République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option **: Probabilités Et Statistique**

Par :

MANSOURI Zineb

Titre :

Existence du contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires

Membres du Comité d'Examen :

BEN BRAHIM Radhia	M.A	UKM, OUARGLA	Encadreur
SAOULI Mostapha Abdelouahab	M.A	UKM, OUARGLA	Président
MANSOUL Ibrahim	M.A	UKM, OUARGLA	Examinateur

28 Juin 2021

Dédicace

"**Allah**" soit loué et cela suffit, et les prières soient sur le prophète bien-aimé, sa famille et ceux qui sont fidèles.

je dédie ce travail

A l'âme pure de ma mère, que Dieu ait pitié d'elle et lui accorde le plus haut paradis

A tous ceux qui m'ont appris une lettre dans ce monde mortel, mon cher père, que Dieu le protège et prenne soin de lui

A l'âme de ma pure tante, que Dieu ait pitié d'elle et habite dans son vaste paradis

A mes frères et soeurs et toute ma chère famille et mes proches

Aux compagnons de voyage qui ont partagé ses moments avec moi, que Dieu les bénisse et leur accorde la réussite

Et à tous ceux avec qui vous avez un lien, ou avec qui vous m'avez lié d'un nœud d'affection, et à tous ceux que mon cœur aime et dont la plume a oublié, vous avez fait de moi un trésor et un lien.

REMERCIEMENTS

"**Allah**" soit loué avant tout pour cette grande générosité et ce grand don. Lui, tout le mérite est attribué à l'achèvement de ce mémorandum.

Et conformément à sa parole, la paix soit sur lui **(Celui qui ne remercie pas les gens ne remercie pas Dieu)**

Je tiens à remercier mon professeur superviseur, qui est généreuse et généreuse, **Radhia bin Brahim**, pour ses efforts, son temps, ses conseils, son orientation et ses conseils.

Nous remercions également le comité représenté par **MANSOUL Ibrahim** et **SAOULI Mostapha Abdelouahab** d'avoir accepté de discuter de cette étude.

Je ne suis pas ici grâce à vous, puis grâce à mes professeurs et professeurs, envers qui j'ai une grande gratitude et amour pour chaque brique qu'ils mettent dans mon édifice d'apprentissage et d'information.

Ma mère, que Dieu ait pitié d'elle, mon père, ma famille, mes amis, mes proches et tous ceux qui ont une faveur pour moi, merci beaucoup.

Table des matières

Introduction

Dans cette mémoire nous étudierons l'existence du contrôle optimal pour les equations différentielle stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé). Où nous montrons la forme **EDSR** :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T].$$

Où f est générateur, Z est le processus diffusion et W est mouvement brownien défine sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, qui est apparu pour la première fois en 1973, lorsque le scientifique J-Bismut,[3] l'a présenté sous la forme linéaire, puis il a été lancé par les scientifiques Pardoux et Peng en 1990, [14] qui lui ont présenté une nouvelle forme qui a été évoquée précédemment.

Résoudre une **EDSR** revient à déterminer un couble de processus noté $(Y_t, Z_t)_{t \geq 0}$, et la condition terminale $Y_T = \xi$ est variable aléatoire de carré integrable.

Nous concentrons d'existence de contrôle optimale stochastique, où le systéme est gouvrnés par une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire de la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (A_s Y_s + B_s Z_s + C_s u_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T].$$

Notre objective est de minimiser sur l'ensemble des contrôles admissibles une fonction de coût donnnée par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[g(y_0) + \int_0^T h(t, y_t, z_t, u_t) dt\right],$$

où $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times U \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes données. Un contrôle $\overline{u}$ est dit optimal s'il vérifie :

$$J(\overline{u}(\cdot)) = \inf_{u \in U_{ad}} J(u).$$

Ce mémoire est composé à trois chapitres :

Premièr chapitre :Rappel sur calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques théorèmes et définitions clés, et expliquons certains processus d'intégration et de différenciation stochastique.

Deuxième chapitre :Équations différentielle stochastiques rétrogrades (EDSR)

Dans ce chapitre, nous avons traité de la définition des équations différentielles stochastiques rétrogrades et nous avons démontré le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas où les les coefficients sont globalement Lipschitziens. Lipschitz, dont les clients étaient E.Pardoux et S.Peng L et dans le dernier nous avons défini la forme linéaire d'**EDSR**.

Troisième chapitre :Existence du Contrôle optimal stochastique pour l'EDSR linéaires

Dans ce chapitre, nous montrons l'existence d'un contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires. On suppose ici que le champ de contrôle est convexe pour que les fonctions h et g (de coût fonctionnel) soient convexes. La preuve est basé sur de puissantes techniques de convergence et la théorie de Mazur.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de donner les dèfinitions, les thèories de base et les principales conclusions dont nous avant besoin dans les chapitres suivants.

Définition 1.0.1 ***(variable aléatoire (v.a.))***[10] *Soit* $(E;\mathcal{E})$ *un espace mesurable. Une variable aléatoire (v.a.) a valeurs dans* E *est une application* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E; E)$ *mesurable, c'est- a-dire :*

$$\forall B \in \mathcal{E} \quad X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\Omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)***[6] *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité,* $\mathbb{T}$ *un ensemble d'indices*$(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N}....)$. *On appelle processus stochastique sur un espace probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *définie sur* $\mathbb{T}$ *à valeurs dans* (E, Σ) *tout famille* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *de variables aléatoire* X_t *indexée par un ensemble* $\mathbb{T}$ *d'épend de deux paramétres* t *et* ω *telle que :en général* t *le temps et l'aléatoére* $\omega \in \Omega$.

Remarque 1.1.1 – *pour* t *fixé, l'état du processus est une variable aléatoére* $X_t(\omega)$ *sur un espace probabilité*$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

– *pour* ω *est fixé* $t \to X_t(\omega)$ *est appelé trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 ***(Filtration)***[7] *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est -à-dire telle que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$.

Définition 1.1.3 ***(La mésure de probabilité)***[7] *Une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*est une application* P *de*$\mathcal{F}$*dans* $[0,1]$ *telle que*

a) $P(\Omega) = 1$.

b) $P(\cup_{n=0}^{\infty}(An)) = \sum_{n=0}^{\infty} P(An)$pour des A_n appartenant à $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

Définition 1.1.4 ***(Ensembles négligeables)***[7]

-Un ensemble est dit négligeable s'il est de probabilité nulle.

-Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

-Une propriété est vraie presque surement (p.s.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

-On dit aussi que la propriétéest vraie pour presque tout ω.

-Un espace$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit complet s'il contient tous les ensembles G tels que :

$$\inf \{P(F) : F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0.$$

Remarque 1.1.2

(i). les ensembles négligable sont contenues dans $\mathcal{F}_0$.

(ii). la filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{t<s}\mathcal{F}_s$.

(iii). Une filtration **G** est dite plus grosse que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_t \subset G_t, \forall t$.

Définition 1.1.5 *La variable aléatoire* $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \Sigma)$ *est dite* $\mathcal{F}_t$*-mesurable si :*

$$\forall B \in \Sigma; X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.6 ***(processue adapté)***[7] *Un processus stochastique* $X = (X_t; t \geq 0)$ *est dit adapté (par rapport a une fitration* $\mathcal{F}_t$*) si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* t*.*

Remarque 1.1.3 *tout processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est adapté à sa filtration naturalle*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t).$$

Définition 1.1.7 ***(Modification d'un processus)***[6] *On dit que deux processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *définis sur le même espace d'état* (E, Σ) *sont modification (ou une version) l'un de l'antre ssi :*

$$\forall t \in \mathbb{T} : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

Définition 1.1.8 ***(processus indistigrables)***[6] *Deux processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *définis sur*$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sont dit indistingrable si les trajectoires de* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *sont les mêmes i.e*

$$P(\{X_t = Y_t, \qquad \forall t \in \mathbb{T}\}) = 1.$$

Remarque 1.1.4 *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}, (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *sont indistingrable alors* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *sont modification l'un de l'antre, la réciproque est fause.*

Définition 1.1.9 **(Processus progressivement mesurable)**[13] *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{F_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $t \geq 0$*, l'application* $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ *de* $[0, t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(R^d)$*.*

1.2 Esperance conditionelle

[7]

Définition 1.2.1 *Soit $X \in L_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ et G un sous tribu de $\mathcal{F}$. On définie l'espérance conditionnelle de X sachant G, l'unique variable aléatoire $\mathbb{E}(X|G)$ $G_$mesurable sur Ω telle que :*

$$\int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|G) d\mathbb{P}, \qquad \forall B \in G.$$

Propriétés de l'espérance condionnelle Soient $X, Y \in L_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ et G un sous tribu de $\mathcal{F}$,presque sûrement on a :

1. Linéarité :soit α et β deux constantes

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|G) = \alpha \mathbb{E}(X|G) + \beta \mathbb{E}(X|G).$$

2. Croissance :Soit X et Y deux v.a telles que $X \leq Y$, alors :

$$\mathbb{E}(X|G) \leq \mathbb{E}(Y|G).$$

3. Si X est G-mesurable, alors :

$$\mathbb{E}(X|G) = X.$$

4. Si Y est $G_$mesurable alors :

$$\mathbb{E}(XY|G) = Y\mathbb{E}(X|G).$$

5. Si X est indépendante de G alors :

$$\mathbb{E}(X|G) = \mathbb{E}(X).$$

6. Si G et H sont deux tribus telles que $H \subset G$ alors :

$$\mathbb{E}(X|H) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|H)|G) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|G)|H).$$

On note souvent

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}\left(X|\, H)|\, G\right) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\, H)|\, G).$$

7. l'espérance

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\, G) = \mathbb{E}(X). \tag{1.1}$$

8. Si X et Y sont indépendantes, et Φ une fonction borélienne bornée, alors :

$$\mathbb{E}(\,\Phi(X,Y)|\,Y) = \left[\mathbb{E}\left(\Phi\left(x,y\right)\right)\right]_{y=Y}.$$

1.3 Martingales

[7]

Définition 1.3.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq T}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique. On dit que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale ssi :*

1. $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$

2. $(X)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t-$adapté et intégrable.

3. $\mathbb{E}(X_t|\,\mathcal{F}_s) = X_s \qquad \forall s \leq t.$

Propriété 1.3.1 *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une surmartingale (respectivement une sous-martingale), alors :*

$$\forall s \leq t, \mathbb{E}(X_t|\,\mathcal{F}_s) \leq X_s (\textit{respectivement } \; \mathbb{E}(X_t|\,\mathcal{F}_s) \geq X_s).$$

Propriété 1.3.2 *Si* X *est une martingale* $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$, $\forall t$.

Remarque 1.3.1 *Si* $(X_t; t \leq T)$ *est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale :* $X_t = \mathbb{E}(X_T|\,\mathcal{F}_t)$.*Cette dernière propriété est d'un usage trés fréquent en finance.*

Remarque 1.3.2 *Si on a :*$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace filtré et* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique posons :*

$$\mathcal{F}_t^* = \sigma(X_s \ s \leq t).$$

alors si $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t-$martingale $\Longrightarrow$ $(x_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t^*-$martingale.

Théorème 1.3.1 ***(L'inégalité de Doob)***[7] *Si X est une martingale continue, alors :*

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq T} X_s^2) \leq 4\mathbb{E}(X_T^2).$$

Théorème 1.3(Burkholder-Davis-Gundy "BDG")[13]Soit $p \in [0, T]$. Il existe deux constantes c_p et C_P telles que, pour toute martingale continue X, nul en 0.

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{P}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_P\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{P}{2}}\right].$$

Remarque 1.3.3 *En particulier ,si* $T > 0$,

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_P\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}\right].$$

1.4 Mouvement browrnien

[7]

Définition 1.4.1 *On apelle movement brownien stondard un processus stochastique* $(W_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réeles telle que :*

1. $W_0 = 0$.

2. Pour tout $0 < s < t$ dans $\mathbb{T}$,l'accroissement $W_t - W_s$ est independant de $\sigma(W_u, u \leq s)$, et suit la loi aussienne centrée de variance $t - s$.

3. $t \to W_t(w)$ est continue.

Remarque 1.4.1 *De cette définition il suit que pour* $0 \leq s \leq t$, *on a :*

1. $\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0.$

2. $\mathbb{E}((W_t - W_s)^2) = t - s.$

Proposition 1.4.1 *Si* $(W_t, t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien, alors :*

(i). le processus $-W_t$ est un mouvement Brownien.

(ii). le processus $\frac{1}{c}W_{c^2t}$ est un mouvement Brownien.(Propriété de scaling).

(iii). le processus $\overline{W}_t = tW_{\frac{1}{t}}\,; \forall t > 0\,; \overline{W}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.

Qeulques propriétés d'un mouvement brownien

Si $(W)_{t\geq 0}$ un mouvement brownier standad alors :

1. $(W_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

2. $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

3. $(exp(\theta W_t - \theta^2 \frac{t}{2})_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

4. Si $(W_t^1)_{t\geq 0}, (W_t^2)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniers independants , alors le produit de W_t^1 et W_t^2 est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

Théorème 1.4.1 ***(Représentation des martingales browniennes)***[5] *Soit* $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ *une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]} := \sigma(W_t, t \in [0,T])$. *Alors il existe un unique processus* $(Z_t)_{t\in[0,T]}$, *appartenant à* $M^2(\mathbb{R}^n)$, *tel que :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_u dW_u \qquad \forall t \in [0,T], \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

1.5 Calcul d'Itô

[7]

Définition 1.5.1 ***(Intégrale stochastique)*** *Soit* $H(t)$ *est un processus tel que :*

1. *$H(t)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté.*

2. *$\forall T \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < \infty$, on veut définir l'intégrale stochastique d'Itô sous la forme$\int_0^t H_s dW_s$.*

Propriétés de intégrale stochastique

1. Linéarité :

$$\int_0^t \left(a\theta_s^1 + b\theta_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \theta_s^1 dW_s + b\int_0^t \theta_s^2 dW_s.$$

2. Pour $0 < s < u < t < T$

$$\int_s^t \theta_s dW_s = \int_s^u \theta_s dW_s + \int_u^t \theta_s dW_s.$$

3. Si $\int_0^T \mathbb{E}\left[\theta_s\right]^2 ds < \infty$, alors pour tout $t < T$

$$\mathbb{E}[\int_0^t \theta_s dW_s] = 0.$$

4. Isométrie d'Ito

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dW_s\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

5. le processus $\int_0^t \theta_s dW_s$ est une martingale

6. Inégalité maximale :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq T}\left[\int_0^s \theta_u dW_u\right]^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\left[\int_0^T \theta_u dW_u\right]^2\right) = 4\int_0^T \mathbb{E}\left[\theta_u\right]^2 d_u.$$

Définition 1.5.2 ***(processus d'Itô)*** *On appelle d''Itô, un processus X à valeurs réelles tel que*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t b_s d_s + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Où X_0 est $\mathcal{F}_t$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \text{ et } \int_0^t \|\sigma_s\|^2\, ds < \infty.$$

Le coeficient b est le drift ou la dérivée, σ est le coeficient cient de diffusion.

1.5.1 Formule d'Itô

Premiére formule d'Itô : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)\sigma_s^2 ds,$$

ce que l'on note :

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f^{\prime\prime}(X_s)\sigma_s^2 ds, \\ &= f'(x_s)dx_s + \frac{1}{2}f^{\prime\prime}(x_s)d\left\langle x\right\rangle_s. \end{aligned}$$

Deuxiéme formule d'Itô : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de clace C^1par rapport à t, de clace C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)d\left\langle x\right\rangle_s ds,$$

ce que l'on note

$$df(t, X_t) = \left[f_t'(t, X_t) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t, X_t)\sigma_t^2\right]dt + f_x'(t, X_t)dX_t.$$

Proposition 1.5.1 *(**Formule d'intégration par parties**) Si X_1 et X_2 deux processus d'Itô, alors :*

$$d(X_1X_2) = X_1dX_2 + X_2dX_1 + d\left\langle X_1, X_2\right\rangle_t.$$

Théorème 1.5.1 ***(L'inégalité de maximale)*** *On a souvent besoin de majorations d'intégrales stochastiques. L'inégalité de Doob :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq T}\left[\int_0^s \theta_u dW_u\right]^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\left[\int_0^T \theta_u dW_u\right]^2\right) = 4\int_0^T \mathbb{E}\left[\theta_u\right]^2 du.$$

1.6 Définitions et Théorèmes

Lemme 1.6.1 ***(Lemme de Gronwall)***[4] *Soient φ,ψet g trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité :*

$$\forall t \in [a, b] : g(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)g(s)ds,$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b] : g(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_a^t \psi(u)d(u)\right) ds.$$

Théorème 1.6.1 (Théorème de Mazur) *Si x_n converge faiblement vers x alors il existe une suite de combinaisons convexes c_n telle que :*

$$c_n = \sum_{i\geq 0\geq} \alpha_{in} x^i, \quad ou\ \alpha \geq 0 \quad et \sum_{i\geq 0} \alpha_i = 1,$$

qui converge fortement vers x :$\|c_n - x\| \to 0$, comme $n \to \infty$.

Définition 1.6.1 (L'ensemble convexe)[1] *Un ensemble A est dit convexe lorsque pour tout x et y de A, le segment $[x; y]$ est inclu dans A, c'est -à-dire :*

$$\forall x, y \in A; \forall\lambda \in [0, 1]; \lambda x + (1-\lambda) y \in A.$$

Définition 1.6.2 (Fonction convexe)[1] *fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe* *si pour tous x et y dans E avec $f(x) < +\infty$; $f(y) < +\infty$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

De plus, la fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte lorsque $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.

Définition 1.6.3 (Espaces de Banach)[8]*Soit E un espace vectoriel norme. On dit que $(x_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon \geq 0 \; \exists n_\varepsilon \quad n, m \geq \varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Un espace de Banach est un espace vectoriel norme complet, c'est- a-dire si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Théorème 1.6.2 (Théorème de Fubini)[12]*Cette mesure s'appelle la mesure produit sur$(X_1 \times X_2, A_1 * A_2)$ et ce note $\mu = \mu_1 * \mu_2$*

-soit $f : X_1 \times X_2 \to [0,\infty]$ une fonction mesurable et intégrable,alors :

-la fonction $x \to \int_{x_2} f(x,y) d\mu_2(y)$ est mesurable et intégrable (sur(X_1, A_1));

-la fonction $y \to \int_{x_1} f(x,y) d\mu_1(x)$est mesurable et intégrable (sur(X_2, A_2));

-on a l'égalité

$$\begin{aligned} \int\int_{x_1 \times x_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{x_1} \left(\int_{x_2} f(x,y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x), \\ &= \int_{x_2} \left(\int_{x_1} f(x,y) \, d\mu_1(y) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

***Définition 1.6.4** **(De point fixe)** soit Ψ une application de E dans V. On dit que Ψ est une contractante s'il existe un réel $\alpha > 0$ strictement inférieur à 1 tel que :*

$$\forall u, \upsilon \in E, \|\Psi(u) - \Psi(\upsilon)\|_V \leq \alpha \|u - \upsilon\|_E,$$

et

$$\forall u, v \in E, u \neq v, \|A(u) - A(v)\|_V \leq \|u - v\|_E .$$

Définition 1.6.5 ***(l'inégalité de Young)***[12] *On dit que deux nombres $p, q > 1$sont conjugués au sens de Young, si :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

De manière équivalente :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longleftrightarrow p = \frac{q}{q-1} \Longleftrightarrow pq = p + q \Longleftrightarrow \frac{q}{p} = q - 1,$$

L'inégalité de Young dit que si p et q sont conjugués et si a, $b \geq 0$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Définition 1.6.6 *avec égalité si et seulement si :*

$$a^p = b^q.$$

Définition 1.6.7 ***(L'ensemble compacte)***[11]*Soit $(E; d)$un espace métrique. Un sous-ensemble $K \subseteq E$ est dit compact si pour tout recouvrement par des ouverts $(\Omega_\alpha)_{\alpha \geq 0}$(i :e$K \subset \cup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ et ouvert dans E) de K il existe un sous-recouvrement fini de K (i.e il existe $J \subseteq I$ fini tel que $K \subset \cup_{j \in J} \Omega_j$)*

Définition 1.6.8 ***(Fonction cotinue)***[9]*La notion de continuité d'une fonction en un point est une définition locale qui repose sur la notion de limite d'une fonction en un point.*

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

[13]

Le but de ce chapitre est de donner la forme générale des équations différentielles stochastiques rétrogrades(**EDSR**), et de résumer le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution de ces équations dont les coefficients lipschitziens sont universels. Donner ensuite la solution **EDSR** dans le cas linéaire.

2.1 Présentation du probléme

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré et ξ variable aléatoire mésurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. Telle que T désigne un temps terminal.
On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{-dY_t}{dt} = f(Y), \qquad t \in [0, T], \\ \qquad\qquad Y_T = \xi. \end{cases}$$

En imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur aprés t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le condidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation _disons dans L^2_adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}\left(\xi|\mathcal{F}_t\right)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

ou de façon equivalente

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dW_t, t \in [0,T], \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, t \in 0, T, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Notation 2.1.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*un espace de probabilité complet et* W *un mouvement brownien (MB) d–dimensionnel sur cet espace. On notera* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus*

- *On notera tout d'abord* $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ *l'espace vectoriel formé des processus* Y*, progressivement mesurables, à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$ *tels que :*

$$\|Y\|^2_{S^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $\mathcal{S}_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *le sous-espace formé par les processus continus.*

- *Et ensuite* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *celui formé par les processus* Z*, progressivement mesurables, à valeurs dans* $\mathbb{R}^{k\times d,}$ *tels que :*

$$\|Z\|_{M^2}^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\, dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = trace(zz^*\ ).M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis ; les espaces $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}_c^2$ et M^2sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2\ (\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, il nous a donné une application aléatoire f définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times\ \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

On veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR enabrégé) suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t,Y,Z)dt - Z_t dW_t, \qquad t \in [0,T]\,, \\ \qquad\qquad\qquad Y_T = \xi. \end{cases}$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(t, Y_t, Z_t\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{2.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'**EDSR** et ξ la condition terminale.

Définition 2.1.1 *Une solution de l'**EDSR**(2.1) est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$*vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$ *;*

2. $\mathbb{P}-p.s.\ \int_t^T (|f(s,Y_s,Z_s)| + \|Z_s\|^2)ds < \infty;$

3. *$\mathbb{P}-p.s$, on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(t, Y_t, Z_t\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T].$$

Remarque 2.1.1 *Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales del'équation (2.1) étant bien définies, Y est une semi-martingale continue ; ensuite, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus Y appartient à $\mathcal{S}^2$.

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, positif appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$ et une constante positive λ tels que :*

$$\forall\left(t, y, z\right) \in [0, T] \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{d\times K}, \left|f\left(t, y, z\right)\right| \leq f_t + \lambda\left(|y| + \|z\|\right).$$

*si $\{(Yt, Zt)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'**EDSR** (2.1) telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$.*

Preuve. *On a, pour tout $t \in [0, T]$:*

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f\left(s, y_s, z_s\right) ds - \int_0^t Z_s dW_s,$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur f,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T \left(f_s + \lambda\left\|Z_s\right\|\right) ds + \sup_{0\leq t\leq\leq T}\left|\int_0^T Z_s dW_s\right| + \lambda\int_0^t |Y_s|\, d_s,$$

Posons

$$C = |Y_0| + \int_0^T (f_s + \lambda \|Z_s\|)\, ds + \sup_{0 \leq t \leq \leq T} \left| \int_0^T Z_s dW_s \right|,$$

C est une variable aléatoire, puisque par hypothése, $Z \in M^2$. Alors, d'aprés l'inégalité de ***Doob****, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|^2 \right] \leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 ds \right],$$

ce qui signifie que le troisème terme de C est de carré intégrable. Il en est de même pour $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$ et Y_0 puisqu'il est déterministe donc de carré intégrable. Comme Y étant un processus continu et

$$|Y_t| \leq C + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds,$$

donc on peut appliquer de lemme de ***Gronwall,*** *on obtient :*

$$|Y_t| \leq C \exp(\lambda t),$$

et donc

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq C \exp(\lambda t).$$

ce qui montre que Y appartient à $\mathcal{S}^2$. ■

Finissons par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise.

Lemme 2.1.1 *Soient $Y \in \mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in M^2\left(\mathbb{R}^{k \times d}\right)$. Alors :*

$$\left(\int_0^t Y_s . Z_s dW_s, t \in [0, T] \right),$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. En appliquant l'inégalité **Burkhlder-Davis-Gundy**, il existe une constante positive C telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_sZ_sdW_s\right|\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2\|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$
$$\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_s|\left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et par suite en appliquant l'inégalité $ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_sZ_sdW_s\right|\right] \leq C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_s|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right]\right).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_sZ_sdW_s\right|\right] \leq \infty,$$

d'où le résultat. ■

2.2 Théorème d'existence et d'unicité des EDSR a coefficient Lipshtizien.

Nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé au chapitre suivant. Ce résultat est dû à E.PARDOUX et S.PENG ([14]) ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les **EDSR** dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Rappelons pour la dernière fois que f est définie sur $[0,T]\times\Omega \times \mathbb{R}^k\times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$ –mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k.}$.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

(H) Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s.$,

1. condition de Lipschtz en (y,z) :pour tout t,y,y',z,z',

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z')|\leq\lambda\left(|y-y'|+\|z-z'\|\right).$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int_0^T|f(s,0,0)|^2\,ds\right]<\infty.$$

2.2.1 Cas où f ne dépend ni de y ni de z

Soit f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξde carré intégrable et un processus$\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'**EDSR**

$$Y_t=\xi+\int_t^T F_s ds-\int_t^T Z_s dW_s,\qquad t\in[0,T] \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}\in M^2(\mathbb{R}^k)$.* ***L'EDSR*** *(2.2) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z\in M^2$.*

Preuve. *Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z\in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement.*

$$Y_t=\mathbb{E}\left[\xi+\int_t^T F_s ds|\mathcal{F}_t\right].$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que,d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable .$\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $\{F_t\}t\in[0,T]$; en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est de carré *intégrable. On a alors, pour tout* $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F_s ds | \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F_s ds \\ &= M_t - \int_0^t F_s ds. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.2 *M est une martingale brownienne ; D'aprés le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus $Z \in M^2$ tel que :*

$$\begin{aligned} Y_t &= M_t - \int_0^t F_s ds, \\ &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds. \end{aligned}$$

*On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'**EDSR** (2.2) étudiée puisque comme $Y_T = \xi$*

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds\right), \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$.

2.2.2 Cas où f dépend de y et z

Théorème 2.2.1 *(PARDOUX–PENG [14]) Sous l'hypothèse **(H)**, l'**EDSR** (2.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. on utilisier un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$

$$\Psi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$$

$$(Y, Z) \to \Psi((Y, Z)$$

telle que$(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'**EDSR** (2.1)si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad , t \in [0, T]$$

Remarquons que cette dernière **EDSR** possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.

En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s) \in M^2$ puisque, f étant Lipschitz

$$|F_s| \leq |f(s, 0, 0)| + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, il a pouve appliquer le Lemme (2.2.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$. (Y, Z) appartient à $\mathcal{B}^2$: l'intégralité de$Z$ est obtenue par construction et d'après la Proposition (2.1.1), Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$. L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même est donc bien définie.Soient (U, V) et (U', V') deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(Y, Z) = \Psi(U, V)$, $(Y', Z') = \Psi(U', V')$.Notons $y = Y - Y', z = Z - Z'$, on a $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\left(f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\right) dt + z_t dW_t$$

On applique la formule de Itô à $e^{\beta t} |y_t|^2$ pour obtenir

$$d\left(e^{\beta t} |y_t|^2\right) = \beta e^{\beta t} |y_t|^2 dt - 2e^{\beta t} y_t.\left(f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\right) dt + 2e^{\beta t} y_t.z_t dW_t + e^{\beta t} \|z_t\|^2 dt.$$

En passant intégrant entre t et T, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\beta t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta s} \|z_s\|^2 ds = \int_t^T & e^{\beta s} \left(-\beta |y_s|^2 + 2y_s \{f(t, U_s, V_s) - f(t, U'_s, V'_s)\}\right) ds \\ & + \int 2e^{\beta s} y_s.z_s dW_s \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, on note par $u = U - U'$ et par $v = V - V'$, on a

$$e^{\beta t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta s} \|z_s\|^2 ds \leq \int_t^T e^{\beta s} \left(-\beta |y_s|^2 + 2\lambda |y_s| |u_s| + 2\lambda |y_s| \|v_s\|\right) ds22 - \int_t^T 2e^{\beta s} y_s.z_s dW_s$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon a^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$e^{\beta t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta s} \|z_s\|^2 ds \leq \int_t^T e^{\beta s}(-\beta + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}) |y_s|^2 ds - \int_t^T 2e^{\beta s} y_s.z_s dW_s, + \varepsilon \int_t^T e^{\beta s}(|u_s|^2 + \|v_s\|^2) ds,$$

Prenant $\beta = \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\beta s}(|u_s|^2 + \|v_s\|^2) ds$, donc $\forall t \in [0, T]$

$$e^{\beta t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta s} \|z_s\|^2 ds \leq R_\varepsilon - 2 \int_t^T e^{\beta s} y_s.z_s dW_s, \tag{2.3}$$

■

Preuve. D'après le Lemme 2.1.1, la martingale locale $\left(\int_0^t e^{\beta s} y_s.z_s dW_s\right)_{t\in[0,T]}$ est une martingale nulle en 0 puisque Y ,$Y' \in \mathcal{S}^2$ et Z , $Z' \in M^2$.

En prenant l'espérance , on obtient pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s} \|z_s\|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon], \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), les inégalités **BDG** fournissent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t} |y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\beta s} |y_s|^2 \|z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right], \\ &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta s/2} |y_s| \left(\int_0^T e^{\beta s} \|z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|y_t\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|y_t\right|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right],$$

Prenant en considération l'inégalité(2.4), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\beta s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] \leq \left(3 + C^2\right)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|y_t\right|^2 + \int_0^T e^{\beta s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] \leq \varepsilon\left(3 + C^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|u_t\right|^2 + \int_0^T e^{\beta s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right],$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3 + C^2\right)(1\vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\left\|U, V\right\|_\beta = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta t}\left|U_t\right|^2 + \int_0^T e^{\beta s}\left\|V_s\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

qui en fait un espace de Banach – cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas$\beta = 0.\Psi$ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution del'**EDSR** (2.1) dans $\mathcal{B}^2$. ■

2.3 EDSR linéaires

Dans cette section nous étudions le cas particulier des **EDSR** linèaire pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

.On considère le cas. unidimensionnel $k = 1$ ce qui implique que Y est un réel et Z est une matrice de taille $1\times d$ (vecteur de dimension d).

Proposition 2.3.1 *:Soit $\{(A_t, B_t)\}_{t\in[0,T]}$un processus à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{C_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable* *aléatoire, $\mathcal{F}_T$ –mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*

L'**EDSR** linéaire :

$$dY_t = \xi + \int_t^T (A_t Y_t + B_t Z_t + C_t)\, dt - \int_t^T Z_t dW_t, \tag{2.5}$$

posssède une solution unique qui vérifie :

$$\forall t \in [0, T] \quad Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\xi \Gamma_T + \int_t^T C_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t \right),$$

avec pour tout $t \in [0, T]$,

$$\Gamma_t = \exp \left(\int_0^t B_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds + \int_0^t A_s ds \right).$$

Preuve. Γ est le processus adjoint (ou dual) donné par l'**EDSR** :

$$d\Gamma_t = \left(\Gamma_t A_t dt + B_t' dW_t \right), \qquad \Gamma_0 = 1,$$

D'autre part, comme B est borné, l'inégalité de **Doob** montre que Γ appartient à $\mathcal{S}^2$. De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) à l'**EDSR** linéaire ; il suffit de poser $f(t, y, z) = A_t y +\ B_t z + Ct$ et de vérifier que **(H)** est satisfaite. Y appartient à $\mathcal{S}^2$ par la Proposition (2.1.1).La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d \langle \Gamma, Y \rangle_t, \\ &= -\Gamma_t C_t dt + \Gamma_t (Z_s + Y_t B_t) dw_t, \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s C_s ds$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $C \in M^2$ et Γ, Y sont dans $\mathcal{S}^2$. Alors :

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t C_s \Gamma_s ds = \mathbb{E}\left[\Gamma_T Y_T + \int_0^T C_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t\right],$$

ce qui donn

$$\Gamma_t Y_t = \mathbb{E}\left[\Gamma_T Y_T + \int_t^T C_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t\right],$$

puisque$\int_0^t \Gamma_s C_s ds$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, on obtient

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left[\xi \Gamma_T + \int_t^T C_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t\right].$$

■

Remarque 2.3.1 *Notons que si $\xi \geq 0$ et si $C_t \geq 0$ alors la solution de **l'EDSR** linéaire vérifie $Y_t \geq 0$.*

Chapitre 3

Existence du contrôle optimal stochastique pour l'EDSR linéaires

[2]

3.1 Préliminaires

Soit $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien de dimension d définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, on supose que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien, soit ζ est variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable telle que :

$$\mathbb{E}[|\zeta|^2] < \infty.$$

Soient a, b et c sont bornés et processus progressivement mesurables par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ avec des valeurs dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ (respectivment).

On considére un probléme de contrôle optimal où le système est gouverné par par l'**EDSR** linéaires suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_s Y_s + b_s Z_s + c_s u_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{3.1}$$

Définition 3.1.1 *Un contrôle admissible $u = (u(t)_{0 \leq t \leq T})$ est un processus progressivement mesurable de carré intégrable , à valeurs dans un sous ensemble U dans $\mathbb{R}^k$.*

On note par U_{ad} l'ensemble de toute les contrôles admissibles pour tout $u \in U_{ad}$

Le problème de contrôle optimal est de minimiser la fonction coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles, qui définit par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[g(Y_0) + \int_0^T h(t, Y_t, Z_t, u_t) dt \right]. \tag{3.2}$$

Où $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \times U \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes données

On considére les hypothèses suivantes :

($\mathbf{A}_1$) :$U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et compact.

($\mathbf{A}_2$) :h et g sont continues et convexes.

On note par

$L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k) := (f(t, \omega)\ \mathcal{F}_t$_adapté telle que

$$\| f \|_T^2 = \mathbb{E}(\int_0^t f(t, \omega)^2 dt < \infty),$$

$U_{ad} := (u \in L^2_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d); u_t \in U \quad \forall t \in [0, T], \mathbb{P}.p.s. =$ avec $U \subseteq \mathbb{R}^K$.

On notons qu'il a une contrainte supllémentaire qu'un contrôle doit êntre carré intégrable juste pour assurer l'existence des solutions (3.1) par u.

Le problème de cotrôle optimal peut être enoncé comme suit :

Minimiser (3.2) à l'objectif de (3.1) sur U_{ad}. Sous les hypothèses **($\mathbf{A}_1$)** et **($\mathbf{A}_2$)**, le problème est appelé problème de contrôle optimal stochastique linéaire convexe, car le systéme contrôllé est linéaire et la fonction de coût convexe.

3.2 Existence d'un contrôle optimal strict

La résultat principal de cette section est donné par la théorie suivante

Théorème 3.2.1 *On suppose que* $(\boldsymbol{A}_1)$ *et* $(\boldsymbol{A}_2)$ *soient vérifiées. Alors il existe un processus* $\mathcal{F}_t-$*adapté* $(\overline{Y}_t, \overline{Z}_t, \overline{u}_t)$ *tel que :*

(i). $(\overline{Y}_t, \overline{Z}_t)$ est la solution unique à **EDSR**(3.1).

(ii). $\overline{u}$ minimisée J.

Pour prouver le théoréme(3.2.1), il a besoin d'un lemme

Lemme 3.2.1 *L'équation* (3.1) *a une solution unique que est donnée sur* $[0, T]$ *par*

$$Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_s u_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t\right), \tag{3.3}$$

avec

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds + \int_0^t a_s ds\right). \tag{3.4}$$

Preuve. (Voir la preuve de proposition 2.3.1 (chapitre 2) quand on pose $C_t = c_t u_t$). ■

Soit (Y^j, Z^j, u^j) une suite minimisante (i.e $\lim_{j\to\infty} J(u^j) = \inf_{u\in U^L[0,T]} J(u)$ quand $j \to \infty$). Puisque U est compact alors, il existe une constante positive avec k telle que

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|u_t^j\right|^2 dt < k \quad \forall j \geq 0.$$

Ainsi, il y a une sous -suite (quíon la note par u^j) telle que :

$$u^j \to \overline{u} \text{ faiblement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

D'aprés le théoréme de Mazur, il existe une suite de combinaisons convexes

$$\widetilde{u}^j = \sum_{i\geq 0}\alpha_{ij}u^{i+j} \text{ avec } \alpha_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{j\geq 0}\alpha_{ij} = 1$$

telle que :

$$\widetilde{u}^j \to \overline{u} \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right) \tag{3.5}$$

come l'ensemble U est convexe et compact, alors $\overline{u} \in U$

Théorème 3.2.2 *Soit* $(\widetilde{Y}^j, \widetilde{Z}^j, \widetilde{u}^j)$ *la solution unique de* ***EDSR*** *linéaire suivante*

$$\widetilde{Y}^j_t = \xi + \int_t^T (a_s \widetilde{Y}^j_s + b_s \widetilde{Z}^j_s + c_s \widetilde{u}^j_s) ds - \int_t^T \widetilde{Z}^j_s dW_s \tag{3.6}$$

et $(\overline{Y}, \overline{Z}\ , \overline{u})$ *la solution unique de* ***EDSR***

$$\overline{Y}_t = \xi + \int_t^T \left(a_s \overline{y}_s + b_s \overline{z}_s + c_s \overline{u}_s\right) ds - \int \overline{Z}_s dW_s \tag{3.7}$$

Alors

$$\widetilde{Y}^j_t \to \overline{Y}_t \textit{ fortement dans } C_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k), \tag{3.8}$$

et

$$\int_t^T \widetilde{Z}^j_s dW_s \to \int_t^T \overline{Z}_s dW_s \textit{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k). \tag{3.9}$$

Preuve. Preuve de (3.8), d'apres (3.4), on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\left(\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 2b_s^2 ds + \int_0^t 2a_s ds\right) dt\right],$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\left(\int_0^t 2b_s dW_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t 2b_s^2 ds + \int_0^t 2a_s ds\right) dt\right], \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\left(\int_0^t 2b_s dW_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds\right). \exp\left(\int_0^t b_s^2 ds + \int_0^t 2a_s ds\right) dt\right], \end{aligned}$$

Soient

$$M := \sup_{t,\omega} \ |a_t(\omega)| \qquad \text{et} \qquad K := \sup_{t,\omega} \mid b_t(\omega) \mid$$

Puisque $\exp\left(\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds\right)$est une martingale d'espérance egle à 1, il n'est pas difficile de voir que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp\left(\int_0^t 2b_s dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds\right).\exp\left(M_t + 2kt\right)dt\right],$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right] \leq \exp\left(MT + 2KT\right).\mathbb{E}[\left[\int_0^T \exp\left(\int_0^t 2b_s dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds\right)dt\right],$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right] \leq \exp\left(MT + 2KT\right). \tag{3.10}$$

Par contre, puisque c_t est borné alors, il existe une constante positive K' avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T |c_t| . \left|\widetilde{u}_t^j - \overline{u}_t\right| \Gamma_t dt\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T |c_t|^2 . \left|\widetilde{u}_t^j - \overline{u}_t\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\int_0^T |\Gamma_t|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq K'\left[\exp\left(MT + 2KT\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &= K'\left[\exp\left\{\tfrac{1}{2}MT + KT\right\}\right] < \infty.\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\int_0^T c_s\ \widetilde{u}_t^j\ .\Gamma_t dt \ \rightarrow\ \int_0^T c_s\ .\overline{u}_t^j\ .\Gamma_t dt \qquad \text{fortement dans} \qquad L_{\mathcal{F}}^2\left(0, T; \mathbb{R}^k\right),$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T c_t.\widetilde{u}_s^j.\Gamma_s ds|\mathcal{F}_t\right] \ \rightarrow\ \mathbb{E}\left[\int_t^T c_s.\overline{u}_t.\Gamma_s ds|\mathcal{F}_t\right] \qquad \text{fortement dans} \qquad L_{\mathcal{F}}^2\left(0, T; \mathbb{R}^k\right)$$

Puisque

$$\widetilde{Y}_t^j = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_s.\widetilde{u}_s^j.\Gamma_s ds|\mathcal{F}_t\right),$$

et

$$\overline{Y}_t^j = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_0^T c_s.\overline{u}_s^j.\Gamma_s ds|\mathcal{F}_t\right),$$

En déduit que

$$\widetilde{Y}_t^j \to \overline{Y}_t \qquad \text{fortement dans } C_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k).$$

Preuve de (3.9). D'apres la formule d'Itô, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{Y}_t^j - \overline{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left\|\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right\|^2 ds,\\
&= 2\int_t^T \left(\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s.a_s\left(\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right) + b_s\left(\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right) + c_s\left(\widetilde{u}_s^j - \overline{u}_s\right)\right) ds\\
&- 2\int_t^T < \widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s, \widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s > dW_s.
\end{aligned}$$

Depuis $\widetilde{Y}^j, \overline{Y}$ dans S^2 et $\widetilde{Z}^j, \overline{Z}$ dans M^2, alors $\int_t^T < \widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s, \widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s > dW_s$ est une martingale carrée intégrable nulle en 0. En passant aux espérances et prend $t = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq 2\mathbb{E}\Big[&\int_0^T |a_s| \left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|^2 ds + \int_0^T |b_s| \left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|.\left\|\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right\| ds\\
&+ \int_0^T |c_s| \left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|.\left|u_s^j - u_s\right| ds\Big].
\end{aligned}$$

Puisque a_t, b_t et c_t sont bornès ,alors on applique l'inégalité de **Young**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right\|^2 ds\right] &\leq 2M\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|^2 ds\right]\\
&+ k\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\frac{1}{\alpha^2}\left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|^2 + \alpha^2\left\|\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right\|^2\right) ds\right]\\
&+ \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|^2 ds + \int_0^T \left|\widetilde{u}_s^j - \overline{u}_s\right|^2 ds\right],
\end{aligned}$$

choisir $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, on aura :

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq \left(2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|^2 ds\right] + \gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{u}_s^j - \overline{u}_s\right| ds\right].$$

Puisque les suites $(\widetilde{Y}^j)$ et $(\widetilde{u}^j)$ sont convergentes, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\widetilde{Z}_s^j - \overline{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq 2\left(2M + 2k^2 + \gamma\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_s^j - \overline{Y}_s\right|^2 ds\right] + 2\gamma\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{u}_s^j - \overline{u}_s\right|^2 ds\right] \to 0$$

lorsque $j \to \infty$.Ainsi $(\widetilde{Z}^j)$ est une suite de Cauchy dans $M^2(\mathbb{R}^k)$, donc il existe un v progressivement mesurable $\overline{z}$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\widetilde{Z}_t^j - \overline{Z}_t\right\|^2 ds\right] \to 0 \text{ quand } j \to \infty,$$

D'aprés l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_t^T \left\|\widetilde{Z}_t^j - \overline{Z}_t\right\| dW_s\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|\widetilde{Z}_t^j - \overline{Z}_t\right\|^2 ds\right] \to 0 \text{ quand } j \to \infty,$$

ce que implique que

$$\int_t^T \widetilde{Z}_s^j dW_s \to \int_t^T \overline{Z}_s dW_s \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k).$$

Preuve du Théorème (3.2.1) Maintenant , on minimise $J(u)$ sur U_{ad} .On Suppose que $(\mathbf{A}_1)$ et $(\mathbf{A}_2)$ sont assurez.Soit la suite (Y^j, Z^j, u^j) telle que

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} J\left(u^j\right) &= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\left[g(Y_0^j) + \textstyle\int_0^T h\left(t, Y_t^j, z_t^j, u_t^j\right) dt\right] \\ &= \inf_{u\in U_{ad}} J\left(u\right),\end{aligned}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
J(\overline{u}) &= \mathbb{E}\left[g\left(\overline{Y}_0\right) + \int_0^T h\left(t, \overline{Y}_t; \overline{Y}_t, \overline{u}_t\right) dt\right], \\
&= \mathbb{E}\left[g\left(\lim_{j\to\infty} \widetilde{Y}_0^j\right) + \int_0^T h\left(t, \lim_{j\to\infty} \widetilde{Y}_t^j, \lim_{j\to\infty} \widetilde{Z}_t^j, \lim_{j\to\infty} \widetilde{u}_t^j\right) dt\right].
\end{aligned}
$$

Puisque g et h sont continues, on obient

$$
\begin{aligned}
J(\overline{u}) &= \lim_{j\to\infty} J\left(\widetilde{u}^j\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\widetilde{Y}_0^j\right) + \int_0^T h\left(t, \widetilde{Y}_t^j, \widetilde{Z}_t^j, \widetilde{u}_t^j\right) dt\right] \\
&= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\sum_{i\geq 0} \alpha_{ij}\ Y_0^{i+j}\right) + \int_0^T h\left(t, \sum_{I\geq 0} \alpha_{ij}\ Y_t^{i+j}, \sum_{i\geq 0} \alpha_{ij}\ Z_t^{i+j}, \sum_{i\geq 0} \alpha_{ij} u_t^{i+j}\right) dt\right].
\end{aligned}
$$

Puisque g et h sont convexes, alors :

$$
\begin{aligned}
J(\overline{u}) &\leq \lim_{j\to\infty} \sum_{i\geq 0} \alpha_{ij}\ \mathbb{E}\left[g\left(Y_0^{i+j}\right) + \int_0^T h\left(t, Y_t^{i+j}, Z_t^{i+j}, u_t^{i+j}\right) dt\right], \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{i\geq 0} \alpha_{ij}\ J\left(u^{i+j}\right), \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{ij}\ \max_{1\leq i\leq n_j}\ J\left(u^{i+j}\right), \\
&= \lim_{j\to\infty}\ \max_{1\leq i\leq n_j}\ J\left(u^{i+j}\right) \sum_{i\geq 1} \alpha_{ij}, \\
&= \lim_{j\to\infty}\ J\left(u^{j+\sigma(j)}\right), \\
&= \inf_{u\in U^L[0,T]} J\ (u).
\end{aligned}
$$

En conséquence,

$$
J(\overline{u}) \leq \inf_{u\in U_{ad}} J(u).
$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a démontrer l'existence de contrôle optimal strict pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires où l'ensemble des contrôles admissibles est convexe et compact.

La méthode de démonstration est basée sur le fait que l'ensemble des contrôles U est convexe et compact et la fonction de coût est convexe, ainsi que la convergence forte des suites (Y^j) et, $(\int_0^{\cdot} Z^j dW_s)$ et le théorème de Mazur prouve l'existence de contrôle optimal strict pour l'EDSRL

Bibliographie

[1] Analyse Convexe Cours M1 (4M057) 2017-2018,Période 2 Sorbonne Université

[2] Bahlali, K., Gherbal, B., & Mezerdi, B. (2010). Existence and optimality conditions in stochastic control of linear BSDEs. Random Operators and Stochastic Equations, 18(3), 185-197.

[3] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and applications, 44(2), 384-404

[4] Gourdon,Lemme de Gronwall, Analyse, page 371

[5] Huyên Pham,Optimisation et contrôle stochastique appliqu´es ‘a la finance

[6] Jean-Christophe Breton Processus stochastiques M2 Math ematiques Universit e de Rennes1 Septembre-Octobre 2019

[7] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master.7

[8] Julia Matos Analyse Fonctionnelle Ann ee 2014/2015

[9] Julia Matos Analyse Réelle 1 Ann ée 2014/2015

[10] Laurent Tournier (parcours fondamental),et Bastien Mallein (parcours appliqu e)Processus Stochastiques

a temps discret

[11] Mostafa MBEKHTA Cours d'Analyse Fonctionnelle 2016-2017

[12] Marc Troyanov Mesures et Intégration - EPFL - Octobre 2005 30 avril 2008

[13] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars

[14] Pardoux and S. Peng,(1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation,Systems Control Lett. 14 , no. 1, 55–61.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\left(\Omega, \mathcal{F}, , \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\, \mathbb{P}\right)$	Un espace de probabilité filtré.
L^2	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$\mathcal{C}^{n+1}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ensemble des fonctions } (n+1) \text{ fois dérivable et dont la dérivée} \\ \text{d'order } (n+1) \text{ éme est continue} \end{array} \right.$
$p.s$	Presque surement.
σ^*	Transposée de la matrice σ.
$càdlàg$	Continue à droite admet de limite à gauche.
$\mathbb{P} - p.s$	Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$dt \times d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0;T]$ avec la mesure $d\mathbb{P}$.
$trace\,(M)$	La trace de la matrice.M.
tq	Telle que.
$\mathbb{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'espace formé par les processus } Z \text{ progressivement mesurable} \\ \text{à valeur dans } \mathbb{R}. \end{array} \right.$
$\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'espace vectoriel formé par les processus } Y \text{ progressivement mesurable} \\ \text{à valeur dans} \mathbb{R}^k \text{ telleque } \|Y\|_{\mathbb{S}^2} = \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T} \|Y_t\|^2\right) < \infty\} \end{array} \right.$

$\mathbb{M}^2{}_{n\times d}(\mathbb{R}^{k\times d})$	$\begin{cases} \text{L'espace formé par lesprocessus } Z \text{ progressivemen tmesurable} \\ \text{à valeur dans } \mathbb{R}^{k\times d} \text{ telleque :} \\ \|Z\|_{\mathbb{M}^2} = \mathbb{E}\left(\int_0^T \|\|Z_t\|\|^2 dt\right) < \infty\}, où : \text{si } Z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \|Z\|^2_{\mathbb{M}^2} = trace(Z.Z^*). \end{cases}$
$\mathcal{S}^2_c$	Le sous-espace de $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ par les processus continu.
$\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$	Désigne l'ensemble des classes équivalente de $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.
$i.e$	C'est à dire.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est de démontrer l'existence des contrôles optimaux stricts pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires. On suppose, que l'ensemble des contrôles est convexe et compact. La démonstration est basée sur la convergence forte de l'EDSR linéaire et le théorème de Mazur.

Mots clé : processus stochastique, équations différentielles stochastiques rétrogrades, contrôle stochastique, existence et l'unicité, contrôle

Abstract

The main objective of this work is to demonstrate the existence of strict optimal controls for linear backward stochastic differential equations, where the set of controls is convex and compact. The proof is based on the strong convergence techniques for the linear BSDEs and Mazur's theorem.

Key words: stochastic process, backward stochastic differential equations, stochastic control, existence and uniqueness, optimal control.

الملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو إثبات وجود ضوابط صارمة أمثل للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية الخطية.
حيث تكون مجموعة الضوابط محدبة ومضغوطة. يعتمد البرهان على التقارب القوي بين المعادلات التراجعية الخطية ونظرية مازور. التفاضلية العشوائية

الكلمات المفتاحية: العملية العشوائية، المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية الخطية، التحكم العشوائي، الوجود و الوحدانية
التحكم الأمثل'