit l'équation différentielle stochastique suivant :*

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

On dit que l'équation précédente est linéaire si les fonctions f et g sont de forme :

$$f(t, X_t) = A(t) + B(t)X_t \text{ et } g(t, X_t) = C(t) + D(t)X_t.$$

Tq :$A, C : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

$B : [0, T] \to M^{n*n}$.

$D : [0, T] \to L(\mathbb{R}^d, M^{d*m})$.

L'ensemble des applications linéaires bornées de $\mathbb{R}^d$ à M^{d*m}.

Exemple 2.4.1 *: **1. Processus d'Ornstien Uhlenbeck :***

$$\begin{cases} dX_t = c(b - X_t)dt + \alpha dB_t. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

Où :$c, b > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.4.1 La forme de solution pour l'EDSL

Présenter les formules de solution pour l'EDS linéaire.

Proposition 2.4.1 *: Si $D = 0$ c-à-d l'EDS suivant :*

$$\begin{cases} dX_t = (A(t) + B(t)X_t)dt + C(t)dB_t. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

La solution de cette l'EDS sous la forme :

$$X_t = \Phi(t)[z + \int_0^t \Phi^{-1}(s)A(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)dB_s].$$

Tq $\Phi(t)$ est solution de l'EDS suivant :

$$\begin{cases} d\Phi(t) = B(t)\Phi(t)dt. \\ \Phi(0) = I. \end{cases}$$

Proposition 2.4.2 *: L'EDS linéaire en général c-à-d :*

$$\begin{cases} dX_t = (A(t) + B(t)X_t)dt + (C(t) + D(t)X_t)dB_t. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

La solution de cette EDS sous la forme :

$$X_t = \Phi(t)[z + \int_0^t \Phi^{-1}(s)(A(s) - C(s)D(s))ds] + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)dB_s.$$

Tq :

$$\Phi(t) = \exp\left\{\int_0^t (B(s) - \frac{D(s)^2}{2})ds\right\} + \int_0^t D(s)dB_s.$$

Remarque 2.4.1 *:*

1. Si $A = C$=0 dans ce cas dit que EDS linéaire homogéne.

2. On dit l'EDS linéaire est autonome si tout les coefficients A, B, C et D sont constantes.

3. On dit l'EDS linéaire est au sens étroite (ou un bruit additif)si $D = 0$, et a un bruit miltiplicatif si $C = 0$.

Chapitre 3

Existence du contrôle optimal pour l'EDSs linéaires

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties, pour déterminer une trajectoire optimal joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Ensuite une fois ce problème résolu, il faut chercher parmi touts ces trajectoires possibles celles qui le font en coût minimal.

Dans ce chapitre nous donnons une formulation du problème d'existence du contrôle optimal pour l'équation différentielle stochastique linéaire, c'est le véritable point de notre travail.

3.1 Préliminaires

[10]

Soit $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien de dimension n définie sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, on suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = \sigma(B_s \quad 0 \leq s \leq t)$ la filtration naturale du mouvement brownien et z un variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_0$-mesurable et independante de $(B_t)_{t\in[0,T]}$ alors .

On considère l'équation différentielle stochastique linéaire suivant :

$$\begin{cases} dX_t = (A(t) + B(t)X_t)dt + (C(t) + D(t)X_t)dB_t. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

Où :

$A, C : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

$B : [0, T] \to M^{n*n}$.

$D : [0, T] \to L(\mathbb{R}^d, M^{d*m})$.

Le contrôle

Définition 3.1.1 *: On appellé un contrôle, tout processus $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ tq.*
$(u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est $\mathcal{F}_t$-adapté et de carré intégrable à valeur dans borélienne.

Le contrôle admissible

Définition 3.1.2 *: On appellé contrôle admissible tout processus $(u_t; t \in [0, T])$mesurable et $\mathcal{F}_t-$adapté à valeur dans U :*
On note U c'est une ensemble de touts les contrôles admissibles.

Pour tout $u \in \mathbf{U}$, on considére le problème de contrôlée suivant :

$$\begin{cases} X_t = z + \int_0^t (AX_s + Bu_s)ds + \int_0^t (CX_s + Du_s)dB_s. \\ X_0 = z. \end{cases}$$

z un variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à dimension n tq :

$$\mathbb{E}(|z|^2) < \infty (\text{i,e } \ z \text{ carré intégrable}).$$

On défini la fonction de coût **:**

$$J(u) = \mathbb{E}[l(X_T) + \int_0^T h(t, X_t, u_t)dt].$$

Où :

$$l:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

l et h sont deux fonctions boreliennes et X_T est la solution au temps terminale T.

Problème 3.1.1 ***: recherche un contrôle admissible*** $\bar{u} \in U$ ***qui minimise (ou maximise) la fonction de coût :***

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in U} J(u).$$

Le contrôle Optimal

Définition 3.1.3 *: Soient $u, \bar{u} \in U$ le contrôle optimal consiste à minimiser un fonction de coût $J(u)$ sur l'ensemble de contrôle admissible U.*

On dit que le contrôle $\bar{u}$ est ***optimal*** *si :*

$$J(\bar{u}) \leq J(u), \forall u \in U.$$

Pour résoudre ce problème stochastique ci-dessus, on considére les hypothèses suivants :

– $\mathbf{H}_1$: L'ensemble U est **convexe** et **compact.**

– $\mathbf{H}_2$: Les fonctions l et h sont **convexe** et **continue.**

3.2 Existence d'un strict contrôle optimal

[11]

Théorème 3.2.1 *: Supposons que $\boldsymbol{H}_1$ et $\boldsymbol{H}_2$ satisfaites, alors il existe un processus*

$(\bar{X}_t, \bar{u}_t)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté tq :

$\star(\bar{X}_t, \bar{u}_t)_{t\geq 0}$ est la solution unique pour l'EDS linéaire.

$\star\bar{u}_t$ minimise J.

Supposons d'abord que $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ sont vérifiées, soit (X_t^n, u_t^n) est une suite minimisante satisfait :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} J(u^n) = \inf_{u\in U} J(u)$$

Comme l'ensemble des contrôlées admissibles U est un ensemble **compact**, alors la suite (u^n) est relativement compact c-à-d qu'il existe une constante $k > 0$ tq :

$$\mathbb{E}[\int_0^T |u_t^n|^2 dt] < k \qquad \forall n \geq 0.$$

Donc il existe une sous-suite tq :

$$u^n \longrightarrow \bar{u} \text{ converge faiblement dans } L^2([0,T],\mathbb{R}^n).$$

D'aprés le lemme de **Mazur**, il existe une suite de combinaisons convexes définie par :

$$\tilde{u}^n = \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} u^{n+j}, \alpha_{nj} \geq 0 \text{ et } \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} = 1.$$

Tq :

$$\tilde{u}^n \longrightarrow \bar{u} \text{ converge fortement dans } L^2([0,T],\mathbb{R}^n).$$

Comme l'ensemble $U \in \mathbb{R}^n$ est **convexe** et **compact** donc le processus $\bar{u} \in U$.

Proposition 3.2.1 *:*

***i)**-Soit $(\widetilde{X}_t^n, \widetilde{u}_t^n)$est la solution unique de l'EDS linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \widetilde{X}_t^n = z + \int_0^t (A\widetilde{X}_s^n + B\tilde{u}_s^n)ds + \int_0^t (C\widetilde{X}_s^n + D\tilde{u}_s^n)dB_s. \\ \widetilde{X}_0^n = z. \end{cases}.$$

Et soit $(\bar{X}_t, \bar{u}_t)$ *est la solution unique de l'EDS linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \bar{X}_t = z + \int_0^t (A\bar{X}_s + B\bar{u}_s)ds + \int_0^t (C\bar{X}_s + D\bar{u}_s)dB_s \\ \bar{X}_0 = z \end{cases}.$$

Alors :

$$\widetilde{X}_t^n \longrightarrow \bar{X}_t \text{ converge fortement dans } L^2([0,T],\mathbb{R}^n).$$

Preuve. : (Proposition 3.2.1)

$$\begin{aligned} |\widetilde{X}_t^n - \bar{X}_t|^2 &= |\int_0^t (A\widetilde{X}_s^n + B\tilde{u}_s^n)ds + \int_0^t (C\widetilde{X}_s^n + D\tilde{u}_s^n)dB_s \\ &\quad - \int_0^t (A\bar{X}_s + B\bar{u}_s)ds + \int_0^t (C\bar{X}_s + D\bar{u}_s)dB_s|^2, \\ &= |\int_0^t A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds + \int_0^t B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds \\ &\quad + \int_0^t C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)dB_s + \int_0^t D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)dB_s|^2. \end{aligned}$$

On a $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$:

$$\begin{aligned} |\widetilde{X}_t^n - \bar{X}_t|^2 &\leq 2[|\int_0^t A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds + \int_0^t B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds|^2 \\ &\quad + |\int_0^t C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)dB_s + \int_0^t D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)dB_s|^2]. \\ &= 2|\int_0^t A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds + \int_0^t B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds|^2 \\ &\quad + 2|\int_0^t C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)dB_s + \int_0^t D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)dB_s|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\widetilde{X}_t^n - \bar{X}_t|^2 &\leq 2[2|\int_0^t A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds|^2 + 2|\int_0^t B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds|^2] \\ &+ 2[2|\int_0^t C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)dB_s|^2 + 2|\int_0^t D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)dB_s|^2], \\ &= 4[|\int_0^t A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds|^2 + |\int_0^t B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds|^2] \\ &+ 4[|\int_0^t C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)dB_s|^2 + |\int_0^t D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)dB_s|^2].\end{aligned}$$

D'aprés les propriétés de l'intégrable stochastique on a :

$$\begin{aligned}|\widetilde{X}_t^n - \bar{X}_t|^2 &\leq 4[|\int_0^t A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds|^2 + |\int_0^t B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds|^2] \\ &+ 4[\int_0^t |C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)|^2 ds + \int_0^t |D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)|^2 ds].\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |\widetilde{X}_t^n - \bar{X}_t|^2) &\leq \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} (4[|\int_0^t A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds|^2 + |\int_0^t B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds|^2] \\ &+ 4[\int_0^t |C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)|^2 ds + \int_0^t |D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)|^2 ds])).\end{aligned}$$

D'aprés les propriétés de l'intégrale stochastique et passant à l'espérence, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |\widetilde{X}_t^n - \bar{X}_t|^2) &\leq 4\mathbb{E}(|\int_0^T A(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)ds|^2 + |\int_0^T B(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)ds|^2) \\ &+ 16\mathbb{E}(\int_0^T |C(\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s)|^2 ds + \int_0^T |D(\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s)|^2 ds).\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarzy :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |\widetilde{X}_t^n - \bar{X}_t|^2) &\leq 4\mathbb{E}[(\int_0^T |A|^2 ds)(\int_0^T |\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s|^2 ds) + (\int_0^T |B|^2 ds)(\int_0^T |\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s|^2 ds)] \\ &+ 16\mathbb{E}(\int_0^T |C|^2 |\widetilde{X}_s^n - \bar{X}_s|^2 ds) + 16\mathbb{E}(\int_0^T |D|^2 |\tilde{u}_s^n - \bar{u}_s|^2 ds)\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{X}_t^n-\bar{X}_t|^2) &\leq 4\beta\int_0^T\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{X}_t^n-\bar{X}_t|^2)dt+4\gamma\mathbb{E}(\int_0^T|\tilde{u}_t^n-\bar{u}_t|^2)dt\\
&+16\beta'\int_0^T\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{X}_t^n-\bar{X}_t|^2)dt+16\gamma'\mathbb{E}(\int_0^T|\tilde{u}_t^n-\bar{u}_t|^2)dt,\\
&\leq(4\beta+16\beta')\int_0^T\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{X}_t^n-\bar{X}_t|^2)dt\\
&+(4\gamma+16\gamma')\mathbb{E}(\int_0^T|\tilde{u}_t^n-\bar{u}_t|^2)dt.
\end{aligned}$$

D'aprés le lemme de Gronwall on a :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{X}_t^n-\bar{X}_t|^2)\leq(4\gamma+16\gamma')\mathbb{E}(\int_0^T|\tilde{u}_t^n-\bar{u}_t|^2dt)\exp((4\beta+16\beta')T).$$

Tq :

$$\begin{aligned}
h(t)&=\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{X}_t^n-\bar{X}_t|^2).\\
a&=(4\gamma+16\gamma')\mathbb{E}(\int_0^T|\tilde{u}_t^n-\bar{u}_t|^2dt)\text{ et }b=(4\beta+16\beta').
\end{aligned}$$

Comme :

$$\tilde{u}^n\longrightarrow\bar{u}\text{ quand }n\longrightarrow\infty.$$

Dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{X}_t^n-\bar{X}_t|^2)=0.$$

$$\widetilde{X}_t^n\longrightarrow\bar{X}_t,\text{ fortement dans }L^2([0,T],\mathbb{R}^n).$$

■

Preuve. (**Théorème 3.2.1**) **:** Il reste a prouver que $\bar{u}$ minimise la fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles **U** :

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) &= \mathbb{E}[l(\bar{X}_T) + \int_0^T h(t, \bar{X}_t, \bar{u}_t)dt], \\ &= \mathbb{E}\left[l(\lim_{n\longrightarrow\infty} \widetilde{X}_T^n) + \int_0^T h(t, \lim_{n\longrightarrow\infty} \widetilde{X}_t^n, \lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{u}_t^n)dt\right]. \end{aligned}$$

D'aprés le fait que l et h sont continues.

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} J(\tilde{u}_t^n), \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}[l(\widetilde{X}_T^n) + \int_0^T h(t, \widetilde{X}_t^n, \tilde{u}_t^n)dt], \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}[l(\sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} X_T^{n+j}) + \int_0^T h(t, \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} X_t^{n+j}, \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} u_t^{n+j})dt]. \end{aligned}$$

Comme l et h sont convexe, on obtient :

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} \mathbb{E}[l(X_T^{n+j}) + \int_0^T h(t, X_t^{n+j}, u_t^{n+j})dt], \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} J(u^{n+j}), \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj} \max_{1\leq j\leq v_n} J(u^{n+j}), \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \max_{1\leq j\leq v_n} J(u^{n+j}) \sum_{j\geq 0} \alpha_{nj}, \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} J(u^{\sigma(n)+j}), \\ &= \inf_{u\in U} J(u). \end{aligned}$$

On conclusion que $\bar{u} \in U$ est un contrôle optimal ■

Conclusion

Nous nous sommes intéressés aux problème de contrôle optimal stochastique, pour les EDS.

Nous avons preuvé l'existence du contrôle optimal strict pour les équations différentielles stochastiques linéaires où l'ensemble des contrôles admissibles est convexe et compact et aussi la fonction de côut est convexe.

En fin on espérons que cette mémoire sera utile aux étudiants et chercheurs à l'avenir et une porte vers d'autres études plus précises dans le domaine.

Annexe A

Théorème 3.2.2 *:[7](**Inégalitè de Benyamé-Tchêbytchev**) Soit X est un variable aléatoire tq*

$\mathbb{E}(X)$ il existe alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Tq :$Var(X_n) = \sigma^2$.

Théorème 3.2.3 *:[3](**Inégalitè de cauchy-schawrz**) :$\forall (f,g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega |fg|^2 dt \leq (\int_\Omega f^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega g^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Où :

$$\|fg\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 3.2.1 *: [4](**Borel-Cantelli**)Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité et $(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ est une suite des evenements.*

1-Si la séquance $(B_n) \subset \mathcal{F}$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) < \infty$ alors :

$$\mathbb{P}(\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup B_n) = 0.$$

2-Si la séquance $(B_n) \subset \mathcal{F}$ *est indépendant et si* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \infty$ *alors :*

$$P(\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup B_n) = 1.$$

Lemme 3.2.2 *: [5](**Gronwall-Bellman**) :Soit* $h : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continu, on suppose que* a *et* b *deux constant positive et pour tout* $t \in [0, T]$ *on a :*

$$\forall t \in [0, T], h(t) \leq a + b \int_0^t h(s) ds.$$

Alors :

$$\forall t \in [0, T], h(t) \leq a \exp(bt).$$

Définition 3.2.1 *: [3](**Suite minimisante**) Soit* E *est un espace de Banach (i.e, espace vectoriel) et soit* A *est sous-ensemble non vide tq :* $A \subset E$*, et fonction* $J : E \to \mathbb{R}$*, alors : Une suite minimisante du critère* J *sur l'ensemble* A *est une suite* $(u^n)_{n \in N}$ *tq :*

$$u^n \in A \quad \forall n \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} J(u^n) = \inf_{u \in A} J(u).$$

Définition 3.2.2 *: [6](**L'ensemble convexe**)Soit une sous-ensemble* $A \subset \mathbb{R}^n$*, on dit que* A *est convexe si pour tous* x *et* y *de* A *alors :*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1] \qquad \lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

Définition 3.2.3 *: (**Fonction convexe**) On dit que la fonction* f *est convexe sur* A *si :*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1] \qquad f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Définition 3.2.4 *:(**Combinaison convexe**) Soient* $x_1, x_2, ..., x_n$*, un nombre fini de points* *de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ *des réels tq :*

$$\forall j = 1, ..., n \ , \ \lambda_j \geq 0 \ , \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1.$$

Alors on dit que :

$$x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j.$$

x *est une combinaison convexe des points* $x_1, x_2, ..., x_n$.

Définition 3.2.5 *: [2](**L'ensemble compact)**Soit* A *est une ensemble de* R, C, R^n *ou* C^n*, Alors* A *est compact si et seulement si* A *est une ensemble fermée et bornée.*

Lemme 3.2.3 ***:[1](Lemme de Mazur)*** *Soient* E *un espace de Banach et* (u_n) *est une suite d'éléments de* E *qui converge faiblement vers* $u \in E$ *alors :*

Pour toutn $\in N$*, il existe une suite dans combinaisons convexes* (v_n) *qui converge vers* u *fortement c-à-d :*

$$\|v_n - u\| \longrightarrow 0 \ quand \ n \longrightarrow \infty.$$

.

Bibliographie

[1] Ecole Normale Supérieure. (7/3/2006). Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP.

[2] Ecole Polytechnique. (2010-2011). Cours Quelques rappels de topologie sur un espace métrique. EV2-Mathématiques Appliquées.

[3] **Georges Koepfer.** 2006-2010. Notes de cours optimisation.

[4] **Jeanblanc, M**. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master.7.

[2] **Jean-Christophe Breton.** 2014. Fondements des Probabilités. univ de Rennes 1.

[5] **jean-chrostophe**, **B**. (septembre-octobre2019). Processus stochastique. M2 Mathématiques.

[6] **Joseph, L**. (2013/2014). Analyse convexe approfondie. univ paris-Dauphine M1MMD.

[7] **Laurent Tournier**. Cours Commun Scientifique de Probabilités et Statistiques. Univercité Paris 13.

[8] **Philippe Briand**. Équations diffrentielles stochastiques rétrogrades. Mars 2001.

[9] (septembre-octobre2019). Introduction aux Processus stochastiques. Cour ESIEA 4A.

[10] **S.K.Mitter and A.Moro**. (1982). Nonlinear Filtring and Stochastic control. Springer-Verlage Berlin Heidelberg New York.

[11] **Yong.j et X.Y Zhou**. (1999). Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB équations. Springer-Verlage.

.

Annexe B : Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	un espace de probabilité filtré.
$\mathbb{E}(X)$	l'espérance de variable aléatoire x.
Ω	un ensemble non vide.
càdlàg	Continue à droite admet de limite à gauche.
B_t	Mouvement Brownien.
$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	une filtration.
$v.a$	variable aléatoire.
tq	telle que.
$\mathbb{E}(X/B)$	l'espérance conditionnelle de X sachant B.
$\int_0^T \theta_s dB_s$	intégrale stochastique.
EDS	Equations Différentielles stochastiques.
U	l'encemble de contrôle admissible.
$i.e$	C'est à dire.

$\mathbf{1}_A$	fonction d'indicatrice de l'ensemble A.
$p.s$	presque surement.
$\mathcal{F}$	une tribu sur Ω.
$\mathcal{B}_R$	la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
$\\|.\\|$	la norme associée aux produits scalaires.
$L^2(\mathcal{F}_t)$	un espace des processus $\mathcal{F}_t$-mesurable et de carré intégrable.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence du contrôle optimal strict pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques linéaires (EDSL). Nous avons prouvé sous des hypothèses minimales, l'existence d'un contrôle optimal, dans le cas le domaine des contrôles admissibles et la fonction de coût sont supposes convexes.

Mots Clés : processus stochastique, processus d'itô, formule d'itô, l'équation différentielle stochastique, l'existence, contrôle optimal, fonction de coût,...etc.

Abstract

In this work, we studied the existence of a strict optimal control for systems driven by the linear stochastic differential equation (LSDE). We have proved under minimal assumptions, the existence of an optimal control, in the case the domain of admissible controls and the cost function are assumed to be convex.

Key words: stochastic process, *Ito process, Ito* formula, stochastic differential equation, the existence, optimal control, cost function ...etc.

الملخص

في هذا العمل ، درسنا وجود التحكم الامثل للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية ، لقد أثبتنا في ظل الحد الادنى من الافتراضات وجود تحكم مثالي ، في حالة افتراض أن مجال الضوابط المقبولة محدب و دالة التكلفة محدبة.

الكلمات المفتاحية : العملية العشوائية، عملية إيتو، صيغة إيتو، المعادلة التفاضلية العشوائية، الوجود، التحكم الأمثل، دالة التكلفة ... الخ.