République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option **: Probabilités Et Statistique**

Par :

ARIF Naouel

Titre :

Le principe du maximum de Pontryagin pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

Membres du jury :

SAOULI Mostapha Abdelouahab	M.A	UKM, OUARGLA	Encadreur
MANSOUL brahim	M.A	UKM, OUARGLA	Président
BEN BRAHIM Radhia	M.A	UKM, OUARGLA	Examinateur

28 Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mon idole, **"ma mère"**, au plus grand des gens, **"mon père"**, à mon mari, **"Noureddine"**.

À mes frères : **Abdelhalim**, **Mouhamed alamin**, **Salim**, **Abdelghani**.

À mes soeurs : **Hanane**, **Khadra**, **Chaiâa**, **Marwa**, **Safa**.

À mes amis : **Nacira**, **Zieneb**, **Akila**, **Samah**, **Habiba**.

Je pris **"Allah"** de leurs accorder longue

vie et bonne santé

À **"ma grand-mère"** décédée qui a toujours souhaité que vous me voyiez diplômée.

REMERCIEMENTS

*J*e tiens premièrement à me prosterner, remerciant «**Allah**» le tout

puissant de m'avoir donné le force et la volonté

pour terminer ce travail.

Je remercie mon encadreur de mémoire Monsieur **«SAOULI Mostapha abdelouahab»,**

qui a travaillé dur pour m'aider et me guider beaucoup dans me mémoire, et aussi corriger

mes erreurs.

Je désire aussi remercier les professeurs, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite

de mes études universitaires.

Je tiens à remercier spécialement «**MANSOUL Brahim**» de bien vouloir présider le jury.

Et je tiens aussi à remercier «**BEN BRAHIM Radhia**» qui me font le grand honneur

d'évaluer ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant la

réalisation de ce travail, famille, collège, amis,

sans exception.

Table des matières

Introduction générale

La théorie d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades **EDSPR**, à des multi applications importantes on réalité et qui produit de grands effets dans de nombreux de domaines, que ce soit automatique industrielle, finance mathématique et le contrôle optimal. Et la théorie de la commande optimale permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance.

Dans ce travaill, nous cherchons à donner une étude du principe du maximum de Pontryagin, Ce principe est couramment utilisé dans de nombreux domaines, il y en a des exemples : Cadenillas ([3]), Peng ([16]) .

Il est naturel d'étudier les problèmes de contrôle pour des systèmes régis par ce genre d'équations. Nous savons très bien que dans la réalité le contrôle optimal sans contrainte peuvent ne pas applicable par exemple en finance mathématique il y'a des risques et des crises économiques, cela justifie l'utilisation des contrôles optimaux avec contrainte.

Ce travail a été consacré à l'étude deux formes du principe du maximum stochastique, pour les systèmes **d'EDSPR** contrôlée de type suivant :

$$\begin{cases} dX_t = k\left(X_t, \upsilon, t\right)dt + \phi\left(X_t, t\right)dW_t, \\ X\left(0\right) = X_0, \\ dY_t = r\left(X_t, Y_t, Z_t, \upsilon, t\right)dt + Z_t dW_t, \\ Y_T = g\left(X\left(T\right)\right). \end{cases}$$

Où k est le dérivé(drift), ϕ est le processus diffusion et $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$ désigne un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$,

$\upsilon = (\upsilon_t, 0 \leq t \leq T)$ est un processus mesurable s'appelle contrôle admissible, r est générateur, le rôle de Z est de rendez Y adapté, la première partie s'appelle **EDS**, la deuxième partie s'appelle **EDSR**.

Plus précisément, nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité, ces conditions sont connue ce le nom de principe de maximum stochastique ce travail consiste à minimiser (ou maximiser) une certaine fonction de coût J associer au contrôle optimal stochastique sans contrainte.

Dans notre travail le coût est donnée respectivement par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}(\gamma(Y_0)).$$

L'objet du contrôle optimal est minimiser la fonction de coût J sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Dans ce mémoire qui se compose de trois chapitre :

Premièr chapitre :

Dans ce chapitre, on représente les outils mathématique qui permet de mieux comprendre le problème de notre travail qui est le principe de maximum concernant la théorie des probabilités quelque notion sur les processus et le calcul stochastiques

Deuxième chapitre :

Dans le deuxième chapitre nous allons traiter l'équation différentielle stochastique, par la suite nous citons le théorème d'existence et l'unicité de la solution de **l'EDS** avec la preuve de cette théorème et le théorème de **Pardaux** & **Peng** pour **EDSR**, et **EDSPR** de façon générale.

Troisième chapitre :

Dans le troisième chapitre nous allons traiter le problème du contrôle optimal stochastique sans contrainte pour **EDSPR** dans le cas où le coefficient σ n'est pas contrôlée et le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe, nous focalisons sur l'optimisation d'une fonction de coût donnée précédemment, pour cela on suppose que la fonction de coût $J(u(\cdot))$ est différentiable et admet un minimum u^* puis on perturbe le contrôle u^* en utilisant une perturbation forte. L'obtention de ces conditions nécessaires d'optimalité porte sur la dérivation de $J(u^\theta(\cdot))$. Le résultat obtenu dans ce chapitre est une inégalité maximale entre Hamiltoniens.

Chapitre 1

Calcul stochastique

1.1 Tribu

Définition 1.1.1 ***(Tribu)*** *$\mathcal{F}$est une tribu (ou σ-algebre) sur Ω c'est à dire $\mathcal{F}$ un famille de parties de Ω vérifier les 3 conditions suivantes :*

i) $\phi \in \mathcal{F}$.(contient l'ensemble vide).

ii) $\forall A \in \mathcal{F} \iff A^C \in \mathcal{F}$.(Stable par passage au complémentaire).

iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n \in \mathcal{F} \iff \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ et $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (Union dénombrable et intersection dénombrable).

– Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle espace mesurable.

Proposition 1.1.1 *Une intersection de tribus est une tribu, une réunion de tribus n'est pas nécessairement une tribu.*

Définition 1.1.2 ***(Sous-tribu)*** *On dit que Ψ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\Psi \subset \mathcal{F}$ $\iff \forall A \in \Psi \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$.*

Définition 1.1.3 ***(Tribu engendrée)*** *La tribu engendrée par A est l'intersection de toutes les tribus contenant A, Elle la plus petit tribu contenant cette famille, on note $\sigma(A)$ telle que $\sigma(A) = \{\phi, \Omega, A, A^c\}$.*

Exemple 1.1.1 *Tribu des borélieners de $\mathbb{R}$ (on note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (où fermées, où ouverts à gauche, fermées à droite).*

1.2 Généralité sur la théorie des probabilités

Définition 1.2.1 ***(Probabilité)*** *On dit que une probabilitée sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ telle que :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
2. $\mathbb{P}\left(\cup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P\left(A_i\right)$ pour des $A_n \subset \mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

Notation 1.2.1 $\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{I}_A d\mathbb{P}$ *telleque* $\mathbb{I}_A$ *c'est la fonction indicatrice sur* Ω, *c-à-d :*

$$\mathbb{I}_A(\theta) = \begin{cases} 1, & si\ \theta \in A, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

– L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s'appelle espace de probabilité.

Définition 1.2.2 ***(Fonction de répartition)*** *La fonction de répartition de la variable X est la fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Définition 1.2.3 ***(Fonction densité)*** *La densité d'une variable aléatoire X est la dérivée de la fonction de répartition (si cette dérivée existe). On peut alors écrire $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\, dx$, en particulier :*

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

– Si deux variables aléatoires (ou même fonction de répartition, ou même densité), Alors les variables aléatoires sont même loi, On dit qu'elles sont égales en loi.

– Si X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(Y \leq a), \forall a \in \mathbb{R}$, alors X et Y ont même loi, ce que l'on notera $X \overset{loi}{=} Y$.

1.3 Espace mesuré

Définition 1.3.1 ***(Mesure)*** *Une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une fonction* $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *telleque :*

i) $f(\varnothing) = 0.$

ii) Si la suite disjointe $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ alors $f\left(\cup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} f(A_i)$.

Définition 1.3.2 ***(Espace mesurable)*** *Soit* Ω *un ensemble et* $\mathcal{F}$ *une tribu sur* Ω*, le couple* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace mesurable.*

Remarque 1.3.1 *Les éléments de* Ω *sont appelés ensembles mesurables.*

Remarque 1.3.2 *La condition (i) est appelée la* σ*-additivité de la mesure.*

Définition 1.3.3 ***(Espace mesurée)*** *La triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *est appelée un espace mesurée, tel que* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace mesurable et* μ *est une mesure.*

Définition 1.3.4 ***(Application mesurable)*** *Si* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(L, \mathcal{L})$ *deux espaces mesurables, Alors une application* $f : \Omega \to L$ *est dite* $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ *mesurable si* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{L}$*, mathématiqement :*

$$f^{-1}(A) \overset{Définition}{=} \{\theta \in \Omega |\, f(\theta) \in A\}.$$

1.4 Ensembles négligeables et l'espace complet

Définition 1.4.1 ***(Ensemble négligeable)*** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est espace de probabilité, On dit que* N *est un ensemble négligeable, Si la propabilité* $\mathbb{P}(M) = 0$ *telle que* $M \subset \mathcal{F}$ *contenant* N*.*

Remarque 1.4.1 *Une propriété est vraie presque sûrement (p.s) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.*

Notation 1.4.1 *L'union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Définition 1.4.2 ***(Espace complet)*** *Si l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *contient tous les ensembles négligeables* N *, Alors il s'appelle espace complet.*

1.5 Variable aléatoire et espérance et espérance conditionelle

Définition 1.5.1 ***(Variable aléatoire)*** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est espace de probabilité, Une variable aléatoire (en abrégé, v.a.)* X *est une application mesurable* $X : \Omega \to E$*, où* (E, ε) *est un espace mesurable.*

Définition 1.5.2 ***(Loi de probabilité d'une variable aléatoire)*** *Soit* X *une variable aléatoire définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *, La loi de* X *est la mesure image de* $\mathbb{P}$ *par* X*.C'est donc la mesure de probabilité* $\mathbb{P}_X$ *sur* (E, ε) *donnée par :*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | \, X(\omega) \in A\}\right), \qquad pour \qquad A \in \varepsilon.$$

On dit que X suit la loi μ (et on abrège parfois $X \sim \mu$) si la loi de X est μ.

Remarque 1.5.1 *Deux familles de lois méritent une attention particulière : les lois dites discrètes et continues. Attention, ce ne sont que des cas particuliers, et de nombreuses lois ne sont ni discrètes ni continues.*

Définition 1.5.3 ***(Espérance)*** *L'espérance d'une variable aléatoire* X *est par définition la quantité* $\int_\Omega X dP$ *que l'on note* $\mathbb{E}(X)$ *ou* $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X)$ *si l'on désire préciser quelle est la probabilité utilisée sur* Ω*. Cette quantité peut ne pas exister.*

Pour calculer cette intégrale, on passe dans "l'espace image" et on obtient, par définition de la loi de probabilité $\int_\Omega X dP_X = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$.

– Si X admet une densité f, on a $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, dx$.

Propriété 1.5.1 ***(Propriétés d'espérance)*** *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires construites sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *telque* $Card(\Omega) < \infty$*, si* a *et* b *représentent des nombres réels alors :*

– $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[aX+bY]=a\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]+b\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y]$.

– Si $\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\leq Y(\omega)$ alors $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]\leq\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y]$.

– De façon génèle, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XY]\neq\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y]$.

– Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XY]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y]$.

L'espérance d'une variable alétoire est un nombre réel, ce n'est pas une quantité aléatoire.

Définition 1.5.4 ***(Espérance conditionelle)*** *La variable aléatoire X est construite sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, Card $(\Omega)<\infty$, Soit $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$, une tribu engendrée par la partition $\mathcal{P}=\{A_1,...A_n\}$ telque $\mathbb{P}(A_i)>0$. L'esérance conditionelle de X étant donnée $\mathcal{G}$ notée $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}]$ est :*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}](\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{I}_{A_i}(\omega)}{\mathbb{P}(A_i)}\sum_{\omega^*\in A_i}X(\omega^*)\mathbb{P}(\omega^*).$$

L'espérance conditionnelle s'exprime à l'aide des probabilités conditionnelles étant donné chacun des éléments de la partition qui engendre la tribu puisque :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}](\omega)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{I}_{A_i}(\omega)}{\mathbb{P}(A_i)}\sum_{\omega^*\in A_i}X(\omega^*)\mathbb{P}(\omega^*),\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{A_i}(\omega)\sum_{\omega^*\in A_i}X(\omega^*)\frac{\mathbb{P}(\omega^*\cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)},\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{A_i}(\omega)\sum_{\omega^*\in A_i}X(\omega^*)\mathbb{P}(\omega^*|A_i).\end{aligned}$$

Propriété 1.5.2 *Soit X et Y deux variables aléatoires de l'espace probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, les tribus $\mathcal{G},\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont engendrées respectivement par les partitions fnies $\mathcal{P}=\{A_1,...A_n\}$et $\mathcal{P}_1=\{B_1,...B_n\}$ et $\mathcal{P}_2=\{C_1,...C_n\}$:*

– Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}]=X$.

– Si $\mathcal{G}_1\subseteq\mathcal{G}_2$ sont des tribus alors $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}_1]\middle|\mathcal{G}_2\right]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}_1]$.

– Si $\mathcal{G}_1\subseteq\mathcal{G}_2$ sont des tribus alors $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}_2]\middle|\mathcal{G}_1\right]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}_1]$.

– $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\{\varnothing,\Omega\}]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]$.

– $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]$.

– Si Y est $\mathcal{G}-$mesurable alors $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[XY|\,\mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X|\,\mathcal{G}\right].$

– Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X|\,\sigma\left(Y\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X\right].$

– $\forall a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[aX + bY|\,\mathcal{G}\right] = a\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X|\,\mathcal{G}\right] + b\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y|\,\mathcal{G}\right].$

1.6 Quelque notion sur le processus stochastique

Pour représenter un phénoméne aléatoire dépendant du temps, le modéle mathématique est donné par :

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

Une fonctionnelle :

$$\begin{cases} X : (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \xi), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (t, \omega) \rightarrow X(t, \omega). \end{cases}$$

Pour chaque t fixé, l'état du système est une variable c'est-à-dire $\omega \rightarrow X(t, \omega)$ est mesurable.

Pour $\omega \in \Omega$ fixé $t \rightarrow X(t, \omega)$ est appellée une trajectoire.

Définition 1.6.1 ***(Processus stochastique)*** *On appelle processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeur dans* (E, ξ) *une famille de variable aléatoire indixé par le temps* $t \geq 0$.

Définition 1.6.2 ***(Modification d'un processus)*** *On dit que deux processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *définie sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sont modification l'un de l'autre si* $\forall t \geq 0,\ X_t = Y_t,\ \mathbb{P} - p.s.$

Définition 1.6.3 *C'est équivalent à dire :*

$$\forall t \geq 0,\ \exists N_t, \mathbb{P}(N_t) = 0 \ \textit{et}\ \forall \omega \notin N_t, X_t(\omega) = Y_t(\omega).$$

Définition 1.6.4 ***(Processus indistinguables)*** *Deux processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *sont indistinguables si* $\mathbb{P}(X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \geq 0) = 1$.

C'est équivalent à dire : $\exists N$, $\mathbb{P}(N) = 0$, et $\forall \omega \notin N$, $X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \geq 0$.

Définition 1.6.5 ***(Filtration)*** *On suppose* $T = \mathbb{R}^+$. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, On appelle filtration tout famille croissante* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *de sous tribu de* $\mathcal{F}$, *c'est-à- dire* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est un filtration si seulement si :*

i) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{F}_t$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$.

ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}^+; s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Définition 1.6.6 *On dit que* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est continue à droite si seulement si* $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s\geq t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t^+}$.

Remarque 1.6.1 – *L'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ *s'appelle espace de probabilité filtré.*

– *Les ensembles négligeables sont contenus dans* $\mathcal{F}_0$.

Définition 1.6.7 ***(Adaptation d'un processus)*** *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, *on dit que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *adapté si* $\forall t \geq 0$, *la variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

Remarque 1.6.2 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est toujours adapté à sa filtration canonique* $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Définition 1.6.8 ***(Processus mesurable)*** *On dit qu'un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est mesurable si l'application* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *de* $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ *dans* (E, ξ) *est* $(\xi, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$*-mesurable.*

Définition 1.6.9 ***(Processus progressivement mesurable)*** *On dit qu'un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable si* $\forall t \geq 0$ *l'application :*

$$\begin{cases} X : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to (E, \xi), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\omega, s) \to X_s(\omega). \end{cases}$$

Est $(\xi, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F})$-mesurable.

Proposition 1.6.1 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à gauche (où continues à droite), Alors* X *est mesurable, et* X *est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.6.10 ***(Processus Gaussiens)*** *On dit qu'un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est processus gaussien si toute combinaison linéaire finie est une variable aléatoire gaussienne, c'est-'a-dire :*

$$\forall n, \qquad \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \qquad \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}, \qquad \textit{est une variable aléatoire gaussienne.}$$

Définition 1.6.11 ***(Processus de Markov)*** *On dit que le processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est de Markov si, pour tout* n*, pour toute fonction bornée* F *définie sur* $\mathbb{R}^n$ *pour tous* $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$.

$$\mathbb{E}\left(F\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(F\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n}\right) \middle| X_s\right).$$

En particulier que pour toute fonction f borélienne bornée :

$$\mathbb{E}\left(F\left(X_t\right) \middle| \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(F\left(X_t\right) \middle| X_s\right), \qquad \forall t > s.$$

Définition 1.6.12 ***(Martingale, sur-martingale et sous-martingale)*** *On dit que un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles est (martingale, sur-martingale et sous-martingale) par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}t_{\geq 0}$ *si vérifié trois condition :*

1. Pour tout $t \geq 0$, $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.
2. Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable.
3. Pour $0 \leq s \leq t$, $E(X_t| \mathcal{F}_s) = X_s$ (martingale), $E(X_t| \mathcal{F}_s) \leq X_s$ (sur-martingale) ,$E(X_t| \mathcal{F}_s) \geq X_s$ (sous-martingale).

Proposition 1.6.2 ***(Inégalité maximale)*** *On a souvent besoin de majorations d'intégrales stochastiques. L'inégalité de* ***Doob*** *conduit à :*

$$\mathbb{E}\left(\left[\sup_{s\leq T}\int_0^s \theta_u dW_u\right]^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\left[\int_0^T \theta_u dW_u\right]^2\right) = 4\int_0^T \mathbb{E}\left[\theta_u^2\right] du.$$

Définition 1.6.13 ***(Temp d'arrêt)*** *On dit que* τ *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *est un* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$*temps d'arrêt ,Si pour tout* t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

– On appelle tribu des évènements antérieurs à τ la tribu définie par :

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}.$$

Proposition 1.6.3 *Soit τ un temps d'arrêt. Si X est progressivement mesurable,Alors le processus arrêté $X^\tau -$définie par $X_t^\tau = X_{\tau \hat{} t} -$ est progressivement masurable.*

Théorème 1.6.1 ***(Théorème d'arrêt)*** *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma \leq \tau$, alors, $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ $\mathbb{P} - p.s.$*

Définition 1.6.14 ***(Mouvement Brownien)*** *Un processus à valeur réelles est dit un mouvement brownien standard (issu de 0) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si et seulement si :*

i) $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s$ W_t est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}-$adapté à trajectoire continue.

ii) Les accroissement de mouvement brownien sont indépendants de $\mathcal{F}_s$ ie : $\forall 0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ sont indépendants de $\mathcal{F}_s$.

iii) $\forall 0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ est de distribution normale centrée de variance $t - s$.

Définition 1.6.15 *On appelle **MB** standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $W = (W^1, ..., W^d)$ où les W^i sont des **MB** réels indépendants.*

Proposition 1.6.4 *Soit W un **MB**. La filtration$\{\mathcal{F}_t^w\}_{t \geq 0}$ vérifie les conditions habituelles et W est un$\{\mathcal{F}_t^w\}_{t \geq 0}-$**MB**.*

Théorème 1.6.2 ***(Propriétés des trajectoires)*** *Si W est un **MB**, alors presque sûrement, on a :*

i) $t \to W_t(\omega)$ n'est à variation finie sur aucun intervalle.

ii) $t \to W_t(\omega)$ est localement hölderienne d'ordre α pour tout $\alpha < 1/2$.

iii) $t \to W_t(\omega)$ n'est dérivable en aucun point (ni localement hölderienne d'ordre $\alpha \geq 1/2$).

Proposition 1.6.5 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à gauche (où continues à droite), Alors X est mesurable, et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

1.7 Intégrale stochastique et formule d'Itô

L'objectif de ce paragraphe est de définir integrale $\int_0^t \Phi_s dW_s$, Ceci n'est pas évident car comme nous l'avons rappelé précédemment les trajectoires du **MB** ne sont pas à variation finie. Dans cette section, on fixe un réel T strictement positif.

Soit $\Phi = (\Phi_t)$, un processus élémentaire. Nous souhaitons donner un sens à la variable aléatoire

$$\int_0^t \Phi_s dW_s. \tag{1.1}$$

Où W_t est un mouvement Brownien.

Pour cela, rappellons que lorsque nous intégrons une fonction g régulaire par rapport à une fonction dérivable f, alors :

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s)ds.$$

Dans le cas où f n'est pas dérivable, mais en supposant qu'elle est à variation bornée, alors l'integrale de stieltjes, définie par :

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} g(s_i)[f(s_{i+1}) - f(s_i)].$$

Où $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = t$ et $\pi_n = \max_{0<i<n-1} |s_{i+1} - s_i|$ peut ètre utilisée.

Malheureusement, puisque le mouvement Brownien n'est pas à variation bornée, la définition précédente ne s'applique pas à l'integrale (1.1).

Cependant, puisque W_t est à variation quadratique finie, car pour tout $t > 0$ nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \ p.s.$$

Donc on peut définir l'integrale par rapport au mouvement Brownien comme une limite dans l'espace $\mathcal{L}^2$ de variable aléatoire dont le moment d'ordre deux existe.

Ainsi, on définit :

$$\int_0^t \Phi_s dW_s = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} \Phi(s_i)[W(s_{i+1}) - W(s_i)].$$

Où le processus Φ_t appartient à l'espace $\mathcal{L}^2$ et Φ_t soit $\mathcal{F}$-adapté, de telle sort que Φ_{s_i} soit indépendant de $W(s_{i+1}) - W(s_i)$.

Pour des raisons technique, on supposons des conditions de régularité aux processus étudiés. En générale, il faut qu-ils soit présque sûrement continue à droite avec une limite à gauche (càdlag).

Par la suite, on suppose $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,t])$ l'ensemble des processus càdlag Φ_t sur $[0,t]$ qui sont $\mathcal{F}$-adapté et telle que

$$E\left(\int_0^t \Phi_s^2 ds\right) < +\infty.$$

Processus élémentaire

Un processus $(\Phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ est dit élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ et un processus discret $(\Phi_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ qui est $\mathcal{F}_t-$adapté et tel que :

$$\Phi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \Phi_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(t).$$

L'integrale stochastique entre 0 et $t < T$ d'un processus élémentaire Φ_t est un variable aléatoire :

$$\int_0^t \Phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{i=n-1} \Phi_i (W_{\min(t, t_{i+1})} - W_{(\min(t_i, t)}).$$

De cette manière, nous associons à un processus Φ élémentaire le processus :

$$\Psi_t = \left(\int_0^t \Phi_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}.$$

Proposition 1.7.1 *Si Φ est élémentaire, alors :*

(i) $\Phi \longrightarrow \Psi_t$ est linéaire.

(ii) $t \longrightarrow \Psi_t$ est continue presque sûrement et $\mathcal{F}$-adapté.

(iii) $\mathbb{E}(\Psi_t) = 0$ et $\mathbf{Var}(\Psi_t) = E\left(\int_0^t \Phi_s^2 ds\right)$.

(iv) Ψ_t est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

(v) Le processus $\Psi_t^2 - \int_0^t \Phi_s^2 ds$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

Cas d'un processus déterministe (Integrale de wiener)

Soit un processus Φ qui n'est pas aléatoire, mais simplement une fonction de temps t. Dans ce cas, nous pouvons écrire $\Phi_t = f(t)$ pour une certaine fonction $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Cette integrale s'appelle l'integrale de wiener.

Proposition 1.7.2 *Si le processus Φ est déterministe, alors :*

$$\Psi_t = \int_0^t f(s)dW_s \sim N(0, \int_0^t f^{\,2}(s)ds).$$

Définition 1.7.1 ***(Processus d'Itô)*** *On appelle processus d'itô un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeur réelle tel que :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable verifiant les conditions :

$$\int_0^T |b_s|ds < +\infty \ et \int_0^T ||\sigma_s||^2 ds < +\infty, où\ ||\sigma|| = trace(\sigma\sigma^*).$$

Le coefficient b est le drift ou la derivé, σ est le coefficient de diffusion.

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques (EDS) et rétrogrades (EDSR) et progressives rétrogrades (EDSPR)

2.1 Équation différentielle stochastique

le but d'équation différentielle stochastique est de établir un modéle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire, on va présente maintenant une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$X'(t) = b(X(t)).$$

Soit encore sous forme condensée :

$$dX(t) = b(X(t))dt.$$

Cette équation est utilisé pour décrire l'évolution d'un systeme dynamique, Si on ajoute un terme de bruit blanc, qui sera de la forme σdW_t, où W_t désigne un mouvement brownien et σ est une constante. On obtient une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX(t) = b\left(X(t)\right)dt + \sigma dW_t.$$

Où encore sous forme integrale :

$$X_t = x + \int_0^t b\left(X(s)\right)ds + \sigma W_t.$$

Maintenant on prend σ à dépendre de l'état à l'instant t :

$$dX(t) = b\left(X(t)\right)dt + \sigma(X(t))dW_t.$$

Soit encore sous forme integrale :

$$X(t) = x + \int_0^t b\left(X(s)\right)ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW_s.$$

On continue de généraliser l'équation tout en autorisant b et σ dépendent du temps t, on obtient :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

2.1.1 Existence et unicité

Notation et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $(W_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$ indépendant de $(W_t)_{t\geq 0}$.

Soient aussi b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times m}.$$

Le probléme donc est de résoudre **l'EDS** :

$$dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \qquad \text{pour}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Telle que : Le coefficient b s'appelle le drift et σ s'appelle la diffusion.

Soient n et m des entiers positifs, et soient σ et b deux fonctions mesurable localement bornées définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ et à valeur respectivement dans $\mathbb{M}^{n\times m}$ et $\mathbb{R}^n$, où $\mathbb{M}^{n\times m}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times m$:

La solution de l'équation :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

Est un processus X continue $\mathcal{F}_t$-adapté telle que les integrale $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ ont une sens et l'égalité :

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \qquad \text{pour}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Est satisfaite pour tout t $\mathbb{P}.p.s.$

Quelle coditions doit on appliquer sur b et σ pour obtenir l'existance et l'unicité d'une solution de **l'EDS.**Le théoreme suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir l'existance et unicité d'une solution de **l'EDS**.

2.1.2 Théorème d'existence et unicité

Théorème 2.1.1 *on suppose :*

$(H1)$ Les fonctions b et σ sont continues.

$(H2)$ Il existe $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

i) $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq c|x - y|$.

ii) $|b(t,x)|^2 + |b(t,y)|^2 \leq c(1+|x|^2)$.

$(H3)$ la condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ et est de carré intégrable *ie* : $\mathbb{E}|x|^2 < +\infty$.

Alors il existe une unique solution de **l'EDS** à trajectoire continue pour tout $t \leq T$.

De plus cette solution verifier $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2) < +\infty$.

Preuve. 1) **L'existence :** On construit la solution par la méthode d'approximation de Picard. En définissant la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ telleque $X_t^0 = x$ et $(X^{n+1})_{n\geq 0}$ est la solution du système de **EDS** suivantes :

$$X^{n+1} = x + \int_0^t b(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dW_s. \tag{2.2}$$

Et telles que les integrales stochastique sont bien définies car il est clair par recurrence que pour chaque n, X^{n+1}et continu et adapté, donc le processus $\sigma(s, X_s^n)$ est aussi. On montre l'existence de solution de **EDS** (2.1) pour, $t \in [0,T]$, verifiant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n. \tag{2.3}$$

Supposons que $\mathbb{E}\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n$. et montre que $\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|\right] \leq C_n$. On a

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 = \left|x + \int_0^t b\left(s, X_s^n\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right)dW_s\right|^2.$$

Comme

$$(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Donc

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + \left|\int_0^t b\left(s, X_s^n\right)ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right)dW_s\right|^2\right).$$

Par passage a l'esperance, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq 3\left(|x|^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |b(s, X_s^n)|\, ds\right)^2\right]\right) + \mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma(s, X_s^n)\, dW_s\right|\right)^2\right]. \quad (2.4)$$

Par l'isometrie d'Ito, le théorème de croissance lineaire, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma(s, X_s^n)\, dW_s\right|\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s, X_s^n)|^2\, ds\right], \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t K^2(1 + X_s^n)\, ds\right], \\
&= \int_0^t K^2\left(1 + \mathbb{E}\left[|X_s^n|^2\right]\right) ds. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Et par le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b(s, X_s^n)\, ds\right)^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t ds\right)\left(\int_0^t |b(s, X_s^n)|^2\, ds\right)\right], \\
&\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s, X_s^n)|^2\, ds\right], \\
&\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t K^2\left(1 + |X_s^n|^2\right) ds\right], \\
&\leq TK^2\left[\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\,|X_s^n|^2\right) ds\right]. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Remplacant (2.5) et (2.6) dans (2.4) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] &\leq 3\left(|x|^2 + TK^2\left[\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\,|X_s^n|^2\right) ds\right] + K^2\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\,|X_s^n|^2\right) ds\right), \\
&\leq 3\left(|x|^2 + K^2(T+1)\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\,|X_s^n|^2\right) ds\right), \\
&\leq 3\left(x + K^2(T+1)\,T\,(1 + C_n)\right) = C_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] \leq C_{n+1} \leq \infty.$$

On va majorer par recurrence :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,t]}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right].$$

On a

$$X_t^{n+1}-X_t^n=\int_0^t\left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds+\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds.$$

En utilisant l'inegalité de Doob, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] &\le 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\left|b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right|ds\right)^2\right]\\ &+2\mathbb{E}\left[\int_0^t\sigma\left|\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right|^2ds\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] &\le 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right|^2ds\right]\\ &+2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right|^2ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipshitziennes, on obtient pour $t\in[0,t]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\le 2\left(T+1\right)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right].$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] &\le 2\left(T+1\right)K^2\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le s}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2\right]ds,\\ &\le C\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le s}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2\right]ds.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Où $C=2\left(1+T\right)K^2$.

Nous répétons la même méthodes, en appliquant l'inégalité de Doob, à $\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le s}\left|X_r^n - X_r^{n-1}\right|^2\right] \le C\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le r}\left|X_u^{n-1} - X_u^{n-2}\right|^2\right] dr. \tag{2.8}$$

En remplaçent (2.8) à (2.7), on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1} - X_s^{n}\right|^2\right] &\le C\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le s}\left|X_r^n - X_r^{n-1}\right|^2\right] ds,\\
&\le C\int_0^t \left(C\int_0^s \mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le r}\left|X_u^{n-1} - X_u^{n-2}\right|^2\right] dr\right) ds,\\
&\le C^2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le r}\left|X_u^{n-1} - X_u^{n-2}\right|^2\right]\int_0^t\left(\int_0^s dr\right) ds,\\
&\le C^2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le r}\left|X_u^{n-1} - X_u^{n-2}\right|^2\right]\frac{t^2}{2},\\
&\le C^2\frac{T^2}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le r}\left|X_u^{n-1} - X_u^{n-2}\right|^2\right].
\end{aligned}$$

On répète cette méthode plusieur fois, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1} - X_s^{n}\right|^2\right] &\le C^n\frac{T^n}{n!}\sup_{0\le s\le T}\left[\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right],\\
&\le D.C^n\frac{T^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'ingalité de Tchebychev, on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1} - X_s^{n}\right|^2 > \frac{1}{2^{n+1}}\right] \le D\frac{C^n}{n!}/\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = 4D.\frac{(4C)^n}{n!}.$$

Il vient donc que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1} - X_s^{n}\right|^2 > \frac{1}{2^{n+1}}\right] \le 4D\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4C)^n}{n!} = 4D.\exp(4C) < \infty.$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1} - X_s^{n}\right| > \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 0.$$

Qui signifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 1.$$

C'est-à-dire :

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad \text{pour tout} \qquad n \geq n_0, \qquad \text{pour} \qquad n_0 \in \mathbb{N}.$$

Avec probabilité égale à 1. Passons à la somme on trouve :

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^m-X_s^n\right| \leq \sum_{k=m\wedge n-1}^{m\wedge n}\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{k+1}-X_s^k\right| \leq \sum^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{m\wedge n}}.$$

Pour $m \wedge n \geq n_0\left(\omega\right)$,Alors le processus $\left(X^n\right)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Alors il existe un processus continu $\left(X_t\right)_{t\in[0,T]}$, tel que :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^n-X_t\right| \longrightarrow 0, \qquad \text{quand} \qquad n \longrightarrow \infty, \qquad \text{avec probabilité.}$$

Donc, $\mathbb{P}-p.s$, X^n converge vers processus continu X_t.

2) **L'unicité :** Supposons que $\left(X_t\right)_{t\geq 0}$ et $\left(Y_t\right)_{t\geq 0}$ deux solution de (2.1) pour tout $t \in [0,T]$:

$$X_t - Y_t = \int_0^t \left[b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right]ds + \int_0^t \left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]dW_s.$$

Comme

$$\left(a+b\right)^2 \leq 2a^2+2b^2.$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t-Y_t\right|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)dW_s\right)\right|^2\right].$$

D'aprés inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right|^2\right] &\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2\,ds\right],\\ &\leq TK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]ds.\end{aligned}$$

Et par l'isometrie d'Itô, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\,dW_s)\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right],\\ &\leq K^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]ds.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t-Y_t|^2\right] &\leq 2TK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]ds + 2K^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]ds,\\ &\leq \left(2TK^2+K^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s-Y_s|^2\right]ds.\end{aligned}$$

Soit $\phi(t)=\mathbb{E}\left[|X_t-Y_t|^2\right]$, $\quad \phi(t)\leq C\int_0^t \phi(s)\,ds$, $\quad \forall t\in[0,t]$, utilisant le lemme de Granwall, avec $C_0=0$ implique $\phi=0$, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X_t-Y_t|^2\right]=0.$$

■

2.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

2.2.1 Présentation du problème

Soient $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ un espace probabilité filtré et ξ variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. Nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f\left(Y_t\right), \qquad t \in [0,t], \qquad \int_0^t Z_s dW_s . Y_T = \xi.$$

En imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépend pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe.

La meilleure approximation $-$ disons dans L^2 $-$ adaptée est la martingale $Y_t = E\left(\xi/\mathcal{F}_t\right)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E\left(\xi/\mathcal{F}_t\right) = E\left[\xi\right] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$Y_t = \xi - \int_0^t Z_s dW_s, \qquad i.e. \qquad -dY_t = -Z_t dW_t, \qquad \text{avec}, \qquad Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient donc :

$$-dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) - Z_t dW_t, \qquad \text{avec}, \qquad Y_T = \xi.$$

Notation 2.2.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et W un MB $d-$dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB (W). On travaillera avec deux espaces de processus :*

– On notera tout d'abord $S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'espace vectoriel fermé des processus Y,progressivement mesurables, à valeurs dans R^k, tels que :

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

Et $S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ le sous-espace fermé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.

- Et ensuite $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ celui formé par les processus Z,progressivement mesurables, à valeurs dans $R^{k\times d}$,tels que :

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\, dt\right] < \infty.$$

Où si $z \in R^{k\times d}$,$\|z\|^2$ =trace(zz^*) . $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

- R^k et $R^{k\times d}$ seront souvent omis ; les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ .0
- On veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante :

$$-dY_t = f\left(r, Y_r, Z_r\right) dt - Z_r dWt, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad Y_t = \xi.$$

Ou, de façon équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_0^T f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_0^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.9}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR(2.9) .

Définition 2.2.1 *Une solution de EDSR* (2.9) *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans R^k et $R^{k\times d}$,

2. $P - p.s.$ $\int_0^T \{f\left(r, Y_r, Z_r\right) + \|Z_r\|^2\}dr < \infty$,

3. $P-p.s.$,on a :

$$Y_t = \xi + \int_0^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_0^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.2.1 *Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation (2.9) étant bien définies, Y est une semi-martingale continue ; ensuite, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R})$ et une constante positive λ tels que :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \qquad |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda (|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.9) telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à S_c^2.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)\, dr + \int_0^t Z_r dW_r,$$

Et par suite, utilisant l'hypothèse sur f :

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|)\, dr + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right| + \lambda \int_0^t |Y_r|\, dr.$$

Posons

$$\varsigma = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|)\, dr + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right|.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$,et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable , il s'en suit que ς est une variable aléatoire de carré intégrable.
Comme Y est un processus continu $-$ cf. remarque précédente, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t| \leq \varsigma \exp(\lambda T)$ qui montre que Y appartient à S^2. ■

Remarque 2.2.2 *Le résultat est encore valable lorsque $\|f.\|_1$ est une variable aléatoire de carré intégrable.*

Finissons par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise.

Lemme 2.2.1 *Soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dW_s, t \in [0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités BDG donnent :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dW_r\right|\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr\right)^{1/2}\right]$$
$$\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|\left(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right)^{1/2}\right],$$

et par suiete, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dW_r\right|\right] \leq C'\left[\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right]\right].$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse : d'où le résultat. ■

2.2.2 Théorème d'existence et unicité des EDSR

Le cas Lipschitz

Le résultat de Pardoux–Peng

Nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé au chapitre suivant. Ce résultat est dû à Pardoux et Peng ([15]) : c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Rappelons pour la dernière fois que f est définie sur $[0,T] \times \Omega \times R^k \times R^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z) \in R^k \times R^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T-$mesurable, à valeurs dans R^k.

(**L**) Il existe une constante λ telle que $P-p.s.$

1. condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z, z' :

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda \left(|y-y'| - \|z-z'\|\right).$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)\,dr|\right] < \infty.$$

Cas où f ne dépend ni de y ni de z

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution del'EDSR.

$$Y_t = \xi + \int_0^T F_r dr - \int_0^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.10}$$

Lemme 2.2.2 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$. *l'EDSR* (2.10) *possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \middle| \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr := M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$:

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr\right), \\ &= \int_0^T F_r dr - \int_0^T Z_r dW_r. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$. Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng. ■

Cas où f dépend de y et z

Théorème 2.2.1 ***(Pardoux–Peng 90)*** ([15]) *Sous l'hypothèse* (**L**), *l'EDSR* (2.9) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y,Z) \in B^2$ est solution de l'EDSR (2.9) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour (U,V) élémentde B^2, on définit $(Y,Z) = \Psi(U,V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_0^T f(r, U_r, V_r)\, dr - \int_0^T Z_r dW_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans B^2.En effet, $F_r = f(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz :

$$|F_r| \le |f(r,0,0)| + \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|.$$

Et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme 2.2.2 pour obtenir une unique solution (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$. (Y,Z) *appartient à* B^2. L'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition 2.2.1, Y appartient à S_c^2. L'application Ψ de B^2 dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U,V) et (U',V') deux éléments de B^2 et $(Y,Z) = \Psi(U,V)$, $(Y',Z') = \Psi(U',V')$ .Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$.On a, $y_T = 0$ et :

$$dy_t = \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\, dt + z dW_t\}.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t} |y_t|^2$ pour obtenir :

$$d\left(e^{\alpha t} |y_t|^2\right) = \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\}dt + 2e^{\alpha t} y_t.z_t dW_t + e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt.$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtien :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha |y_r|^2 + 2y_r.\{f(r, U_r, V_r) - f(r, U'_r, V'_r)\}\right) dr \\ - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r. \end{aligned}$$

Et comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \leq & \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha |y_r|^2 + 2\lambda |y_r| |u_r| + 2\lambda |y_r| \|v_r\| \right) dr \\ & - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r . z_r dW_r . \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$. et donc, l'inégalité précédente donne :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \textstyle\int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \leq \quad & \textstyle\int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha + 2\lambda^2/\varepsilon \right) |y_r|^2 \, dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r . z_r dW_r , \\ & + \varepsilon \textstyle\int_t^T e^{\alpha r} \left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2 \right) dr . \end{aligned}$$

Et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$ on a, notant $R_\varepsilon = \int_t^T e^{\alpha r} \left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2 \right) dr$:

$$\forall t \in [0, T] , \qquad e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \leq R_\varepsilon - 2 \int_t^T e^{\alpha r} y_r . z_r dW_r . \tag{2.11}$$

D'après le Lemme 2.2.1, la martingale locale $\left\{ \int_0^t e^{\alpha r} y_r . z_r dW_r \right\}_{t \in [0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à S^2 et Z, Z' appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \right] \leq \mathbb{E} \left[R_\varepsilon \right] . \tag{2.12}$$

Revenant à l'inégalité (2.11), les inégalités BDG fournissent− avec C universelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] & \leq \mathbb{E} \left[R_\varepsilon \right] + C \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{\alpha r} \left(|y_t|^2 + \|z_r\|^2 \right) dr \right)^{1/2} \right] , \\ & \leq \mathbb{E} \left[R_\varepsilon \right] + C \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t/2} |y_t| \left(\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \right)^{1/2} \right] . \end{aligned}$$

Puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[R_\varepsilon \right] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] + \frac{C^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \right] .$$

Prenant en considération l'inégalité (2.12), on obtient finalement :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right]\leq\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[R_{\varepsilon}\right].$$

Et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\right]\leq\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|v_r\right\|^2 dr\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)=1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme :

$$\|(U,V)\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\left\|V_r\right\|^2 dr\right]^{1/2}.$$

Qui en fait un espace de Banach, cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$.

Alors Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.9) dans B^2.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in M^2$ puisque la Proposition 2.2.1 implique qu'un telle solution appartient à B^2. ■

Remarque 2.2.3 *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'EDSR » signifiera la solution de l'EDSR vérifiant $Z\in M^2$.*

2.3 Équation diffèrentielle stochastique progressive rètrograde

L'objectif de cette section, basé à coupler faiblement une équation diffèrentielle stochastique de type Itô, à une équation diffèrentielle stochastique rètrograde (c'est à dire la solution **d'EDS** ne dépend pas de la solution de **l'EDSR**, par ce type de couplage le système s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X(0) = x, \\ dY_t = g(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t, \\ Y_T = h(X_T). \end{cases} \tag{2.13}$$

Où

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n. \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m} \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{M}^{n \times m}. \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Remarque 2.3.1 *Le couple **(EDS, EDSR)** est appelè équation diffèrentielle stochastique progressive rètrograde.*

Définition 2.3.1 ***(Solution d'EDSPR)*** *On appele solution de l'**EDSPR** tout triplet $\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable $(X(\cdot); Y(\cdot); Z(\cdot))$ a valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ tel que :*

1. $\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T}(|X_t|^2 + |Y_t|^2) + \int_0^T |Z_t|^2 dt\right) < \infty.$
2. $\mathbb{P}\_p.s$ l'équation est verifiée.(2.13).

Chapitre 3

Contrôle optimal stochastique de Pontryagin

Dans ce chapitre, on va étudier un problème de contrôle optimal stochastique qui consiste à minimiser une fonction de coût $J(u(\cdot))$, dans le cas où le système dynamique est gouverné par des équations différentielles stochastique progressives rétrogrades. Notre but est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité (principe de maximum stochastique) pour minimiser une fonction de coût $J(u)$, Ce principe consiste à introduire systéme d'équations différentielle stochastique progressives et retrogrades s'appelle l'équations adjointes.

3.1 Formulation de problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisè filtrè avec la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ qui satisfaite les conditions usuelles, $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$, dèfinie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$.

On considéré le problème de contrôle stochastique dans le cas où le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe et le système dynamique est gouverné par une équation différentielle stochastique progressive rétrograde contrôlée de type suivant :

$$\begin{cases} dX_t = k\left(X_t, \upsilon, t\right) dt + \phi\left(X_t, t\right) dW_t, \\ X\left(0\right) = X_0, \\ dY_t = r\left(X_t, Y_t, Z_t, \upsilon, t\right) dt + Z_t dW_t, \\ Y_T = g\left(X\left(T\right)\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

$$k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \times [0, T] \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n\right),$$

$$r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m\right) \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Afin de bien définir notre problème, on donne des hypothèses nécessaires suivantes :

$(H1)$ k, r, ϕ, g sont continuellement différentiables par rapport à (x, y, z) ;

$(H2)$ Les dérivées de k, ϕ et r en x, y, z sont bornées, i.e : $|f_x| \leq C$ pour

$$f_x \leq C, \qquad \text{pour} \qquad k_x = k_x, \phi_x, r_x, r_y, r_z.$$

Et

$$g_x \leq C\left(1 + |x|\right).$$

Contrôle stochastique

La théorie du contrôle stochastique à des multi applications en commande des systèmes dynamiques par exemple en automatique et économie...ect.

Définition 3.1.1 *Un contrôle est un processus $(u_t)_{t>0}$ adaptè par rapport à une filtration, de carré integrable et prend ses valeurs dans un borèlien A de $\mathbb{R}^n$.*

Contrôle admissible

Un contrôle admissible est un processus u_t où $t \in [0;T]$ mesurable $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans un borèlien A de $\mathbb{R}^n$. Notant par $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A, \text{ tel que u soit mesurable et } \mathcal{F}_t - \text{adapté}\}.$$

Définition 3.1.2 *Sous les hypothèses précédent d'EDSPR (3.1) admet une solution unique pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$.*

Contrôle optimal

On dit qu'un contrôle u^* est optimal si :

$$J(u^*) = \inf\{J(u); \forall u \in U_{ad}\},$$

avec J est la fonction de coût donnée sous la forme :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}(\gamma(Y_0)),$$

où γ est une fonction : $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1,

$$|\gamma(Y)| \leq C(1 + |y|), \text{et à dérivée bornée.} \tag{3.2}$$

L'objectif de notre travail est de minimiser cette fonction de coût.

Remarque 3.1.1 *La fonction de coût est bien définie. En effet : On a :*

$$|J(u)| \leq \mathbb{E}(|\gamma(Y_0)|),$$

et par l'hypothèse (3.2) on obtient :

$$|J(u)| \leq C(1 + \mathbb{E}|Y_0|) < +\infty.$$

Car Y est la solution de **EDSR** qui est alors intégrable, donc la fonction de coût est bien définie.

Remarque 3.1.2 *En général la fonctionnelle J donnée par :*

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T l(t, X_t, Y_t, Z_t, u_t)dt + h(X_T) + \gamma(Y_0)\right],$$

sur l'ensemble de tout les contrôles admissibles.

La fonction l s'appelle le coût intègrale, h est le coût terminal, γ est le coût initiale.

Remarque 3.1.3 *Le problème se traite de la même manière si la fonction coût contient un terme intègral et le coût terminale.*

3.2 Le contrôle perturbé

Pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalités on suppose que la fonction coût $J(u)$ est différentiable et admet un minimum noté u^* qui vérifie :

$$J(u^*) = \inf\{J(u); \forall u \in U_{ad}\}.$$

Maintenant on compare le contrôle optimal u^* à des autres contrôles qui lui sont différents sauf sur un intervalle de longueur assez petit ϵ.

Soit (X^*, Y^*, Z^*) la solution de système correspondante à u^* "trajectoire optimale", on définit la perturbation suivante :

$$u_t^\epsilon = \begin{cases} u \ si \ t \in [\tau, \tau + \epsilon], \\ u_t^* \text{ si non}, \end{cases}$$

avec $u \in A$, $\tau \in [0, T]$, ϵ assez petit.

Par définition le processus u^ϵ est un processus admissible et les deux processus u^ϵ et u sont égaux que sur l'intervalle de langeur ϵ

Remarque 3.2.1 *Si on prend* $\epsilon = 0$ *on obtient* $u^{\epsilon} = u^{*}$.

Définition 3.2.1 *On appelle* u^{ϵ} *la perturbation de* u^{*}.

3.3 Équation variationnelle et inégalité variationnelle

Le but de cette section est d'introduire les équations variationnelles du premier ordre et de dériver l'inégalité variationnelle. Soit $(u^{\epsilon}(\cdot), X^{\epsilon}(\cdot), Y^{\epsilon}(\cdot), Z^{\epsilon}(\cdot))$ une solution du problème (3.1). Nous introduisons les èquations variationnelles suivantes :

$$\begin{cases} dX_1(t) = [k_x X_1(t) + k(u^{\epsilon}) - k(u^{*})]\, dt + \phi_x X_1(t)\, dW_t, \\ X_1(0) = 0, \\ dY_1(t) = [r_x X_1(t) + r_y Y_1(t) + r_z Z_1(t) + r(u^{\epsilon}) - r(u^{*})]\, dt + Z_1(t)\, dW_t, \\ Y_1(T) = g_x(X(T))\, X_1(T). \end{cases} \tag{3.3}$$

Plus de commodité, Nous utilisons la notation suivante dans ce travail :

$$k_x \triangleq k_x(t, X(t), u^{*}(t)), \qquad r_x \triangleq r_x(t, X(t), Y(t), Z(t), u^{*}(t)),$$
$$k(u^{\epsilon}) \triangleq k(t, X(t), u^{\epsilon}(t)), \qquad k(t) \triangleq k(t, X(t), u^{*}(t)), \text{...etc.}$$

Remarque 3.3.1 *D'après le définition 2.3.1 on peut trouver un unique solution* (X^1, Y^1, Z^1) *tel que* $(X^1, Y^1, Z^1) \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{M}^2 \times \mathbb{M}^2$ *est-elle résoudre* (3.3)*, les équations* (3.3) *sont appelés équations variationelle.*

L'inègalitè variationnelle peut étre obtenue à partir de $J(u^{\epsilon}) - J(u^{*}) \geq 0$.

Lemme 3.3.1 *Supposons que* $(H1)$ *et* $(H2)$ *soient vérifiés. Pour les variations de premier ordre* X_1, Y_1, Z_1, *nous avons les estimations suivantes :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|X_1(t)|^2 \leq C\epsilon^2, \tag{3.4}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|X_1(t)|^4 \leq C\epsilon^4, \tag{3.5}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|Y_1(t)|^2 \leq C\epsilon^2, \tag{3.6}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|Y_1(t)|^4 \leq C\epsilon^4, \tag{3.7}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T (Z_1(s))^2 ds \leq C\epsilon^2, \tag{3.8}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T (Z_1(s))^2 ds\right)^2 \leq C\epsilon^4. \tag{3.9}$$

Preuve. Nous prouvons d'abord (3.4) et (3.5) . La première équation de (3.3) donne :

$$\mathbb{E}|X_1(t)|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^t [k_x X_1(s) + k(u^\epsilon) - k(u^*)]\, ds + \int_0^t \phi_x X_1(s)\, dW_s\right)^2,$$

d'aprés l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ on obtient :

$$\mathbb{E}|X_1(t)|^2 \leq 3\left(\mathbb{E}\left[\int_0^t k_x X_1(s)\, ds\right]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^t |k(u^\varepsilon) - k(u^*)|\, ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_x X_1(s))\, dW_s\right]^2\right). \tag{3.10}$$

En utilisant la propriété d'isométrie pour les intégrales stochastiques et l'inégalité de Cauchy Schwartz et l'hypothèse $(H2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_x X_1(s))\, dW_s\right]^2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_x X_1(s))^2\, ds\right]\\ &\leq TC^2\mathbb{E}\left(\int_0^t |X_1(s)|^2 ds\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t k_x X_1(s)\,ds\right)^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t ds\right)\left(\int_0^t |k_x X_1(s)|^2 ds\right)\right], \\
&\leq T\mathbb{E}\left(\int_0^t |k_x X_1(s)|^2 ds\right), \qquad (3.12)\\
&\leq TC^2\mathbb{E}\left(\int_0^t |X_1(s)|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Remplacez (3.11) et (3.12) dans (3.10), on obtient :

$$\mathbb{E}|X_1(t)|^2 \leq 3TC^2\mathbb{E}\left(\int_0^t |X_1(s)|^2 ds\right)+3\mathbb{E}\left(\int_0^t |k(u^\varepsilon)-k(u^*)|\,ds\right)^2+3TC^2\mathbb{E}\left(\int_0^t |X_1(s)|^2 ds\right),$$

par la définition de u^ϵ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_1(t)|^2 &\leq 6C^2T\mathbb{E}\int_0^t (X_1(s))^2\,ds + 3\epsilon\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\epsilon} |k(u^\varepsilon)-k(u^*)|^2\,ds,\\
&\leq 6C^2T\mathbb{E}\int_0^t (X_1(s))^2\,ds + C\epsilon^2,
\end{aligned}$$

maintenant on applique lemme de fubini et l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|X_1(t)|^2 \leq C\epsilon^2\int_0^t \exp\left(6C^2T\right)ds \leq C\epsilon^2.$$

De la même manière nous prouvons (3.6) et (3.8) , on a que :

$$\begin{aligned}
Y_1(T)-Y_1(t) &= \int_t^T [r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)+r(u^\epsilon)-r(u^*)]ds+\int_t^T Z_1(s)\,dW_s,\\
g_x(X(T))\,X_1(T)-Y_1(t) &= \int_t^T [r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)+r(u^\epsilon)-r(u^*)]ds+\int_t^T Z_1(s)\,dW_s,
\end{aligned}$$

ceci équivalent à :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(-Y_1(t)-\int_t^T Z_1(s)\,dW_s\right)^2\\
&=\mathbb{E}\left(\int_t^T [r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)+r(u^\epsilon)-r(u^*)]\,ds-g_x(X(T))\,X_1(T)\right)^2.
\end{aligned}$$

D'une part on a d'après l'inégalité $(a+b+c+d+e)^2 \leq 5\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)$, l'inégalité de Cauchy Schwartz et l'hypothèse $(H2)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_t^T \left[r_x X_1(s) + r_y Y_1(s) + r_z Z_1(s) + r(u^\epsilon) - r(u^*)\right] ds - g_x(X(T)) X_1(T)\right)^2 \\
&\leq 5C^2(T-t)\,\mathbb{E}\int_t^T (X_1(s))^2 ds + 5C^2(T-t)\,\mathbb{E}\int_t^T (Y_1(s))^2 ds + 5C^2(T-t)\,\mathbb{E}\int_t^T (Z_1(s))^2 ds \\
&+ 5\mathbb{E}\left(\int_t^T [r(u^\epsilon) - r(u^*)]\, ds\right)^2 + 5C^2\mathbb{E}\left[(X_1(T))^2\right],
\end{aligned} \tag{3.13}$$

et d'autre part en utilisant l'égalité $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ et le fait que $\mathbb{E}\left(Y_1(t)\int_t^T Z_1(s)\,dW_s\right) = 0.$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(-Y_1(t) - \int_t^T Z_1(s)\,dW_s\right)^2 &= \mathbb{E}(Y_1(t))^2 + 2\mathbb{E}\left(Y_1(t)\int_t^T Z_1(s)\,dB_s\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T Z_1(s)\,dW_s\right)^2 \\
&= \mathbb{E}(Y_1(t))^2 + \mathbb{E}\left(\int_t^T Z_1(s)\,dW_s\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

D'aprés (3.13) et (3.14) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y_1(t))^2 + \mathbb{E}\left(\int_t^T (Z_1(s))^2 ds\right) \\
&\leq 5C^2(T-t)\,\mathbb{E}\int_t^T (X_1(s))^2 ds + 5C^2(T-t)\,\mathbb{E}\int_t^T (Y_1(s))^2 ds + 5C^2(T-t)\,\mathbb{E}\int_t^T (Z_1(s))^2 ds \\
&+ 5\mathbb{E}\left(\int_t^T [r(u^\epsilon) - r(u^*)]\, ds\right)^2 + 5C^2\mathbb{E}\left[(X_1(T))^2\right],
\end{aligned}$$

si en prenant $T-t=\delta$, et en choisissant $\delta=\frac{1}{20C^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(Y_1(t)\right)^2+\frac{3}{4}\mathbb{E}\left(\int_t^T\left(Z_1(s)\right)^2ds\right)\\
&\leq\frac{1}{4}\mathbb{E}\int_t^T\left(X_1(s)\right)^2ds+\frac{1}{4}\mathbb{E}\int_t^T\left(Y_1(s)\right)^2ds+5C^2\mathbb{E}\left[\left(X_1(T)\right)^2\right]\\
&+5\mathbb{E}\left(\int_t^T\left[r(u^\epsilon)-r(u^*)\right]ds\right)^2+5C^2\mathbb{E}\left[\left(X_1(T)\right)^2\right],
\end{aligned}$$

on applique lemme de fubini l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_1(t)\right)^2&\leq C\epsilon^2, t\in[T-\delta,T],\\
\mathbb{E}\int_t^T\left(Z_1(s)\right)^2ds&\leq C\epsilon^2, t\in[T-\delta,T].
\end{aligned}$$

De même manière on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_1(t)\right)^2&\leq C\epsilon^2, t\in[T-2\delta,T],\\
\mathbb{E}\int_t^{T-\delta}\left(Z_1(s)\right)^2ds&\leq C\epsilon^2, t\in[T-2\delta,T],
\end{aligned}$$

après un nombre finie d'itération on obtient (3.6) et (3.8) , (3.7) et (3.9) peuvent être prouves en utilisant une méthode similaire et l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_1(s)\,dW_s\right)^4\geq\lambda\mathbb{E}\left(\int_t^T\left(Z_1(s)\right)^2ds\right)^2,\qquad\text{avec }\lambda>0.$$

■

Lemme 3.3.2 *Soient (X,Y,Z) et $(X^\epsilon,Y^\epsilon,Z^\epsilon)$ deux solution de système correspondant res-*

pectivement u^* et u^ϵ alors on a l'estimation suivante :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left(\mathbb{E}\left|X^{\varepsilon}(t)-X(t)-X_1(t)\right|^2\right)\leq C_\varepsilon\varepsilon^2,\qquad C_\varepsilon\to 0. \tag{3.15}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left(\mathbb{E}\left|Y^{\varepsilon}(t)-Y(t)-Y_1(t)\right|^2\right)\leq C_\varepsilon\varepsilon^2,\qquad C_\varepsilon\to 0. \tag{3.16}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T\left|Z^{\varepsilon}(t)-Z(t)-Z_1(t)\right|^2ds\right)\leq C_\varepsilon\varepsilon^2,\qquad C_\varepsilon\to 0. \tag{3.17}$$

Preuve. Pour prouver (3.15) , on observe que :

$$\begin{aligned}
&k\left(X(t)+X_1(t),u^\epsilon(t)\right)dt+\phi\left(X_\epsilon(t)+X_1(t)\right)dW_t\\
&=\left[k\left(X(t),u^\epsilon(t)\right)-k\left(X(t),u^\epsilon(t)\right)+k\left(X(t)+X_1(t),u^\epsilon(t)\right)\right]dt\\
&+\left[\phi\left(X(t)\right)-\phi\left(X(t)\right)+\phi\left(X(t)+X_1(t)\right)\right]dW_t.
\end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor avec reste intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
&k\left(X(t)+X_1(t),u^\epsilon(t)\right)dt+\phi\left(X(t)+X_1(t)\right)dW_t\\
&=\left[k\left(X(t),u^\epsilon(t)\right)+\int_0^1 k_x\left(X(t)+\lambda X_1(t),u^\epsilon(t)\right)X_1(t)d\lambda\right]dt\\
&+\left[\phi\left(X(t)\right)+\int_0^1\phi_x\left(X(t)+\lambda X_1(t)\right)X_1(t)d\lambda\right]dW_t,\\
&=\left[k\left(X(t),u(t)\right)dt+\phi\left(X(t)\right)dW_t\right]+\left[k_x\left(X_1(t),u(t)\right)X_1(t)+k\left(X(t),u^\epsilon(t)\right)-k\left(X(t),u^*(t)\right)\right]dt\\
&+\phi_x\left(X(t)\right)X_1(t)dW_t+\left[\int_0^1\left[k_x\left(X(t)+\lambda X_1(t),u^\epsilon(t)\right)-k_x\left(X_1(t),u(t)\right)\right]X_1(t)d\lambda\right]dt\\
&+\left[\int_0^1\left[\phi_x\left(X(t)+\lambda X_1(t)\right)-\phi_x\left(X(t)\right)\right]X_1(t)d\lambda\right]dW_t,\\
&=dX(t)+dX_1(t)+A^\epsilon(t)dt+B^\epsilon(t)dW_t.
\end{aligned}$$

Ou sous forme integrale :

$$\begin{aligned}
&\int_0^t k\left(X(s)+X_1(s),u^\epsilon(s)\right)ds+\int_0^t\phi\left(X(s)+X_1(s)\right)dW_s\\
&=X(t)-X(0)+X_1(t)+\int_0^t A^\epsilon(s)ds+\int_0^t B^\epsilon(s)dW_s,
\end{aligned}$$

avec

$$A^{\epsilon}(t) = \int_0^1 \left[k_x \left(X\left(t\right) + \lambda X_1(t), u^{\epsilon}(t)\right) - k_x \left(X_1\left(t\right), u(t)\right)\right] X_1(t) d\lambda,$$
$$B^{\epsilon}(t) = \int_0^1 \left[\phi_x \left(X(t) + \lambda X_1(t)\right) - \phi_x \left(X(t)\right)\right] X_1(t) d\lambda.$$

Il enseuit facilement que :

$$\sup_{0 \le t \le T} E\left[\left(\int_0^t A^{\epsilon}(s) ds\right)^2 + \left(\int_0^t B^{\epsilon}(s) dW_s\right)^2\right] = o(\epsilon^2). \tag{3.18}$$

Par définition, et on ajouter et désajouter à la fois, on trouver :

$$\begin{aligned}
&X^{\varepsilon}\left(t\right) - X\left(t\right) - X_1\left(t\right) \\
&= \int_0^t k\left(X^{\epsilon}\left(s\right), u^{\epsilon}(s)\right) ds + \int_0^t \phi\left(X^{\epsilon}\left(s\right)\right) dW_s \\
&- \int_0^t k\left(X\left(s\right), u^{*}(s)\right) ds - \int_0^t \phi\left(X\left(s\right)\right) dW_s \\
&- \int_0^t [k_x\left(X\left(s\right), u(s)\right) X_1(s) + k\left(X^{\epsilon}\left(s\right), u^{\epsilon}(s)\right) - k\left(X\left(s\right), u^{*}(s)\right)] ds - \int_0^t \phi_x\left(X\left(s\right)\right) X_1(s) dW_s \\
&+ \int_0^t k\left(X\left(s\right) + X_1(s), u^{\epsilon}(s)\right) ds - \int_0^t k\left(X\left(s\right) + X_1(s), u^{\epsilon}(s)\right) ds \\
&+ \int_0^t \phi\left(X\left(s\right) + X_1(s)\right) dW_s - \int_0^t \phi\left(X\left(s\right) + X_1(s)\right) dW_s,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
X^{\varepsilon}(t) - X(t) - X_1(t) &= \int_0^t k\left(X^{\epsilon}(s), u^{\epsilon}(s)\right) ds - \int_0^t k\left(X(s) + X_1(s), u^{\epsilon}(s)\right) ds \\
&+ \int_0^t \phi\left(X^{\epsilon}(s)\right) dW_s - \int_0^t \phi\left(X(s) + X_1(s)\right) dW_s \\
&+ \int_0^t k\left(X(s) + X_1(s), u^{\epsilon}(s)\right) ds \\
&- \int_0^t [k_x\left(X(s), u(s)\right) X_1(s) + k\left(X(s), u^{\epsilon}(s)\right) - k\left(X(s), u^{*}(s)\right)] ds \\
&+ \int_0^t \phi\left(X(s) + X_1(s)\right) dW_s - \int_0^t \phi\left(X(s)\right) dW_s \\
&- \int_0^t k\left(X(s), u^{*}(s)\right) ds - \int_0^t \phi_x\left(X(s)\right) X_1(s) dW_s.
\end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor avec reste intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
&X^{\varepsilon}(t) - X(t) - X_1(t) \\
&= \int_0^t \left[\int_0^1 k_x\left(X(s) + X_1(s) + \lambda(X^{\epsilon}(s) - X(s) - X_1(s)), u^{\epsilon}(s)\right)\left(X^{\epsilon}(s) - X(s) - X_1(s)\right) d\lambda\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\int_0^1 \phi_x\left(X(s) + X_1(s) + \lambda(X^{\epsilon}(s) - X(s) - X_1(s))\right)(X^{\epsilon}(s) - X(s) - X_1(s)) d\lambda\right] dW_s \\
&+ \int_0^t \left[\int_0^1 \left[k_x\left(X(s) + \lambda X_1(s), u^{\epsilon}(s)\right) - k_x\left(X(s), u(s)\right)\right] X_1(s) d\lambda\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\int_0^1 \left[\phi_x\left(X(s) + \lambda X_1(s)\right) - \phi_x\left(X(s)\right)\right] X_1(s) d\lambda\right] dW_s.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X^{\varepsilon}(t) - X(t) - X_1(t) \\
&= \int_0^t A_{\epsilon}^{\rho}(s)(X^{\varepsilon}(s) - X(s) - X_1(s)) ds + \int_0^t B_{\epsilon}^{\rho}(s)(X^{\varepsilon}(s) - X(s) - X_1(s)) dW_s \\
&+ \int_0^t C_{\epsilon}^{\rho}(s) ds + \int_0^t D_{\epsilon}^{\rho}(s) dW_s.
\end{aligned}$$

Où

$$
\begin{aligned}
A_{\epsilon}^{\rho}(s) &= \int_0^1 k_x\left(X\left(s\right)+X_1(s)+\lambda(X^{\epsilon}\left(s\right)-X\left(s\right)-X_1(s)),u^{\epsilon}(s)\right)d\lambda,\\
B_{\epsilon}^{\rho}(s) &= \int_0^1 \phi_x\left(X\left(s\right)+X_1(s)+\lambda(X^{\epsilon}\left(s\right)-X\left(s\right)-X_1(s)\right))d\lambda,\\
C_{\epsilon}^{\rho}(s) &= \int_0^1\int_0^1 \left[k_x\left(X\left(s\right)+\lambda X_1(s),u^{\epsilon}(s)\right)-k_x\left(X\left(s\right),u(s)\right)\right]X_1(s)d\lambda,\\
D_{\epsilon}^{\rho}(s) &= \int_0^1 \left[\phi_x\left(X(s)+\lambda X_1(s)\right)-\phi_x\left(X\left(s\right)\right)\right]X_1(s)d\lambda.
\end{aligned}
$$

En utilisant lemme de Gronwall, estimation (3.15) s'obtient facilement de la relation ce dessus et de (3.18). On passe maintenant à prouver l'estimation (3.16) et (3.17) on peut facilement vérifier que :

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds+\int_t^T Z(s)+Z_1(s)dW_s\\
&=\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds+\int_t^T Z(s)+Z_1(s)dW_s\\
&+\left[\int_t^T\left(r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)\right)ds+\int_t^T r(u^{\epsilon})ds-\int_t^T r(u^*)ds\right]\\
&-\left[\int_t^T\left(r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)\right)ds+\int_t^T r(u^{\epsilon})ds-\int_t^T r(u^*)ds\right],
\end{aligned}
$$

donc, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds+\int_t^T Z(s)+Z_1(s)dW_s\\
&=\left[\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds-\int_t^T r(u^{\epsilon})ds\right]\\
&+\left[\int_t^T\left(r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)\right)ds+\int_t^T r(u^{\epsilon})ds-\int_t^T r(u^*)ds\right]\\
&-\int_t^T\left(r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)\right)ds+\int_t^T r(u^*)ds+\int_t^T\left(Z(s)+Z_1(s)\right)dW_s.
\end{aligned}
$$

D'après le développement de Taylor avec reste intégrale, on a :

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T r(s, X(s)+X_1(s), Y(s)+Y_1(s), Z(s)+Z_1(s), u^\epsilon(s))ds + \int_t^T Z(s)+Z_1(s)dW_s \\
&= \left[\int_t^T \left(\int_0^1 \left(r_x\left(X(s)+\lambda X_1(s), Y(s)+\lambda Y_1(s), Z(s)+\lambda Z_1(s), u^\epsilon(s)\right) - r_x\right) X_1(s)d\lambda\right) ds\right] \\
&+ \left[\int_t^T \left(\int_0^1 r_y\left(\left(X(s)+\lambda X_1(s), Y(s)+\lambda Y_1(s), Z(s)+\lambda Z_1(s), u^\epsilon(s)\right) - r_y\right) X_1(s)d\lambda\right) ds\right] \\
&+ \left[\int_t^T \left(\int_0^1 r_z\left(\left(X(s)+\lambda X_1(s), Y(s)+\lambda Y_1(s), Z(s)+\lambda Z_1(s), u^\epsilon(s)\right) - r_z\right) X_1(s)d\lambda\right) ds\right] \\
&+ \int_t^T \left(r_x X_1(s) + r_y Y_1(s) + r_z Z_1(s)\right) ds + \int_t^T r(u^\epsilon)ds - \int_t^T r(u^*)ds + \int_t^T Z_1(s)dW_s \\
&+ \left[\int_t^T r(u^*)ds + \int_t^T Z(s)dW_s\right], \\
&= \int_t^T \Lambda_\epsilon(s)ds + g_x\left(X\left(T\right)\right) X_1\left(T\right) - Y_1(T) + g\left(X\left(T\right)\right) - Y(t).
\end{aligned}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\epsilon(s) = &\int_0^1 \left(r_x\left(X(s)+\lambda X_1(s), Y(s)+\lambda Y_1(s), Z(s)+\lambda Z_1(s), u^\epsilon(s)\right) - r_x\right) X_1(s)d\lambda \\
&+ \int_0^1 r_y\left(\left(X(s)+\lambda X_1(s), Y(s)+\lambda Y_1(s), Z(s)+\lambda Z_1(s), u^\epsilon(s)\right) - r_y\right) X_1(s)d\lambda \\
&+ \int_0^1 r_z\left(\left(X(s)+\lambda X_1(s), Y(s)+\lambda Y_1(s), Z(s)+\lambda Z_1(s), u^\epsilon(s)\right) - r_z\right) X_1(s)d\lambda.
\end{aligned}
$$

Nous avons donc,

$$
\begin{aligned}
&Y^\epsilon(t) - Y(t) - Y_1(t) \\
&= g\left(X^\epsilon\left(T\right)\right) - \int_t^T r(s, X^\epsilon(s), Y^\epsilon(s), Z^\epsilon(s), u^\epsilon(s))ds + \int_t^T Z^\epsilon(s)dW_s \\
&- g\left(X\left(T\right)\right) + \int_t^T \left(r(s, X(s), Y(s), Z(s), u^*(s))ds - Z(s)dW_s\right) \\
&- g_x\left(X\left(T\right)\right) X_1\left(T\right) + \int_t^T \left(r_x X_1(s) + r_y Y_1(s) + r_z Z_1(s) + k(u^\epsilon) - k(u^*)\right) ds - \int_t^T Z^1(s)dW_s \\
&+ \int_t^T r(s, X(s)+X_1(s), Y(s)+Y_1(s), Z(s)+Z_1(s), u^\epsilon(s))ds \\
&- \int_t^T r(s, X(s)+X_1(s), Y(s)+Y_1(s), Z(s)+Z_1(s), u^\epsilon(s))ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Y^{\epsilon}(t)-Y(t)-Y_1(t) \\
& =g\left(X^{\epsilon}(T)\right)-g\left(X(T)\right)-g_x\left(X(T)\right)X_1(T)-\int_t^T r(s,X^{\epsilon}(s),Y^{\epsilon}(s),Z^{\epsilon}(s),u^{\epsilon}(s))ds \\
& +\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}(s))ds \\
& +\int_t^T r(s,X(s),Y(s),Z(s),u^*(s))ds+\int_t^T\left(r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)+k(u^{\epsilon})-k(u^*)\right)ds \\
& -\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}(s))ds \\
& +\int_t^T\left(Z^{\epsilon}(s)-Z(s)-Z_1(s)\right)dW_s,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Y^{\epsilon}(t)-Y(t)-Y_1(t) \\
& =g\left(X^{\epsilon}(T)\right)-g\left(X(T)\right)-g_x\left(X(T)\right)X_1(T)-\int_t^T r(s,X^{\epsilon}(s),Y^{\epsilon}(s),Z^{\epsilon}(s),u^{\epsilon}(s))ds \\
& +\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}(s))ds \\
& +\int_t^T\Gamma_{\epsilon}(s)ds+\int_t^T\left(Z^{\epsilon}(s)-Z(s)-Z_1(s)\right)dW_s.
\end{aligned}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\epsilon}(s)= & \, r(s,X(s),Y(s),Z(s),u^*(s))+\left(r_xX_1(s)+r_yY_1(s)+r_zZ_1(s)+k(u^{\epsilon})-k(u^*)\right) \\
& -r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}(s)).
\end{aligned}
$$

Ainsi il s'ensuit que,

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[Y^{\epsilon}(t)-Y(t)-Y_1(t)-\int_t^T\left(Z^{\epsilon}(s)-Z(s)-Z_1(s)\right)dW_s\right]^2 \\
& =\mathbb{E}[g\left(X^{\epsilon}(T)\right)-g\left(X(T)\right)-g_x\left(X(T)\right)X_1(T)-\int_t^T r(s,X^{\epsilon}(s),Y^{\epsilon}(s),Z^{\epsilon}(s),u^{\epsilon}(s))ds \\
& +\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}(s))ds+\int_t^T\Gamma_{\epsilon}(s)ds]^2,
\end{aligned}
$$

il vient alors,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y^{\epsilon}(t)-Y(t)-Y_1(t)|^2+\mathbb{E}\int_t^T|Z^{\epsilon}(s)-Z(s)-Z_1(s)|^2dW_s \\
&=\mathbb{E}[g\left(X^{\epsilon}\left(T\right)\right)-g\left(X(T)+X_1(T)\right)+\int_t^T\Gamma_{\epsilon}(s)ds \\
&-\int_t^T r(s,X^{\epsilon}(s),Y^{\epsilon}(s),Z^{\epsilon}(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds \\
&+\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds \\
&+\left[g\left(X(T)+X_1(T)\right)-g\left(X\left(T\right)\right)\right]-g_x\left(X\left(T\right)\right)X_1\left(T\right)]^2,
\end{aligned}$$

par le développement de Taylor avec reste intégrale, on trouver :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y^{\epsilon}(t)-Y(t)-Y_1(t)|^2+\mathbb{E}\int_t^T|Z^{\epsilon}(s)-Z(s)-Z_1(s)|^2dW_s \\
&=\mathbb{E}[g\left(X^{\epsilon}\left(T\right)\right)-g\left(X(T)+X_1(T)\right)+\int_t^T\Gamma_{\epsilon}(s)ds \\
&-\int_t^T r(s,X^{\epsilon}(s),Y^{\epsilon}(s),Z^{\epsilon}(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds \\
&+\int_t^T r(s,X(s)+X_1(s),Y(s)+Y_1(s),Z(s)+Z_1(s),u^{\epsilon}\left(s\right))ds \\
&-\int_0^1\left[g_x(X(T)+\lambda X_1(T))X_1(T)-g(X_{\epsilon}(T))\right]X_{\epsilon}(T)d\lambda]^2.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.15) et **Lemme 3.3.1** il vient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_t^T\Gamma_{\epsilon}(s)ds\right)^2&=o\left(\epsilon^2\right), \\
\mathbb{E}[g\left(X^{\epsilon}\left(T\right)\right)-g\left(X(T)+X_1(T)\right)]^2&=o\left(\epsilon^2\right).
\end{aligned}$$

Nous obtenons (3.16) et (3.17) en appliquant la méthode itérative utilisé dans le **Lemme 3.3.1** à la relation ci-dessus. On va voir comment la perturbation de u^* se traduit sur la variation du coût. ■

Inègalitè variationnelle

On sait que la fonction de coût J admet une valeur optimale pour le contrôle u^*, on obtient :

$$J(u^{\epsilon}) \geq J(u^{*}),$$

d'après l'inégalité précédente l'étude de la dérivation $J(u^{\epsilon})$ en $\epsilon = 0$ est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.3.3 *Sous les conditions $(H1)$ et $(H2)$, on a l'inégalité variationnelle suivante :*

$$\mathbb{E}\gamma_{y}\left(Y^{*}\left(0\right)\right)Y_{1}\left(0\right) \geq o\left(\varepsilon^{2}\right). \tag{3.19}$$

Preuve. *À partir l'inégalité $J(u^{\epsilon}) \geq J(u^{*})$ on a :*

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[\gamma(Y^{\epsilon}\left(0\right)) - \gamma(Y^{*}\left(0\right))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\gamma(Y^{\epsilon}\left(0\right)) - \gamma(Y^{*}\left(0\right) + Y_{1}\left(0\right)) + \gamma(Y^{*}\left(0\right) + Y_{1}\left(0\right)) - \gamma(Y^{*}\left(0\right))\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\gamma(Y^{\epsilon}\left(0\right)) - \gamma(Y^{*}\left(0\right) + Y_{1}\left(0\right))\right] + \mathbb{E}\left(\gamma_{y}(Y^{*}\left(0\right))Y_{1}\left(0\right)\right),
\end{aligned}$$

*d'aprés le **Lemme 3.3.2** nous avons :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\gamma(Y^{\epsilon}\left(0\right)) - \gamma(Y^{*}\left(0\right) + Y_{1}\left(0\right))\right) &\leq C\mathbb{E}\left[Y^{\epsilon}\left(0\right) - Y^{*}\left(0\right) - Y_{1}\left(0\right)\right], \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\left(Y^{\epsilon}\left(0\right) - Y^{*}\left(0\right) - Y_{1}\left(0\right)\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq C\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[\left[Y^{\epsilon}\left(t\right) - Y^{*}\left(t\right) - Y_{1}\left(t\right)\right]^{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq C\sqrt{C_{\epsilon}\epsilon^{2}}, \\
&\leq C_{\epsilon}\epsilon = o(\epsilon).
\end{aligned}$$

Alors

$$o(\epsilon) + \mathbb{E}\left(\gamma_{y}(Y^{*}\left(0\right))Y_{1}\left(0\right)\right) \geq 0.$$

Finalement on obtient :

$$o(\epsilon) \leq \mathbb{E}\left(\gamma_{y}(Y^{*}\left(0\right))Y_{1}\left(0\right)\right).$$

■

3.4 Le principe du maximum stochastique

Maintenant on peut annoncer le résultat principal de ce chapitre qui est le principe du maximum stochastique. Nous introduisons les équations adjointes pour notre problème :

$$\begin{cases} -dp_t = \left(k_x^t p_t + r_x^t q_t + \phi_x^t m_t\right) dt - m_t dW_t, \\ p_T = -g_x^t \left(X\left(T\right)\right) q_T, \\ -dq_t = r_y^t q_t dt + r_z^t q_t dW_t, \\ q_0 = -\gamma_y \left(Y\left(0\right)\right), \end{cases} \tag{3.20}$$

on note par f^t la transposèe de f.

Théorème 3.4.1 *Si les hypothéses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont verifier, alors il existe une unique triplet* $(p_t, q_t, m_t) \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{d\times n}) \times \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^n)$ *qui résoudre les équations adjoints* (3.20).

Preuve. *Le système* (3.20) *se compose en une équation différentielle stochastique et une équation différentielle stochastique rétrograde qui sont faiblement couplé, donc l'existence et l'unicité est assure par les deux théorèmes (**Théorème 2.1.1 et Théorème 2.2.1**).* ■

Notation 3.4.1 *Maintenant en définit la fonction hamiltonien* H *par :*

$$H(t; X; Y; Z; u; p; q; m) = \langle k(t; X; u), p_t\rangle + \langle r(t; X; Y; Z; u), q_t\rangle + \langle \phi(t; X), m_t\rangle,$$

où

$$H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

On utilise cette notation pour écrire (3.20) comme suit :

$$\begin{cases} -dp_t = H_x dt - m_t dW_t, \\ p_T = -g_x^t\left(X\left(T\right)\right) q_T, \\ -dq_t = H_y dt + H_z dW_t, \\ q_0 = -\gamma_y\left(Y\left(0\right)\right). \end{cases} \tag{3.21}$$

Théorème 3.4.2 *Soient* $(X_t^*, Y_t^*, Z_t^*, u^*)$ *une solution optimale de* (3.1) *et* (p_t, q_t, m_t) *la solution correspondant à* (3.21), *sous les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$**,** *alors on a :*

$$H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m) = \min H(t; X^*; Y^*; Z^*; u; p; q; m), \qquad \forall u \in U_{ad}, \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

Preuve. *Nous appliquons la formule d'itô aux* $p_t X_1\left(t\right)$ *et* $q_t Y_1\left(t\right)$, *nous obtenons :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T d\left(p_t X_1\left(t\right)\right)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T p_t\left(k(u^\epsilon) - k(u^*)\right) dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T X_1\left(t\right) r_x^t q_t dt\right],$$

d'autre part nous utilisons le fait que $p_T = -g_x^t\left(x\left(T\right)\right) q_T$, *nous obtenons :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T d\left(p_t X_1\left(t\right)\right)\right) = \mathbb{E}\left[p_T X_1\left(T\right)\right] - \mathbb{E}\left[p_0 X_1\left(0\right)\right] = \mathbb{E}\left[-g_x^t\left(X\left(T\right)\right) q_T X_1\left(T\right)\right],$$

donc on trouve :

$$\mathbb{E}\left[-q_T g_x^t\left(X\left(T\right)\right) X_1\left(T\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T p_t\left(k(u^\epsilon) - k(u^*)\right) dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T X_1\left(t\right) r_x^t q_t dt\right]. \tag{3.22}$$

D'aprés la formule d'itô applique au $q_t Y_1\left(t\right)$ *on a :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T d(q_t Y_1\left(t\right))\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T q_t r_x X_1\left(t\right) dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T q_t[r(u^\epsilon) - r(u^*)]dt\right],$$

et d'autre part nous utilisons aussi le fait que $q_0 = -\gamma_y\left(y\left(0\right)\right)$ *et* $Y_1\left(T\right) = g_x\left(X\left(T\right)\right) X_1\left(T\right)$

on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T d(q_t Y_t^1)\right) = \mathbb{E}(q_T Y_1(T)) - \mathbb{E}(q_0 Y_1(0)),$$
$$= \mathbb{E}\left[q_T g_x(X(T)) X_1(T)\right] + \mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0)) Y_1(0)\right],$$

donc il vient,

$$\mathbb{E}\left[q_T g_x(X(T)) X_1(T)\right] + \mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0)) Y_1(0)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T q_t r_x X_1(t)\, dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T q_t[r(u^\epsilon) - r(u^*)]dt\right]. \tag{3.23}$$

En utilisant (3.22) et (3.23), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\gamma_y(y(0)) Y_1(0)\right] = \mathbb{E}\int_0^T p_t\left(k(u^\epsilon) - k(u^*)\right) dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t[r(u^\epsilon) - r(u^*)]dt.$$

En utilisant l'inégalité (3.19), nous obtenous :

$$\mathbb{E}\int_0^T p_t\left(k(u^\epsilon) - k(u^*)\right) dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t[r(u^\epsilon) - r(u^*)]dt \geq o(\epsilon),$$

par passage à la limite et la définition du contrôle perturbé on trouve :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}\left(\int_\tau^{\tau+\epsilon} p_t\left(k(u^\epsilon) - k(u^*)\right) dt + \mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\epsilon} q_t[r(u^\epsilon) - r(u^*)]dt\right) \geq \lim_{\epsilon \to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon},$$

il vient alors,

$$\mathbb{E}\left[p_\tau k(u^\epsilon) + q_\tau r(u^\epsilon)\right] - \mathbb{E}\left[p_\tau k(u^*) + q_\tau r(u^*)\right] \geq 0,$$

ceci equivalent à dire :

$$\mathbb{E}\left(H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^\epsilon; p; q; m) - H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m)\right) \geq 0.$$

Pour éliminé espérance, on pose pour quel que soit $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_t$, $w_t = u^\epsilon 1_A + u^* 1_{A^c}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(H(t; X^*; Y^*; Z^*; w; p; q; m) - H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(H(t; X^*; Y^*; Z^*; w; p; q; m) - H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m)\right) 1_A\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\left(H(t; X^*; Y^*; Z^*; w; p; q; m) - H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m)\right) 1_{A^c}\right), \\
&= \mathbb{E}\left(\left(H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^\epsilon; p; q; m) - H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m)\right) 1_A\right), \\
&= 1_A \mathbb{E}\left(H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^\epsilon; p; q; m) - H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m) \diagup \mathcal{F}_t\right), \\
&= H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^\epsilon; p; q; m) - H(t; X^*; Y^*; Z^*; u^*; p; q; m).
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

■

Conclusion

L'étude présentée dans ce travail a permis de montrer les conditions nécessaires d'optimalité. Dans ce travail, nous avons traité un problème de contrôle stochastique pour un système représenter par un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades en abrégé **EDSPR** faiblement couplées dans le cas où le domaine du contrôle n'est pas nécessairement convexe et les coefficients de ce système sont assez réguliers avec le coefficient de diffusion ne contient pas la variable du contrôle.

Nous établirons des conditions nécessaires d'optimalité, satisfaites par tous les contrôles optimaux. Ces conditions sont obtenir à partir de deux processus adjointes correspondant aux composantes **d'EDSPR** et une inégalité maximale entre hamiltonien. La preuve du résultat principal est basée sur certaines estimations sur l'état et les équations adjoints.

Bibliographie

[1] Analyse Convexe, Cours M1 (4M057) 2017-2018, Période 2 Sorbonne Université.

[2] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[3] Cadenillas, A., & Karatzas, I. (1995). The stochastic maximum principle for linear, convex optimal control with random coefficients. SIAM journal on control and optimization, 33(2), 590-624.

[4] Clémentine Laurens. Inégalité(s) de Cauchy-Schwarz.

[5] Elsanosi, I., Øksendal, B., & Sulem, A. (2000). Some solvable stochastic control problems with delay. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 71(1-2), 69-89.

[6] Gauthier, G. Espérance et espérance conditionnelle-HEC Montréal, 80-646-08.

[7] Inégalité de Tchebychev. Préparation au CAPES. Strasbourg, février 2007.

[8] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[9] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[10] Julia Matos. Analyse Fonctionnelle. Année 2014/2015.

[11] Julia Matos. Calcul Différentiel. Université d'Evry Val-d'Essonne. 2012/2013.

[12] Laurent Tournier. Intégration et Probabilités UNIVERSITÉ PARIS 13.

[13] Le Gall, J. F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Springer.

[14] Lemme de Gronwall, Gourdon, Analyse, page 371.

[15] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.

[16] Peng, S. (1990). A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM Journal on control and optimization, 28(4), 966-979.

[17] Troyanov, Marc. Mesures et Intégration. No. LECTURE. 2008.

[18] Xu, W. (1995). Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system. The ANZIAM Journal, 37(2), 172-185.

Annexe A1 : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\left(\Omega, \mathcal{F}, , \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\, \mathbb{P}\right)$	Un espace de probabilité filtré.
L^2	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$\mathcal{C}^{n+1}$	$\begin{cases} \text{Ensemble des fonctions } (n+1) \text{ fois dérivable et dont la dérivée} \\ \text{d'order } (n+1) \text{ éme est continue} \end{cases}$
$p.s$	Presque surement.
σ^*	Transposée de la matrice σ.
$càdlàg$	Continue à droite admet de limite à gauche.
$\mathbb{P} - p.s$	Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$dt \times d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0;T]$ avec la mesure $d\mathbb{P}$.
$trace\,(M)$	La trace de la matrice.M.
tq	Telle que.
$\mathbb{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$	$\begin{cases} \text{L'espace formé par les processus } Z \text{ progressivement mesurable} \\ \text{à valeur dans } \mathbb{R}. \end{cases}$
$\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$	$\begin{cases} \text{L'espace vectoriel formé par les processus } Y \text{ progressivement mesurable} \\ \text{à valeur dans} \mathbb{R}^k \text{ telleque } \Vert Y \Vert_{\mathbb{S}^2} = \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T} \vert Y_t \vert^2\right) < \infty\} \end{cases}$

$\mathbb{M}^2{}_{n\times d}(\mathbb{R}^{k\times d})$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'espace formé par lesprocessus } Z \text{ progressivemen tmesurable} \\ \text{à valeur dans } \mathbb{R}^{k\times d} \text{ telleque :} \\ \lVert Z\rVert_{\mathbb{M}^2} = \mathbb{E}\left(\int_0^T \lvert \lvert Z_t \rvert \rvert^{\,2} dt\right) < \infty\}, o\grave{u} \text{ : si } Z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \lVert Z\rVert^2_{\mathbb{M}^2} = trace(Z.Z^*). \end{array} \right.$
$\mathcal{S}^2_c$	Le sous-espace de $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ par les processus continu.
$\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$	Désigne l'ensemble des classes équivalente de $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.
$i.e$	C'est à dire.

Annexe A2 : Quelques outils mathématique

L'inégalité de Young

L'inégalité de Young n'est pas une inégalité intégrale, mais elle sera nécessaire dans la preuve de l'inégalité de Hölder.

Définition 3.4.1 *On dit que deux nombres $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Young, si :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De manière équivalente :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p = \frac{q}{1-q} \iff pq = p + q \iff \frac{q}{p} = 1 - q.$$

L'inégalité de Young dit que si p et q sont conjugués et si $a, b \geq 0$, alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

Par exemple, si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$.

L'inégalité de Hölder

L'inégalité de Hölder dit que si $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Young, alors :

$$\int_D (f(x)\, g(x))\, d\mu(x) \leq \left(\int_D |f(x)|^p\, d\mu(x) \right)^{1/p} . \left(\int_D |g(x)|^q\, d\mu(x) \right)^{1/q} .$$

Il est commode de noter :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^P} := \left(\int_D |f(x)|^p\, d\mu(x) \right)^{1/p} .$$

en sorte que l'inégalité de Hölder peut s'écrire :

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^P} \|g\|_{\mathcal{L}^q} .$$

On note aussi $\|f\|_p = \|f\|_{\mathcal{L}^P}$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

C'est un cas particuli de l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$, on a :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Théorème 3.4.3 ***(I'négalités B-D-G)*** *Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro :*

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X \rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t \geq 0} |X_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X \rangle_\infty^{p/2} \right] .$$

En particulier, si $T > 0$

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X \rangle_T^{p/2}] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X \rangle_T^{p/2} \right] .$$

Lemme 3.4.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soient $T > 0$ et ϕ une fonction positive bornée sur $[0, T]$, On suppose qu'il existe des constantes $a > 0$, $b > 0$,telles que pour tout $t \in [0, T]$ on* *a :*

$$\phi(t) \leq a + b\int_0^t \phi(s)\,ds.$$

Alors

$$\forall t \in [0,T] \qquad \phi(t) \leq a\int_0^t \exp(bs)\,ds.$$

Dévelopment de Taylor-Young

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n-1)$ fois dérivable,$(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$, alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \circ\left(|x-a|^n\right).$$

Dévelopment de Taylor avec reste intégral

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$, alors :

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x) + f'(x)(a) + \frac{f''(x)}{2!}(a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(a)^n \\ &+ 0\left(|a|^n\right) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)}(a)^{n+1}\,dt. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Théorème 3.4.4 ***(Théorème de Fubini)*** *On suppose que $f \in \mathbb{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors,pour presque tout $x_1 \in \Omega_1$*

$$f(x_1, x_2) \in \mathbb{L}^1_{x_2}(\Omega_2) \;\; et \;\; \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 \in \mathbb{L}^1_{x_1}(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $x_2 \in \Omega_2$:

$$f(x_1, x_2) \in \mathbb{L}^1_{x_1}(\Omega_1) \;\; \text{et} \;\; \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,dx_1 \in \mathbb{L}^1_{x_2}(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 = \int_{\Omega_2} dx_2 \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,dx_1 = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2.$$

Définition 3.4.2 ***(L'ensemble convexe)*** *Une partie C est dit convexe si et seulement si :*

$$\forall x, y \in C, \forall \theta \in [0,1]\,;\theta x + (1-\theta)\,y \in C.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X - E\left(X\right)| \geq a\right) \leq \frac{Var\left(X\right)}{a^2}.$$

Définition 3.4.3 ***(Espace de Banach)*** *Soit E un espace vectoriel normé. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire, toute suite de Cauchy dans E est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).

Théorème 3.4.5 ***(Théorème du point fixe)*** *Soit A une application de v dans V. On dit que A est une contractante s'il existe un réel $\alpha > 0$ strictement inférieur à 1 tel que :*

$$\forall u, v \in V, \|A\left(u\right) - A\left(v\right)\|_V \leq \alpha \|u - v\|_V\,,$$

et

$$\forall u, v \in V, u \neq v, \|A\left(u\right) - A\left(v\right)\|_V \leq \|u - v\|_V\,.$$

Résumé

Nous considérons les problèmes de contrôle optimal pour les systèmes régis par des équations différentielles stochastiques progressivement rétrograde.

L'objective de l'étude présentée dans ce mémoire concerne le principe du maximum stochastique pour le contrôle optimal des systèmes dynamiques d'écrites par **EDSPR**, il est obtenue sous l'hypothèse que la diffusion de coefficients ne contient pas le variable de contrôle, et le demain le contrôle n'a pas nécessairement convexe.

Mots-clés : EDS, EDSR, EDSPR, processus adjoint, contrôle admissible.

Abstract

We consider control problems for optimal control governed by forward and backward stochastic differential equations.

The objective of the study presented in this work concerns the stochastic maximum principle for the optimal control of dynamic systems **FBSDEs** is obtained under the hypothesis that the diffusion coefficients does not contain the control variable, and the control domain does not necessarily convex.

Keywords: SDEs, BSDEs, FBSDEs, adjoint process, admissible control.

ملخص

نعتبر مشاكل التحكم الأمثل للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية المتدرجة و التراجعية.

الهدف من هذه الدراسة يرتكز على مبدأ العشوائية الأعظمي من اجل التحكم الأمثل للأنظمة الحركية المكتوب بالمعادلات التفاضلية العشوائية المتدرجة والتراجعية، نتحصل على هذا المبدأ تحت فرضيات أن معامل التشتت لا يتعلق بمتغير التحكم, ومجال التحكم ليس بالضرورة مقعر.