UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités Et Statistique

Par : Bahaz Yamina

Théme

Simulation et identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelettes

Devant le jury composé de :

Mr.	Boussaad Abdelmalik	UKMB Ouargla	Encadreur
Mr.	Meflah Mabrouk	UKMB Ouargla	Président
Mr.	Mansoul Brahim	UKMB Ouargla	Examinateur
Mr.	Kouidri Mohamed	UKMB Ouargla	Examinateur

29 Juin 2021

Dédicace

Au nom de Dieu clément et miséricordieux

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvres et une emmense joie,

que je dédie mon travail a mes chers parant

« Halima et Abdelkader » en particulier

mes cousins Fatiha et Djemaa,

A mon frére, Abdelbasset, A mes soeurs, Imane et sa marie Ali et leur fisses, Dahbia et sa marie Ahmed et leur fisses, et leur famille, Fatima et Hafsa, ma petite cher Douaa.

A

Mes grand mere et grande pere, mes Oncles et leur maries mes tantes et leur famille, la famille Smail

A

Mon encadreur : Dr Boussaad Abdelmalek

Mes chers amies : Safa, Fatima, Ahlam, Nour, Maroua, Maria, Hadjer

Mes enseignons et ma promenions

A tous qui ma aide et conseiller je dit Merci

Remerciements

Nous remercions dieu tout puissant du savoir et des connaissances que nous acquise

Nous remercions infiniment notre parents pour leurs encouragement, conseils et assistance qui m'ont permis de rivaliser notre objectif et à tout famille BAHAZ

Nous tenus à remercier vivement notre encadreur : Dr Boussaad Abdelmalek et tout les personnels de département de mathématiques

A mes amies de promotion probabilités et statistique

A tout ceux qui m'ont aide de loin ou de prés dans la réalisation de ce travail

Merci pour tout.

Table des matières

Notations **1**

Introduction **2**

1 Généralité sur les calcules stochastiques **4**

1.1 Processus stochastique 4

1.1.1 variation totale et variation quadratique 5

1.1.2 Processus Gaussien 5

1.1.3 Processus de Markov 5

1.1.4 Processus Autosimilaires 6

1.1.5 Martingale 6

1.1.6 Semimartingale 6

1.2 Mouvement Brownien 7

1.2.1 pont brownien 7

1.2.2 propriété du mouvement brownien 8

1.2.3 transformations du mouvement brownien standard 9

1.2.4 variation quadratiques du mouvement brownien : 9

2 Mouvement Brownien Fractionnaire **10**

2.1 propriété de mouvement brownien fractionnaire 12

2.1.1 propriété de variation quadratique 12

2.1.2 Propriété de Semimartingale 13

2.1.3 Propriété de Markov 14

2.1.4 Propriété de continuité Hölder 14

2.1.5 propriété Non–différentiabilité 15

2.2 représentation de mouvement brownien fractionnaire 16

2.2.1 moyenne mobile 16

2.2.2 harmonisable 16

3 Simulation et identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette 18

3.1 Simulation d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette . . . 18

3.1.1 Méthode de Sellan, Meyer et Abry : synthèse d'ondelettes . . . 18

3.1.2 Quelques résultats de simulation d'un mbf avec la méthode de Sellan et Abry 20

3.2 Identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette . 22

3.2.1 Méthode de tempe–échelle : (décomposition en ondelette) . . . 23

Conclusion 25

Bibliographie 26

Résumé 28

Table des figures

3.1 20
3.2 21
3.3 21
3.4 22
3.5 22
3.6 23

Notations

Ω	un ensemble.
(Ω, F, P)	un espace de probabilité.
p.s	presque sûre.
$\mathbb{P}$–p.s	probabilité presque sûre.
$\langle , \rangle$	produit scalaire.
$\mathbb{E}(X)$	l'espérance de variable aléatoire X.
$\mathbb{E}(./.)$	l'espérance conditionnelle.
$\overset{fdd}{=}$	égalité de processus en loi (finie dimensionnelle)
N(.,.)	loi Normal.
$\overset{L}{=}$	égalité en loi.
mb	mouvement Brownien
mbf	mouvement Brownien fractionnaire
v.a	variable aléatoire.
ssi	si salement si
bb	bruit blanc

Introduction

Le mouvement Brownien fractionnaire (MBF) $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ avec un paramètre de Hurst $H \in]0,1]$ est un processus stochastique qui a été introduit par Kolomogrov en 1940, puis généralisé par Mandelbrot et Van Ness en 1968. Grace à ces propriétés particulières il a attiré l'attention d'une grande masse de chercheurs dans le domaine des probabilités. C'est un processus gaussien avec une fonction de covariance $K_H(t,s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$ qui offre à ces trajectoires une propriété Höldérienne d'ordre α (tq : $\alpha < H$) . Dans [5] les auteurs ont montré que le MBF est une généralisation du mouvement brownien standard qui n'est pas un processus de Markov, n'est pas une semi-martingale sauf dans le cas $\frac{1}{2}$ et possède des incréments non indépendants. Une vaste gamme des processus réels qui représentent le phénomène de la mémoire longue et courte sont modélisé par le MBF (longue mémoire si $H > 1/2$ et courte mémoire si $H <= 1/2$). Beaucoup de processus qui se produisent dans des dispositifs de communications cellulaires, dans des systèmes physiques et biologiques et de même pour la finance et l'assurance peut être modélisés par le MBF [5] . Dans ce contexte, ce mémoire est focalisé sur les axes suivants :propriétés principales concernant un MBF, technique de simulation d'un MBF et estimation du paramètre de Hurst par ondelettes. Le présent manuscrit et structuré de la manière suivante :

Chapitre 01 : Donne d'une manière détaillée des rappels concernant le calcul stochastique et le mouvement Brownien standard.

Chapitre 02 : Présente les grandes lignes à propos du mouvement brownien fractionnaire

Chapitre03 : Comporte les parties suivantes :

— Simulation d'un mouvement brownien fractionnaire sous Matlab avec la technique de Sellan, Meyer et Abry [1] qui est basée sur la transformée en ondelettes avec différentes ondes mères.

— Estimation du paramètre de Hurst par la méthode temps-échelle (décomposition en ondelettes).

A la fin, une conclusion générale est rédigée pour résumer le travail.

Chapitre 1

Généralité sur les calcules stochastiques

1.1 Processus stochastique

Définition 1 *soit T un ensemble d'indices $(\mathbb{R}, \mathbb{R}+, \mathbb{N}, ...)$ on appelle processus stochastique définie sur T à valeurs dans (E, Σ) tout famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variable aléatoire X_t indexée par un ensemble T*

Remarque 1 *un processus dépend de deux paramètres t et w tq :en général t le temps et l'aléatoire $w \in \Omega$*

1. *pour t fixé l'état du processus est une v.a $X_t(w)$ sur (Ω, F, P)*
2. *pour w fixé $t \longrightarrow X_t(w)$ est appelé trajectoire du processus*

Théoréme 1 *soit$(X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique sur(Ω, F, P) définie par : $X : (\Omega, F, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^T, B(\mathbb{R}^T))$ est une application mésurable*

Définition 2 *un processus (X_t) est appelé un processus à trajectoire continues si :*
$P(\omega \in \Omega : t \longmapsto X_t(\omega)$ *est continue*$) = 1$

Définition 3 *Le processus A est à variation finie si : $\mathbb{P}$-presque toutes les trajectoires $t \longmapsto A_t(\omega)$ sont à variation finie*

1.1.1 variation totale et variation quadratique

Définition 4 *soit* $[0,T]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $S_n = \{0 = t_0^s < t_1^s < ... < t_n^s = T\}$ *une subdivision de* $[0,T]$ *de pas* $h^s = \max_{0\leq n} |t_i^s - t_{i-1}^s|$
on définit la variation infénitisimale d'ordre p d'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *sur* $[0,T]$ *associée à* S_n *par :* $V_T^p(S_n) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p$
$V_T^p(S_n)$ *a une limite (dans* L^2 *p.s) lors que* $h^s \longrightarrow 0$ *est on appelée :*

1. *si* $p = 1$ *la limite est un variation totale de* $(X_t)_{t\geq 0} sur [0,T]$
2. *si* $p = 1$ *la limite est un variation* ***quadratique*** *de* $(X_t)_{t\geq 0}$ *sur* $[0,T]$ *notée par :*$\langle X, X\rangle_T$ *ou* $\langle X\rangle_T$

1.1.2 Processus Gaussien

Définition 5 *un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est appelé processus Gaussien si tout combinaison linéaire finie de* X_t *une v.a gaussienne* $\Leftrightarrow \forall n \in N, \forall t_1, ..., t_n \geq 0, \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *on a :* $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ *une variable aléatoire Gaussienne.*

Un processus Gaussien est caractérisé par deux fonction : sa fonction espérance $t \longmapsto m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ *et sa fonction de covariance*$(s,t) \longmapsto \Gamma(s,t) = \mathbb{E}[(X_t) - m(t))(X_s - m(s))]$. *La fonction* $\Gamma(s,t)$ *est de type positif au sens où* $\forall n \in N, \forall t_1, ..., t_n \geq 0; a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *on a :* $\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0$

1.1.3 Processus de Markov

Définition 6 *soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus stochastique posons* $F_t^X = \sigma(X_s / s \leq t)$ *on dit que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Markov ssi* $\forall f$ *est un fonction borélienne on a :* $\mathbb{E}(f(X_t)/F_s^X) = \mathbb{E}(f(X_t)/X_s) = \mathbb{E}(f(X_t)/\sigma(X_s))$

Définition 7 *soit* (Ω, F, P) *et* $(X_t)_{t\in\tau}$ *un processus stochastique a valeurs dans un espace* (X, B) *. on dit que* (X_t) *est un Markov si, pour tout* t *, les tribus* $B((X_s, s \leq t))$ *et* $B((X_s, s \geq t))$ *sont conditionnellement indépendantes,* X_t *étant donnée.*

1.1.4 Processus Autosimilaires

Définition 8 *soit* $(X_t)_{t\in T}$ *un processus défini sur* (Ω, F, P) *à valeurs dans* (E, ε), *et* $H \in \mathbb{R}$. $(X_t)_{t\in T}$ *est dit autosimilaire de paramètre* H *si :*

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (X(\lambda t))_{t\in T} \overset{fdd}{=} \lambda^H (X_t)_{t\in T}$

vocabulaire. le paramètre H est appelé paramètre de Hurst

1.1.5 Martingale

Définition 9 *[14] soit* $(\Omega, \Sigma, (F_t)_{t\geq 0}, P)$ *est un espace de proba filtré et* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique on dit que* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est un* F_t*–martingale ssi :*

1. $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R}^+$
2. $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* F_t*–adapté*
3. $\mathbb{E}(X_t/F_s) = X_s \ \forall s \leq t$

une sur–martingale si pour $s \leq t$ $\mathbb{E}(X_t/F_s) \leq X_s$

une sous–martingale si pour $s \leq t$ $\mathbb{E}(X_t/F_s) \geq X_s$.

Remarque 2 *si on a :* $(\Omega, \Sigma, (F_t)_{t\geq 0}, p)$ *un espace filtré et* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique posons* $F_t^X = \sigma(X_s/s \leq t)$ *alors :*

si $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* F_t*–martingale* $\Rightarrow$ $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* F_t^X*–martingale*

Définition 10 ***(martingale locale)*** *un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est appel martingale locale s'il s'écrit* $M_t = M_0 + N_t$

— M_0 *est un variable aléatoire* F_0*–mésurable.*

— $(N_t)_{t\geq 0}$ *est un processus adapté à trajectoires continues avec* $N_0 = 0$

lorsque $M_0 = 0$*, on parle de martingale locale issue de 0*

1.1.6 Semimartingale

Définition 11 *un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est une semimartingale continue s'il s'écrit sous la fourme :*

$X_t = X_0 + M_t + A_t$

où M_t est un martingale locale (issue de 0) et A_t est un processus à variation finie.

1.2 Mouvement Brownien

Définition 12 *[10] on appelle mouvement brownien standard un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles tel que :*

1. *$B_0 = 0$ p.s (processus issu de 0)*
2. *si $t_0 < t_1 < ... < t_n$, les accroissements $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ sont indépendants (avec$0 \leq i \leq n$)*
3. *pour $s, t \geq 0$, tel que : $s \leq t, (B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$*
4. *$t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue P.p.s*

Remarque 3 *de cette définition il suit que pour $0 \leq s \leq t$ on a :*

1. $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$
2. $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s$

1.2.1 pont brownien

soit $T = [0,1]$, le pont brownien $(B_t)_{t\in[0,1]}$ est le processus gaussien centré défini par la fonction de covariance $K(s,t) = min(s,t) - st$

proposition 1 *on peut définit directement un pont brownien B à partir d'un mouvement brownien B par : $B_t = B_t - tB_1, t \geq 0$*

preuve 1 *[11] en effet, d'abord $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ est gaussien centré, puis pour $s, t \in [0,1]$ on a :*

$$\begin{aligned} cov(B_t - tB_1, B_s - sB_1) &= cov(B_t, B_s) - tcov(B_1, B_s) - tcov(B_s, B_1) + tscov(B_1, B_1) \\ &= \min(t,s) - ts - st + ts \\ &= \min(t,s) - ts \end{aligned}$$

puis le processus $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ *est gaussien centré avec la bonne covariance, il s'agit d'un pont brownien.*
réciproquement, on peut construire le mouvement brownien B *sur* $T = [0,1]$ *à partir du pont brownien* B° *et d'une loi normale* $N \sim (0,1)$ *indépendant de* B° *par :*$B_t = B_t + tN$

1.2.2 propriété du mouvement brownien

propriété 1 ***de Gaussien***

soit $(B_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique issu de 0 on a :*

$(B_t)_{t\geq 0}$ *un m.b*$\Leftrightarrow$

1. $(B_t)_{t\geq 0}$ *un processus gaussien centrée à trajectoires continues*
2. $\Gamma(s,t) = min(s,t) = s \wedge t$, $(\Gamma(s,t) = cov(B_t, B_s))$

preuve 2 *voir [16]*

propriété 2 ***(de martingale)*** *:*

si $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un m.b standard alors :*

1. $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un martingale (par rapport à la filtration* $F_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$*)*
2. $B_t^2 - t$ *est un* F_t^B *–martingale*
3. $\exp(\theta B_t - \theta^2 \frac{t}{2})$ *est une* F_t^B *–martingale*

preuve 3 *voir [8]*

propriété 3 ***(de markov)***

soit $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien. pour toute fonction* f *borélienne bornée et pour tout* $s < t$ *on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(B_t)/F_s^B) &= \mathbb{E}(f(B_t)/B_s) \\ &= \frac{1}{2\pi(t-s)} \int_{\Re} f(x) \exp(\frac{-(x-B_s)^2}{2(t-s)})dx\end{aligned}$$

preuve 4 *voir [8]*

1.2.3 transformations du mouvement brownien standard

soit $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien standard. alors les cinq processus ci˘ dessous sont également des mouvements browniens standard :

1. $B_t = -B_t, t \in \mathbb{R}$(propriété de symétrie du mouvement brownien)
2. soit $t \in \mathbb{R}+$ fixé : $B_t = B_T - B_{T-t}, t \in [0, T]$ (renversement du temps)
3. soit $a > 0$ fixé : $B_t = \dfrac{1}{\sqrt{a}} B_{at}, t \in \mathbb{R}$ (loi d'échelle (autosimilarité))
4. $B_t = tB_{\frac{1}{t}}, t > 0etB_0 := 0$ (inversion du temps)

1.2.4 variation quadratiques du mouvement brownien :

soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = t$ est une subdivision de $[0, t]$ avec le pas $h = \max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1})$ donc :
$\langle B_t \rangle_t =_h \lim_{\longrightarrow 0} \sum (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = t$ (la converge dans $\mathbb{L}^2$ p.s)

Théoréme 2 *soit* $t > 0$ *et* $t_i = i\dfrac{t}{2^n}$ *tq* $i = \overline{0, 2^n}$ *(est un subdivision de* $[0, t]$ *)*
posson : $Z_t^n = \sum_{i=1}^{2^n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$
alors : ${}_n \lim_{\longrightarrow +\infty} = t$ *(la convergence dans*$\mathbb{L}^2$ *p.s)*

preuve 5 *[11] on va montrer que :* $\mathbb{E}((Z_t^n - t)^2)_n \underrightarrow{\longrightarrow 0}_{+\infty}$

1. $\mathbb{E}(Z_t^n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{2^n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) = \sum_{i=1}^{2^n} E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) = \sum_{i=1}^{2^n} (t_i - t_{i-1}) = t$
2. $var(Z_t^n) = var(\sum_{i=1}^{2^n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \overset{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) sont\ indipendant}{=} \sum_{i=1}^{2^n} var(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2)$
   Rap *: si* $x \sim N(0, \sigma)$ *donc* $var(X^2) = 2\sigma^4$
   $\Rightarrow var(Z_t^n) = \sum_{i=1}^{2^n} 2(\dfrac{t}{2^n})^2 = t^2 \sum_{i=1}^{2^n} (\dfrac{1}{2^{2n-1}}) = \dfrac{t^2}{2^{2n-1}} 2^n = \dfrac{t^2}{2^{n-1}}$
   $\Rightarrow var(Z_t^n) = \dfrac{t^2}{2^{n-1}} \Rightarrow_n \lim_{\longrightarrow +\infty} var(Z_t^n) = 0$

Chapitre 2

Mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 13 *[18] on a (Ω, F, P)un espace de probabilité, le mouvement brownien fractionnaire de paramètre $H \in]0,1]$ est un processus gaussien réel centré noté $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ qui vérifiant :*

1. $B_0^H = 0$ *P–p.s*
2. $\mathbb{E}[(B_t^H)^2] = |t|^{2H} \forall t \geq 0$
3. B^H *a des accroissements stationnaires*

proposition 2 *le mouvement brownien fractionnaire admet la fonction de covariance définie par :*

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$$

preuve 6 *[15] on a :*

$$\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = \mathbb{E}[(B_t^H)^2] + \mathbb{E}[(B_s^H)^2] - 2\mathbb{E}[B_t^H B_s^H]$$

et comme

$$B_t^H - B_s^H \stackrel{L}{=} B_{t-s}^H$$

finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] &= \frac{1}{2}(E[(B_t^H)^2] + E[(B_s^H)^2] - E[(B_t^H - B_s^H)^2]) \\
&= \frac{1}{2}(E[(B_t^H)^2] + E[(B_s^H)^2] - E[(B_{t-s}^H)^2]) \\
&= \frac{1}{2}E[(B_1^H)^2](t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})
\end{aligned}$$

proposition 3 *soit B^H est un mouvement brownien fractionnaire de indice Hurst $H \in]0,1]$*

1. *si $H = \dfrac{1}{2}$ alors mbf est un mouvement brownien classique*
2. *si $H = 1$ alors $B_t^H = tB_1^H$ presque surement pour tout $t \geq 0$*

preuve 7 *[15]*

1. *on voit tout de suit que la covariance de $B^{\frac{1}{2}}$ réduit à $(s,t) \longmapsto s \wedge t$ donc $B^{\frac{1}{2}}$ est un mouvement brownien classique*
2. *lorsque $H = 1$ on a pour tout $t \geq 0$:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(B_t^H - tB_1^H)^2] &= E[(B_t^H)^2] + t^2 E[(B_1^H)^2] - 2tE[(B_t^H B_1^H)] \\
&= t^2 + t^2 - t(t^2 + 1 - (1-t)^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $B_t^H = tB_1^H$ presque surement

proposition 4 *B^H est un mouvement brownien fractionnaire de indice Hurst $H \in]0,1]$ alors :*

1. *pour tout $a > 0, (a^{-H}B_{at}^H)_{t\geq 0} \overset{L}{=} (B_t^H)_{t\geq 0}$ (est un autosimilarité)*
2. *$(t^{2H}B_{\frac{1}{t}}^H)_{t\geq 0} \overset{L}{=} (B_t^H)_{t\geq 0}$ (est un inversion de temps)*
3. *$\forall\ h > 0, (B_{t+h}^H - B_h^H)_{t\geq 0} \overset{L}{=} (B_t^H)_{t\geq 0}$ (est un stationnarité de incréments)*

preuve 8 *[15, p 12]*

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B^H_{at}B^H_{as}) &= \frac{1}{2}(at^{2H}+as^{2H}-|at-as|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}a^{2H}(t^{2H}+S^{2H}-|t-s|^{2H}) \\
\textit{donc} & \\
\mathbb{E}(a^{-H}B^H_{at}a^{-H}B^H_{as}) &= \frac{1}{2}a^{-2H}E(B^H_{at}B^H_{as}) \\
&= \frac{1}{2}a^{-2H}a^{2H}(t^{2H}+S^{2H}-|t-s|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H})
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(t^{2H}B^H_{\frac{1}{t}}s^{2H}B^H_{\frac{1}{s}}) &= \frac{1}{2}t^{2H}s^{2H}E(B^H_{\frac{1}{t}}B^H_{\frac{1}{s}}) \\
&= \frac{1}{2}t^{2H}s^{2H}(\frac{1}{t}^{2H}+\frac{1}{s}^{2H}-|\frac{1}{t}-\frac{1}{s}|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H})
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
\mathbb{E}((B^H_{t+h}-B^H_h)(B^H_{s+h}-B^H_h)) &= \mathbb{E}(B^H_{t+h}B^H_{s+h})-\mathbb{E}(B^H_{t+h}B^H_h)-\mathbb{E}(B^H_{s+h}B^H_h)+\mathbb{E}((B^H_h)^2) \\
&= \frac{1}{2}[((t+h)^{2H}+(s+h)^{2H}-|t-s|^{2H}) \\
-((t+h)^{2H}+(h)^{2H}-|t|^{2H}) & \\
-((s+h)^{2H}+(h)^{2H}-|s|^{2H})+2h^{2H}] & \\
&= \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}) \\
&= \mathbb{E}(B^H_tB^H_s)
\end{aligned}$$

2.1 propriété de mouvement brownien fractionnaire

2.1.1 propriété de variation quadratique

Théoréme 3 *soit $(B^H_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramétré H et $0=t_0<t_1<....<t_n=t$ est une subdivision de $[0,t]$ avec le pas $h=\max_{i=1,\dots,n}(t_i-t_{i-1})$ donc : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{(t_{i-1},t_t)\in h}(B^H_{t_i}-B^H_{t_{i-1}})^2=\langle B^H\rangle_t$ on a :*

$$\langle B^H \rangle_t = 0, \ \forall t \in \mathbb{R} \qquad pour\ H > \frac{1}{2}$$
$$\langle B^H \rangle_t = t, \ \forall t \in \mathbb{R} \qquad pour\ H = \frac{1}{2}$$
$$\langle B^H \rangle_t = +\infty, \ \forall t \in \mathbb{R}^* \qquad pour\ H < \frac{1}{2}$$

preuve 9 *voir [15, p 22]*

2.1.2 Propriété de Semimartingale

Théoréme 4 *le mouvement brownien fractionnaire n'est pas une semimartingale pour* $H \neq \frac{1}{2}$ *relativement à sa filtration naturelle*

preuve 10 *[15, p 23] supposons que* $B^H = M + V$ *est un semimartingale*
$H > \frac{1}{2}$
on a $\langle M \rangle_t = \langle B^H \rangle_t = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$
donc en vertu de la décomposition de Doob–Meyer, $M^2 - \langle M \rangle_t$ *est une martingale locale continue nulle en 0 c'est à dire qu'il existe une suit* $T_N : n \in \mathbb{N}$ *croissante de tempe d'arrêt telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} T_n = +\infty \ \mathbb{P}\breve{}p.s$$

et

$$\forall n, \forall t, \mathbb{E}[M^2_{t \wedge T_n}] = \mathbb{E}[M^2_{0 \wedge T_n}] = \quad 0$$

$$\forall n, \forall t, M^2_{t \wedge T_n} = 0 \ \mathbb{P}\breve{}p.s$$

comme T_n *tend croissant vers* $+\infty$ $\mathbb{P}$*–p.s, on a :*

$$\forall t, M^2_t = 0 \ \mathbb{P}\breve{}p.s$$

Donc M^2 *est indistinguable du processus nul.*
$\forall t B^H_t = V_t$ $\mathbb{P}$*–p.s. et donc* B^H *est* $\mathbb{P}$*–p.s. à variation quadratique finie*
$H < \frac{1}{2}$
la variation quadratique de M ne serait définie qu'en 0 ce qui contredit l'hypothése de continuité

2.1.3 Propriété de Markov

Théoréme 5 *X_t un processus gaussien centré. X est un processus de markov si :*
$\forall s < t < u$ avec $\Gamma(t,t) < 0$ $\Gamma(s,u)\Gamma(t,t) = \Gamma(s,t)\Gamma(t,u)$
Γ est la fonction de covariance de X

corolaire 1 *soit $H \in]0,1]$ et $H \neq \frac{1}{2}$*
le mouvement brownien fractionnaire (B_t^H) n'est pas markov

preuve 11 *[6, p 81] s'il était markov, sa fonction de covariance vérifierait et en particulier, comme $1 < 2 < 3$, on aurait :*

$$\begin{aligned}
\Gamma(1,3)\Gamma(2,2) &= \Gamma(1,2)\Gamma(2,3)\\
\frac{1}{2}(1+3^{2H}-2^{2H}) &= \frac{1}{2}(1+2^{2H}-1)\frac{1}{2}(2^{2H}+3^{2H}-1)\\
3+3^{2H}-3(2^{2H}) &= 0
\end{aligned}$$

2.1.4 Propriété de continuité Hölder

Définition 14 *f est Hölder continu de paramétré $\mu \in [0,1]$ s'il existe $c > 0$ et $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :*

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t-s|^{\mu}, s,t \in \mathbb{I}$$

Théoréme 6 *le mouvement brownien fractionnaire admet une modification dont les trajectoires ont une continuité de Hölder d'ordre $\gamma < H$ c'est :*

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^{\alpha}) \leq C_{\alpha}|t-s|^{\alpha H}$$

preuve 12 *[15, p 17] on montrer que, $\forall \alpha > 0$ il existe une constante C_{α} tell que, $\forall s,t \in [0,p]^2$:*

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^{\alpha}) \leq C_{\alpha}|t-s|^{\alpha H} \ (*)$$

la condition $(*)$ par la théorème de régularité de Kolmogorov que $(B_t^H)_{t\in[0,p]}$ admet une modification dont les trajectoires sont Höder continues d'ordre $\gamma \in [0, \dfrac{\alpha H - 1}{\alpha}[, \forall \alpha > 0$ ce que montre la résultat. La condition $(*)$ découle de la stationnarité des accroissement et de l'autosimilarité :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^\alpha) &= \mathbb{E}(|B_{t-s}^H|^\alpha) \\ &= |t-s|^{\alpha H}\mathbb{E}(|B_1^H|^\alpha)\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $C_\alpha = \mathbb{E}(|B_1^H|^\alpha) < +\infty$

Théoréme 7 *les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire n'ont $\mathbb{P}$–p.s.pas de continuité de Hölder d'ordre supérieur à H sur tout intervalle borné.*

2.1.5 propriété Non–différentiabilité

les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire$(B_t^H)_{t\geq 0}$ *avec* $H \in]0,1]$ sont $\mathbb{P}$–p.s non–différentiables en t_0 si :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}\left(\lim_{t\longrightarrow t_0}\sup\left|\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t-t_0}\right| = +\infty\right) = 1$$

preuve 13 *[15, p 18] cas $t_0 = 0$ grâce à la stationnarité, on va donc étudier le comportement de $\left|\dfrac{B_t^H}{t}\right|$ quand t tend vers t_0*
on va démontrer la non–différentiables à droite : on pose $A_M(t) = \left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|\dfrac{B_t^H}{t}\right| \geq M\right)$ avec $M > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{N}(A_M(t)) &\geq \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|\frac{B_t^H}{t}\right| \geq M\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\frac{t^H}{t}|B_1^H| \geq M\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(|B_1^H| \geq M(t^{1-H})\right)_{t\longrightarrow 0} \longrightarrow \mathbb{P}\left(|B_1^H| \geq 0\right)\end{aligned}$$

donc on a pour tout M, $\mathbb{N}(A_M(t))_t \rightrightarrows_{0^+} 1$

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\sup\left|\frac{B_t^H}{t}\right| = +\infty \ \mathbb{P}\text{–}p.s$$

2.2 représentation de mouvement brownien fractionnaire

2.2.1 moyenne mobile

Théorème 8 *soit $0 < H < 1$, M une mesure aléatoire gaussienne de mesure de contrôle la mesure Lebesgue et B_t un mouvement brownien ordinaire.*
les processus définis pas :

$$\left\{\frac{1}{C_1(H)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[((t-s)_+)^{H-\frac{1}{2}}-((-s)_+)^{H-\frac{1}{2}}\right]M(ds) : t\in\mathbb{R}^+\right\}$$
$$\left\{\frac{1}{C_1(H)}\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}}-(-s)^{H-\frac{1}{2}}\right]dB_s+\int_{-\infty}^{0}(t-s)^{H-\frac{1}{2}} : t\in\mathbb{R}^+\right\}$$

avec : $C_1(H)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[((t-s)_+)^{H-\frac{1}{2}}-((-s)_+)^{H-\frac{1}{2}}\right]^2 ds}$
sont des mouvement brownien fractionnaire d'indice H.
Bien que formellement équivalents (en considérant $M(ds) = dB_s$) ces deux processus ne sont pas définis de la même façon.

preuve 14 *[4] soit $(s,t)\in(\mathbb{R}^+)^2$, on a :*

$$B_t^H - B_s^H = \frac{1}{C_1(H)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[((t-u)_+)^{H-\frac{1}{2}}-((s-u)_+)^{H-\frac{1}{2}}\right]M(du)$$
$$\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = \frac{1}{C_1^2(H)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[((t-u)_+)^{H-\frac{1}{2}}-((s-u)_+)^{H-\frac{1}{2}}\right]^2 du$$

on effectue le changement de variable $u = |t-s|v + s$ on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] &= \frac{1}{C_1^2(H)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[((|t-s|(1-v))_+)^{H-\frac{1}{2}}-((-|t-s|v)_+)^{H-\frac{1}{2}}\right]^2|t-s|dv\\ &= \frac{1}{C_1^2(H)}|t-s|^{2H}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[((1-v)_+)^{H-\frac{1}{2}}-((-v)_+)^{H-\frac{1}{2}}\right]^2 dv\\ &= |t-s|^{2H}\end{aligned}$$

2.2.2 harmonisable

Théorème 9 *soit $0 < H < 1$, $\widetilde{M}$ une mesure aléatoire gaussienne complexe de mesure de contrôle $\frac{\lambda}{2\pi}$. Le processus défini par :*

$$\left\{X_t = \frac{1}{C_2(H)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\zeta t}-1}{i\zeta|\zeta|^{H-\frac{1}{2}}} \tilde{M}(d\zeta) : t \in \mathbb{R}^+\right\}$$

avec $c_2(H) = \sqrt{\dfrac{\Gamma(2-2H)cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}}$
est un mouvement brownien fractionnaire d'indice H.

Mesure aléatoire gaussienne complexe

Définition 15 *on appelle* $\widetilde{M} = M_1 + iM_2$ *est une mesure aléatoire complexe, par* M_1 *et* M_2 *deux mesures gaussiennes réelles indépendantes définies sur* $\mathbb{R}^+$*, de mesure de contrôle* $\dfrac{\lambda}{2}$*, et telles que :*

$$M_1(A) = M_1(-A)$$
$$M_2(A) = -M_2(-A)$$

pour tout ensemble borélien A

Mesure aléatoire gaussienne réelle

Définition 16 *soit* $\varepsilon_0 = \{A \in B(\mathbb{R}) : \lambda(A) < \infty\}$ *où* λ *désigne la mesure de Lebesgue. une mesure aléatoire gaussienne de mesure de contrôle* λ *est une fonction* σ*–additive :*
$M : \varepsilon_0 \longrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$
telle que :

1. $M(A) \sim N(0, \lambda(A))$
2. *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, si* $A_1, ..., A_k$ *sont des boréliens disjoints* ε_0 *alors* $M(A_1), ..., M(A_k)$ *sont indépendantes.*

preuve 15 *voire [4]*

Chapitre 3

Simulation et identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette

3.1 Simulation d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette

Dans cette partie du chapitre 3, nous exposons une technique de simulation d'un mouvement brownien fractionnaire basée sur la décomposition par ondelettes proposée par Sellan, Meyer et Abry dans[1]

3.1.1 Méthode de Sellan, Meyer et Abry : synthèse d'ondelettes

L'idée de cette méthode est basée sur la décomposition d'un bruit blanc gaussien (bbg) sur une base d'ondelettes qui engendre une analyse multirésolution (AMR) et le[7] résultat de l'article [9], qui montre que le mbf est obtenu par l'intégration fractionnaire d'un bbg.
En commençant par une base d'ondelettes $\{\Phi_0(t-k)\backslash k \in \mathbb{Z}\}$ et $\left\{\Psi_{jk}(t) = \Psi_0(2^{\frac{j}{2}}(j-k)/j, k \in \mathbb{Z})\right\}$ alors on a :

$$w(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(k)\Phi_0(t-k) + \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_j(k)\Psi_{j,k}(t) \tag{3.1}$$

avec :

$w(t)$ et un bbg

$\lambda(k) et\ \gamma_j(k)$ sont des v.a gaussiennes standard indépendantes

$\Phi_0(t)$ la fonction échelle

$\Psi_0(t)$ l'onde mère

Par l'intégration fractionnaire de (3.1) on obtient :

$$B^H(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(k)(D^{-s}\Phi_0)(t-k) + \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_j(k)(D^{-s}\Psi_{j,k})(t)$$

tq : $s = H + \frac{1}{2}$ et D^{-s} est l'opérateur d'intégration fractionnaire défini par :

$$D^{-s}f(t) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^t (t-u)^{s-1}f(u)du$$

Le théorème suivant présente explicitement la technique d'intégrer fractionnairement une base d'ondelettes pour obtenir ce que on appelle ondelettes fractionnaires

Théorème 3.1 :

soit Φ_0 une fonction d'échelle d'une AMR dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, de régularité $r \in \mathbb{N}^*$, et Ψ_0 l'onde mère associée à Φ_0.

Supposons que $s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, alors :

$\Phi_0^{(s)} = U_s(\Phi_0)$ *pour et* $\Phi_0^{((-s))} = \bar{U}_{-s}(\Phi_0)$ définissent deux fonctions échelles qui engendrent deux (AMR) biorthogonales dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ respectivement tq : la fonction $g = U_s(f)$ possède une transformation de Fourier définie par :

$$\hat{g}(w)(i2\pi w)^{(-s)}(1 - exp(i2\pi w))^2\hat{f}(w)$$

et les ondelettes mère associées respectivement sont :

$$\Psi_0^{(s)} = 4^s D^{-s}(\Psi_0), \quad et \quad \Psi_0^{(-s)} = 4^{-s}\bar{D}^s(\Psi_0)$$

Conséquence 3.1 :

Sous les conditions du théorème ci-dessu, les auteurs dans [9] ont montré qu'ils existent un bruit blanc gaussien de variance qui δ^2qui permettre de construire un processus

ARIMA(0, s,0) noté par b_H , et pour chaque $j \in \mathbb{Z}^+$ un bruit blanc discret de variance $2^j\delta^2$ noté par $(\gamma_j(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ tq :

$$\forall t \in]0,T] \quad B^H(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_H(k)\Phi_0^s(t-k) + \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 4^{-s}2^{-js}\gamma_j(k)\Psi_{j,k}^s(t). \tag{3.2}$$

Remarque 4 *: (Implémentation numérique)*
Concernant l'implémentation numérique de la méthode de Sellan, Meyer et Abry pour la synthèse d'un mouvement brownien fractionnaire est détaillé dans [13]. La fonction wfbm intégrée dans le toolbox matlab génère un mbf à l'aide de cette technique.

3.1.2 Quelques résultats de simulation d'un mbf avec la méthode de Sellan et Abry

Simulation d'un mouvement brownien fractionnaire à l'aide de la transformée en ondelettes avec différentes ondes mères

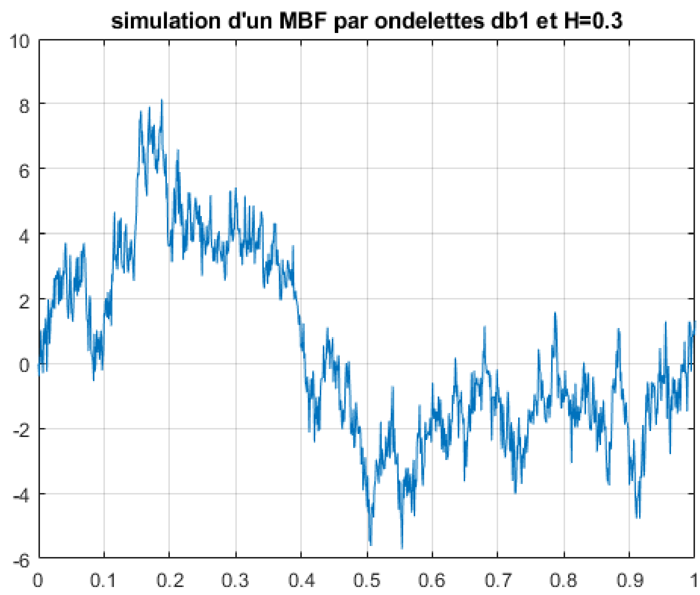

Figure 3.1 –

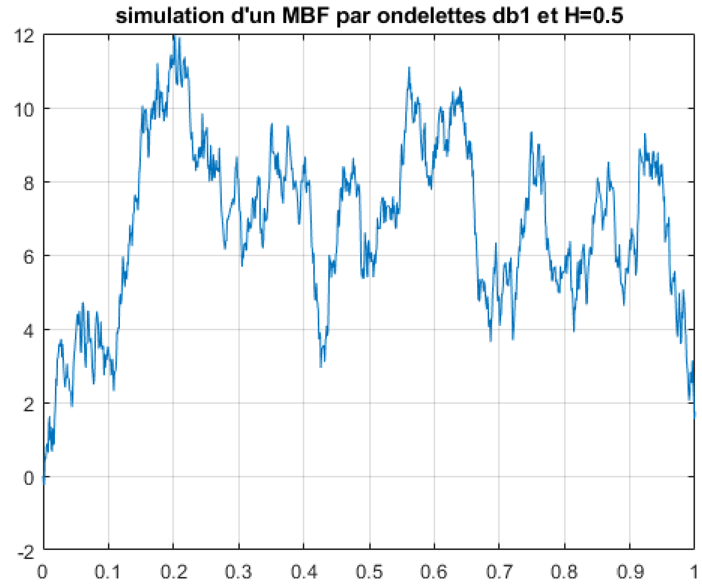

FIGURE 3.2 –

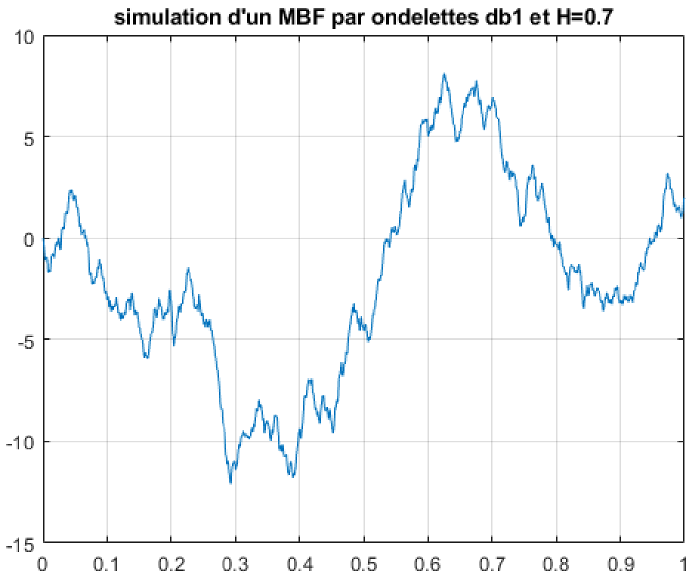

FIGURE 3.3 –

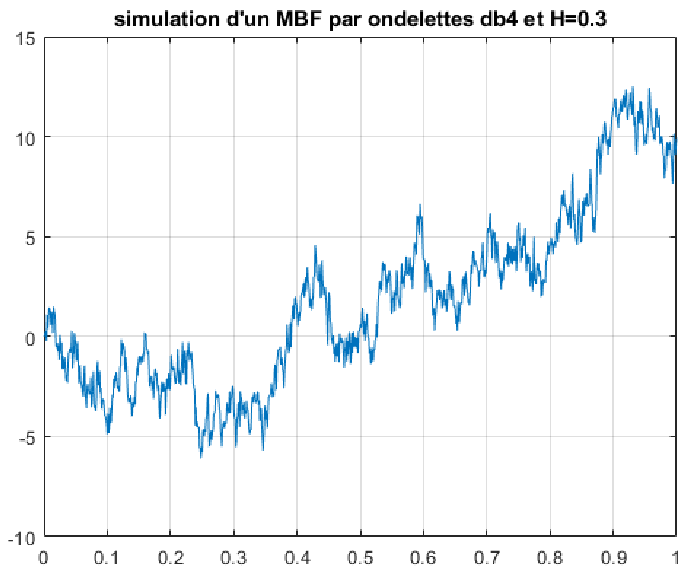

FIGURE 3.4 –

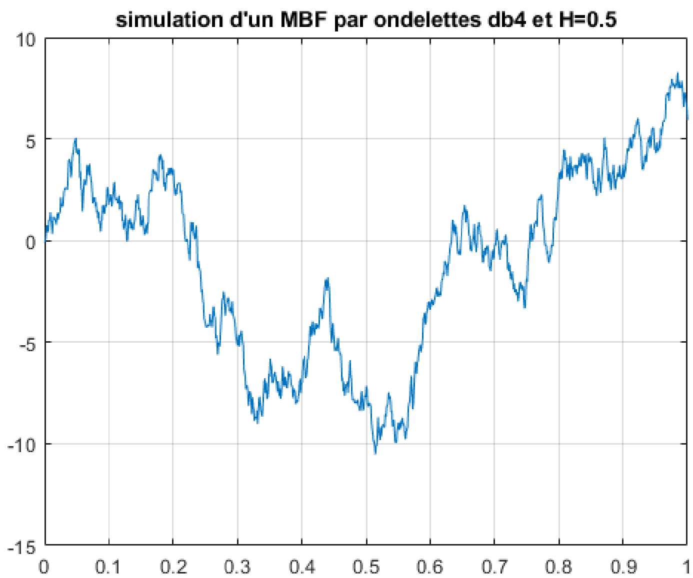

FIGURE 3.5 –

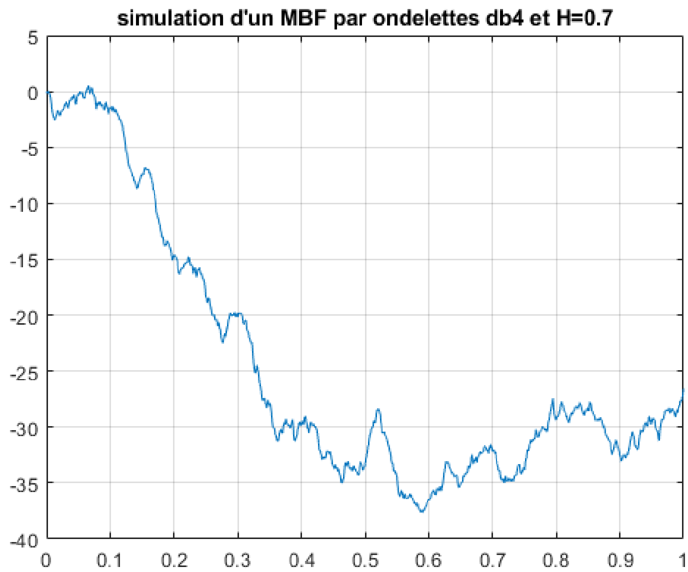
simulation d'un MBF par ondelettes db4 et H=0.7
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

FIGURE 3.6 –

3.2 Identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette

Dans cette deuxième partie du chapitre, nous exposons la méthode d'estimation du paramètre de Hurst d'un mouvement brownien fractionnaire par ondelettes proposée par [13]

3.2.1 Méthode de tempe–échelle : (décomposition en ondelette)

soit $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}}\psi_0(2^{-j}t-k), j,k \in \mathbb{Z}\}$est une base d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$. La technique de décomposition en ondelettes est basée sur les propriétés des coefficients de la transformée en ondelettes qu'ils sont définis par :

$$< B_t^H, \psi_{j,k}(t) >= \int_{\mathbb{R}} B_t^H \psi_{j,k}(t)dt \tag{3.3}$$

Propriétés des coefficients ondelettes :

1. L'autosimilarité du mbf implique que :
   $\mathbb{E}(< B_t^H, \psi_{j,k} >^2) = \dfrac{1}{2}2^{j(2H+1)} \int_{\mathbb{R}^2} |u-v|^{2H}\psi_0(u)\psi_0(v)dudv = C_H 2^{j(2H+1)}$

2. Flandrin et al dans [2] ont montré que :
   Si $|j-j'| \longrightarrow +\infty$ alors :
   $$\mathbb{E}(< B_t^H, \psi_{j,k}(t) >< B_t^H, \psi_{j',k'}(t) >= O(|2^jk - 2^{j'}k'|^{2(H-M)})$$
   tq : M est le nombre de moments nuls de l'ondelette mère.
   Donc d'après la propriété 1. on obtient
   $$\log_2(\mathbb{E}(< B_t^H, \psi_{j,k}(t) >^2)) = j(2H+1) + \log_2|C_H| \tag{3.4}$$
   En estimant le terme $\mathbb{E}(< B_t^H, \psi_{j,k}(t) >^2)$ par le moment empirique d'ordre 2 suivant :

$$\mu_j = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} < B_t^H, \psi_{j,k}(t) >^2$$

$$(3.4) \Rightarrow \log_2(\mu_j) = j(2H+1) + \log_2 |C_H|$$

Donc l'estimateur de H est déduit par la régression linéaire de$\{\log_2(\mu_j)\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$ sur $\{j\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$.

Conclusion

Durant l'élaboration de ce modeste travail que nous nous sommes fixés, nous avons essayé de présenter d'une manière détaillée les rappels concernant le calcul stochastique et le mouvement Brownien standard dans la première partie, puis nous avons donné d'une manière globale la majorité des définitions et les propriétés concernant le mouvement Brownien fractionnaire (MBF). A la fin de ce mémoire nous avons détaillé la technique de simulation d'un mouvement brownien fractionnaire et la méthode d'estimation du paramètre de hurst qui sont basées sur la transformée en ondelettes. Finalement nous espérons avoir la capacité de continuer à explorer le vaste domaine du calcul stochastique fractionnaire.

Bibliographie

[1] Abry P. and Sellan F. (1996), The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion,Applied and computational harmonic analysis, Vol.3, p.377-383.

[2] Abry P.,Gonçalvés P., Flandrin P. (1995), Wavelets, spectrum analysis and 1/f processes, Wavelets and Statistics, Lectures Note in Statistics, Vol.103, p.15-29.

[3] Abry P., Veitch D. (1998), Wavelet Analysis of Long-Range-Dependent Traffic , IEEE Transactions on Information Theory, Vol.44, No.1, p.2-15.

[4] B. MANDELBROT et J. Van Ness –fractional Brownian montions, fractional noises applications , SIAM Rev. 10(1968), p. 422 –437

[5] Banna, Oksana ; Mishura, Yuliya ; Ralchenko, Kostiantyn, Fractional Brownian Motion : Approximations and Projections, John Wiley. Sons 2019.

[6] D. Revuz et M. Yor–Continouus martingales and Brownian motion, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematicale Sciences], vol.293, Springer–Verlag, Berlin, 1991.

[7] Daubechies I. (1992), Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics.

[8] Dominique. Bakry chapitre 8 : Le Mouvement Brownien université de paris 232–237.

[9] F. Sellan, Synthèese de mouvements browniens fractionnaires à l'aide de la transformation par ondelettes. C.R.Acad Paris Sér 1 Math

[10] Ivan Nourdin. Selected Aspects of Fractional Brownain Motion. springer. p23

[11] jean–Christophe Breton Processus stochastiquesuniversité de Rennes 1 version du 20 octobre 2019.

[12] Jean-Francois, Coeurjolly.Simulation and identification of the fractional Brownian motion : a bibliographical and comparative study, Journal of statistical software ,vol5 (2000), issue7.

[13] Jean-François Coeurjolly. Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000.

[14] Nadine Guillotin-Plantard. Introduction Au Calcul Stochastique. Université Lyon1,paris. 13 novembre 2009.

[15] Nicolas SAVY. Mouvement brownien fractionnaire, application aux télécommunication.Calcule stochastique relativement à des processus fractionnaire. Université de Rennes. 2003.

[16] Olivier Lévêque,cours de probabilités et calcul stochastique Semestre d'hiver 2004–2005.

[17] Sellan F. (1995), Synthèse de mouvements browniens fractionnaires à l'aide de la transformation par ondelettes, C.R. Académie des sciences de Paris, T.321, Sér.I, p.351-358.

[18] Yuliya S. Mishura(1929). Stochastic calculus for fractional brownain motion and related processes. springer.p7

Résumé

Notre objectif dans ce mémoire est de concentrer sur les caractéristiques d'un mouvement Brownien fractionnaire (MBF) avec un exposant de Hurst H $\in]0,1[$,effectuer des simulations sous Matlab concernant les trajectoires d'un (MBF) à l'aide de la méthode de Sellan, Meyer et Abry qui est basée sur la transformée en ondelettes et l'estimation du paramètre de Hurst.
Mots-clés : Mouvement brownien fractionnaire, Paramètre de Hurst, Transformée en ondelettes, ondelettes.

Abstract

Our aim in this dissertation is to focus on the general characteristics of a fractional Brownian motion (FBM) with a Hurst parameter H $\in]0,1[$, perform simulations in Matlab concerning the trajectories of an FBM using Sellan, Meyer and Abry method which is based on the wavelet transform and the estimation of Hurst parameter.
Key words : Fractional Brownian motion, Hurst parameter, Wavelet transform, Wavelets.

ملخص

هدفنا من هذه الرسالة هو التركيز على خصائص الحركة البراونية الكسرية بمعامل هرست، وإجراء عمليات محاكاة في Matlab فيما يتعلق بمسارات الحركة البراونية الكسرية باستخدام طريقة سيلان ، ماير وأبري التي تعتمد على تحويلها الى مويجات وتقدير معامل هرست.
الكلمات المفتاحية :الحركة البراونية الكسرية، معامل هرست، تحويل الى مويجات، مويجات.