République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA**

Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER** en Mathématiques

Option **: Probabilités Et Statistique**

Par : ***Benhamed Asma***

Titre :

# *Les équations différentielles stochastiques de McKean Vlasov*

Membres du Comité d'Examen :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| . | **Hanane Ben Gherbal** | **M.C.B** | ENS, OUARGLA | Encadreur |
| | **Abdelkader Amara** | **M .C .A** | UKM, OUARGLA | Président |
| | **Ibrahim Mansoul** | **M .A .A** | UKM, OUARGLA | Examinateur |

29 Juin 2021

## Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère **Fatima zohra**

source de tendresse, pour tous sa sacrifices, sa amour, sa soutienet sa prières tout au long de mes études,

Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon très cher Père **Ebd Elkader**

Tu représentes pour moi le symbole de tous mes progrés,ma capillaire atteint les ranges les plus élevés .je remercier pour tes encouragements et ton aide pour continuer mes études.Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A ma grand mère **zohra**

A mes chères sœurs,**Amani,**son mari et ses enfant**,Tala,**son mari et sa fille,**Aya** et ma belle **khadidja**

À mes chers frères,**Chorfi**,**Elhouari**,**Mouhammed LAide, Saddam**,leurs femmes et leurs enfants,mon bon frère **Hamed ,Derdya**

A mes belles **Nahla,Hind,Radja,Noussaiba,Lamisse,Khawla**

A mes chéres amies dans la chambre **Safa** ,**Fatima** et **Siham**

A tout ma famille,mes oncles,tantes,mes cousins et mes cousines

A mon fiancé **Abd Elhafid**

A mes chéres amies, et cheres collègues

enfin , je vous dédie ce travail et je pris

Allah de leur accorder longue vie et bonne santé

ASMA

## REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant sincèrement«**Allah**» le tout puissant de m'avoir donné le force et la patience et le courage pour terminer ce travail.

j'exprime mes profondes gratitudes à mes parents, ,

Je tiens à remercier infiniment mon encadreur **Dr.Ben Gherbal Hanane** de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire. Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu,

Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin 'adresse mes remerciements les plus chaleureux à toutes ma famille ,mes amies et toute personne qui m'ont toujours soutenus et encoragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci a tous et a toutes.

# Table des matières

# Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à un type speicial des (EDSs), appelées les équations différentielles stochastiques (EDS) de McKean-Vlasov ou encore de type mean field. Les (EDSs) de type mean field, également appelées EDS au champ moyen, ont d'abord été étudiées en physique statistique, ces EDSs représentent en quelque sorte le comportement moyen d'un nombre infini de particules. Ces équations ont joué un rôle important dans la théorie des jeux, cette théorie a été inventée par P.L. Lions et J.M. Lasry en 2006, pour résoudre le problème de l'existence d'un équilibre de Nash approximatif pour les jeux différentiels, avec un grand nombre de joueurs. D'autre part, ce type d'équations a trouvé des applications dans d'autres domaines tels que la finance mathématique, les réseaux de communication et la gestion des ressources pétrolières.

Pour un paire de fonctions $b : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times d}$, l'équation différentielle stochastique de McKean Vlasov est défini par :

$$dX_t = b(X_t, \mathbb{P}_{X_t})dt + \sigma(X_t, \mathbb{P}_{X_t})dW_t \qquad t \in [0, T] \tag{1}$$

Ici $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace de toutes les distributions de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ doté de la topologie faible et $P_{X_t}$ est la distribution de $X_t$ est un membre de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. $W_t$ est un processus de Wiener de dimension $d$, nous utiliserons $\mathcal{M}(E)$ pour désigner l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur un espace polonais $E$ avec la topologie faible et $C\,[0, T]$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$.

Cette étude est motivée par le comportement de grandes populations en interaction, d'ou le processus (1) est intéressant car il décrit le comportement individuel asymptotique d'un grand système de diffusions,

$$\begin{cases} dX_t^{N,i} = b(X_t^{N,i}, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{X_t^{N,j}})dt + \sigma(X_t^{N,i}, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{X_t^{N,j}})dW_t^i \\ X_0^{N,i} = x_0 \in \mathbb{R}^d \qquad i = 1, ..., N \end{cases} \tag{2}$$

où $\delta_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ est la mesure de probabilité se concentrant sur $x$ et $W^1, W^2, ..., W^N$ sont $N-$ processus de Wiener indépendants.Dans la suite, on note $U_N$ pour la variable aléatoire $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{X^{N,i}}$ avec des valeurs dans $\mathcal{M}(C\left[0,T\right])$, et $\eta^N$ pour sa distribution $\eta^N \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(C\left[0,T\right]))$ Pour tout $u \in \mathcal{M}(C\left[0,T\right])$ et $\eta \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(C\left[0,T\right]))$, $u_t$ et $\eta_t$ dénoteront leurs distributions marginales au temps $t$.Ainsi $u_t \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\eta^t \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.En effet s'il y a deux fonctions bornés et Lipschitziennes $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $g$ :$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ telles que pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

$$b(x,m) = \int f(x,y)dm(y) \text{ et } \sigma(x,m) = \int g(x,y)dm(y), \tag{3}$$

alors la distribution $\mu_N$ de $X^N = (X_.^{N,1}, ...., X_.^{N,N})$ dans (2) est $\mu-$chaotique où $\mu$ est la distribution de $X$ au sens suivant : pour toute $k$ fonction $f_1, .., f_k \in C_b(C\left[0,T\right]$ nous avons :

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C[0,T]} f_1\left(x_1\right) ....f_k\left(x_k\right) d\mu_N(x_1, ..., x_k) = \prod_{i=1}^{k}\int_{C[0,T]} f_i(x)d\mu\left(x\right) \tag{4}$$

Notez que $\eta_N \in \mathcal{M}(C\left[0,T\right])^N)$ et $\mu \in \mathcal{M}(C\left[0,T\right])$ dans l'équation (2). L'équation (4) dite le premier $k$ $-$composants de (2) deviennent asymptotiquement indépendants et ont asymptotiquement la même distribution $\mu$ .Cela explique le terme "chaotique". équivalent à $U^N \to \mu$ en distribution $\left(\eta^N \xrightarrow{w} \delta_\mu\right)$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{M}(C\left[0,T\right]))$.

L'exigence que $b$ et $\sigma$ satisfont (3) avec $f$ et $g$ lipschitzienne bornées donne l'avantage que l'on considère comme des fonctions définis sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ , $b$ et $\sigma$ sont tous les deux continus. Ce fait est essentiel en prouvant l'existence et l'unicité de la solution de (1.2) dans [8], où un théorème de point fixe basé sur la continuité de $b$ et $\sigma$ a été utilisé.

Dans ce mémoire on s'intérèsse à une classe encore plus naturelle et générale où les coefficients de dérive et de diffusion $b$ et $\sigma$ ne peuvent être définis que presque partout et ils peuvent avoir une croissance linéaire bornée dans les deux variables, qui est le contenu de l'article [1], la rééférence de base de ce mémoire qui est s'articule autour de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne les notions de base du calcul stochastique, on fait rappel aux équations différentielles stochastiques (EDS), on donne leurs propriétés générales ainsi que le théorème d'existence et d'unicité, ainsi un rappel sur le problème de martingale.

Dans le Deuxième chapitre**,** Nous montrons d'abord que $\mu^N$ est tendue, et montrons que tout point limite de $\mu^N$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{M}(C\,[0,T]))$ est supporté sur les solutions de problème de martingale posées par (1) Ceci implique l'existence d'une solution faible pour (1).

Dans le dernier chapitre, nous prouvons l'unicité trajectorielle de la solution en comparant la solution de (1) avec ses diffusions en interaction correspondantes.Il semble difficile de considérer directement la différence de deux solutions et de prouver qu'elles sont identiques car $b$ et $\sigma$ peuvent ne pas avoir de domaine de définition commun dans notre cas qui est plus générale.

# Chapitre 1

# Rappels sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre introductif nous rassemblons les notions basique de théorie de calcul stochastique qui seront utilisées dans la suite. Nous commençons par défnir le processus stochastique, mouvement Brownien, l'intégrale stochastique, l'équations différentielles stochastiques, ainsi un rappel sur le problème de martingale.. Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

## 1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Pour représenter un phénomène aléatoire dépendant du temps, le modèle mathématique est donné par :

1. Un espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$,
2. une fonction

$$\begin{aligned} X : (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}) &\longmapsto (E, \xi) \\ (t, \omega) &\longmapsto X\ (t, \omega). \end{aligned}$$

Pour chaque $t$ fixé, l'état du système est une variable aléatoire c'est à dire $\omega \longmapsto X\ (t, \omega)$ est mesurable.

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \curvearrowright X\ (t, \omega)$ est appelée une trajectoire.

**Définition 1.1.1** *(processus) soit $T$ un ensemble d'indices $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N})$ on appelle processus* *stochastique défini sur* $T$ *à valeur dans* $(E,\zeta)$ *,une famille* $(X(t))_{t\in T}$ *d'applications mesurables de* $(T\times\Omega,\mathcal{B}(\mathcal{T})\otimes\mathcal{F})$ *dans* $(E,\zeta)$ *; pur tout* $t\in T$*,* $X(t)$ *est une variable aléatoire.*

**Définition 1.1.2** *(Modification d'un processus) On dit que deux processus* $(X(t))_{t\in T}$ *et* $(Y(t))_{t\in T}$ *définis sur le même espace de probabilité* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *sont modifications l'un de l'autre si*

$$\forall t\in T,\ X(t)=Y(t)P_{.p.s}$$

*C'est équivalent à dire*

$$\forall t\in T,\exists N_t\ p(N_t)=0\ et\ \forall w\in N_t,\ X(t,w)=Y(t,w).$$

**Définition 1.1.3** *(Processus indistinguables) Deux processus* $(X(t))_{t\in T}$*et* $(Y(t))_{t\in T}$ *sont indistinguables si*

$$P(X(t)=Y(t),\forall t\in T)=1$$

*C'est équivalent à dire*

$$\exists N,P(N)=0,\forall w\notin N,X(t,w)=Y(t,w).$$

**Remarque 1.1.1** *Il est clair que si* $(X(t))_{t\in T}$ *et* $(Y(t))_{t\in T}$ *sont indistinguables alors ils sont modifications l'un de l'autre. La réciproque est généralement fausse.*

**Définition 1.1.4** *(Filtration) soient* $(\Omega,\mathcal{F},P)$*un espace de probabilité et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$*une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *au sens où,* $\forall s\leq t,\ \mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$*.* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelée filtration de* $(\Omega,\mathcal{F},P)$*.*
*On dit que* $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F})_{t\in\mathbb{R}_+},P\right)$ *est un espace de probabilité filtré.*
*A un processus stochastique* $X$ *on associe sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^X$*, c'est à dire la famille croissante de tribus* $\mathcal{F}_t^X=\sigma\{X_s,s\leq t\}$*.*

**Définition 1.1.5** *(Processus mesurable ) On dit qu'un processus* $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est mesurable* *si l'application*

$$(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \mapsto (E, \zeta)$$
$$(t, w) \mapsto X(t, w)$$

$(\zeta, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ *mesurable.*

**Définition 1.1.6** *(Processus progressivement mesurable) On dit qu'un processus* $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est progressivement mesurable si l'application*

$$([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}) \mapsto (E, \zeta)$$
$$(s, w) \mapsto X(s, w)$$

$(\zeta, B([0, t]) \otimes \mathcal{F})$ *mesurable.*

**Définition 1.1.7** *(Processus adapté) Soit* $(X(t))_t$ *un processus défini sur* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P\right)$ *on dit que* $(X(t))$ $t \in \mathbb{R}_+$ *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté si* $\forall t \in \mathbb{R}_+$, *la variable aléatoire* $X(t)$*est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable.*

**Remarque 1.1.2** *Un processus* $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$*est toujour adapté à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s), s \leq t)$.

**Définition 1.1.8** *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications* $t \rightarrow X_t(w)$ *sont continues pour presque tout* $w$. *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Meme définition pour càglàd.*

**Définition 1.1.9** *(Martingale continue ) Un processus* $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est dit* $\mathcal{F}_t$ $-$*martingale continue si*

1. $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est $\mathcal{F}_t-$adapté,
2. $\forall t \geq 0$, $M(t)$ est intégrable, c'est à dire $E(|M(t)|) < \infty$,

3. $\forall 0 \leq s \leq t, E(M(t)/\mathcal{F}_s) = M(s)$.

De la même manière, on définit une sous martingale si (3) est remplacé par

$$\forall 0 \leq s \leq t; E(M(t)/\mathcal{F}s) \geq M(s) \qquad ,$$

et une sur martingale si (3) est remplacé par

$$\forall 0 \leq s \leq t; E(M(t)/\mathcal{F}_s) \leq M(s)$$

**Définition 1.1.10** *(Mouvement Brownien) le processus* $(W(t), t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien* $(standard)$ *par rappport à la filtration*$(\mathcal{F})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *si et seulement si :*

1. $P(W_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
2. $\forall s \leq t; W(t) - W(s)$ est une variable réelle de loi gaussienne, centré de variance $(t-s)$ $c - \grave{a} - d\ W(t) - W(s) \rightsquigarrow N(0; t-s)$

   "accroissements stationnaires".
3. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 ..... \leq t_n$, les variable aléatoire $(W(t_n) - W(t_{n-1}), ....., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0}$ sont indépendantes"accroissements indépendantes".
4. $\mathbb{P}.p.s\ t \mapsto W_t(w)$ est continue.

**Théorème 1.1.1** *( Paul Levy ) Soit* $X_t(w)$ *un processus continue, alors* $X_t(w)$ *est un mouvement brownien si et seulement si*

1. $X_t$ *est une martingale*
2. $(X_t^2 - t)$ *est une martingale.*

L'idèe est d'utiliser l'indépendance des accroissements pour calculer les espérances conditionnelles, et d'utiliser la propriété $E(X/\mathcal{G}) = E(X)$ quand $X$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes. Soit $s \leq t$.

$$E(W_t/\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s/\mathcal{F}_s) + E(W_s/\mathcal{F}_s) = 0 + W_s$$

De même

$$E((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s) = t - s$$

et

$$E((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s) = E(W_t^2 + W_s^2 - 2W_tW_s/\mathcal{F}_s) = E(W_t^2/\mathcal{F}_s) + W_s^2 - 2W_sE(W_t/\mathcal{F}_s) = E(W_t^2/\mathcal{F}_s) - W_s^2$$

On obtient alors

$$E(W_t^2 - t/\mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$$

## 1.2 L'intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien $W$ sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

On cherche maintenant à définir l'intégrale stochastiques

$$\int_0^t \theta_s dW_s \tag{1.1}$$

**Cas des processus étagés** les processus étagés sont du type

$$\theta^n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \theta_i 1_{\left[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\right]}(t)$$

où, $p_n \in \mathbb{N}, \left\{t_i^{(n)}\right\}$ une suite croissante de $[0; T]$, et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$, pour tout $i = 0, .., p_n$ :
On défini $I(\theta^n)$ par

$$I(\theta^n) = \sum_{i=1}^{p_n} \theta_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

On peut vérifier que

$$E(I(\theta^n)) = 0, \text{ et } Var(I(\theta^n)) = E\int_0^T (\theta^n(s))^2 \, ds$$

**Cas général**

Soit $\Upsilon$ l'espace des processus $\theta$ càglàd (c'est à dire, continue à gauche limité à droite), $\mathcal{F}_t$-adapté tel que

$$\|\theta\|^2 = E(\int_0^T |\theta(s)|^2 \, ds) < \infty.$$

Les processus étagés sont dans $\Upsilon$ : On dit que $\theta^n \to \theta$ dans $L^2(\Omega \times [0,T])$ si $\|\theta^n - \theta\|_2^2 \to 0$. On peut définir $I(\theta)$ pour tout $\theta \in \Upsilon$, on approche $\theta$ par une suite de processus étagés donnée par (1.1), la limite étant dans $L^2(\Omega \times [0;T])$. L'intégrale $I(\theta)$ est alors $limI(\theta^n)$ avec :

$$E(I(\theta)) = 0, \text{ et } var(I(\theta)) = E\left(\int_0^T \theta^2(s) \, ds\right).$$

On note $\Lambda$ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus $\theta$ adaptés càglàd vérifiant

$$E(\int_0^t \theta_s^2(w) \, ds < \infty, \forall t.$$

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

– Linéarité.

  Soit $a$ et $b$ des constantes et $(\theta^i, \, i = 1, 2)$ deux processus de $\Lambda$. On a

$$\int_0^t \left(a\theta_s^1 + b\theta_s^2\right) dW_s = a\int_0^t \theta_s^1 dW_s + \int_0^t \theta_s^2 \, dW_s$$

– Propriétés de martingale

  soit

$$M_t = \int_0^t \theta_s dW_s \quad \text{ ou } \theta \in \Lambda$$

le processue $M$ est un martingale

$$E\left[\int_s^t \theta_u dW_u / \mathcal{F}_s\right] = 0$$

et implique en particulier que

$$E[\int_s^t \theta_u dW_u] = 0.$$

$$E\left[(\int_s^t \theta_u dW_u)^2 / \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_0^t \theta_u^2 du / \mathcal{F}_s\right]$$

**Définition 1.2.1** (*processue d'Itô*) *On appelle un processus d'Itô un processus* $((X))_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs réelles tel que P.p.s*

$$\forall 0 \leq s \leq t,\ X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$$

*avec* $X(0)$ *est* $\mathcal{F}_0-$ *mesurable,* $b$ *et* $\sigma$ *sont deux processus progressivement messurable vérifiant les condition*

$$\int_0^T |b(s)|\, ds < \infty \ et \int_0^T \|\sigma\,(s)\|^2\, ds < \infty$$

*Le coefficient* $b$ *est un drift ou la dérive,* $\sigma$ *est le coefficient de diffusion.*

### 1.2.1 Formule d'Itô

**Théorème 1.2.1 (Première formule d'Itô)** *Soit* $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *de classe* $C^2$*. Alors*

$$f\left(X\left(t\right)\right) = f\left(X\left(0\right)\right) + \int_0^t f^{'}\left(X\left(s\right)\right)dX\left(s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}\left(X\left(s\right)\right)\sigma^2\left(s\right)ds$$

**Théorème 1.2.2 (Deuxième formule d'Itô)** *Soit* $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* $f$ *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *de classe* $C^1$ *par rapport à* $t$*, de classe* $C^2$ *par rapport à* $x$*.*

*On a*

$$f(t,X(t)) = f(0,X_0) + \int_0^t f\prime_t(s,X(s))ds + \int_0^t f_x^{'}(s,X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}\left(X\left(s\right)\right)\sigma^2(s)ds.$$

**Théorème 1.2.3 (Troisième formule d'Itô)** *Soit* $(X1(t))_{0\leq t\leq T},(X^2(t))_{0\leq t\leq T}$ *deux processus d'Itô, de coeffcient de drift* $b1$*(resp.*$b2$*), et de coeffcient de diffusion* $\sigma^1$*(resp.* $\sigma^2$*), eportés respectivement par deux Browniens* $(W_t^1)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(W_t^2)_{0\leq t\leq T}$ *corrélés avec coefficient* $\rho$*. On suppose que* $b^i$*,*$\sigma^i$ *sont* $\mathcal{F}_t^{W^i}-$*adapté. Soit* $f$ *une fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $C^2$ *à dérivées bornées. On a*

$$\begin{aligned}&f(X^1\left(t\right),X^2(t)) = f(X^1\left(0\right),X^2\left(0\right)) + \textstyle\int_0^t f\prime_1(X^1\left(s\right),X^2(s))dX^1\left(s\right) + \int_0^t f_2^{'}(X^1\left(s\right),X^2(s))dX^2(s)\\&+\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t f_{11}^{''}(X^1(s),X^2\left(s\right))(\sigma^1(s))^2ds + 2\rho f_{12}^{''}(X^1(s),X^2\left(s\right))\sigma^1\left(s\right)\sigma^2\left(s\right)\\&+f_{22}^{''}\left(X^1\left(s\right),X^2\left(s\right)\right)\left(\sigma^2\left(s\right)\right)^2)ds.\end{aligned}$$

*où* $f_i^{'}$ *désigne la dérivée par rapport à* $x_i$*, et* $f_{ij}^{''}$ *la dérivée seconde par rapport à* $x_j$ *puis* $x_i$*,* $i,j=1,2$*.*

**Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties)** $(X(t))_{0\leq t\leq T},(Y(t))_{0\leq t\leq T}$ *deux processus d'Itô, on a*

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + < X;Y >_t .$$

## 1.3 Èquations différentielles stochastiques

**Définition 1.3.1** *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s \qquad t\in[0,T]$$

*ou sous forme*

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.2}$$

*$b$ et $\sigma$ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement Brownien $W$ sur cet espace. Une solution de 1.2 est un processus $X$ continu $(\mathcal{F}_t)-$adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ ont un sens et l'égalité*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s$$

*est satisfaite pour tout $t$, P.p.s.*

### 1.3.1 Solution forte et solution faible d'une EDS

Ils existe deux types de solutions à l'équation différentielle stochastique (1.2) : les solutions fortes et les solutions faibles.

**Définition 1.3.2** ***(solution forte)***

– *$X_t$ est mesurable et adapté à $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, s \leq t\right)$ la filtration naturale du $W$.*

– *$X$ est continue et*

$$P\left(\int_0^T \sigma^2(s, X_s)ds < \infty\right) = 1,\ P\left(\int_0^T \mid f(s, X_s) \mid ds < \infty\right) = 1$$

– *$X$ vérifie l'EDS (1.2) c'est à dire :*

$$\forall t \in [0, T] \;\; X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int \sigma(s, X_s)dW_s \;\; P.p.s$$

*On dira qu'il y a unicité forte pour l'équation si pour toutes solutions $X_t$ et $X_t'$ on a :*

$$P\left(X_t = X_t', \forall t \in [0, T]\right) = 1$$

**Définition 1.3.3** ***(solution faible)***

*une solution faible de l'EDS (1.2) est un triple*

– *$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré,*

– *$W$ un -mouvement Brownien adapté à $\mathcal{F}_t$,*

– *$X$ un processus.*

*les processus $X$ et $W$ sont définis sur le même espace donné et vérifient*

$$P\left(\int_0^T \sigma^2(s, X_s)\, ds < \infty\right) = P\left(\int_0^T b(s, X_s)\, ds < \infty\right) = 1$$

*et $(W, X)$ verifie l'EDS (1.2).*

**Remarque 1.3.1** *Par la définition, une solution forte est aussi une solution faible.*

### 1.3.2 Théorème d'existence

**Théorème 1.3.1** *(Existence et unicité) On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T], x, y$ dans $\mathbb{R}^n$*

**a** *Les fonctions $b$ et $\sigma$ sont continues.*

**b** *Il existe $K > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$*

1. $\mid b(t,x) - b(t,y) \mid + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid \leq K \mid x - y \mid$
2. $\mid b(t,x) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) \mid^2 \leq K^2(1 + \mid x \mid^2)$

**c** *la condition initiale $x$ est indépendante de $(W(t), t \geq 0)$ et elle est de carré intégrable. Alors, il existe une unique solution de (1.2) à trajectoires continues pour $t \leq T$ . De plus cette solution vérifie :*

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} \mid X_t \mid^2) < \infty$$

### 1.3.3 EDS et problème de martingale

**Définition 1.3.4** *(problème de martingales)Une probabilitè $\mathbb{P}$ sur$(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle $M^f$ définie par*

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(s, X)ds$$

*ou* $Lf(t,x) = \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} b_{i,j}(t,x) \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x),$
*est martingale(resp.martingale locale) pourtout* $f \in C_c^2\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d\right)$ *(res.*$f \in C^2\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d\right)$*).*

*est appelée solution du problème de martingale (resp .martingale locale).*

**Corollaire 1.3.1** *considérons les assertions suivantes :*

**(A)** *Il existe une solution faible de l'EDS (1.2).*

**(B)** *Il existe une solution au problème de martingal locale.*

**(C)** *Il existe une solution au problème de martingal.*

*Alors* $(C) \Rightarrow \{(A) \Leftrightarrow (B)\}$.

# Chapitre 2

# L'existence d'une solution de l'équation de McKean-Vlasov

## 2.1 Formulation du problème

D'abord pour avoir un sens pour (2), les conditions suivantes sont nécessaires .(Nous utilisons la notation $\delta$ pour indiquer que Les conditions sont imposées à la combinaison linéaire des mesures de Dirac $\delta$ pour $b(.,m)$ et $\sigma\,(.,m)$ :

$(C1)$ $\delta-$mesurabilité : les fonctions $b^{N,i} : \mathbb{R}^{d\times N} \longrightarrow \mathbb{R}^{d}$ et $\sigma^{N,i} : \mathbb{R}^{d\times N} \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ défini par

$$b^{N,i}(x_1,...,x_N) = b(x_i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{x_j})$$

$$\sigma^{N,i}\,(x_1,......,x_N) = \sigma\left(x_i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta x_j\right)$$

sont mesurables.

$(C2)$ $\delta-$continuité : $\sigma^{N,i}$ est continue pour chaque $N$ et $i = 1,2....,N$.

$(C3)$ croissance linéaire

$$|b(x,m)| + |\sigma(x,m)| \leq K\left|1 + |x| + E_m\,|y|\right|$$

pour tout $m \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et presque tous les $x - m\,(dx)$, et la constante $K$ est indépendante de $N$.

L'existence d'une solution faible peut être obtenue avec une condition suplémentaire $(E)$. Soit

$$b_R^K(x,m) = \begin{cases} b^k(x,m) & \text{si } |b(x,m)| \leq K(1+R), \\ K(1+R) & \text{sinon} \end{cases} \qquad k = 1, ...., d$$

où $K$ est la constante en $(C3)$ et $(b^1(x,m), ....., b^d(x,m)) = b(x,m)$. Les coeffcients de diffusion $\sigma^{k,l}\,(x,m)$ seront définis de la même manière.

$(E)$ : Soit $\varphi(x) \in C_b(\mathbb{R}^d), g(y) \in C_b(\mathbb{R}^{d\prime})$ et $m(dx,dy) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\prime})$, où $d$ est un entier positif. Soit $m_x$ la première distribution marginale de d-dimension de $m$ .Puis les fonctions

$$m \rightarrow \int \varphi\,(x)\,g\,(y)\,b_R^k(x,m_X)dm(x,y)$$

et

$$m \rightarrow \int \varphi(x)g(y)\sigma_k^{k,l}(x,m_X)dm(x,y)$$

sont continus.

Pour l'unicité trajectorielle de la solution de (1) nous avons besoin ces hypothèses :

$(U1)$ : $\delta-$condition de Lipschitz :

$$\left|b(x_1, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}) - b(y_1, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{y_i})\right| + \left|\sigma(x_1, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}) - \sigma(y_1, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{y_i})\right|$$
$$\leq K|x_1 - y_1| + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - y_i|$$

$(U2)$ : Soit $X_1, ...., X_N$ sont des variables aléatoires ont la mème distribution $(i.i.d)$, $m \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$ .donc

$$\lim_{N\to\infty} E(\left|b(X_1, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{X_i}) - b(X_1, m)\right| + \left|\sigma\left(X_1, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{X_i} - \sigma(X_1, m)\right)\right| = 0$$

si $b(x, m)$ et $\sigma(x, m) < \infty$ $x - m(dx)$.

## 2.2 Estimations préliminaires

Dans cette section, on donne les estimations de moment de l'interaction de diffusions. Dans le reste, les $(C1) - (C3)$ sont toujours supposés tenir et $|x|$ désignera le $L_6-$norme pour $x$ dans tout espace euclidien, $|x^6| = \sum_i x_i^6$ si $x = (x_1, ...x_i, ..)$ soit $X_t^N = (X_t^{N,1}, ..., X_t^{N,N})$ être le diffusions d'interaction correspondant à (1) :

$$\begin{cases} dX_t^N = b^N(X_t^N)dt + \sigma^N(X_t^N)dWt^{(N)} \\ X_0^N = (x_0, ......., x_n) \end{cases} \tag{2.1}$$

ou sous forme de composant,

$$\begin{cases} dX_t^{N,i} = b^N(X_t^{N,i}, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{X_t^{N,i}})dt + \sigma(X_t^{N,i}, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{X_t^{N,i}})dW_t^i \\ = b^{N,i}(X_t^{N,1}, ...., X_t^{N,N})dt + \sigma(X_t^{N,1}, .....X_t^{N,N})dW_t^i \\ X_0^{N,i} = x_0 \qquad\qquad i = 1, 2, ....., N \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans ce qui précède, $W^{(N)} = \left(W^1, ...., W^N\right)$ est un processus de Wiener à $N$ $d$-dimensions puisque les coefffcients de diffusion $\sigma^{N,i}\left(x_1,....,x_N\right)$ sont supposés continus et $b^{N,i}$ et $\sigma^{N,i}$ ont une croissance linéaire

$$\left|b^{N,i}(x_1,....,x_N)\right|+\left|\sigma^{N,i}(x_1,...,x_N)\right|\leq K(1+|x_i|+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|x_j|) \tag{2.3}$$

Il existe donc une solution faible qui est également unique.Soit $\left(\Omega,\mathcal{F}_t^N,p^N\right)$ est un espace de probabilité qui prend en charge à la fois le Wiener processus $W_t^1,.....,W_t^N$ et $X_t^N$.l'estimation du moment suivant à un rôle important dans cette section.

**Théorème 2.2.1** *Soit $X_t^N=(X_t^{N,1},....,X_t^{N,N})$ les diffusions en interaction dans (2.1) alors*

$$E_{P^N}\sup\nolimits_{t\in T}|X_t^N|^6\leq NK$$
$$E_{p^N}\left|X_t^N-X_s^N\right|\leq NK\left|t-s\right|^3$$

où $K$ est une constante indépendante de $N$.

**Preuve.** Nous supposons $d=1$ dans la preuve pour des raisons de simplicité. Soit $f(x)=|x|^6, x\in(\mathbb{R}^d)^N$. Par la formule d'Ito,on obtient

$$\begin{aligned}
&f(X_t^N)=\sum_{i=1}^{N}X_t^{N,i^6}\\
&=X_0^{N,i^6}+\int_0^t6\sum_{i=1}^{N}X_s^{N,i^5}b^{N,i}(X_s^N)ds+\int_0^t15\sum_{i=1}^{N}X_s^{N,i^4}\sigma^{N,i^2}(X_s^N)ds\\
&+\int_0^t6\sum_{i=1}^{N}X_s^{N,i^5}\sigma^{N,i}(x_s^N)dw_s^i
\end{aligned}$$

Puisque $\left|X_t^N\right|$ ont des moments finis de n'importe quel ordre par un argument de troncature standard nous avons :

$$E\left|X_t^N\right|^6\leq\left|X_0^N\right|^6+E\int_0^t6\left|\sum_{i=1}^{N}X_s^{N,i^5}.b^{N,i}(X_s^N)\right|ds+E\int_0^t15\left|\sum_{i=1}^{N}X_s^{N,i^4}.\sigma^{N,i^2}(X_s^N)\right|ds$$

par la croissance linéaire

$$
\begin{aligned}
&E\left|X_t^N\right|^6 \leq \left|X_0^N\right|^6 + KE\int_0^t \sum_{i=1}^N \left|X_s^{N,i}\right|^5 (1+\left|X_s^{N,i}\right| + \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left|X_s^{N,j}\right|) \\
&+\sum_{i=1}^N \left|X_s^{N,i}\right|^4 \left(1+\left|X_s^{N,i}\right|^2 + \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left|X_s^{N,j}\right|^2\right) ds \\
&\leq |X_0^N|^6 + KE\int_0^t \sum_{i=1}^N (|X_s^{N,i}|^5 + |X_s^{N,i}|^6 \\
&+\tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N |X_s^{N,i}|^5 |X_s^{N,j}| + \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N |X_s^{N,i}|^4 |X_s^{N,j}|^2) ds
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^N \left|X_j^{N,i}\right|^5 \left|X_s^{N,j}\right| \leq \sum_{i=1}^N \left|X_s^{N,i}\right|^6
$$

et

$$
\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^N \left|X_s^{N,i}\right|^4 \left|X_s^{N,j}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^N \left|X_s^{N,i}\right|^6
$$

et

$$
E|X_t^N|^6 \leq |X_0^N|^6 + KE\int_0^t \sum_{i=1}^N (|X_s^{N,i}|^5 + |X_s^{N,i}|^6 + \sum_{i=1}^N |X_s^{N,i|}|^6 + \sum_{i=1}^N |X_s^{N,i}|^6) ds
$$

on a

$$
\begin{aligned}
E|X_t^N|^6 &\leq |X_0^N|^6 + KE\int_0^t (N + \left|X_s^N\right|^6) ds \\
E|X_t^N|^6 &\leq |X_0^N|^6 + KNE\int_0^t ds + KNE\int_0^t |X_s^N|^6 ds
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Gronwall, on a

$$
\begin{aligned}
&E|X_t^N| \leq (|X_0^N|^6 + KN\textstyle\int_0^t ds) + K\int_0^t |X_s^N| ds \\
&E|X_t^N|^6 + N \leq (|x_0^N| + N)\exp^{Kt} = (N|x_0|^6 + N)\exp^{Kt}
\end{aligned}
$$

Ainsi par la symétrie

$$
E\left|X_t^N\right| \leq N(1+|X_0|^6)\exp^{Kt}
$$

et

$$E|X_t^N|^6 \leq \frac{1}{N} E|X_t^N|^6 \leq \left(|x_0|^6 + 1\right) \exp^{Kt} \tag{2.4}$$

Pour la deuxième inégalité, on a

$$\left|X_t^N - X_0^N\right|^6 = \sum_{i=1}^{N} \left|X_t^{N,i} - X_0^{N,i}\right|^6$$

comme $(a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n)$

$$\left|X_t^N - X_0^N\right|^6 \leq 32 \sum_{i=1}^{N} \left( \left| \int_0^t b^{N,i}(X_s^N) ds \right|^6 + \left| \int_0^t \sigma^{N,i}(X_s^N) dW^i(s) \right|^6 \right)$$

Par conséquent,

$$E \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left|X_0^N - X_0^N\right|^6 \leq K \sum_{i=1}^{N} (\delta^5 \int_0^\delta \left|b^{N,i}(X_s^N)\right|^6 ds + \delta^2 \int_0^\delta |\sigma^{N,i}(x_s^N)|^6 ds$$

en appliquant la condition de croissance linéaire on obtient

$$\begin{aligned}
&E \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left|X_0^N - X_0^N\right|^6 \leq K\delta^2 \sum_{i=1}^{N} \int_0^\delta E(1 + \left|X_s^{N,i}\right|^6 + \tfrac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left|X_s^{N,j}\right|^6) ds \\
&\leq K\delta^2 \int_0^\delta (N + N(|x_0|^6 + 1) \exp^{K\delta}) ds \\
&K\delta^2 \, (N\delta) = KN\delta^3
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$E \sup_{|t-s| \leq \delta} \left|X_t^N - X_s^N\right|^6 \leq KN\delta^3$$

et

$$E \sup_{t \leq T} \left|X_t^N\right|^6 \leq KN$$

pour certains $K$ indépendants de $N$. ■

**Corollaire 2.2.1** *La distribution de* $X^{N,1}$*sur* $\mathcal{M}(C\,[0,T])$*est tendue.*

**Preuve.** par le théorème 2.2.1 et la symétrie de $X^{N,1},....,X^{N,N}$ nous avons :

$$E\left|X_t^{N,1}-X_s^{N,1}\right|=\frac{1}{N}|X_t^N-X_s^N|^6\leq K\left|t-s\right|^3$$

■

## 2.3 L'existence de la solution

Dans cette section, nous considérons l'existence d'une solution faible de l'équation de McKean Vlasov :

$$\begin{cases} dX_t=b((X_t),\mathbb{P}(X_t))dt+\sigma\left((X_t),\mathbb{P}(X_t)\right)dW_t \\ X_0=x_0\in\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.5}$$

où $b:\mathbb{R}^d\times\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathbb{R}^d$et $\sigma:\mathbb{R}^{d\times}\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^{d\times d}$ peuvent être définis pour chaque $m\in\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^d\right)$, seulement presque tous les $x-$ $m(dx)$ et satisfont les conditions $(C_1)-(C_3)$ et $E$.

Soit $X_t^N=(X_t^N,....,X_t^{N,N})$ les diffusions en interaction correspondant à (2.1) définir sur un espace de probabilités $\left(\Omega^N,\mathcal{F}_t^N,P^N\right)$ :

$$\begin{cases} dX_t^{N,i}=b^{N,i}(X_t^N)dt+\sigma^{N,i}(X_t^N)dW_t^i \\ X_0^{N,i}=x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

où $W_t^1,.....,W_t^N$ sont des processus de Wiener indépendants et $b^{N,i}(x_1,....,x_N)=b(x_i,\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^N\delta_{x_j})$ et $\sigma^{N,i}(x_1,....,x_N)=b(x_i,\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^N\delta_{x_j})$.

Soit la variable aléatoire $U^N=\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^N\delta_{X^{N,i}}\in\mathcal{M}(C[0,T])$ et $\eta^N$ son distribution.

**Définition 2.3.1** *une famille* $\Gamma$ *de mesures de probabilité dans* $P(\mathcal{S})$ *est dite tendue s'il existe* $\varepsilon>0$ *un ensemble compact* $K=K_\varepsilon$ *de* $S$ *tel que :*$P(K)>1-\varepsilon$, *pour tous* $P$ *dans* $\Gamma$.

**Lemme 2.3.1** $\{\eta^N\}$ *est tendue.*

**Preuve.** Il suffit de prouver que $\{X^{N,1}\}$ forme une famille tendue dans $C[0,T]$, Mais c'est tout simplement le corollaire 2.2.1.

Soit $\eta$ une limite faible de $\eta^N$ Nous montrerons ensuite que $\eta$ est supporté sur les solutions de (2.5) Pour tout $u \in \mathcal{M}(C\,[0.T])$. Soit l'opérateur $L_{u,r}$ tel que

$$(L_{u,r}\varphi)(x) = \sum_{k=1}^{d} b^k(x,u_r)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} a^{k,l}(x,u_r)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k \partial x_l}(x)$$

où $a^{k,l} = (\sigma.\sigma^t)_{k,l}$ *et* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Soit

$$L_{u,r}^R(x) = \sum_{k=1}^{d} b_R^k(x,u_r)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) + \sum_{k,l=1}^{d} a_R^{k,l}(x,u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k \partial x_l}(x)$$

Pour tout $\varphi \in C_0^\infty, g_{1,\dots\dots\dots,}g_n \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $0 \leq s_1 \leq \dots\dots \leq s_n \leq s$ posons

$$F = F^{s,t}_{\varphi,g_1,\dots,g_n} : \mathcal{M}(C[0,T]) \to \mathbb{R}$$

défini comme suit :

$$F(u) = \int_{C[0,T]} \varphi(x_t) - \varphi(x_s) - \int_s^t (L_{u,r}\varphi(x_r)dr)g_1(x_{s_1}),\dots,g_n(x_{s_n})du(x)$$

Evidemment, un élément $u \in \mathcal{M}(C[0,T])$ est une solution martingale de (2.5) si et seulement si $F(u) = 0$ pour tout $\varphi, g_{1,\dots\dots,}g_n$ et $s \leq t$.

Pour un élément $u \in \mathcal{M}(C[0,T])$, $\left(m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\right)$, soit

$$\left|u^k\right| = \int_{C[0,T]} \sup_{0\leq t\leq T} |x_t|^k \, du(x)(\left|m^k\right| = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k \, dm(x))$$

■

Nous avons d'abord :

**Lemme 2.3.2** *Soit $\eta^N$ la distribution de $U^N$.alors $\sup_N E\eta^N \left|u^6\right| \leq k < \infty$. De plus pour toute limite faible $\eta$ de $\eta^N$. on a $E_\eta \left|u^6\right| \leq K$.*

**Preuve.**

$$E_{\eta^N} \left|u^6\right| = E_{p^N}(\left|\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^N \delta_{X^{N,i}})^6\right| = E_{p^N}(\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_i \sup\limits_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{N,i}\right|^6)$$

$$E_{p^N}(\tfrac{1}{N}\sup|X_t^N|^6) = \tfrac{1}{N}E_{p^N}(\sup|X_t^N|^6)$$

$$\leq \tfrac{1}{N}NK = K$$

par le théorème 2.2.1, si $\eta^N \xrightarrow{w} \eta$ par le lemme de Fatou on obtient :

$$\int \left|u^6\right| d\eta\,(u) \leq \lim_{N\to\infty}\inf \int \left|u^6\right| d\eta(u) \leq K.$$

■

**Lemme 2.3.3** $|F(u)| \leq K(1+|u^2|)$ *pour tout* $u \in \mathcal{M}(C[0,T])$.

**Preuve.**

$$|F(u)| = \left|\textstyle\int_{C[0,T]} \varphi(x_t) - \varphi(x_s) - \int_s^t (L_{u,r}\varphi)(x_r)dr)g_1(x_{s_1}), ...., g_n(x_{s_n})du(x)\right|$$

$$\leq K(1+\textstyle\int_{C[0,T]}\int_s^t |L_{u,r}\varphi(x_r)|\,drdu(x))$$

$$\leq K(1+\textstyle\int_s^t\int_{C[0,T]} |b(x_r,u_r)| + |a(x_r,u_r|du_r dr)$$

$$\leq 1+\textstyle\int_s^t\int_{C[0,T]}(|x_r|^2 + E_{u_r}|x|^2 du dr \qquad \text{par } (C3)$$

$$\leq K(1+\textstyle\int_s^t E_{u_r}|x|^2 dr)$$

$$\leq K(1+|u^2|)$$

■

Il est important de constater que $F$ n'est pas nécessairement continue sous notre hypothèses $(C1)$ $(C3)$ et $(E)$. Néanmoins, le lemme suivant est important.

**Lemme 2.3.4** $\lim_{N_k\to\infty} \int_{\mathcal{M}(C[0,T])} F^2(u)d\eta^{N_k}(u) = \int_{\mathcal{M}(C[0,T])} F^2(u)d\eta(u)$ *où $\eta$ est la limite faible de la sous-suite $\eta^{N_k}$.*

**Preuve.** Soit $F_R$ de la même manière que $F$ sauf que l'on remplace $L_{u,r}$ par $L_{u,r}^R$, ainsi :

$$F_R(u) = \int_{C[0,T]} \varphi(x_t) - \varphi(x_s) - \int_s^t (L_{u,r}^R \varphi(x_r)dr) g_1(x_{s_1}), ...., g_n(x_{s_n}) du(x)$$
$$= \int_{C[0,T]} (\varphi(x_t) - \varphi(x_s)) g_1(x_{s_1}).....g_n(x_{s_n}) du(x)\hat{}4$$
$$- \int_s^t (\int \sum_k b_R^k(x_r, u_r) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) + \frac{1}{2} \sum_{k,l} a_R^{k,l}(x_r, u_r) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k \partial x_l}(x_r))$$
$$\times g_1(x_{s_1})......g_n(x_{s_n}) du(x_r, x_{s_1}, ..., x_{s_n}) dr$$

La condition $E$ implique que $F_R$ est continue. Maintenant,

$$|F^2(u) - F_R^2(u)| = |F(u) + F_R(u)||F(u) - F_R(u)|$$
$$\leq |F(u) + F_R(u)| \Big| \int_{C[0,T]} \varphi(x_t) - \varphi(x_s) - \int_s^t (L_{u,r}\varphi)(x_r)dr) g(x_{s_1}), ...., g_n(x_{s_n}) du(x)$$
$$- \int_{C[0,T]} \varphi(x_t) - \varphi(x_s) - \int_s^t (L_{u,r}^R \varphi(x_r)dr) g(x_{s_1}), ...., g_n(x_{s_n}) du(x) \Big|$$
$$\leq |F(u) + F_R(u)|| \int_s^t (L_{u,r}^R \varphi(x_r)dr) g(x_{s_1}), ...., g_n(x_{s_n}) du(x)$$
$$- \int_s^t (L_{u,r} \varphi(x_r)dr) g(x_{s_1}), ...., g_n(x_{s_n}) du(x)|$$
$$\leq |F(u) + F_R(u)|| \int_s^t \sum b_R^k(x, u_r) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1} a_R^{k,l}(x, u_r) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k \partial x_l}(x)$$
$$- \int_s^t \sum_{k=1} b^k(x, u_r) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1} a^k(x, u_r) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k \partial x_l}(x) |drdu(X)$$
$$\leq |F(u) + F_R(u)| \cdot K \cdot \int \int_s^t \sum_{k=1} |b^k(x_r, u_r) - b_R^k(x_r, u_r)|$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=1} |a^{k,l}(x_r, u_r) - a_R^{k,l}(x_r, u_r)| drdu(X)$$

et

$$E_{\eta^N} |F^2 - F_R^2|$$
$$= E_{\eta^N}(|F^2 - F_R^2|, |u| \leq \tfrac{R}{2}) + E_{\eta^N}(|F^2 - F_R^2|, u > \tfrac{R}{2})$$
$$\leq E_{\eta^N}(|F - F_R| \cdot K \cdot \int \int_s^t \sum_k |b^k(x_r, u_r) - b_R^k(x_r, u_r)| drdu, |u| \leq \tfrac{R}{2})$$
$$+ E_{\eta^N}(|F - F_R| \cdot K \cdot \int \int_s^t \sum_k |b^k(x_r, u_r) - b_R^k(x_r, u_r)| drdu, |u| > \tfrac{R}{2}$$
$$+ E_{\eta^N}(|F - F_R| \cdot K \cdot \int \int \sum_{k,l} |a^{k,l}(x_r, u_r) - a_R^{k,l}(x_r, u_r)| drdu, |u| \leq \tfrac{R}{2}$$
$$+ E_{\eta^N}(|F - F_R| \cdot K \cdot \int \int \sum_{k,l} |a^{k,l}(x_r, u_r) - a_R^{k,l}(x_r, u_r)| drdu, |u| > \tfrac{R}{2}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Par la même preuve du lemme 2.3.3, $|F_R(u)| \leq K(1+|u^2|)$. De plus si $|x| \leq \frac{R}{2}$ et$|m| \leq \frac{R}{2}$, nous avons$b^k(x,m) = b^k_R(x,m)$ car$\left|b^k(x,m)\right| \leq K(1+|x|+|m|) \leq K(1+R)$.

Puisque $|u_r| \leq |u|$ , nous avons donc :

$$
\begin{aligned}
& I_1 + I_3 \leq E_{\eta^N}(K(1+|u^2|) \int_s^t \int_{|x_r|>\frac{R}{2}} (1+|x_r|^2+|u_r^2|) du_r dr, |u| \leq \tfrac{R}{2}) \\
& \leq E_{\eta^N}(K(1+|u^2|)(\int_s^t (1+|u_r^2|) u_r(|x| > \tfrac{R}{2}) + E_{u_r}(|x|^2, |x| > \tfrac{R}{2} dr), |u| \leq \tfrac{R}{2}) \\
& \leq E\eta^N(K(1+|u^2|)(1+|u^2|) u(\sup_{s\leq r\leq t} |x_r| > \tfrac{R}{2} \\
& + E_u(\sup_{s\leq r\leq t} |x_r|^2, \sup_{s\leq r\leq t} |x_r| > \tfrac{R}{2})), |u| \leq \tfrac{R}{2}) \\
& \leq E_{\eta^N}(K(1+|u^2|)(1+|u^2| \tfrac{R}{2} + |u^4| \tfrac{4}{R^2})) \\
& \leq \tfrac{K}{R^2} E_{\eta^N}(1+|u^6|) \leq \tfrac{K}{R^2}
\end{aligned}
$$

où $K$ est une constante indépendante de $N$ et $R$. Par le théorème 2.2.1

$$
\begin{aligned}
& I_2 + I_4 \leq E_{\eta^N}(K(1+|u^2|) \int \int_s^t (1+|x_r|^2+|u_r^2|) dr du, |u| > \tfrac{R}{2}) \\
& \leq E_{\eta^N}(K(1+|u^2|) \left|u^2\right|, |u| > \tfrac{R}{2}) \\
& \leq E_{\eta^N}(K(1+|u^6|)) \tfrac{4}{R^2} \leq \tfrac{K}{R^2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi : $E_{\eta^N} \left|F^2 - F_R^2\right| \leq \frac{K}{R^2}$.

De même, nous avons $E_\eta |F^2 - F_R^2| \leq \frac{K}{R^2}$. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
& \lim_{N_k \to \infty} \left|E_{\eta^{N_k}}(F^2) - E_\eta(F^2)\right| \\
& \leq \lim_{N_k \to \infty} \left|E_{\eta^{N_k}}(F^2) - E_{\eta^{N_k}}(F_R^2)\right| + \left|E_{\eta^{N_k}}(F_R^2) - E_\eta(F_R^2)\right| + \left|E_\eta(F_R^2) - E_\eta(F^2)\right| \\
& \leq \tfrac{K}{R^2} + \lim_{N_k \to \infty} \left|E_{\eta^{N_k}}(F_R^2) - E_\eta(F_R^2)\right| = \tfrac{K}{R^2}
\end{aligned}
$$

puisque $F_R$ est borné et continu, mais $R$ est arbitraire, alors $\lim_{N_K \to \infty} E_{\eta^{N_k}}(F^2) = E_\eta(F^2)$. ■

Le lemme suivant montre que $\eta$ est supporté sur les solutions martingales de (2.5).

**Lemme 2.3.5** *Soit $\eta$ la limite faible de $\left\{\eta^N\right\}$, alors $\int F^2 d\eta = 0$.*

**Preuve.** Sans perte de généralité, on suppose $\eta^N \xrightarrow{w} \eta$. Puisque

$$F(u) = \int_{C[0,T]} (\varphi(x_t) - \varphi(x_s) - \int_s^t (L_{r,u}\varphi)(x_r)dr) g_1(x_{s_1})....g_n(x_{s_n})du(x),$$

on a

$$\begin{aligned}
&E_{\eta^N} F^2 = E_{P^N} F^2 (\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X^i_\cdot}) \\
&= E_{P^N}(\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N (\varphi(X_t^i) - \varphi(X_s^i) - \textstyle\int_s^t (L_{r,U^N\varphi}(X_r^i)dr) g_1(X_1^i).....g_n(X_n^i))^2 \\
&= \tfrac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^N E[\varphi(X_t^i) - \varphi(X_s^i) - \textstyle\int_s^t (L_{r,U^N\varphi})(X_r^i)dr) g_1(X_1^i)...g_n(X_n^i)] \\
&\times[\varphi(X_t^i) - \varphi(X_s^i) - \textstyle\int_s^t (L_{r,U^N\varphi})(X_r^i)dr) g_1(X_1^i)....g_n(X_n^i)] \\
&= \tfrac{1}{N}\sum_{i,j=1}^N E(H(X^i_\cdot)H(X^j_\cdot))
\end{aligned}$$

où

$$H(X_\cdot) = (\varphi(X_t) - \varphi(X_s) - \int_s^t (L_{r,U^N\varphi})(X_r)dr) g_1(X_{s_1})....g_n(X_{s_n})$$

pour $X_\cdot \in C[0,T]$, puisque $E_{p^N} H(X^i_\cdot)(H^j_\cdot)) = 0$ si $i \neq j$,alors

$$\lim_{N\to\infty} E_{\eta^N} F^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N E_{p^N} H(X^i_\cdot)^2$$

Mais

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{N^2}\textstyle\sum_{i=1}^N E_{p^N} H(X^i_\cdot)^2 \\
&\le \tfrac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N E_{P^N} M(1 + \textstyle\int_s^t \left| b(X_r^i, \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_r^j})\right| + \left| a(X_r^i, \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_r^j})\right| dr)^2 \\
&\le \tfrac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N E_{p^N} M(1 + \textstyle\int_s^t |X_r^i|^2 + \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N |X_r^j|^2 dr)^2 \\
&\le \tfrac{1}{N^2} N E_{P^N}(M(1 + \|X^1\|^4)) \le \tfrac{1}{N^2} NK = \tfrac{K}{N}
\end{aligned}$$

d'où $\lim_{N\to\infty} \int F^2 d\eta^N = \int F d\eta = 0$. ■

Nous arrivons maintenant au théorème principal de cette section.

**Théorème 2.3.1** *Sous les hypothèses $(C1)-(C3)$ et $(E1)$. L'équation de McKean Vlasov a une solution faible.*

**Preuve.** par le lemme 2.3.4 et le lemme 2.3.5, toute limite faible de $\eta^N$ est supportée sur les solutions du problème de martingale posé par (2.5). Puisque $\{\eta^N\}$ est tendue par le lemme 2.3.1, donc (2.5) une solution marginale et donc une solution faible. ■

# Chapitre 3

# Unicité de solution et propagation du chaos

## 3.1 Unicité et propagation du chaos

Dans cette section, nous prouverons l'unicité trajectorielle de la solution de l'équation de McKean Vlasov et la propagation du chaos sous les conditions $(C3), (U1)$ et $(U2)$.

On suppose que les conditions $(C3), (U1)$ et $(U2)$ sont satisfaites tout au long de cette section. Soit $x = (x_1, ...., x_N)$ et $y = (y_1, ..., y_N)$ des éléments dans $\mathbb{R}^{d\times N}$. Puisque $b^N(x) = (b^{N,1}(x), ...., b^{N,N}(x))$ et $\sigma^N(x) = (\sigma^{N,1}(x), ..., \sigma^{N,N}(x))$ satisfaire les conditions de Lipschitz,

$$\begin{aligned} &\left|b^N(x) - b^N(y)\right| \leq K \textstyle\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \leq K N^{\frac{5}{6}} |x - y| \\ &\left|\sigma^N(x) - \sigma^N(y)\right| \leq K N^{\frac{5}{6}} |x - y|, \end{aligned}$$

on peut introduire le théoréme suivant :

**Théorème 3.1.1** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}_t, W_t, P)$ *un espace de probabilité avec un* $\mathcal{F}_t-$ *processus de wiener* $W_t$ *sur lequel on peut définir un processus stochastique* $X_t$, *(c à d* $(\Omega, \mathcal{F}_t, W_t, X_t, P)$ *est une solution faible de(2.2) .Soit* $\left(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N, P^N\right)$ *l'espace produit de* $N-$ *fois de* $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ *et soit* $\left(W_t^1, ....., W_t^N\right)$ *de* $\mathbb{R}^{d\times N}$*-processus de Wiener sur* $\Omega^N$*. Alors il existe une solution forte*

$X_t^N = (X_t^{N,1}, ..., X_t^{N,N})$ *de (2.2) sur* $\left(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N, P^N\right)$ *par rapport à* $\left(W_t^1, ...., W_t^N\right)$.

Le prochain théorème est tout ce que nous avons besoin.pour démontrer l'unicité de la solution de 2.1.

**Théorème 3.1.2** *Soit* $X_t^i$ , $i = 1, ...., N$ *des copies indépendantes de* $X_t$ *sur* $\left(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N, P^N\right)$ *et* $X_t^{N,i}$ , $i = 1, ..N$ *la solution de (2.2) sur* $\left(\Omega^N, \mathcal{F}_t^N, P^N\right)$ *.Puis*

$$E_{P^N} \sup_{0 \le t \le T} \left|X^{N,i}(t) - X^i(t)\right|^2 \to 0; \;\; N \to \infty$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned}
&\left|X^{N,i}(t) - X^i(t)\right|^2 = \Big| \textstyle\int_0^t b^{N,i}(X_t^{N,1}, ...., X_t^{N,N}) - b(X_t^i, \mathbb{P}(X_t))dt \\
&+ \textstyle\int_0^t \sigma^{N,i}(X_t^{N,1}, ..., X_t^{N,N}) - \sigma(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i))dW_t^i \Big|^2 \\
&\le K \textstyle\int_0^t \left|b^{N,i}(X_t^{N,i}, ...., X_t^{N,N}) - b^{N,i}(X_t^1, ....., X_t^N)\right|^2 dt \\
&+K \left|\textstyle\int_0^t b^{N,i}(X_t^1, ..., X_t^N) - b(X_t^1, \mathbb{P}(X_t^i))\right|^2 dt \\
&+K| \textstyle\int_0^t \sigma^{N,i}(X_t^{N,1}, .., X_t^{N,N}) - \sigma^{N,i}(X_t^1, ..., X_t^N)dW_t^i|^2 \\
&+K| \textstyle\int_0^t \sigma^{N,i}(X_t^{N,1}, .., X_t^N) - \sigma^{N,i}(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i), dW_t^i|^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&E_{p^N} \sup_{t \le T} \left|X_t^{N,i} - X_t^i\right|^2 \\
&\le K \textstyle\int_0^T E_{p^N}(\left|X_t^{N,i} - X_t^i\right|^2 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left|X_t^{N,j} - X_t^i\right|^2)dt \\
&+K \textstyle\int_0^T E_{p^N} \left|b(X_t^i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_t^j}) - b(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i))\right|^2 + E_{p^N} \left|\sigma(X_t^i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_t^j}) - \sigma(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i)\right|^2 dt
\end{aligned}$$

par $(U1)$ on obtient

$$\begin{aligned}
N E_{p^N} \sup_{t \le T} \left|X_t^{N,i} - X_t^i\right|^2 &= \sum_{j=1}^N E_{P^N} \sup_{t \le T} \left|X_t^{N,j} - X_t^j\right|^2 \\
&\le K \textstyle\int_0^T \sum_{j=1}^N E_{p^N} \left|X_t^{N,j} - X_t^j\right|^2 dt + KNC_N
\end{aligned}$$

où

$$C_N = \int_0^T E_{P^N} \left| b(X_t^i, \sum_{j=1}^{N} \delta_{X_t^j}) - b(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i) \right|^2 + E_{p^N} \left| \sigma(X_t^i, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{X_t^j}) - \sigma(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i) \right|^2 dt$$

Puisque

$$E_{P^N} \sup_{t \leq T} |X_t^{N,i} - X_t^i|^2 = E_{P^N} \sup_{t \leq T} |X_t^{N,j} - X_t^j|^2$$

pour tout $i, j$ par symétrie, il s'ensuit que

$$E_{P^N} \sup_{t \leq T} \left| X_t^{N,i} - X_t^1 \right|^2 \leq K E_{p^N} \int_0^T \sup_{s \leq t} \left| X_s^{N,1} - X_s^1 \right|^2 dt + K C_N$$

on utilise l'inégalité de Gronwall, on a :

$$E_{P^N} \sup_{t \leq T} |X_t^{N,i} - X_t^i|^2 \leq K C_N \exp^{KT} .$$

Maintenant, nous voulons montrer que $C_N \to 0$ comme $N \to \infty$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} & E_{P^N} |b(X_t^i, \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{j=1}^{N} \delta_{X_t^j}) - b(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i))|^2 \\ & \leq E_{p^N} (K(1 + 2 |X_t^i|^2 + \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{j=1}^{N} \left| X_t^j \right|^2 + |\mathbb{P}(X_t^i)|^2)) \\ & \leq K(1 + |\mu^2|) < \infty \end{aligned}$$

où $\mu$ est la distribution de $X^i$, par la condition de croissance linéaire $(C3)$ et $(U2)$ on trouve

$$E_{P^N} \left| b(X_t^i, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{X_t^j}) - b(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i)) \right|^2 \to 0; \quad N \to \infty$$

et elle est aussi borné par une constante $K(1 + |\eta^2|)$ indépendante de $t$, donc par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^T E_{P^N} \left| b(X_t^i, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{X_t^j}) - b(X_t^i, \mathbb{P}(X_t^i)) \right|^2 dt \to 0\,; \quad N \to \infty$$

De même, on peut traiter le terme avec $\sigma$ Ainsi $C_N \to 0$ lorsque $N \to \infty$. ■

Maintenant, Il est désormais simple de prouver l'unicité de solution de (2.1)

**Théorème 3.1.3** *Sous* $(C3)$, $(U1)$ *et* $(U2)$ *la solution de (2.1) est trajectoriellement unique.*

**Preuve.** Supposons qu'il existe deux solutions $X_t$ et $Y_t$ de (2.1) sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ avec la même valeur initiale. puis par le théorème 3.1.2,

$$E\sup_{t\leq T}|X_t - Y_t|^2 \leq 2(E\sup_{t\leq T}\left|X_t - X_t^{N,1}\right|^2 + E\sup_{t\leq T}\left|Y_t - X_t^{N,1}\right| \to 0$$

lorsque $N \to \infty$.Evidemment $X_t = Y_t$, $p.p.$ pour tout $t$. ■

Nous prouvons maintenant le théorème principal de cet partie

**Théorème 3.1.4** *Supposons que les conditions* $(C3)$ ,$(E)$ , $(U1)$ *et* $(U2)$ *sont vérifiées. Ensuite, l'équation McKean Vlasov a une solution forte unique. De plus la propagation du chaos est vérifiée* $\left(U^N \to \mu\right)$ .

**Preuve.** A partir de l'existence et l'unicité trajectorielle de la solution de (2.1), il suit par une technique maintenant bien connue dans [3] que l'équation de McKean Vlasov a une solution forte unique. Il y a donc une limite faible unique $\delta_\mu$ de $\eta^N$ et $\eta^N \xrightarrow{w} \delta_\mu$. ■

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution de équations différentielles stochastiques de McKean-Vlasov

$$dX_t = b(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t})ds + \sigma(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t})dW_s$$

ou $\mathbb{P}_{X_t}$ est la distribution de $X_t$.

La méthodologie que nous employons est comme suit : d'abord on a prouvé qu'une suite de mesures est tendue et montré que tout point limite est supporté sur une solution d'un problème de martingale, Cela implique l'existence d'une solution faible, et aussi l'unicité trajectorielle de la solution,

Finalement, il suit par une technique maintenant bien connue dans [3] que l'équation de McKean Vlasov a une solution forte unique.

# Bibliographie

[1] Chiang, T. S. (1994). McKean-Vlasov equations with discontinuous coefficients. Soochow J. Math, 20(4),507-526..

[2] Dudley, R. M. (1971). P. Billingsley, Convergence of probability measures. Bulletin of the American Mathematical Society, 77(1), 25-27.

(1989), North- Holland Publishing Company, Japan

[3] Ikeda, N., & Watanabe, S. (2014). Stochastic differential equations and diffusion processes. Elsevier.

[4] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. mniv-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[5] Mager, P. P. (1977). A. Friedman, aths. uStochastic differential equations and applications, Academic Press, New York (1975), 228 pages, Price : 24.50$.

[6] Matthes, K. (1986). Ikeda, N., S. Watanabe : Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North Holland Publ. Co., Amsterdam—Oxford—New York 1981, 480 S., Dfl. 175.

[7] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[8] Sznitman, A. S. (1984). Nonlinear reflecting diffusion process, and the propagation of chaos and fluctuations associated. Journal of functional analysis, 56(3), 311-336.

# Annexe A : Rappels d'analyse

**Lemme 3.1.1** *(**de Gronwall**) Si $f$ est une fonction réelle non négative définie sur un*

intervalle $I = [a, b]$, pour lequel l'inégalité

$$f(t) \leq A + B \int_a^t f(s)ds$$

Alors, pour tout $t \in I$,avec $A \geq 0, B \geq 0$ ; alors l'estimation

$$f(t) \leq Aexp(B(t-a))$$

est vrai pour tout $t \in I$.

**Lemme 3.1.2** *(**lemme de Fatou**) Soit $f_n \geq 0$ une suite.Alors*

$\int_X \left( \liminf_{n \to \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$

**Théorème 3.1.5** *(**inégalité de cauchy schwarz**)*

*Une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est que le produit scalaire est une fonction continue.Dans le cas de l'espace euclidien muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}$$

**Théorème 3.1.6** *( **Théoréme de convergence dominée**)* *soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonction mesurables telle que*

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ *pour tout* $x \in X$,*où* $g$ *est une fonction intégrable.Alors* $f$ *est intégrable et* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | |
|---|---|
| $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ | un espace de probabilité filtré |
| $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ | Espace de probabilité |
| $W_t$ | Mouvement Brownien |
| $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\, et\, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | des processus stochastiques |
| $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ | désigne l/espace de toutes les distributions de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ |
| $càdlàg$ | Continue à droite admet de limite à gauche. |
| $\mathbb{P}-p.s$ | presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ |
| $\xrightarrow{w}$ | la convergence faible |
| $\mathbb{R}^d$ | Ensemble des vecteurs réels de dimension $d$ |
| $\sigma$ | Coefficient de diffusion. |
| $b$ | coefficient de drift |

Abstract

We consider McKean Vlasov stochastic differential equations (MVSDEs), which are SDEs where the drift and diffusion coefficients not depend only on the state of the unknown process but also on its probability distribution. These SDEs called also mean- field SDEs.
We prove the existence and uniqueness of the solution of this type of equations where the cofficients are assumed to have linear growth and can be defined only for each υ almost every where ξ with respect to υ. A propagation of chaos result is also proved.



***Resumé***

Nous considérons les équations différentielles stochastiques (MVEDS) de McKean Vlasov, qui sont des EDSs où les coefficients de dérive et de diffusion ne dépendent pas seulement de l'état du processus inconnu mais aussi de sa distribution de probabilité. Ces EDSs appelés aussi EDSs de type champ moyen.
Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de ce type d'équations où les coefficients sont supposés avoir une croissance linéaire et ne peuvent être définis que pour chaque υ,presque partout ξ par rapport à υ. Une propagation du chaos est également prouvée.



**ملخص**

نعتبر المعادلات التفاضلية العشوائية لـ **McKean Vlasov** (MVEDS)،وهي عبارة عن معادلات تفاضلية عشوائيةحيث لا ترتبط معاملاتها فقط بالعملية العشوائية المجهولة وإنما أيضا بتوزيعها الاحتمالي.
نثبت وجود ووحدانية الحل من أجل هذا النوع من المعادلات بافتراض أن المعاملات يكون لها نمو خطي ولا يمكن تعريفها سوى من أجل كل u، شبه كليا بالنسبة ل x.كما نثبت النتيجة المتعلقة بإنتشار chaos.