UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités Et Statistique

Par : LAHCINI FATMA

Théme

Étude comparatife entre quelques méthodes des synthése du mouvement brownien fractionnaire

Devant le jury composé de :

Ms.	Boussaad Abdelmalik	UKMB Ouargla	Encadreur
Ms.	Kouidri Mohamed	UKMB Ouargla	Président
Ms.	Meflah Mebrok	UKMB Ouargla	Examinateur
Ms.	Mansoul Brahim	UKMB Ouargla	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

Louange à Dieu tout puissant,qui m'a permis devoir ce jour tant attendu.

Je dédie cette mémoire :

A l'âme de **mon cher pére** .

A ma maman qui a soutenu et encouragé durant ces années d'études .

A mes féres"Ali ,Abdalleh ,said , Belkassem ,Mohammed "et leur femmes.et Abdelaziz.A mon cher fils"Mohamed Islam"

A mes soeurs "Mebaraka et son mari Abderahman" et "Izdihare". et ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la de ce travail. Ils m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours

Au meilleur ami de ma carriére universitaire "Bahaz yamina" qui était une souer à qui ma mére n'a pas donné naissance.

A ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de vivacité.

A touts mes amis qui'ont toujours encouragé, et à qui je souhait plus de succés.

Fatma Lahcini

Remerciements

Tout d'abord,nous remerions notre Dieu le tout puissant de nous avoir donne la force d'atteindre notre objectif et accomplir notre travail.

Mes remerciement s'adressent à mon encadrante" Boussaad Abdelmalek" co-responsable de ce Master, pour avoir accepté de diriger ce travail.Son soutien ,ses compétences et sa voyance m'ont été d'une aide inestimable.

Je souhaite remecier "Kwadri Mohamed" pour toute l'aide qu'elle m'a apportée.

Je tiens à remercier sinérement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Mes remerciement les plus chaleureux vont à tous mes camarades au Mastre 2 Mathématique "Probabilités et Statistique".

Résumé

Notre objectif dans ce mémoire est de concentrer sur les caractéristiques d'un mouvement Brownien fractionnaire (MBF) avec un exposant de Hurst $H \in]0,1[$,effectuer des simulation sous R concernant les trajectoires d'un movement brownien fractionnaire a l'aide de la méthode midpoint displacement (MID)et la décoposition de Cholesky avec une comparaison entre les deux Techniques

MOTS-clés : processus stochastique , Mouvement Brownien Fractionnaire,Méthode de Choleski,Méthode midpiont displacement(MID)

Abstract

Our aim in this dissertation is to focus on the general characteristics of a fractional Brownian motion (FBM) with a Hurt parameter $H \in]0,1[$, perform simulations in R concerning the trajectories of an FBM using midpoint displacement (MID) method and the Cholesky decomposition with a comparison between the two techniques

Key word :stochastic process, Fractional Brownian motin, Cholesky method Midpoint displacement method(MID).

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Le mouvement Brownien fractionnaire (noté par FBM fractionnl Brownian motion $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$) est un processus stochastique qui été introduit par Kolomogrov en 1940, puis généralisé par Mandelbrot et Van Ness 1968. Le FBM est principalement caractérise par un paramètre **H** avec $H \in]0,1[$ nomé paramétre de Hurst. Grace à ces proprités, il a attiré l'attention d'une grande partie de chercheurs dans le domaine des probabilités. Les auteurs dans[**?**] ont montré que le FBM est une généralisation du mouvement Brownien standard qui n'est pas un processus de Markov, n'est pas une semi-martingale sauf dans la cas $H = \frac{1}{2}$ et poassède des incréments non indépendants. C'est un processus gaussien avec une fonction de covariance $R_H(t,s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t-s|^{2H})$ qui offre à ces trajectoires une propriété Höldérienne d'ordre α(tq :$\alpha < H$).Une vaste gamme de processus qui se produisent dans des dispositifs de communication cellulaires, dans des systémes physique et biologiques et de même pour la finance et l'assurance peut être modélisés par le FBM [**?**].Dans ce contexte, ce mémoire est focalise sur les deux techniques de synthése du mouvement brownien[**?**],la méthode du déplacement du point milieu(midpoint displacement MID) et la techinque de synthése par la decomposition de Cholesky.Concernant Le présent manuscrit est structuré de la maniére suivante :
Chapitre 01 Donne d'une maniére détaillée des rappels concernant les processus stochastiques et le mouvement brownien standard.
Chapitre 02 présente les principales propiétés du mouvement brownien fractionnaire, et ainsi les nécessaires et suffisantes pour qu"un processus stochastique soit de type FBM.
chapitre 03 Comporte la simulation d'un mouvement brownien fractionnaire à l'aide de la décompostion de Cholesky et la méthode du déplacement du point milieu (midpoint displacement MID) avec une comparaison entre les deux techniques .
A la fin de ce maniscrit, une conclusion génerale est rédigée pour résumer le travail.

Chapitre 1

MOUVEMENT BROWNIEN

1.1 Quelque concepts de base

1.1.1 Définition d'un processus stochastique[?]

Définition 1.1.1 *(Processus stochastique)*
soit $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité.On dit un processus stochastique* X *indexé par* T *et à valeurs dans (E,*ξ*) est une famille d'application mesurable notée* $(X_t)_{t\in T}$ *ou* $\{\ X(t)\}_{t\in T}$, *où les variables aléatoires sont définies sur* (Ω, F, P) *et à valeurs dans (E,*ξ*) appelé espace des états.*

l'ensemble des observation disponible x(t),constitue une réalisation du processus. Un processus stochastique dépend donc à la fois du temps et du hasard, c'est donc une application :

$$\text{X :T x } \Omega \longrightarrow E$$
$$(t, \omega) \longrightarrow X(t, \omega)$$

— pour t fixé l'état du systéme est une variable aléatoire $\omega \longmapsto$ X(t,ω) désignée parX_t.
— pour ω fixé, les états successifs sont représentés par la fonction t$\longmapsto$X(t,ω) est trajectoire ou réalisation.

vocabulaire

— Si $T = N$ ou $T = Z$, on dit que X est une suite aléatoire.
— Si $T = R$ ou $T = R^+$,on dit que x est une fonction aléatoire.
— Si $T = Z^d$ ou $T = R^d$, on dit que X est une champ aléatoire.

— Si T est fini, X est simplement un vecteur aléatoire.

Définition 1.1.2 *(processus Gaussiens)*
Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ *est un processus gaussien, si tout sous-vecteur fini* $X_s = (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *(*$S=\{ t_1, ..., t_n\} \subset T$*) est un vecteur gaussien, c-à-d.tel que toute combinaison linéaire de ses composant est une aléatoire gaussienne.*

1.1.2 Comparaison de processus stochastiques

Définition 1.1.3 *(Modification de processus) Soit* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *deux processus définis sur (*Ω*,F,P).* $(Y_t)_{t\in T}$ *est une modification de* $(X_t)_{t\in T}$ *si :*

$$\forall t \in T, \exists N_t \in F, tel\ que\ P(N_t) = 0\ \ et\ \forall \omega \notin N_t, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$$

Définition 1.1.4 *(Indistinguabilité de processus)*
Soit $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *deux processus définis sur (*Ω*,F,P).*$(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont indistinguable si :*

$$\exists N \in F, tel\ queP(N) = 0\ \ et\ \forall t \in T, \forall \omega \notin N, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$$

Remarque 1.1.1 *si* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont* ***indistingabilité*** $\Longrightarrow$ $(X_t)_t \in T$ *et* $(Y_t)_t \in T$ *sont* ***modification*** $\Longrightarrow$ ***mémes lois finies dimensionnelles***

1.1.3 propriétés des processus stochastique

Définition 1.1.5 *(PROCESSUS STATIONNAIRE) Soit* $(X_t)_{t\in T}$ *un processus défini sur (*Ω*,F,P) à valeur dans (E,*ξ*).*

1. $(X_t)_{t\in T}$ *est stationnaire si* $(X_{t+h})_{t\in T}$ *a méme loi* $(X_t)_{t\in T}$ *pour tout h ou encore pour tout suit fini d'instants* $t_1 < t_2 < ...t_n$ *dans T ,pour tout* $n \in T$ *et pour tout h, les vecteur* $(X_{t_1+h}, ..., X_{t_n+h})$ *ont méme loi que* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$*.*
2. $(X_t)_{t\in T}$ *est faiblement stationnaire (ou stationnaire ou second ordre) si :*
   (a) *pour tout* $t \in T, \mathbb{E}[X_t^2] < \infty$
   (b) *Il esiste* $m \in \mathbb{R}$ *tel que,pour tout* $t \in T, \mathbb{E}[X_t] = m$*.*
   (c) *Il exist une fonction* $\gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}$ *tell que pour touts,* $t \in T$ *:* $cov(X_s, X_t) = \gamma(t - s)$

1.1.4 Processus de Markov

Définition 1.1.6 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus défini sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ à valeur dans (R, B_R), $F_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)$ la filtration naturelle du processus X_t.*
On que le processus X_t de $Markov \Leftrightarrow 0 \leq s \leq t$ et pour tout fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée,on a :$\mathbb{E}(f(X_t)/F_s^X) = \mathbb{E}(f(X_t)/X_s)$.

1.1.5 Martingale en temps continu [?]

Définition 1.1.7 *: Un processus $(X_t)_{t>0}$ adapté par rapport une filtration $(F_t)_{t\geq 0}$ et telque pour tout $t \geq 0$,$X_t \in L^1$ est appelé*
- *une martingale si pour $s \leq t$:$\mathbb{E}[X_t/F_s] = X_s$;*
- *une sur-martingale si pour $s \leq t$:$\mathbb{E}[X_t/F_s] \leq X_s$;*
- *une sous-martingale si pour $s \leq t$:$\mathbb{E}[X_t/F_s] \geq X_s$.*

Définition 1.1.8 *(Martingale locale)*
Un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est applé une martingale local (continue) s'il s'écrit $M_t = M_0 + N_t$ où
M_0 est une variable aléatoire$F_0 - mesurable$
$(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté à trajectoires continues avec $N_0 = 0$ et tel qu'il existe une suite croissante $(T_n)_{n\geq 0}$ de temps d'arrét avec $T_n \nearrow \infty$ et pour tout n le processus arrété $N^{T_n} estunemartingaleuniformmentintgrable$.

Définition 1.1.9 *(processus à variation finie)*
Un processus à variation finie $A = (A_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie.

Définition 1.1.10 *(Semi-martingale)*
Un processus $X_t = (X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martimgale continue s'il s'écrit sous la forme $X_t = X_0 + M_t + A_t$, où M est une martingale locale(issue de 0) et A est un processus à variation finie.

1.2 LE MOUVEMENT BROWNIEN

Définition 1.2.1 *:[?] soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus sur l'ecpase $(\Omega, F, \mathbb{P})$, on dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissement independants et stationnaires dont les trajectoires sont continues.ce qui sigifie que :*
- ***continuité** : $\mathbb{P}p.s$ la fonction $s \longmapsto X_s(\omega)$ est une fonction continue.*

— ***indépendance des accroissement*** *:* $s \leq t, X_t - X_s$ *est indépendant de la tribu* $F_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ *.*
— ***stationnarité des accroissements*** *:Si* $s \leq t$*, la loi de*$X_t - X_s$ *est indentique à celle de* $X_{t-s} - X_0$*.*

Remarque 1.2.1 *Un mouvement brownien est dit standard si :*
$X_0 = 0$ $\mathbb{P}p.s$ $,\mathbb{E}(X_t) = 0$ $,\mathbb{E}(X_t^2) = t$*.*

Théorème 1.2.1 *si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien , alors* $X_t - X_0$ *est une variable aléatoire gaussienne de moyenne* rt *et de variance* $\sigma^2 t, r$ *et* σ *étant des constantes réelles.*

Théorème 1.2.2 *si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien, si* $0 \leq t_1 < ... < t_n$ *,alors*$(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

1.2.1 Propriétés trajectorielle du mouvement Brownien [?]

Proposition 1.2.1 *1. Le mouvement brownien est à trajectoire continu* $\mathbb{P}p.s.$
2. Le mouvement brownien est à trajectoire n'est pas dérivable $\mathbb{P}p.s$

preuve 1 *1. On pour les fonction :*f *continu en* x_0 *si :* $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$*.*
Si on pos :$x - x_0 = h \Longrightarrow x = x_0 + h$*, alors il vient que :*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

d'ou

$$\lim_{h\longrightarrow 0}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

c'est à dire

$$\forall\varepsilon > 0 \mid f(x_0 + h) - f(x_0) \mid < \varepsilon$$

donc $(B_{tt\geq 0})$ *continu* $\mathbb{P}p.s$ *.si veut montrer que :*

$$\mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \varepsilon) \longrightarrow_{h\longrightarrow 0} 0 \ .$$

d'apre Inégalité de Tchebytchev ,on a :

$$P(/B_{t+h} - B_t| > \varepsilon) \leq \frac{var(B_{t+h} - B_t)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{t + h - t^2}{\varepsilon} = \frac{h^2}{\varepsilon} \longrightarrow_{h\longrightarrow 0}\longrightarrow 0$$

donc $\mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \varepsilon) \longrightarrow_{h\longrightarrow 0} 0$

Alors :$(B_t)_{t\geq 0}$ *continu* $\mathbb{P}p.s.$

2. On a pour les foctions : f dérivable en x_0 *si :*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\longrightarrow x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ existe$$

$$On\ a\ la\ v.aY = \frac{B_{t+h}-B_t}{\sqrt{h}} \rightsquigarrow N(0,1),\ et\ Mune\ constante\ on\ a\ :$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{B_{t+h}-B_t}{h}\right| > M\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{B_{t+h}-B_t}{\sqrt{h}}\right| > M\sqrt{h}\right) \\
&= \mathbb{P}\Big(|y| > M\sqrt{h}\Big) \\
&= \int_{|y|>M\sqrt{h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\Big(\frac{-1}{2}y^2\Big)dy \\
h \longrightarrow 0 \quad &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\Big(\frac{-1}{2}y^2\Big)dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{B_{t+h}-B_t}{h}\right| > M\right) \longrightarrow_{h\longrightarrow 0} 1$$

Donc le mouvement Brownien est à trajectoire n'est pas dérivable $\mathbb{P}p.s$.

1.2.2 Propriéte de martingale du mouvement Brownien

On note par $(F_t^B)_{t\geq 0}$ *la filtration engendrée par le mouvement Brownien.*

Théorème 1.2.3 *le mouvement Brownien est une martingale par rapport à la filtration canonique* $(F_t^B)_{t\geq 0}$.

preuve 2 *Evidente.*

Proposition 1.2.2 *1.* $X_t = (B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ *est une* $F_t^B - martingale$.

2. $Y_t = exp(B_t - \dfrac{\alpha^2}{2}t)_{t\geq 0}$ *est une* $F_t^B - martingale$.

preuve 3 *1. Evidente*

2. (a) *L'intégrabilité :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Y|] &= \mathbb{E}\left[exp\left|\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right|\right] = \mathbb{E}\left[exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t\right) exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(-\frac{x^2+\alpha^2 t^2 - 2\alpha x t}{2t}\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(-\frac{(x-\alpha t)^2}{2t}\right)dx = 1 < +\infty
\end{aligned}$$

(b) *puisque*Y_t *est une fonction continue de variables aléatoires*F_t^B−*msurables, alors*Y_t *est elle méme* $F_t^B - msurable$.

(c) *pour tout* $0 \leq s \leq t \leq +\infty$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t\ F_s^B] &= \mathbb{E}[Y_s \frac{Y_t}{Y_s} \backslash F_s^B],\ car\ Y_s > 0 \\
&= Y_s \mathbb{E}[\frac{Y_t}{Y_s} \backslash F_s^B],\ car\ Y_s\ est\ F_s - mesurable.
\end{aligned}$$

Il suffit de calculer la quntité $\mathbb{E}[\frac{Y_t}{Y_s} \backslash F_s^B]$ *, alors*

$$E[\ \frac{Y_t}{Y_s} \backslash F_s^B] = \mathbb{E}\left[exp\left\{\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\} \backslash F_s^B\right]$$

$$= E\left[exp\left\{\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\}\right], car B_t - B_s\ est\ indépedant\ de\ F_s^B$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right) exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} exp\left(-\frac{x^2 + \alpha^2(t-s)^2 - 2\alpha x(t-s)}{2(t-s)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} exp\left(-\frac{(x-\alpha(t-s))^2}{2(t-s)}\right)dx = 1.$$

Donc $E(Y_t \backslash F_s^B) = Y_s$.

Alors $Y_t = exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)_{t\geq 0}$ *est une* $F_t^B -$ *martingale.*

Proposition 1.2.3 *[?] Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien, alors :*
1. ***(Symétrique)****Le processus :* $X = (-B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien.*

2. le processus : $Y = (|B_t|)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien.*

3. ***(Inversion)****Le processus :* $Z = \begin{cases} 0 \text{ si : } t = 0 \\ tB_{\frac{1}{t}} \text{ si : } t > 0 \end{cases}$
est un mouvement Brownien

4. ***(Changement d'échelle)*** *Pour tout* $\lambda > 0$*, le processus* $B^\lambda = (\lambda B_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien.*

5. ***(Shifting)*** *Pour tout* $s > 0$*, le processus :* $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$*, est un mouvement Brownien indépendant de* $\sigma(B_u, u \leq s)$*.*

6. ***(Retournemt du temps)*** *Pour tout* $0 \leq t \leq r$*, le processus* $B_t^r = B_r - B_{r-t}$*,est un mouvement Brownien.*

Chapitre 2

MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

2.1 Définition Mouvement Brownien fractionnaire

Définition 2.1.1 *[?] soit* $(\Omega, F, F_t^{B^H}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré, on appelle le mouvement brownien faractionnaire (mbf) de parametre* $H \in]0,1]$ *est un processus Gaussien centré continu noté par* $(B_1^H)_{t\geq 0}$ *de fonction covariance donné par :*

$$R(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Remarque 2.1.1 *Le paramétre H est appelé paramétre de Hurst.*

Proposition 2.1.1 *[?]*

1. Si $H = \dfrac{1}{2}$ *,alors le mouvement Brownien fractionnaire est le mouvement Brownien standard.*

2. Si H=1 ,alors $B_t^H = tB_1^H$ *presque sûrement pour tout t*≥ 0.

preuve 4 *1. Nous voyons immédiatement que la covariance de* $B^{\frac{1}{2}}$ *réduire à* (s,t) *égale* $s \wedge t$*, ce qui donne* $B^{\frac{1}{2}}$ *est un mouvement Brownien standard.*

2. Si H=1, nous avons pour tout $t \geq 0$ *:*

$$R\left[(B_t^H - tB_1^H)^2\right] = R\left[(B_t^H)^2\right] + t^2 R\left[(B_t^H)^2\right] - 2tR\left[B_t^H B_1^H\right]$$

$= t^2 + t^2 \times 1 - 2t\left(\frac{1}{2}(t^2 + 1 - (1 - t^2))\right)$

$= 2t^2 - 2t^2 = 0.$

Donc on dit que $B_t^H = tB_1^H$ Pp.s .

Proposition 2.1.2 *Soit $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien Fractionnaire alors :*

$var(B_t^H) = t^{2H}$.

preuve 5 *on a :*
$var(B_t^H) = R(B_t^H, B_t^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + t^{2H} - |t-t|^{2H}) = \frac{1}{2}(2t^{2H})$

Proposition 2.1.3 *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien stationnaire et $X_0 = 0$, tel que $var(X) = t^{2H}$ alors X est un mouvement brownien fractionnaire de paramétre H.*

preuve 6 *Il suffit de montrer que la fonction de covariance de X est la quantité :*

$$R(X_t, X_s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$$

on a :

$$vav(X_t - X_s) = vav(X_t) + vav(X_s) - 2cov(X_t, X_s)$$

Alors :

$$\begin{aligned} cov(X_t, X_s) &= \frac{1}{2}\big(vav(X_t) + vav(X_s) - var(X_t - X_s)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(vav(X_t) + vav(X_s) - var(X_{t-s})\big) \\ &= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}) = R(X_t, X_s) \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2 Propriétés principales de mouvement brownien fractionnaire [?]

2.2.1 Auto-similarité

Définition 2.2.1 *on dit que Un processus $\{X_t, t \in R\}$ est auto-similarite d'indice $\beta > 0$ tel que :*
pour tout $\alpha > 0$ les processus $\{X_{\alpha t}, t \in R\}$ et $\{\alpha^{\beta} X_t, t \in R\}$ aient méme loi.

Théorème 2.2.1 *Le mouvement brownien de paramétre H est auto-similarité d'ordre H.*

preuve 7 *fixon $\alpha > 0$.Il est évident que $\{B^H_{\alpha t}, t \in R\}$ sont deux processus Gaussien centrés.Il suffit donc de montrer qu'ils ont la méme fonction de covariance .*
d'une part on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[B^H_{\alpha t} B^H_{\alpha s}\Big] &= \frac{1}{2}\Big(|\alpha s|^{2H} + |\alpha t|^{2H} - |\alpha t - \alpha s|^{2H}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\Big(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\Big) \end{aligned}$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\alpha^H B^H_t \alpha^H B^H_s\Big] &= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\mathbb{E}\Big[B^H_t B^H_s\Big] \\ &= \frac{1}{2}\alpha^{2H}\Big(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\Big) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.2.2 Accroissement stationnaire

Proposition 2.2.1 *Le mouvement Brownien fractionnaire $(B^H_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissement stationnaire.*

preuve 8 *comme $(B^H_t)t \geq 0$ est un processus Gaussien avec $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$, il suffi de vérifier :*

$$cov(B^H_{t_3} - B^H_{t_2}, B^H_{t_1} - B^H_{t_0}) = cov(B^H_{t_3+h} - B^H_{t_2+h}, B^H_{t_1+h} - B^H_{t_0+h})$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned}
cov(B^H_{t_3}-B^H_{t_2},B^H_{t_1}-B^H_{t_0}) &= cov(B^H_{t3},B^H_{t1})-cov(B^H_{t3},B^H_{t0})-cov(B^H_{t2},B^H_{t1})+cov(B^H_{t2},B^H_{t0})\\
&= \frac{1}{2}\Big(t_3^{2H}+t_1^{2H}-(t_3-t_1)^{2H}\Big)-\frac{1}{2}\Big(t_3^{2H}+t_0^{2H}-(t_3-t_0)^{2H}\Big)\\
&-\frac{1}{2}\Big(t_2^{2H}+t_1^{2H}-(t_2-t_1)^{2H}\Big)+\frac{1}{2}\Big(t_2^{2H}+t_0^{2H}-(t_2-t_0)^{2H}\Big)
\end{aligned}$$

En simplifiant terme à terme, on obtient :

$$cov\Big(B^H_{t_3+h}-B^H_{t_2+h},B^H_{t_1+h}-B^H_{t_0+h}\Big)=\frac{1}{2}\Big((t_3-t_0)^{2H}-(t_3-t_1)^{2H}+(t_2-t_1)^{2H}-(t_2-t_0)^{2H}\Big).$$

2.2.3 Non-Différentiabilité

Théorème 2.2.2 *Soit $t_0\in\mathbb{R}$,les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire $\mathbb{P}$.p.s non différentiable en t_0.*

preuve 9 $z=\dfrac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^H}\rightsquigarrow N(0,1)$ *et M une constante, on veut montrer que :*
$\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^H}\Big|>M\Big)\longrightarrow_{h\longrightarrow 0}1.$
on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^H}\Big|>M\Big) &= \mathbb{P}\Big(\Big|h^{1-H}\frac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^H}\Big|>Mh^{1-H}\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\Big|h^{1-H}\frac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^H}\Big|>Mh^{1-H}\Big)\\
&= \mathbb{P}(|Z|>Mh^{1-H})\\
&= \int_{|Z|>Mh^{1-H}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(\frac{-1}{2}z^2)dz\\
h\longrightarrow 0 &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{1}{2}z^2)dz\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc :

$$P\left(\left|\frac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h}\right|>M\right)\longrightarrow_{h\longrightarrow 0} 1$$

2.2.4 Un processus non-markovien

Théorème 2.2.3 *Soit* $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ *un procesus gaussien centré. Si* X *est un processus de Markov, alors* $\forall s < t < u$ *avec* $R(t,t) > 0$ *:*

$$R(s,u)R(t,t) = R(s,t)R(t,u)$$

où R *est la fonction de covariance de X.De plus ,si* $R(t,t) = 0$ *alors* $\{X_s : s \leq t\}$ *et* $\{X_s : s \geq t\}$ *sont indépendants.*

Corollaire 2.2.1 *Soit* $0 < H < 1$ *et* $H \neq \frac{1}{2}$

Le mouvement brownien fractionnaire $\{B^H_t : t \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas markovien.*

Le mouvement brownien fractionnaire $\{B^H_t : t \in \mathbb{R}^+\}$*n'est pas markovien.*

preuve 10 *1. S'il était markovien, comme on a*$R_H(0,0) = 0$*,le processus* $\{B^H_t : t \in \mathbb{R}^-\}$ *et* $\{B^H_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ *seraient indépendants, ce qui est absurde.*

2. S'il était markovien,sa fonction de covariance vérifierait,comme $1 < 2 < 3$*, on aurait :*

$$\begin{aligned}
R_H(1,3)R_H(2,2) &= R_H(1,2)R_H(2,3) && (2.3)\\
\frac{1}{2}(1+3^{2H}-2^{2H}).2^{2H} &= \frac{1}{2}(1+2^{2H}-1)\frac{1}{2}(2^{2H}+3^{2H}-1) && (2.4)\\
3+3^{2H}-3.2^{2H} &= 0 && (2.5)
\end{aligned}$$

Aprés l'étude de la fonction$H \longrightarrow 3+3^{2H}-3.2^{2H}$*,on voit que cette fonction ne s'annule que pour* $H = \frac{1}{2}$ *et pour H=1 (cas exclu par définition).Le seul cas possible(H=* $\frac{1}{2}$*)correspondceluimouvementbrownienordinairequiestmarkovien.*

2.2.5 propriété de Hölder [?]

Définition 2.2.2 *On rappelle qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^{\prime} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* $\alpha - Hldrienne, s'ilexiste$ *C>0 telque* :

$$\| f(x) - f(y) \|_{\mathbb{L}^d} \leq C \| x - y \|_{\mathbb{L}^p}^{\alpha}$$

Théorème 2.2.4 *(de KOLMOGROV)*
Soitx_t *un processus a valeur réelle pour lequel il existe trois constantes strctement positives*γ, c, ε*telque :*

$$E[|X_t - X_s|^{\gamma}] \leq |t-s| \leq^{d+\varepsilon}$$

Alors il existe une modification $\widetilde{X}$ *de X telque*

$$E[(\sup_{t \neq s} |\widetilde{X}_t / |t-s|^{\alpha})^{\gamma}|] < \infty$$

pour chaque $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma]$
En particulier les trajectoire de $\widetilde{X}_t$ *sont Hölder continues de paramétre* α.

Proposition 2.2.2 *Les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont Höldériens continues de paramétre* $\alpha < H$.

preuve 11 *on a :* $R\left[|B_t^H - B_s^H|\right] = R\left[|B_{t-s}^H|^2\right] = |t-s|^{2H}$.
Si on prend : $\gamma = 2, c = 1, etc + \varepsilon = 2H$ *d'où :*$\varepsilon = 2H - 1$, *d'aprés le théoréms de Kolmogrov ,*$B_t^H unemodification \widetilde{B}_t^H$ *dont les trajectoires sont Höldériens continues de paramétre :* $\alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right[= \left[0, \frac{2H-1}{2}\right[= \left[0, H - \frac{1}{2}\right[$.
On a prouvé que $\widetilde{B}_t^H$ *est Höldérienn continue de paramétre* $\alpha < H$.

2.2.6 la variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire

Théorème 2.2.5 *Soit $\{B_t^H\}$ un mouvement fractionnaire de paramétre H. on a :*

$$\begin{aligned}\left\langle B^H\right\rangle_t &= 0,\ \forall t\in\mathbb{R}\ pour H > \frac{1}{2}.\\ \left\langle B^{\frac{1}{2}}\right\rangle_t &= t,\ \forall t\in\mathbb{R}\\ \left\langle B^H\right\rangle_t &= 0,\ \forall t\in\mathbb{R}^*\ pour H < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

preuve 12 *Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$, et $\{\Delta_n : 0 =< t_1 < t_1 < ... < t_n = t, n\in\mathbb{N}^*\}$ une*

suite de subdivision de [0, t] dont le pas $|\Delta_n|_{n\longrightarrow+\infty}\longrightarrow 0$.

Considérons$T_t^{\Delta_n} = \sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_k+1}^H - B_{t_k^H})^2$

1ercas :H> $\frac{1}{2}$.
Nous allons donc montrer la convergence dans $\mathbb{L}^1 de T_t^{\Delta_n}$ vers 0.

la stationnarité des accroissements, on a :

$$\begin{aligned}
R[T_t^{\Delta n}] &= R\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_k+1}^H - B_{t_k^H})^2\Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R\Bigg[(B_{t_k+1}^H - B_{t_k^H})^2\Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} var(B_{t_k+1}^H - B_{t_k^H}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} var(B_{t_{k+1}-t_k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}-t_k|^{2H} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}-t_k||t_{k+1}-t_k|^{2H-1} \\
&\leq |\Delta n|^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1}|t_{k+1}-t_k| \\
&\leq |\Delta n|^{2H-1}t.
\end{aligned}$$

comme $H > \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2H-1>0$, *on a danc :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |\Delta n|^{2H-1}t = 0$
Alors : $T_t^{\Delta_n} \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty}^{\mathbb{L}^{\mathbb{K}}} 0.$
$2^{me}cas : H < \dfrac{1}{2}$
Nous allons montrer la divergence de$T_t^{\Delta_n}$*ver* $+\infty$.
Appelons a l'ensemble des subdivisions de [0,t]dont le pas tend vers 0 et considérons :
$D_n = \sup_{\Delta_n} R[T_t^{\Delta n}] = R\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_k+1}^H - B_{t_k^H})^2\Bigg]$,*ceci est donc minoré par la subdivision* $\tau_i = \dfrac{it}{2^n}$ *on a donc :*

$$
\begin{aligned}
D_n &\geq R\Big[\sum_{i=0}^{2n}(B^H_{\tau_i} - B^H_{\tau_{i-1}})^2\Big] \\
&\geq \sum_{i=0}^{2n} R\Big[(B^H_{\tau_i} - B^H_{\tau_{i-1}})^2\Big] \\
&\geq \sum_{i=0}^{2n} var(B^H_{\tau_i} - B^H_{\tau_{i-1}}) \\
&\geq \sum_{i=0}^{2n} var(B^H_{\tau_i - \tau_{i-1}}) \\
&\geq \sum_{i=0}^{2n} |\tau_i - \tau_{i-1}|^{2H} \\
&\geq \sum_{i=0}^{2n} |\frac{it}{2^n} - \frac{(i-1)t}{2^n}|^{2H} \\
&\geq \sum_{i=0}^{2n} |\frac{t}{2^n}|^{2H} \\
&\geq (2^n+1)|\frac{t}{2^n}|^{2H} \\
&\geq (t)^{2H}(\frac{1}{2^{n(2H-1)}} + \frac{1}{2^{2nH}})
\end{aligned}
$$

comme $H < \dfrac{1}{2}$ *alors*$2H - 1 < 0$ *et* $2H > 0$*on a donc :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n(2H-1)}} = +\infty \ et \ \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2^{2nH}} = 0.$$

2.2.7 Le mouvement brownien fractionnare n'est pas une semi-martingale

Théorème 2.2.6 *Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas semi-martingale pour* $H \in (0,1)\backslash\{\dfrac{1}{2}\}$

2.3 Quelque Représentation de Mouvement Brownien Fractionnaire [?]

2.3.1 Représentation Intégrale par Moyenne Mobile du FBM

Soit $0 < H < 1$.Alors tout mouvement browinien fractionnaire $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ posséde la représentation intégrale :

$$B_t^H = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left([(t-x)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-x)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_x, \forall t \in \mathbb{R}.$$

où

$$C_1(H) = \left(\int_{\mathbb{R}} \left([(t-x)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-x)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dB_x + \frac{1}{2H} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.3.2 Représentation Harmonisble du MBF

Soit $0 < H < 1$. Alors tout mouvement brownien fractionnaire$(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ posséde la représentation harmonisable

$$B_t^H = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{jt\xi} - 1}{j\xi} |\xi|^{-(H-1/2)} \hat{W}(\xi)$$

ou

$$B_t^H = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{jt\xi} - 1}{|\xi|^{H+1/2}} \hat{W}(\xi)$$

avec la constante de normalisation
$C_2(H) = \sqrt{\frac{\pi}{H\Gamma(2H)sin(H\pi)}}$

2.3.3 Représentation de Volterra

Soit $t \in (0,1)/\frac{1}{2}$ Alors tout mouvement brownien fractionnaire$(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ posséde la représentation de volterra :

$$B_t = \int_0^t K_H(t,s) dW_s.avec$$

$$K_H(t,s) = \Gamma(H + \frac{1}{2})^{-1} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} F\left(H - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - H, H + \frac{1}{2}, 1 - \frac{t}{s} \right).$$

Chapitre 3

Quelque méthodes de synthése du movement Brownien fractionnaire

Dans ce chapitre nous essayons de réaliser des simulations de trajectoires d'un MBF basées sur la méthode de Cholesky et la méthode déplacement du point milieu (midpoint displacement MID) sous le langage R, ensuite nous exposons quelques resultats de comparaison entre les deux méthodes.

3.1 Méthode Cholesky

la méthode de cholesky est basée sur les étapes suivantes[?] :

— soit Γ la matrice de covariance du MBF discrétisée aux instants $t_i = \frac{i}{n}/i = 0, ..., n-1$ On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j} &= cov(B_{t_i^H}, B_{t_j^H}) \\
&= \frac{1}{2}(|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}(|\frac{i}{n}|^{2H} + |\frac{j}{n}|^{2H} - |\frac{i}{n} - \frac{j}{n}|^{2H})
\end{aligned}$$

— Posons Γ' la matrice Γ privée de sa premiére lige et sa premiére colonne, par la décomposition de Cholesky nous pouvons écrire $\Gamma' = LL^T$ avec L est une matrice triangulaire inférieure(puisque Γ'est une matrice définie positive et symétrique).

— la simulation d'une trajectoire d'un MBF aux instants $t_i = \frac{i}{n}$est effectuée par unvecteur aléatoire suivante :

$$B^H = (0, (LY)^T)^T \tag{3.1}$$

(ou le vecteur B$^H dfinitunetrajectoirediscrtised'unMBFauxinstantst_i = \frac{i}{n}$)

En effet, le vecteur LY est un vecteur gaussien centré et de plus

$$E(LY(LY)^T) = LE(YY^T)L^T = LL^T = \Gamma \tag{3.2}$$

Finalement, l'ordre de complexité des calculs de cette méthode est $O(n^3)$

3.2 Programme de simulation d'un MBF sous R avec la méthode de Cholesky :

n<-scan(n=1) # nombre de points.

$H < -c(0.2, 0.5, 0.7)$ #Les différentes veleurs de H.

```
time<-(0 :(n-1))/n
m<-length(time)
a<-matrix(0,m,m)
for(i in (1 :3)){a[i,j]<fbm(H[i],n)}
———-Ploting FBM——————————————————
laout (matrix(1 :3,3,1)
plot(time,a[1,],type="l",main="mbfavec paramatre H=0.2",Xlab="t",ylab="fbm(t)",
col="blue")
grid()
plot(time,a[2,],type="l",main="mbfavec paramatre H=0.5",Xlab="t",ylab="fbm(t)",
col="blue")
grid()
plot(time,a[3,],type="l",main="mbfavec paramatre H=0.7",Xlab="t",ylab="fbm(t)",
col="blue")
grid()
———-fbm function——————————————————
fbm<-function(H,n){
H2<-2*H
matcov<-matrix(0,n-1,n-1)
for(i in (1 :(n-1))){
j<-i :(n-1)
r<-0.5*(abs(i)^H2 + abs(j)^H2 - abs(j - i)^H2
```

$r < -r/n^H 2$
$matcov[i, j] < -r$
$matcov[j, i] < -matcov[i, j]$
$\}$
$L < -chol(matcov)$
$Z < -rnorm(n - 1)$
$fbm < -t(L)\%{}_{\text{¸}} * \%{}_{\text{¸}} Z$
$fbm < -c(0, fbm)$
$return(fbm)$
$\}$

3.3 Résultats de simulation

FIGURE 3.1

3.4 La méthode du déplacement du point milieu(midpoint displacement MID

Cette technique est basée sur la propriéte du mouvement brownien fractionaire (MBF) suivant :

$$Var(B^H_{t_1} - B^H_{t_2}) = \delta(t_1 - t_2)^{2H}$$

Avec δ une constante de proportionnalité.C'est une méthode iterative, dans chaque étape on donne àun point situé au des deux points t_1 et t_2 une valeur qléatoire gaussienne centrée sur la moyenne de t_1 et t_2 et de variance définie par la reletion précédente .Dans la premiére étape on pose $B^H_0 = 0$ et B^H_1 comme étant une realisation q'une v.a gaussienne de moyenne nulle et de variance donné par la relation ci-dessus. Donc on effectue au point $1/2$ la moyenne de $B^H_0 = 0$ et B^H_1 plus une valeur N_1 (avec N_1 est aléatoire gaussienne de Moyenne nulle et de variance définie ci-dessus).Les autres pionts sont construits itérativement avec la méme maniére.Les auteurs dans[**?**]ont montré que :

$$Var(N_n) = \frac{\delta}{(2^n)^{2H}}(1 - 2^{2H-2})$$

Tel que N_n la v.a gaussienne qu'on ajoute dans chaque étape

3.5 Programme de simulation d'un MBF sous R avec la méthode midpoint displacement MID :

h le paramétre de Hurst
m le nombre qui determine le nombre des échantillons du$MBF = 2^m$.Dans notre
cas$\delta = 1$

---

h<-scan(n=1)
m<-scan(n=1)
N<-$2^{(m)}$
$x < -matrix(0, 1, N+1)$
$s < -matrix(0, 1, N+1)$
$x[1] < -0$
$-----------------------------------$
$-----------------------------$
$x[N+1] < -rnorm(1, 0, 1) * 2^{(m*h)}$
$s[1] < -sqrt(1 - 2^{(2*h-2)})$
$-----------------------------------$
$-----------------------------$
$for(iin(1:m))\{$
$for(jin(0:2^{(i-1)} - 1)\{$
$k < -2^{(m+1-i)}$
$disp < -rnorm(1, 0, 1) * s[i+1] * 2^{(h*m)}$
$x[(k*j + k*(j+1))/2 + 1] < -disp + (x + [k*(j+1) + 1])/2$
$\}$
$\}$
$-----------------------------------$
$-----------------------------$
$time < -(0:N)/n$
$plot(time, x, type = "l", main = paste("mbfavecleparamtreH = ", h), xlab = "t", ylab = "fbm", col = "blue")$
$grid()$

3.6 Résultats de simulation avec la méthode midpoint displacement

FIGURE 3.2

Synthése des résultats :

D'aprés l'article [?]les auteurs ont effectué un ensemble de test statistique sur les différentes techniques de synthése d'un mouvement brownien fractio|nnaire(MBF) tel que : test de normalité,test de ststionnarité des incrément et test de similarité des incrément de synthése d'un (MBF) sous forme d'un pourcentage.D'aprés [?]le tableau ci-dessous indique la difference en qualité des méthodes Cholsky et Midpoint displacement(MID)

H	MID	CHOL
0.2	28.8%	98.1%
0.5	99.3%	96.4%
0.8	82.3 %	95.0%

Finalement, d'aprés le tableauci-dessus on peut déduire que la méthode de synthése MID est efficace si $H >= 5$mais la méthode CHOL est pour tout $H \in]0, 1[$

Conclusion general

Durant la preparation de ce modeste travail que nous nous sommes fixé, nous avons essayé de donner d'une maniére globale la majorité des propriétés concernant les processus stochastiques et le mouvment Brownien standard dans le premier volet, puis nous avons focalise sur le mouvment Brownien fractionnaire(MBF) et ses caractéristique de base. A la fin de mémoire nous avons effectué des simulation d'un mouvement Brownien fractionaire sous R à l'aide de la méthode du déplacement du point milieu (midpoint displacement MID) et la décomposition de Cholesky avec une comparaison entre les deux techniques. Finalement nous espérons avoir la capacité de continuer à explorer le vaste domaine du calcul stachastique fractionnaire.

Bibliographie

[1] Banna,Oksana ;Mishura,Yuliya ;Ralchenko,Kostiantyn,Fractional Brownian Motion : Appraximations and Projections,John Wiley Sons 2019.

[2] Rachid JENNANE ? Rachid HARBA,Gérard JACQUET, Estimation de la qualité des méthodes de synthése du mouvement Brownien fractionnair, Traitement du Signal 1996-Volume 13-n°4

[3] Jeanblanc, M(2006).cour de calcul stochastique.Master 2IF EVRY, lecture notes ,Universities de Evry.

[4] Jean-Christophe BRETON,processus stochastiques.M2 Mathématique .Universitié de Rennes 1.October-Décember 2020.

[5] Damien LABERTON.Bernard LAPEYRE. Introduction au calcul stochastique Applique à la Finance.

[6] Jean-Christophe BRETON, Processus Gaussiens. Master IMA 2éme année.Universitié de la ROCHELLE. septembre-Décembre 2006.

[7] Labed B.cours de Mouvement Brownien et calcul stochastique.Université de Biskra. département de mathématique.master 2.

[8] Ivan Nourdin,Selected Aspects of Fractionnal brownian Motion.Série Bocconi springer 2012.

[9] Mandelbrot.B. Van-Ness,J.W(1968).Fractional Brownain motions,Fractional noises and applications.SIAM.Rew(vol :10).

[10] Kaouch,R.QueQues propriétés du Mouvement Brownien classique et Mouvement Brownien Fractionnaire,(le Modele de Black et scholes).Université Mentouri Constantine,département de mathématique.

[11] DANIEL.R(F.Paris 7),MARCY(F.paris 6).continuous Martingales and Brownian Motion.Third edition.Springer-Verlag,Berlin 1999.

[12] SAMORODN,TSKY,G.et MsTAQQU.1994,stable non Gaussin random proessus :stochastic models with infinite.Variance,vol.1,CRC press

[13] A.Fournier,D Fusselle,L. Carpenter "Computer Rendering of Stochastic Models", Communications of the ACM 25,1982,pp.371-384.

[14] B.B.Mandeibrot," Comment on Computer Rendering of Fractal Stochastic Models", Communications of the ACM 25,1982,pp.581-583.

[15] Jean-Francois Coeurjolly,Simulation and identification of the fractional Brownian motion :a bibliographical and comparative study, journal of ststistical software, vol5(2000) ;issue7.

[16] Rachid JENNANE ? Rachid HARBA,Gérard JACQUET, Estimation de la qualité des méthodes de synthése du mouvement Brownien fractionnair, Traitement du Signal 1996-Volume 13-n°4