



**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA**

**Faculté de Mathématiques et des Sciences de
la Matière**



DÉPARTEMENT de MATHÉMATIQUES

MASTER

Domaine : Mathématiques

Spécialité : Analyse

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Fahima Ben Chebiba

Thème

**Méthode d'itération variationnelle pour la résolution numérique
d'une équation elliptique non linéaire.**

Soutenue publiquement le : 14-09-2021

Devant la jurée :

Dr. Mohammed Kouidri	M.C.B. Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Dr. Lemkeddem Mouna	M.C.B. University KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Dr. Hichar Saliha	M.C.B. Université KASDI Merbah - Ouargla	Encadreur

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah de m'avoir donné le courage d'achever ce modeste travail de fin d'étude.

Sans oublier ma mère et ma famille qui me donnent tous les soutiens de ma carrière scolaire.

Je tiens à remercier vivement mon encadreur **Dr. Hichar Saliha** d'avoir accepté de diriger ce projet de fin d'étude, sa gentillesse, sa disponibilité et ses précieux conseils.

Et je remercie les membres de jury d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail á mes êtres les plus chers au monde

A mes parents qui ont tout sacrifié pour mes études.

A mes frères 'Saddam' et 'Alhadj Oussama' et ma soeur 'Touria'.

A tous mes amis et mes collègues.

A tous ma famille 'Benchebiba'.

A ma grande mère 'Yamina'.

Enfin, je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont aidés de près ou de loin.

M. Ben chebiba fahima

Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Introduction	1
1 Généralités sur Les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles	3
1.1 Equations différentielles ordinaires	3
1.1.1 Exemples	4
1.2 Equation aux dérivées partielle	5
1.2.1 Exemples	5
2 La méthode d’itération variationnelle (VIM)	7
2.1 Introduction	7
2.2 Description de la méthode (VIM)	7
2.3 Les étapes essentielle de la méthode (VIM)	8
2.4 La convergence de la méthode (VIM)	9
3 Application de la méthode VIM	15
3.1 Pour les EDOs	15
3.1.1 Equation différentielle ordinaire nonlinéaire de premier ordre	15
3.1.2 Equation différentielle ordinaire linéaire de deuxième ordre . .	18
3.2 Pour les EDP	23
3.2.1 Exemples numériques	23

Conclusion	29
Bibliographie	30

Liste des tableaux

3.1	Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'équation étudiée.	18
3.2	Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour la solution exacte et de (VIM).	22
3.3	Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'équation (3.25) on prend $t = 5$.	24
3.4	Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'équation (3.19) on prend $t = 0.1$.	27

Table des figures

3.1	Comparaison entre la solution exacte et approchée.	18
3.2	Comparaison entre la solution exacte et la solution approché.	22
3.3	Graphe de la solution exacte $u(x, t)$	25
3.4	Graphe de la solution approchée.	25
3.5	Graphe de la solution exacte en 3 dimontions.	27
3.6	Graphe de la solution approché en 3 dimontions.	28

Notation

\mathbb{R}	Ensemble des nombres reels
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres reels positifs
\mathbb{R}^n	Espace euclidien reel n-dimensionnel
U	Un ouvert non vide de \mathbb{R}
K	Un compact de U
$y(x, x_0, y_0)$	Une solution d'un systeme telle que $y(x_0) = y_0$
J	La matrice Jacobienne du système
$Lip\gamma(I \times U)$	Ensemble des fonctions localement lipschitziennes en le deuxieme variable
EDO	Equation differentielle ordinaire
EDP	Equation aux dérivée partielle
$\ \cdot\ $	Norme euclidien

Introduction

La plupart des phénomènes physiques, économiques et mathématiques,... sont modélisées à l'aide d'équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires ou nonlinéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires ou nonlinéaires, et le développement de ces sciences passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces équations EDO et EDP. Bien plus dans de nombreux domaines de pointes (industrie pétrolière prévision météorologique problèmes de la fusion contrôlée) et le progrès technique nécessite de résoudre numériquement des systèmes d'EDO et d'EDP parfois sont très compliqués afin d'obtenir des propriétés quantitatives des solutions.

Pour étudier la résolution d'EDO et d'EDP numériquement, nous utilisons la méthode d'itération variationnelle (VIM). C'est une méthode proposée par le mathématicien chinois Ji-Huan He¹[1] elle a été utilisée pour résoudre une grande variété de problèmes linéaires et nonlinéaires avec des approximations convergentes rapidement vers des solutions précises.

Cette approche est avec succès et efficacement appliquée aux diverses équations de physique telles que les équations de retard différentielles, les équations différentielles ordinaires autonomes et aussi cette procédure est étudiée pour résoudre les EDO et les EDP.

Ce travail a pour la résolution numérique des équations elliptiques non linéaires par la méthode (VIM).

Dans le premier chapitre, on présente des généralités sur les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles.

1. Professeur : Ji-Huan He : Ingénieur à l'Université de Soochow en Chine a proposé la méthode (VIM) . "La méthode déforme un problème complexe en une série d'équations linéaires faciles à résoudre.

Ce deuxième chapitre, est consacré à la description de la méthode (VIM) et à sa convergence et les étapes essentielles de la méthode (VIM).

Le troisième chapitre on présente l'application de la méthode (VIM) pour la résolution numérique des (EDO) et (EDP).

Généralités sur Les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles

1.1 Equations différentielles ordinaires

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomène physiques et biologiques ect, par conséquent les équations différentielles représentent un vast champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Définition 1.1:

Une équation différentielle ordinaire est une relation du type

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^n(x)) = 0.$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ et les dérivées de la fonction inconnue u au point x .

La fonction F est une fonction de plusieurs variables

$$(x, y) \rightarrow F(x, y).$$

on prendra x dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être tout entier) et $y = (y_0, \dots, y_n)$ est dans \mathbb{R}^{n+1} .

Une équation différentielle ordinaire également notée EDO dans le domaine des équations différentielles ordinaires nous avons des EDO linéaires et des EDO non linéaires de différents degrés.

1.1.1 Exemples

Une EDO linéaire du 1^{ier} ordre de type

$$\begin{cases} u' + p(x)u = q(x), \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

par exemple :

$$\begin{cases} u' - u = e^x, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Un EDO linéaire du 2^{ème} ordre de type :

$$\begin{cases} u''(x) + au'(x) + bu(x) = g(x), \\ u(0) = \alpha, \\ u'(0) = \beta. \end{cases}$$

par exemple :

$$\begin{cases} u''u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Une EDO nonlinéaire du 1^{ier} ordre de type

$$\begin{cases} u' + p(x)u^n = q(x) \quad n \in \mathbb{N}; \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

par exemple :

$$\begin{cases} u' + u^2 = 1, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

1.2 Equation aux dérivées partielle

Les EDP sont un sujet de recherche actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts de math, comme, par exemple transformée de Fourier et la théorie des distributions.

Définition 1.2: Une équation aux dérivées partielle (EDP) est une relation fonctionnelle entre une fonction inconnue u de plusieurs variable ($u = u(x_1, \dots, x_n)$) et ses dérivées $(x_1, \dots, x_n) \in I$ avec I un ouvert de \mathbb{R}^n , $n > 2$.

Les EDP c'est une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini de type :

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0.$$

une telle équation est dit d'ordre n quand elle contient au moins une dérivée partielle d'ordre n .

Comme pour les EDO, on parle d'EDP linéaire ou non linéaire par du degrés.

1.2.1 Exemples

Une EDP linéaire du 1^{ier} ordre de type

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) = D(x, y).$$

par exemple

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x, y) = f(ye^{-x}). \end{cases}$$

Une EDP linéaire du 2^{ème} ordre de type

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + 2E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = H(x, y).$$

avec A, B, C, D, E et F sont des constantes.

Un EDP nonlinéaire du 1^{ier} ordre de type

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) = D(x, y).$$

par exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \sin u = 0.$$

On considère le système suivante :

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = I \times U. \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\Omega = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega = I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée.

Définition 1.3 (solution):

Une solution de (1,1) sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telque

$$(i) \quad \forall x \in I, \quad (x, y(x)) \in \Omega.$$

$$(ii) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

Définition 1.4: [8]

Soit E un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait une condition de lipschitz sur E s'il ya une constante positive K telle que pour tout $x, y \in E$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

on dit que la fonction f est localement lipschitz sur E si pour chaque point $x_0 \in E$ il y a un voisinage $N_\varepsilon(x_0)$ de x_0 , et une constante $k_0 > 0$, telles que pour tout $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$

$$|f(x) - f(y)| \leq k_0|x - y|$$

Théorème 1.1 (Arzela¹-Péano²): [8]

Si la fonction f est continue, alors pour tout point $(x_0, y_0) \in I \times U$ passe au moins une solution maximale $y(x, x_0, y_0)$ de système (1.1) définie sur $J \subseteq I$.

Théorème 1.2 (Cauchy³.Linschitz⁴): [9]

Soit un ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, si $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et $f \in \text{lipy}(I \times U)$, alors pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times U$, il existe $\delta > 0$. telle que le problème (1.1) possède une unique solution définie sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$.

1. Cesare Arzelà(1847-1912) est un mathématicien et universitaire italien qui enseigna à l'université de bologne.

2. Giuseppe Péano (1858-1932) est un mathématicien et linguiste italien.

3. Augustin louis Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français.

4. Rudolf Lipschitz (1830-1903) est un mathématicien allemand.

La méthode d'itération variationnelle (VIM)

2.1 Introduction

La méthode itérative variationnelle (VIM) a été développée par Je-Haun-He au début des années 1990. Cette méthode a été utilisée par beaucoup des chercheurs dans un variété de champs scientifiques et peut résoudre des problèmes non linéaires, et a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique. La méthode est basée sur la détermination de multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

2.2 Description de la méthode (VIM)

Nous considérons l'équation différentielle suivante [2]

$$L(u) + N(u) = g(x). \tag{2.1}$$

où : L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire $g(x)$ est une fonction connue.

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t) [Lu_n(t) + Nu_n(t) - g(t)] dt, \tag{2.2}$$

où λ est un multiplicateur général de Lagrange. L'indice n représente la $n^{\text{ème}}$ approximation $\tilde{u}_n(t)$ une variation limitée qui signifie $\delta\tilde{u}_n(t) = 0$. La solution est donnée par $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$.

2.3 Les étapes essentielle de la méthode (VIM)

La méthode (VIM) comporte deux étapes essentielles sont :

Le premier étape :

Nous avons déterminer la multiplicateur de Lagrange λ .

$$\text{On a : } L = \frac{d^m}{dt^m}$$

$$\text{Si : } m = 1, \quad \lambda(t) = (-1)^1(1) = -1.$$

$$\text{Si : } m = 2, \quad \lambda(t) = (-1)^2(t-x) = t-x.$$

$$\text{Si : } m = 3, \quad \lambda(t) = (-1)^3 \frac{(t-x)^2}{x!}.$$

$$\text{Si : } m = 4, \quad \lambda(t) = (-1)^4 \frac{(t-x)^3}{x!}.$$

d'une manière général

$$\lambda(t) = (-1)^m \frac{(t-x)^{m-1}}{m-1}.$$

et on utilise le premier condition dans on suppose $u_0(x)$

$$L = \frac{d}{dt}, \quad u_0(x) = u(0).$$

$$L = \frac{d^2}{dt^2}, \quad u_0(x) = u(0) + xu'(0).$$

$$L = \frac{d^3}{dt^3}, \quad u_0(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{x^2}{2!}u''(0).$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$L = \frac{d^m}{dt^m}, \quad u_0(x) = u(0) + xu(0) + \dots + \frac{x^{m-1}}{m-1}u^{m-1}(0).$$

Dans le deuxième étape on va déterminer la formule d'itération

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x (-1)^m \frac{(t-x)^{m-1}}{(m-1)!} [Lu_m(t) + Nu_m(t) - g(t)] dt.$$

2.4 La convergence de la méthode (VIM)

La méthode (VIM) transforme l'équation différentielle donnée en une suite de fonction récurrente. La limite de cette suite est la solution de l'équation différentielle donnée.

Pour étudier la convergence de la méthode (VIM) on va utiliser la théorème suivante :

Théorème 2.1: [4]

Soit E est un espace de Banach et $A : E \longrightarrow E$ est une application non linéaire. on suppose que l'application A vérifie la condition suivant :

$$\|A(u) - A(\bar{u})\| \leq B\|u - \bar{u}\| \quad \forall u, \bar{u} \in E, \quad (2.3)$$

où $0 < B < 1$. Alors l'application A admet une point fixe unique, $u \in E$ tel que : $A(u) = u$ avec

$$u_{n+1} = A(u_n), \quad (2.4)$$

une suite converge vers le point fixe de A .

démonstration 1:

$\forall u_i \in E, i = 0, 1, \dots, l, k, \dots, n$ on a dit :

$$\begin{aligned} \|u_k - u_l\| &\leq \|u_k - u_{k-1}\| + \|u_{k-1} - u_{k-2}\| + \dots + \|u_{l+1} - u_l\| \\ &= \|A_{k-1} - A_{k-2}\| + \|A_{k-2} - A_{k-3}\| + \dots + \|A_l - A_{l-1}\| \\ &\leq \beta\|u_{k-1} - u_{k-2}\| + \beta\|u_{k-2} - u_{k-3}\| + \dots + \beta\|u_l - u_{l-1}\| \\ &\leq (\beta^{k-2} + \beta^{k-3} + \beta^{k-4} + \dots + \beta^{l-1})\|u_1 - u_0\| \\ &\leq \frac{\beta^{l-1}}{1 - \beta}\|u_1 - u_0\|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On peut suppose que $1 < l < k$ alors $\|u_k - u_l\| \rightarrow 0$, car $k, l \rightarrow \infty$. Donc $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy puisque E est un espace de Banach, la suite converge vers une point fixe.

D'après le théorème 2.1, pour l'application non linéaire :

$$A(u_n) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)[Lu_n(t) + N\tilde{u}_n(t) - g(t)]dt, \quad (2.6)$$

une condition suffisante pour la convergence de la méthode (VIM) est que A doit être strictement contractante avec la suite (2.4) converge vers le point fixe A qui est aussi la solution du problème (2.1).

démonstration 2 (Convergence): [10]

pour trouver la validité de précédent théorème, nous étudions la convergence de différentes équations en utilisant cette dernière.

On considère le problème de valeur initiale du second ordre suivante :

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u(\alpha(t))), & x \in [0, X], \\ u'(x) = \varphi'(x), & x \in [-t, 0], \\ u(x) = \varphi(x), & x \in [-X, 0]. \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\varphi(x)$ et une fonction dérivable, $\alpha(x) \in C^1[0, X]$ est une fonction croissante strictement monotone et satisfait que $-t \leq \alpha(x) \leq x$ et $\alpha(0) = -t$. Il existe $x_1 \in [0, X]$ tel que $\alpha(x_1) = 0$ et $q : D = [0, X] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un continu donné cartographie et satisfait la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} \|q(x, y_1, z) - q(x, y_2, z)\| &\leq \beta_0 \|y_1 - y_2\| \\ \|q(x, y, z_1) - q(x, y, z_2)\| &\leq \beta_1 \|z_1 - z_2\| \end{aligned} \quad (2.8)$$

où β_0, β_1 sont des constantes de lipchitz. $\|\cdot\|$, désigne la norme.
par la méthode (VIM) = pour (2.7) trouve :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) \\ &+ \int_0^x \lambda(x, \xi) [u_n''(\xi) - \tilde{q}(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad 0 < x < x_1; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) \\ &+ \int_0^{x_1} \lambda(x, \xi) [u_n''(\xi) - \tilde{q}(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\ &+ \int_{x_1}^x \lambda(x, \xi) [u_n''(\xi) - \tilde{q}(\xi, u_n(\xi), u_n(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad x > x_1; \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $u_n(x) = \varphi(x)$ pour $x \in [-t, 0]$ \tilde{q} est une fonction restreinte, d'où $\delta\tilde{q} = 0$ alors :

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(x) &= \delta y_n(x) \\
&+ \int_0^x \delta \lambda(x, \xi) [u_n''(\xi) - \tilde{q}(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&= \delta u_n(x) + \int_0^x \delta \lambda(x, \xi) u_n''(\xi) d\xi, \quad 0 < x < x_1;
\end{aligned} \tag{2.11}$$

on intègre l'équation (2.10) par parties :

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) \\
&+ \int_0^{x_1} \delta \lambda(x, \xi) [u_n''(\xi) - \tilde{q}(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&+ \int_{x_1}^x \delta \lambda(x, \xi) [u_n''(\xi) - \tilde{q}(\xi, u_n(\xi), u_n(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&= \delta u_n(x) + \delta \lambda(x, \xi) u_n'(\xi) \Big|_{\xi=x} \\
&\quad - \frac{\partial \lambda(x, \xi)}{\partial \xi} \delta u_n(\xi) \Big|_{\xi=x} + \int_0^x \frac{\partial^2 \lambda(x, \xi)}{\partial \xi^2} \delta u_n(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

la condition de stationnarité est :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \lambda(x, \xi)}{\partial \xi^2} &= 0, \\
1 - \frac{\partial \lambda(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} &= 0, \\
\lambda(x, \xi) \Big|_{\xi=x} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Alors, la multiplicateur de Lagrange λ .

$$\lambda(t, \xi) = \xi - t. \tag{2.14}$$

par la formule d'itération variationnelle dans (2.13) :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= u_n(x) \\
&+ \int_0^x (\xi - x) [u_n''(\xi) - q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad 0 < x < x_1;
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= u_n(x) \\
&+ \int_0^{x_1} (\xi - t) [y_n''(\xi) - q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&+ \int_{x_1}^x (\xi - x) [u_n''(\xi) - q(\xi, u_n(\xi), u_n(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad x > x_1;
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Théorème 2.2: *Suppose que le problème de la valeur initiale (2.7) satisfait la condition (2), et $u(x), u_i(x) \in C^2[0, X], i = 1, 2, \dots$. Alors la suite $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ définie par (2.15) et (2.16) avec $u_0(x)$ converge vers la solution de (2.7).*

démonstration 3: *D'après (2.7), on a*

$$u(x) = u(x) + \int_0^x (\xi - x) [u''(\xi) - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad 0 < x < x_1; \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(x) + \int_0^{x_1} (\xi - x) [u''(\xi) - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&+ \int_{x_1}^x (\xi - x) [u''(\xi) - q(\xi, u(\xi), u(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad x > x_1;
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Soit $A_i(x) = u_i(x) - u(x), i = 0, 1, \dots, n$. Si $x \leq 0$, alors $A_i(x) = 0, i = 0, 1, \dots$. De (2.15) et (2.17), nous avons

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(x) &= A_n(x) \\
&+ \int_0^x (\xi - x) A_n''(\xi) - (q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&- q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))) d\xi, \quad 0 < x < x_1;
\end{aligned} \tag{2.19}$$

De (2.16) et (2.18), on a

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(x) &= A_n(x) \\
&+ \int_0^{x_1} (\xi - x) [A_n''(\xi) - (q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&- q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi))))] d\xi \\
&+ \int_{x_1}^x (\xi - x) [A_n''(\xi) - (q(\xi, u_n(\xi), u_n(\alpha(\xi))) \\
&- q(\xi, u(\xi), u(\alpha(\xi))))] d\xi, \quad x > x_1;
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Utilisant intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(x) &= A_n(x) + \int_0^x (\xi - x) A_n''(\xi) d\xi \\
&\quad - \int_0^x (\xi - x) [q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&= - \int_0^x (\xi - x) [q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad 0 < x < x_1; \\
\\
A_{n+1}(x) &= A_n(x) + \int_0^x (\xi - x) A_n''(\xi) d\xi \\
&\quad - \int_0^{x_1} (\xi - x) [q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&\quad - \int_{x_1}^x (\xi - x) [q(\xi, u_n(\xi), u_n(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), u(\alpha(\xi)))] d\xi \tag{2.21} \\
&\quad - \int_0^{x_1} (\xi - x) [q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))] d\xi \\
&\quad - \int_{x_1}^x (\xi - x) [q(\xi, u_n(\xi), u_n(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), u(\alpha(\xi)))] d\xi, \quad x > x_1;
\end{aligned}$$

Comme $[\alpha^{-1}(x)]'$ est borné, $M = \max_{-T \leq \xi \leq \alpha(x)} (\alpha^{-1}(\xi))'$ est borné. De plus, il découle de (2.8) et l'inégalité $|\xi - x| \leq X$ que

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}(t)\| &\leq \int_0^x |x - \xi| \|q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))\| d\xi \\
&\leq \int_0^x X \beta_0 \|u_n(\xi) - u(\xi)\| d\xi \tag{2.22} \\
&= \int_0^x X \beta_0 \|A_n(\xi)\| d\xi, \quad 0 < x < x_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}(t)\| &\leq \int_0^{x_1} |x - \xi| \|q(\xi, u_n(\xi), \varphi(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), \varphi(\alpha(\xi)))\| d\xi \\
&\quad + \int_{x_1}^x |x - \xi| \|q(\xi, u_n(\xi), u_n(\alpha(\xi))) \\
&\quad - q(\xi, u(\xi), u(\alpha(\xi)))\| d\xi \\
&\leq \int_0^{x_1} X\beta_0 \|u_n(\xi) - u(\xi)\| d\xi \\
&\quad + \int_{x_1}^x X(\beta_0 \|A_n(\xi)\| + \beta_1 \|A_n(\alpha(\xi))\|) d\xi \tag{2.23} \\
&= \int_0^x X\beta_0 \|A_n(\xi)\| d\xi + \int_{x_1}^x X\beta_1 \|A_n(\alpha(\xi))\| d\xi \\
&= \int_0^x X\beta_0 \|A_n(\xi)\| d\xi \\
&\quad + \int_{\alpha(x_1)}^{\alpha(x)} X\beta_1 \|A_n(\xi)\| (\alpha^{-1}(\xi))' d\xi \\
&\leq XM\beta \int_0^x \|A_n(\xi)\| d\xi, \quad x > x_1;
\end{aligned}$$

tel que : $\beta = \max \beta_i, i = 1, 2$. De plus,

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}(x)\| &\leq (XM\beta)^2 \int_0^x \int_0^{s_1} \|A_{n-1}(s_2)\| ds_2 ds_1 \\
&\leq (XM\beta)^3 \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \|A_{n-2}(s_3)\| ds_3 ds_2 ds_1 \\
&\leq (XM\beta)^4 \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \int_0^{s_3} \|A_{n-3}(s_4)\| ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 \\
&\quad \dots \\
&\leq (XM\beta)^{n+1} \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \dots \int_0^{s_n} \|A_0(s_{n+1})\| ds_{n+1} \dots ds_3 ds_2 ds_1,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

où $\|A_0(x)\|$ est constant. Par conséquent, nous avons

$$\|A_{n+1}(x)\| \leq \|A_0(x)\| \frac{(XM\beta)^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{2.25}$$

Application de la méthode VIM

Dans ce chapitre on a des applications sur des EDO et EDP linéaire et nonlinéaire avec la Méthode (VIM)

3.1 Pour les EDOs

Afin d'obtenir la solution de certaines équation différentielles ordinaires d'une manière (VIM) nous suivons des étapes de base suivantes :

3.1.1 Equation différentielle ordinaire nonlinéaire de premier ordre

Déscription de la méthode[2]

Considérons l'équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre 1 suivante

$$\begin{cases} u' + p(x)u^2 = q(x), \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \quad (3.1)$$

avec p, q sont deux fonctions continues et dérivables.

La fonction de correction pour cette équation est donnée par

$$u_{n+1} = u(x) + \lambda(t) \int_0^x [u'_n(t) + p(t)\tilde{u}_n^2(t) - q(t)] dt, \quad (3.2)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. Ici λ peut être une constante ou une

fonction de t , et $\tilde{u}_n^2(t)$ est une valeur restreinte d'où $\delta\tilde{u}_n^2(t) = 0$.

prenant la variation des côtes de l'équation (3.2) on obtient

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n(x) + \delta\lambda(t) \int_0^x [u_n'(t) + p(t)\tilde{u}_n^2(t) - q(t)] dt, \quad (3.3)$$

on utilisant le fait que $\delta\tilde{u}_n^2 = 0$

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n(x) + \delta\lambda(t) \int_0^x [u_n'(t) - q(t)] dt, \quad (3.4)$$

l'intégration de l'équation (3.4) par parties donne

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta\lambda(t) \Big|_0^x - \delta \int_0^x \lambda'(t) (u_n(t) - q(t)) dt, \quad (3.5)$$

où

$$\delta u_{n+1} = \delta \left(1 + \lambda(t) \Big|_{t=x} \right) u_n - \delta \int_0^x \lambda'(t) (u_n(t) - q(t)) dt, \quad (3.6)$$

la condition d'extremum de u_{n+1} exige que $\delta u_{n+1} = 0$ cela veut dire que le coté gauche de (3.6) est nulle et par conséquent le côté droit devrait être égal à zero également.

cela donne les conditions de stationnarité :

$$\begin{cases} 1 + \lambda(t) \Big|_{t=x} = 0, \\ \lambda'(t) \Big|_{t=x} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

alors $\lambda(t) = -1$.

la substitution de cette valeur de multiplicateur de Lagrange dans (3.2) donne la formule d'itération suivante

$$u_{n+1} = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(t) + p(t)u_n^2(t) - q(t)) dt, \quad (3.8)$$

Etant donné $u(0) = \alpha$, nous pouvons sélectionner l'approximation initiale $u_0 = \alpha$.

En utilisant cette sélection dans l'équation (3.8) nous obtenons les approximations succesives suivantes :

$$\begin{cases} u_0(x) &= \alpha, \\ u_1(x) &= \alpha - \int_0^x [u'_0(t) + p(t)u_0^2(t) - q(t)] dt, \\ u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x [u'_1(t) + p(t)u_1^2(t) - q(t)] dt, \\ u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x [u'_2(t) + p(t)u_2^2(t) - q(t)] dt, \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ u_{n+1}(x) &= u_n(x) - \int_0^x [u'_n(t) + p(t)u_n^2(t) - q(t)] dt. \end{cases}$$

Finalement, la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x).$$

considérons $p(t) = 1$, $q(t) = 1$, $\alpha = 0$ et $\lambda = -1$ et aussi $u_0 = 0$.

la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n + u_n^2 - 1] dt, \quad n \geq 0;$$

les approximations consécutives de la solution sont obtenues comme suite

$$\begin{cases} u_0(x) &= 0, \\ u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x [u'_0(t) + p(t)u_0^2(t) - 1] dt = x, \\ u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x [u'_1(t) + p(t)u_1^2(t) - 1] dt = x - \frac{1}{3}x^3, \\ u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x [u'_2(t) + p(t)u_2^2(t) - 1] dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7, \\ u_4(x) &= u_3(x) - \int_0^x [u'_3(t) + p(t)u_3^2(t) - 1] dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7 + \frac{62}{2835}x^9, \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ u_n(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7 + \frac{62}{2835}x^9. \end{cases}$$

par passage à la limite, $u(x) = \tanh(x)$ qui est la solution exacte de ce problème.

x	La solution exacte	La solution approché	erreur
0	0	0	0
0.1	0.1003346	0.1003346	0.0
0.2	0.20271003	0.20271003	0.0
0.3	0.3093362	0.3093362	0.0
0.4	0.4227932	0.4227932	0.0
0.5	0.5463024	0.5463024	0.0
0.6	0.6841368	0.6841368	0.0
0.7	0.8422883	0.8422883	0.0
0.8	1.02963855	1.02963855	0.0
0.9	1.26015821	1.26015821	0.0
1	1.55740772	1.55740772	0.0

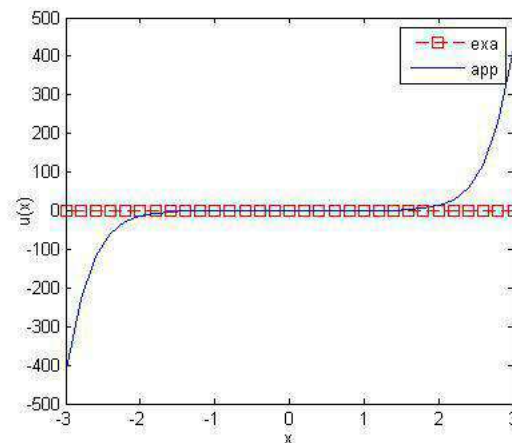
TABLE 3.1 – Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'équation étudié.

FIGURE 3.1 – Comparaison entre la solution exacte et approchée.

3.1.2 Equation différentielle ordinaire linéaire de deuxième ordre

Description de la méthode

Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\begin{cases} u'' + au'(x) + bu(x) = g(x), \\ u(0) = \alpha, \\ u'(0) = \beta. \end{cases} \quad (3.9)$$

La fonction de correction pour cette équation est donnée par :

$$u_{n+1} = u_n(x) + \lambda(t) \int_0^x [u_n''(t) + a\tilde{u}_n'(t) - b\tilde{u}_n(t) - g(t)] dt, \quad n \geq 0; \quad (3.10)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange et \tilde{u}_n est une valeur restreinte où $\delta\tilde{u}_n = 0$.

prenant la variation des côtes de l'équation (3.10) par rapport à u_n on trouve

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta\lambda(t) \int_0^x [u_n'(t) + a\tilde{u}_n'(t) + b\tilde{u}_n(t) - g(t)] dt, \quad (3.11)$$

par l'utilisant de $\delta\tilde{u}_n(t) = 0$, $\delta\tilde{u}_n'(t) = 0$ et $\delta g(t) = 0$ qui devient

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)u_n'(t)dt, \quad (3.12)$$

l'integration de l'équation (3.12) par parties deux fois donne

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta\lambda\delta u_n' - \delta\lambda' u_n + \delta \int_0^x \lambda' u_n dt, \quad (3.13)$$

qui est équivalente à :

$$\delta u_{n+1} = \delta(1 - \lambda'|_{t=x})u_n + u_n + \delta\lambda\delta u_n' + \delta \int_0^x \lambda' u_n dt, \quad (3.14)$$

la condition d'extremum de u_{n+1} exige que $\delta u_{n+1} = 0$ cela signifie que le coté gauche de (3.14) est nulle et le côté droit devrait être égale à zero.

cela donne les conditions stationnaires :

$$\begin{cases} 1 - \lambda'|_{t=x} = 0, \\ \lambda|_{t=x} = 0, \\ \lambda''|_{t=x} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

par conséquent

$$\lambda(t) = t - x. \quad (3.16)$$

en remplace cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (3.10), on obtient la formule d'itération :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (t-x) [u_n''(t) + au_n'(t) + bu_n(t) - g(t)] dt. \quad (3.17)$$

Etant donné $u(0) = \alpha$, $u'(0) = \beta$ nous obtenons les approximation successives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \alpha + \beta x, \\ u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x (t-x) [u_0'(t) - au_0''(t) + bu_0'(t) + bu_0(t)] dt, \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x (t-x) [u_1'(t) - au_1''(t) + bu_1'(t) + bu_1(t)] dt, \\ u_3(x) = u_2(x) + \int_0^x (t-x) [u_2'(t) - au_2''(t) + bu_2'(t) + bu_2(t)] dt, \\ \vdots \\ u_{n+1}(x) = u_n(x) - (t-x) \int_0^x [u_n''(t) + au_n'(t) + bu_n(t) - g(t)] dt. \end{array} \right.$$

on trouve la solution exacte par passage à la limite :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}(x).$$

Exemples 01 :

considérons l'équation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 1. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

On obtient la solution de l'équation de manière classique et est donnée comme

suit :

$$u(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

par les valeurs initiales on trouve : $C_1 = C_2 = 1$ donc $u(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

On cherche la solution par (VM).

Nous trouvons que $\lambda(t) = t - x$, et nous pouvons mettre $u_0(x) = 1 + x$.

par conséquent, la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - (t - x) \int_0^x [u_n''(t) + u_n(t)] dt, \quad n \geq 0;$$

Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 + x, \\ u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x (t - x) [u_0''(t)u_0(t)] dt = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3, \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x (t - x) [u_1'(t)u_1(t)] dt = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5, \\ \vdots \\ u_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right) + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right). \end{cases}$$

enfin la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

donc on obtient :

$$u(x) = \cos x + \sin x.$$

x	La solution exacte	La solution approché	erreur
-1	0.98239	-0.30119	0.6812
-0.8	0.98594	-0.02065	0.9654
-0.6	0.98547	0.26068	0.7288
-0.4	0.99299	0.53164	0.46135
-0.2	0.99650	0.78139	0.21511
0	1	1	0
0.2	1.00348	1.17873	0.17525
0.4	1.00695	1.31046	0.30351
0.6	1.01041	1.38997	0.37956
0.8	1.01386	1.41405	0.40019
1	1.01730	1.38	0.36445

TABLE 3.2 – Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour la solution exacte et de (VIM).

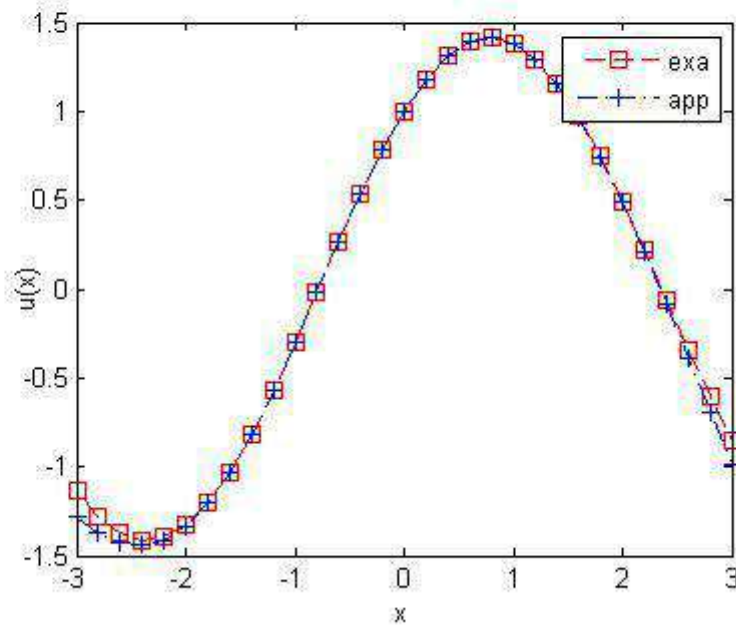


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approché.

3.2 Pour les EDP

3.2.1 Exemples numériques

Exemples 02 :

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante ([6]) :

$$u_t - uu_x = 0 \quad ; \quad u(x, 0) = \frac{x}{10}. \quad (3.19)$$

En utilisant la méthode (VIM) :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(x, s) \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \tilde{u}_n(x, s) \frac{\partial \tilde{u}_n(x, s)}{\partial x} \right] ds. \quad (3.20)$$

avec les conditions stationnaires :

$$\begin{cases} 1 + \lambda|_{t=x} = 0, \\ \lambda'|_{t=x} = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

on obtient : $\lambda(s) = -1$. En substituant cette valeur de multiplicateur de Lagrange dans la formule de l'itération

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - u_n(x, s) \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} \right] ds, n \geq 0; \quad (3.22)$$

Nous commençons par la condition initiale :

$$u_0(x, t) = \frac{x}{10}. \quad (3.23)$$

on remplace (3.23) dans la formule d'itération, on obtient les approximations suc-

cessives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = \frac{x}{10}, \\ u_1(x, t) = \frac{x}{10} \left(1 + \frac{t}{10} \right), \\ u_2(x, t) = \frac{x}{10} \left(1 + \frac{t}{10} + \left(\frac{t}{10} \right)^2 + \text{petits termes} \right), \\ \vdots \\ u_n(x, t) = \frac{x}{10} \left(1 + \frac{t}{10} + \left(\frac{t}{10} \right)^2 + \left(\frac{t}{10} \right)^3 + \left(\frac{t}{10} \right)^4 + \dots + \left(\frac{t}{10} \right)^n + \text{petits termes.} \right). \end{array} \right.$$

La solution exacte est donnée par $u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$ donc :

$$u(x, t) = \frac{x}{10 - t}, \quad |t| < 10$$

$x \backslash t$	La solution exacte	La solution approché	Erreur
	5	5	
-8	-1.6	-1.55	0.1
-6	-1.2	-1.62	0.04
-4	-0.8	-0.775	0.03
-2	-0.4	-0.387	-0.02
0	0	0	0
2	0.4	0.387	0.013
4	0.8	0.775	0.025
6	1.2	1.162	0.04
8	1.6	1.55	0.05
10	2	1.937	0.063

TABLE 3.3 – Erreur absolue lorsque différentes valeur de x pour l'équation (3.25) on prend $t = 5$.

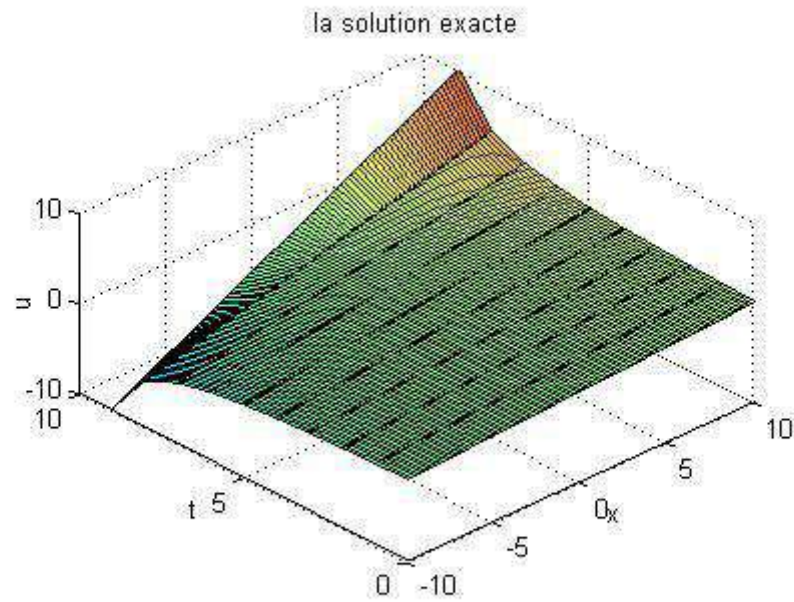
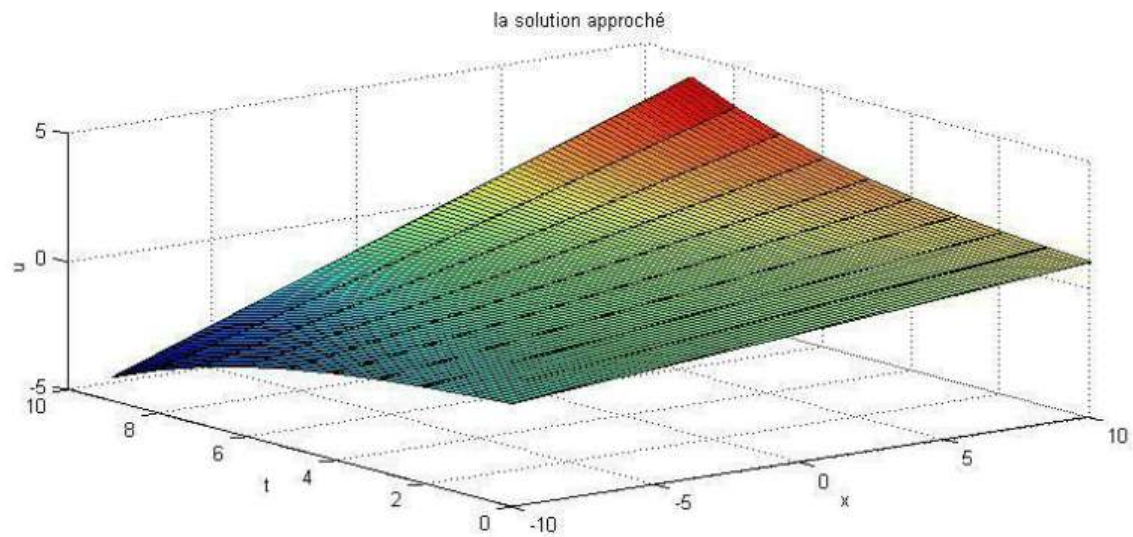
FIGURE 3.3 – Graphe de la solution exacte $u(x, t)$.

FIGURE 3.4 – Graphe de la solution approché.

Exemples 03 :

Considerons l'EDP de Klein Gordon suivante ([5]) :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x. \end{cases} \quad (3.24)$$

En utilisant la méthode VIM :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(x, s) \left[\frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial^2 s} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x, s)}{\partial^2 x} + \tilde{u}_n(x, s) \right] ds. \quad (3.25)$$

Avec les conditions stationnaires

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 \lambda(x, s)}{\partial^2 s} \right|_{t=x} = 0, \\ 1 - \left. \frac{\partial \lambda(x, s)}{\partial s} \right|_{t=x} = 0, \\ \lambda(x, s)|_{t=x} = 0. \end{cases}$$

Cela donne

$$\lambda(x, s) = s - x.$$

En substituant cette valeur de multiplicateur de Lagrange dans la formule de l'itération :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t (s - x) \left[\frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial^2 s} - \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial^2 x} + u_n(x, s) \right] ds.$$

nous commençons par la condition initiale : $u_0(x, t) = u(x, 0) + tu_t(x, 0) = xt$

$$\begin{cases} u_0(x, t) = xt, \\ u_1(x, t) = xt - \frac{xt^3}{3!}, \\ u_2(x, t) = xt - \frac{xt^3}{3!} + \frac{xt^5}{5!}, \\ u_3(x, t) = xt - \frac{xt^3}{3!} + \frac{xt^5}{5!} - \frac{xt^7}{7!}, \\ \vdots \\ u_n(x, t) = x \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} + \dots + \frac{(-1)^n t^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \right). \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par $u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$. donc :

$$u(x, t) = x \sin t.$$

$t \backslash x$	La solution exacte	La solution approché	Erreur
	0.1	0.1	.
1	0.00174	0.09950	0.09776
2	0.003490	0.19900	0.19551
3	0.00523	0.29850	0.29327
4	0.00698	0.39800	0.39102
5	0.00872	0.497500	0.48818
6	0.01047	0.59700	0.58653
7	0.01221	0.64650	0.68429
8	0.01396	0.79600	0.78204
10	0.01745	0.99500	0.9775

TABLE 3.4 – Erreur absolue lorsque différentes valeur de x pour l'équation (3.19) on prend $t = 0.1$.

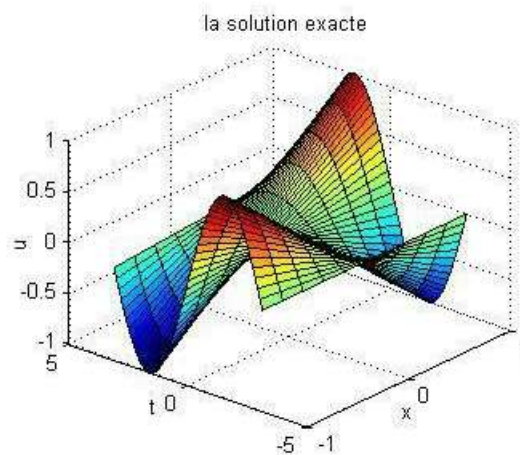


FIGURE 3.5 – Graphe de la solution exacte en 3 dimontions.

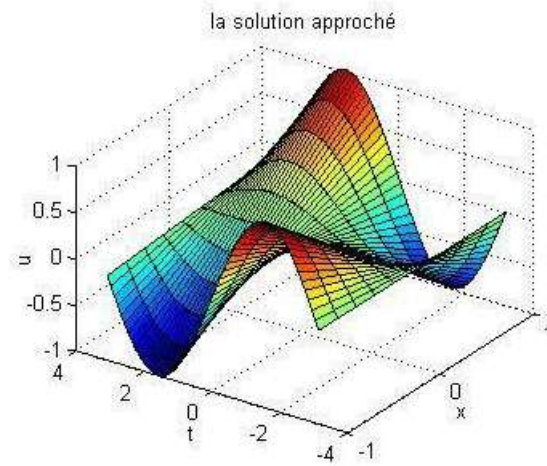


FIGURE 3.6 – Graphe de la solution approché en 3 dimontions.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode d'itération variationnelle pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO) ou aux dérivées partielles (EDP).

On a présenté des généralités sur les EDO et les EDP et on a donné des exemples, nous avons exposé par la suite le principe de la méthode (VIM), utilisé pour la résolution de ces équations en utilisant des formules itératives.

Nous avons présenté la méthode (VIM) et sa convergence, cette méthode introduit un Multiplicateur de Lagrange qui doit être identifié en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle.

Nous avons pris quelques exemples d'EDO et d'EDP et nous l'avons appliqué à la méthode (VIM), aussi comparé l'approche numérique des résultats exacts pour des exemples.

A la fin, la méthode d'itération variationnelle a été exploitée pour trouver les résolutions numériques des EDO et EDP dans notre travail.

Bibliographie

- [1] J. H. He, Variational iteration method-A kind of non-linear analytical technique : Some examples. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 34(1999)699 – 708
- [2] Z. Mohammed, Résolution des équations différentielles par les méthodes variationnelles et homotypiques. Mémoire de magister en mathématique appliquée et computationnelle. Université d'ORAN, 2013/2014.
- [3] B. halffer, Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles. Université Paris-Sud, Département de Mathématique.
- [4] M. Tatari, M. Dehghan, On the convergence of He's variational iteration method. *J. Comput. Appl. Math.*, 207(2007)121 – 128.
- [5] M. Hussain, M. Khan, AVariational Iterative Method for Solving the Linear and Nonli- near Klein-Gordon Equations, *App. Math. Sci.*, Vol. 4, No. 39, 1931 - 1940 (2010).
- [6] A. S. J. AL-Saif, T. A. K. Hattim, Variational Iteration Method for Solving Some Models of Nonlinear Partial Di§erential Equations, *Int. J. Pure and App. Sci., and Technology*, ISSN 2229 (2011).
- [7] Z. M. Odibat, A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(2010) 1181-1192.
- [8] E. Moulay, Stabilité des équations différentielles ordinaires. Cours de Master. 2007. <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00136497>.
- [9] F. Jean, Systèmes Dynamiques Stabilité et Commande. Cours et exercices corrigés. Édition. 2017/2018.
- [10] Hindawi Publishing Corporation *Journal of Applied Mathematics* Volume 2013, Article ID 634670, 9 pages

العنوان: طريقة التكرار التبايرية للدقة العددية لمعادلة ببيضوية غير خطية.

الكلمات المفتاحية: طريقة التكرار المتغير، المعادلة التفاضلية العادية، معادلة مستقيم جزئية، الحل الدقيق، الحل التقريبي.

الملخص: في السنوات الاخيرة ، حظت التقنية VIM باهمية كبيرة ، كونها طريقة حديثة لحل نماذج مختلفة من المعادلات الخطية و الغير خطية..

في هذا العمل نقوم بدراسة جودة الصورة الرقمية للمعادلات التفاضلية العادي و لمعادلات المشتقة الجزئية بالطريقة الجديدة VIM في الحالات الخطية و الغير خطية ، و مقارنة بين الحل الحقيقي و الحل التقريبي لهذه المعادلات.

Title : Variational iteration method for the numerical resolution of a nonlinear elliptical equation.

Key words : variational iteration method; ordinary differential equation; partial derivative equation; exact solution; approximate solution.

Abstract : In recent years, technology (VIM) has gained great importance as it is a modern method for solving various models of linear and non linear equation.

In this work, we study the numerical resolution of EDO and EDP by applying the new method in the linear and non linear case and comparing between the exact solution and the approximate solution of these equations.

Titre : Méthode d'itération variationnelle pour la resolution numérique d'une équation elliptique non linéaire.

Mots clés: Méthode d'itération variationnelle; équation différentielle ordinaire; équation aux dérivée partielle; solution exacte; solution approché.

Résumé : Ces dernières années, la technologie (VIM) on reçu une grand importance, comme étant une méthode moderne pour résoudre différents modèles des équations linéaire et nonlinéaire.

Dans ce travail, nous étudions la résolutions numérique pour les EDO et les EDP en appliquant la nouvelle méthode (VIM) dans le cas linéaire et non linéaire, et comparant entre la solution exacte et la solution approché de ces équations..